Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 11

12 grudnia 2017 r.

Zajęcia 10 stycznia 2018 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L11.1. 1 punkt Uzasadnij proces *ortogonalizacji Grama-Schmidta*.

L11.2. 1 punkt Niech $\{P_0, P_1 \ldots, P_N\}$ będzie układem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Udowodnij, że dla $0 \le n \le N$ wielomiany $P_0, P_1, \ldots, P_n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

L11.3. 1 punkt Niech P_k $(1 \le k \le N)$ będzie k-tym wielomianem ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Pokaż, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_{k-1}$ jest $(w, P_k)_N = 0$

L11.4. 2 punkty Udowodnij, że wielomiany Czebyszewa $T_0, T_1, \ldots, T_r$ $(r \in \mathbb{N})$ są ortogonalne względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g) := \sum_{k=0}^{r} p(u_k) f(u_k) g(u_k),$$

gdzie $u_k := \cos\frac{k\pi}{r}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$ oraz

$$p(u_k) := \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r), \\ 1 & (1 < k < r). \end{cases}$$

L11.5. 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f, g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_N$ są parami różnymi punktami. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$?

L11.6. 1 punkt Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x - c_1, \\ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

gdzie c_k, d_k są danymi stałymi. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$

$$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = m, m-1, \ldots, 0),$$

$$\texttt{wynik} := B_0,$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_k P_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $P_m(x)$?

L11.7. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Dwoma poznanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_j := -6 + 3j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$.

L11.8. $\boxed{\textsf{1 punkt}}$ Funkcja h przyjmuje w punktach $x_j := -6 + 3j$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ odpowiednio wartości $-4, 1, 0, 1, -4$. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania, wyznacz takie stałe a, b, c, aby wyrażenie

$$\sum_{j=0}^{4} [a x_j^2 + b x_j + c - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość.

(–) Paweł Woźny