

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 6

7 listopada 2017 r.

Zajęcia 29 listopada 2017 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

- L6.1.** 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.
- L6.2.** 1 punkt Opracuj algorytm zamiany postaci Newtona wielomianu na jego postać potęgową. Określ złożoność opracowanej metody.
- L6.3.** 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x , gdzie c_0, c_1, \dots, c_n są danymi stałymi, a T_n oznacza n -ty wielomian Czebyszewa.

- L6.4.** 2 punkty Niech T_n ($n = 0, 1, \dots$) oznacza n -ty wielomian Czebyszewa.
- (a) Podaj postać potęgową wielomianu T_6 .
 - (b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1} ?
 - (c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n -ty ($n \geq 0$) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:
 - i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$ ($-1 \leq x \leq 1$; $n \geq 0$);
 - ii. wyznacz wszystkie punkty ekstremalne n -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;
 - iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} ($n \geq 0$) ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

- L6.5.** 1 punkt Udowodnij jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.
- L6.6.** 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -3 & -1 & 2 & 5 \\ y_k & -1 & 3 & 0 & -5 \end{array}.$$

L6.7. 1 punkt Niech będzie $f(x) = -2017x^5 + 966x^4 - 1410x^3 + 1939x + 1977$.

- (a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 6 interpolujący funkcję f w punktach $-2017, -1410, -966, 0, 966, 1410, 2017$.
- (b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

L6.8. 1 punkt Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

(-) *Paweł Woźny*