Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 7

14 listopada 2017 r.

Zajęcia 6 grudnia 2017 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L7.1. 1 punkt Sprawdź, że wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można zapisać w postaci

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k) p'_{n+1}(x_k)},$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

L7.2. 1 punkt Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

a)

x_k	-4	-2	0	2
y_k	1	0	1	-2

,

b)

x_k	0	2	-2	-3	-4
y_k	1	-2	0	20	1

.

L7.3. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$?

L7.4. 1 punkt Niech $L_n \in \Pi_n$ oznacza wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Sformułuj efektywny algorytm wyznaczania wartości

$$L_n(z_0), L_n(z_1), \ldots, L_n(z_M),$$

gdzie $z_0, z_1, \ldots, z_M \in \mathbb{R}$ są dane. Jaka jest jego złożoność?

L7.5. 1 punkt Niech $L_n \in \Pi_n$ oznacza wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \sin(2x)$ i wezłów będących równoodległymi punktami przedziału $[0, 1]$. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że dla każdego x z tego przedziału zachodzi

$$|f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8}\ ?$$

L7.6. 1 punkt Funkcję $f(x) = \ln(x/3 + 1)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[4, 5]$. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [4,5]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-10}\ ?$$

L7.7. 1 punkt Funkcję $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jak należy dobrać n, aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-10}\ ?$$

L7.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura `Interp_Newton(x,f)` znajdująca dla wektora `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora `f`$:= [f_0, f_1, \ldots, f_n]$ współczynniki b_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$,

$$L_n(x) := b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 31. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `Interp_Newton`, można **szybko** wyznaczyć współczynniki postaci Newtona wielomianu $L_{31} \in \Pi_{31}$ spełniającego warunki

$$L_{31}(z_i) = h_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 31;\ z_i \neq z_j \text{ dla } i \neq j)?$$

(–) Paweł Woźny