

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 9

28 listopada 2017 r.

Zajęcia 20 grudnia 2017 r.
Zaliczenie listy **od 7 pkt.**

L9.1. 1 punkt Sprawdź, że wielomiany Bernsteina

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \quad (n \in \mathbb{N}; 0 \leq i \leq n)$$

mają następujące własności. (Tu i w następnych zadaniach przyjmujemy umowę, że $B_q^p(u) \equiv 0$ dla $q < 0$ lub $q > p$).

- (a) B_i^n ma i -krotne zero w punkcie $u = 0$ ($1 \leq i \leq n$) oraz $(n-i)$ -krotne zero w punkcie $u = 1$ ($0 \leq i \leq n-1$);
- (b) B_i^n jest nieujemny w przedziale $[0, 1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum.

L9.2. 1 punkt Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n .

L9.3. 1 punkt Wykaż, że prawdziwe są równości

$$(a) \quad B_i^n(u) = (1-u)B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u) \quad (0 \leq i \leq n);$$

$$(b) \quad B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1}B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1}B_{i+1}^{n+1}(u) \quad (0 \leq i \leq n).$$

L9.4. 1 punkt Pokaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $t \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące równości:

$$(a) \quad \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1,$$

$$(b) \quad \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t.$$

L9.5. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm de Casteljau* wyznaczania punktu na krzywej Béziera. Jaka jest jego interpretacja geometryczna?

L9.6. 1 punkt Wykorzystaj schemat Hornera do opracowania algorytmu obliczania punktu na krzywej Béziera, który działa w czasie liniowym względem liczby jej punktów kontrolnych.

Wymierną krzywą Béziera R_n stopnia $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorem

$$(1) \quad R_n(t) := \frac{\sum_{i=0}^n w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

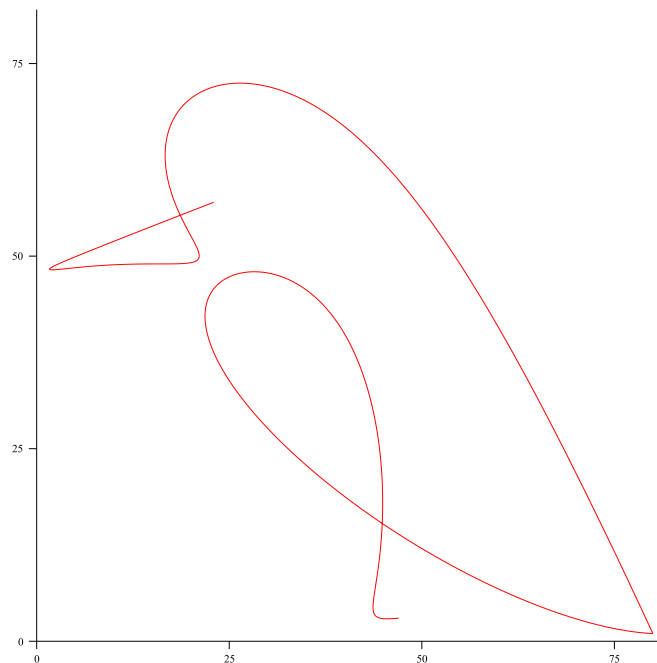
gdzie $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$ są danymi *punktami kontrolnymi*, a $w_0, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}_+$ odpowiadających im *wagami*.

L9.7. 1 punkt Wykaż, że dla każdego $t \in [0, 1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$ (patrz (1)).

L9.8. **Włącz komputer!** 1 punkt Używając komputera, narysuj wykres wymiernej krzywej Béziera dla punktów kontrolnych

$$(0, 0), (3.5, 36), (25, 25), (25, 1.5), (-5, 3), (-5, 33), \\ (15, 11), (-0.5, 35), (19.5, 15.5), (7, 0), (1.5, 10.5)$$

i odpowiadającego im układu wag $1, 6, 4, 2, 3, 4, 2, 1, 5, 4, 1$. Co ona przedstawia? Zmieniając wartości wag, postaraj się ustalić eksperymentalnie jakie mają one znaczenie dla kształtu wymiernej krzywej Béziera.



(-) Paweł Woźny