Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

21 listopada 2017 r.

Zajęcia 13 grudnia 2017 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L8.1. 1 punkt Znajdź naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia dla danych

a)

x_k	-2	0	2
y_k	0	1	-3

,

b)

x_k	-2	-1	1	2
y_k	-16	2	-6	4

.

L8.2. 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 10x^3 + 60x^2 + 96x + 39 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ -22x^3 - 36x^2 + 7 & \text{dla} \quad -1 \le x \le 0, \\ 22x^3 - 36x^2 + 7 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -10x^3 + 60x^2 - 96x + 39 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.3. 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ 3x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia?

L8.4. 2 punkty Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. 2 punkty Niech będzie $\mathtt{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$, $\mathtt{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym

$(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich miejsc w przedziale $[x_0, x_{100}]$, w których funkcja f ma ekstrema lokalne.

L8.6. **Włącz komputer!** | 2 punkty | Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 27),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{27}$ $(k = 0, 1, \ldots, 27)$, natomiast

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1, \ldots, x_{27}] := [&15.5, 12.5, 8, 10, 7, 4, 8, 10, 9.5, 14, 18, 17, 22, 25, 19,\\
&24.5, 23, 17, 16, 12.5, 16.5, 21, 17, 11, 5.5, 7.5, 10, 12],\\
[y_0, y_1, \ldots, y_{27}] := [&32.5, 28.5, 29, 33, 33, 37, 39.5, 38.5, 42, 43.5, 42, 40, 41.5, 37, 35,\\
&33.5, 29.5, 30.5, 32, 19.5, 24.5, 22, 15, 10.5, 2.5, 8, 14.5, 20].
\end{aligned}$$

Opracuj **własną implementację** wyznaczania interpolacyjnej naturalnej funkcji sklejanej trzeciego stopnia. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

(–) Paweł Woźny