Ответы на теоретические вопросы к экзамену по математике. Семестр 1, 2019

по конспектам лекций Рачковского Н.Н.
студентов группы 950501

2 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Элементы теортии Множеств

1.1 Множества и операции над ними

Множество - совокупность некоторых объектов, обладающих определёнными свойствами. Каждый из объектов называется элементом обозначение множества: $\{a|P(a)\}$ где P(a) - свойство, объединяющее объекты a.

Специльные символы, обозначающие операции над множествами:

1. содержится: A $\subseteq$ B. Каждый элемент множества A содержится в B.
2. совпадает: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$
3. объединение: $A \cup B = \{c|c \in A$ **или** $c \in B\}$
4. пересечение: $A \cap B = \{c|c \in A$ **и** $c \in B\}$
5. теоритическо-множественная разность: $A \setminus B = \{c|c \in A$ **и** $c \notin B\}$
6. декартово произведение: $A \times B = \{(a, b)|a \in A; b \in B\}$ [1]

Операции с $\emptyset$:

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \setminus \emptyset = A$
4. $\emptyset \setminus A = \emptyset$

[1] каждый элемент в паре с каждым другим, как при раскрытии скобок

1.2 Замкнутость множеств

Рассматривая операции умножения и и деления над $\mathbb{N}$ мы *остаёмся* в $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ замкнуто относительно операции умножения.Для того, чтобы $\mathbb{N}$ стало замкнуто относительно операции вычитания нужно добавить к нему отрицательные числа и ноль тем самым привратив его в $\mathbb{Z}$. Таким образом $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно $\times, \pm$ но не $\div$. Для того, чтобы замкнуть $\mathbb{Z}$ относительно $\div$, нужно дополнить его дробями вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Т. О. получили $\mathbb{Q}$ Получили: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ где $\mathbb{R}$ - действительные числа.

1.3 Ограниченность множеств

А ограничено сверху, если $\exists M, \forall a \in A : a \leq M$ и А ограничено снизу, если $\exists M, \forall a \in A : a \geq M$

> Таким образом, если множество ограничено **и** сверху **и** снизу, оно называется *ограниченным.* $\Rightarrow \exists M, \forall a \in A : |a| \leq M$ (1)

$$\exists M_1, M_2, \forall a \in A : M_1 \leq a \leq M_2$$
$$M = max(|M_1|, |M_2|)$$
$$M \geq |M_1| \geq M_2$$
$$M \geq |M_1| \Rightarrow -M \leq -|M_1| \leq M_1 \Rightarrow$$
$$\forall a \in A : -M \leq -M_1 \leq a \leq M_2 \leq M \rightarrow -M \leq a \leq M$$

Следовательно из ограниченности А получается (1).

1.4 Окрестности

Рассмотрим $a \in \mathbb{R}$. Окрестностью а является отрезок (b; c), содержущюю а. Рассмотрим $\epsilon > 0$. ϵ-окрестностью а является отрезок $(a - \epsilon; a + \epsilon)$, содержущюю а.
$\mathcal{U}_\epsilon(a)$ есть отрезок длиной 2ϵ, центром которого является а:
$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \epsilon\}$
Оно бывает и проколото: т.е. из отрезка удалена точка а: $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(a) = \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Глава 2

Функции

обведи пж важные уравнения в коробку boxedeq{eq:*}{...}

Пусть даны 2 непустых множества A и B. Отображением из A и B называется правило, согласно которому каждому элементу множества A соответствует не более одного элемента B. Это обозначается $f : A \to B$ Областью определения f называется множество $D(f) = \{a \in A | \exists b = f(a)\}$[1] Множеством значений f называется множество $E(f) = \{b \in B | \exists a \in A; b = f(a)\}$[2] Запись b = f(a) обозначает, что $a \in A$ в отображениии f соответствует $b \in B$ тут b - образ, а a - прообраз.
Свойства биективного[2] отображения $f : A \to B$:

1. $D(f) = A$
2. $E(f) = B$
3. $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
4. обратное отоража: $f^{-1} : B \to A; a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$

График отображения $fA \to B = \{(a, b) | b = f(a)\} \subset A \times B$ Если A и B - числовые, то это функция тогда график функции есть подмножество в декартовом квадрате[3]. Рассмотрим полскость с прямоугольной системой координат: элементам множества $\mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие точки этой полскости, координаты которой в этой С.К. являются эти элементы $\mathbb{R}^2$. Тогда график функции можно предстваить как множество точек, причем ясно, что не каждое множество точек задает график функции. Множество точек задает график функции тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая параллельная оси ординат пересекает множество данных не более одного раза. Функция может задаваться *аналитически, графичекси и неявно.* Неявный способ: Рассмотрим $F : \mathbb{R}^2 \to R$ и Рассмотрим

[1] f - заданное нами правило
[2] взаимооднозначного
[3] $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$F(x;y) = 0$. На Координатной плоскости рассмотрим множество решений этого уравнения: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | F(x;y) = 0\}$: если оказывается, что это множество является графиком функции, функция задана нефвно унавнением F(x;y) = 0.

2.1 Типовые функции, график функции

Линейная функция:
Функция вида $y = kx + b; k, b \in \mathbb{R}$ имеет графиком невертикальную прямую при b = 0 график функции проходит через (0; 0). К - угловой коеффициент равный тангенсу кгла наклона графика к Ох. Взаимное расположение двух прямых, заданных функциями $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$:

1. совпаление прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2; b_1 = b_2$
2. параллельность прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ **и** $b_1 \neq b_2$
3. пересечение прямых $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

доказательство свойства 2:

$\Rightarrow$) Пусть прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ параллельны.
Следовательно у них не общих точек:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

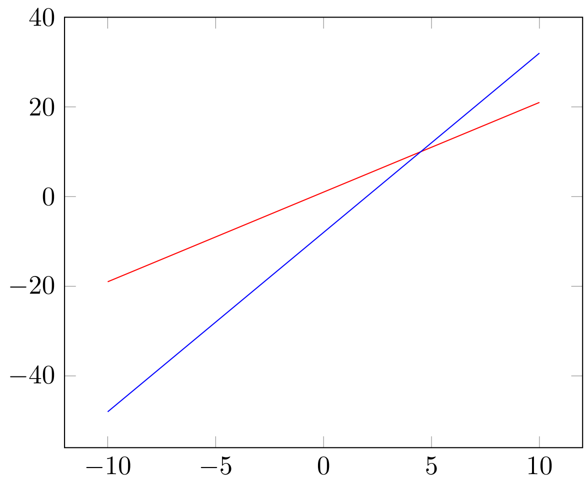
$$\Rightarrow x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1 \text{ не имеет решений}$$

$$\text{Следовательно } x = \tfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Предположим, что $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ и проведем все эти действия в обратном порядке.

2.1.1 Формула получения угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



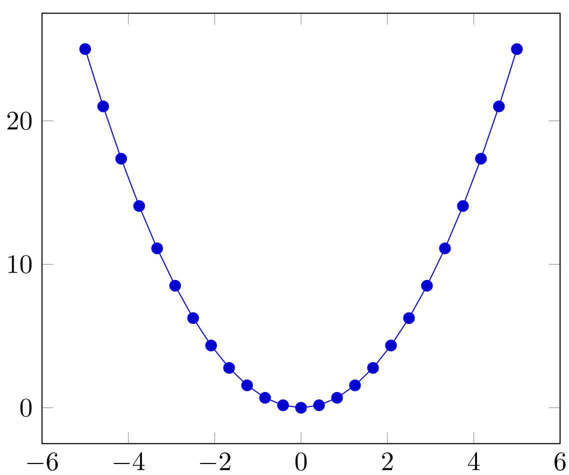
обозначим угол между красной и синей линиями за θ, наклон линий соответственно ϕ_1 и ϕ_2 $\theta = \phi_1 - \phi_2$
$k_1 = \tan\phi_1$
$k_2 = \tan\phi_2$
$\theta = \tan\phi_1 - \tan\phi_2 \Rightarrow$

$$\boxed{\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}} \tag{2.1}$$

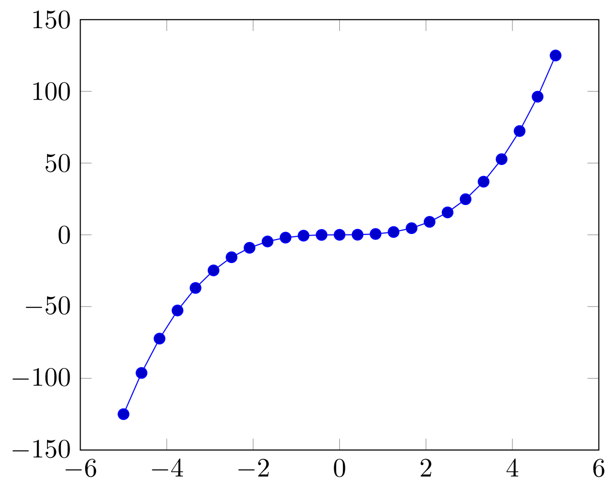
Таким образом 2 прямые взаимоперпендикулярны тогда и только тогда когда $k_1 = \frac{-1}{k_2}$

2.1.2 Основные элементарные функции

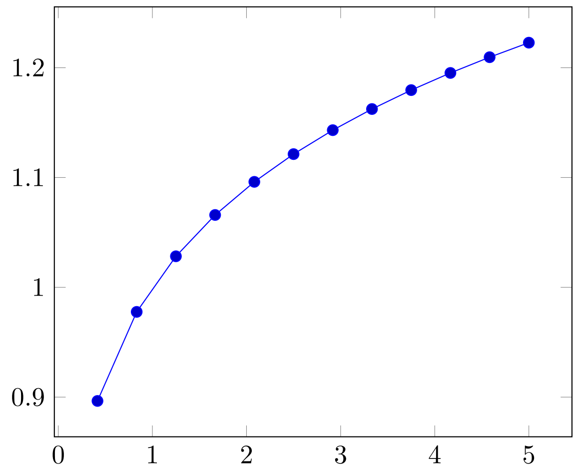
Степенная функция



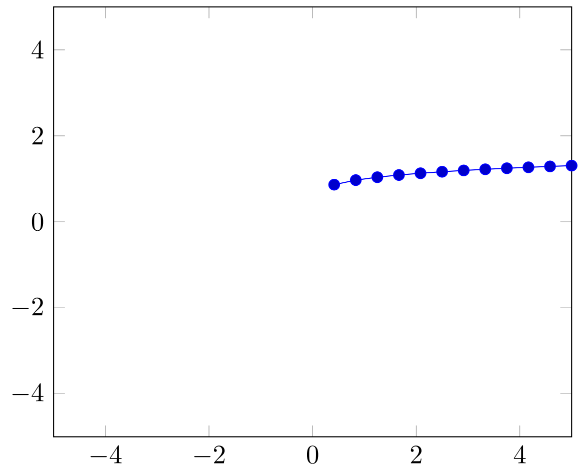
n = 2n



n = 2n+1



$x^{\frac{1}{n}}$ где н - четное



$x^{\frac{1}{n}}$ где н - нечетное

ДОДЕЛАЙС

Глава 3

Окружность, Эллипс, Гипербола, Парабола

Пусть Существует прямоугольная система координат Oxy; Пусть даны две точки $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$; Тогда расстояние между A и B вычисляется так:

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{3.1}$$

3.1 Фигуры и канонические уравнения фигур

Говорят, что уравнение на плоскости задет некоторую фигуру, если принадлежность M(x; y) этой фигуре равносильно выполнению равенства f(x; y) = 0 для каждой точки этой фигуры.

3.1.1 Окружность

Окружностью называется множество всех точек в плоскости, удаленных от данной фиксированной точки, называемой центром окружности на одно и то же расстояние, называемое радиусом окружности.

дана точа M(x; y) и окружность с центром O(x_0, r_0). M $\in \omega(O, r) \Leftrightarrow |MO| = R \Leftrightarrow |MO|^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{3.2}$$

Равенство 3.2 есть уравнение окружности т.к. оно равносильно принадлежности точки M к окружности.

3.1.2 Эллипс

Пусть на плоскости заданы 2 точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно 2c; и пусть дано некоторое число $a > c$. **Эллипсом называется**

множество всех точек ранной плоскости, длял которых сумма расстояний от этой точки до точек F_1 и $F_2 = 2a$. Точки F называются фокусами эллипса. Вывод:

Зададим на плоскости ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c;0), F_2(c;0)$

Возьмем произвольную точку $M(x;y) \Rightarrow (MF_1 + F_1F_2) = 2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$\therefore a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\ldots$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2$$

$\therefore b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, делим на a^2b^2

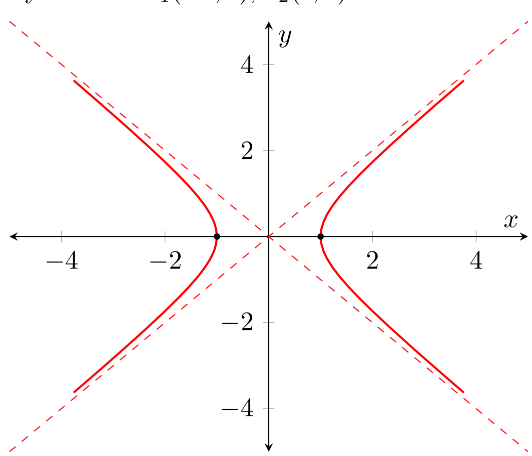
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{3.3}$$

[1]

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. Эллипс ограничен прямоугольником 2a на 2b. В случае совпадения a и b получим $\omega(0,a)$. **эксцентриситет эллипса:** $\varepsilon = \frac{c}{a}$. $\varepsilon \in [0;1] \therefore \varepsilon = 0$ для окружности.

3.1.3 Гипербола

На плоскости заданы несовпадающие точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно 2c. Пусть $a \in (0;c)$. **Гиперболой называется множество точек, для которых разность расстояний от точки до F_1 и F_2.** F_1 и F_2 это фокусы гиперболы. На плоскости задана ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c;0), F_2(c;0)$



[1] неуверен в записи, особенно в $(MF_1 + F_1F_2) = 2a$

wywod urawnenija giperboly zdesja.

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1} \tag{3.4}$$

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. $y = \pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы. a и b - полуоси гиперболыб точки пересеччения с Ox - вершины. **эксцентриситет гиперболы:** $\varepsilon = \frac{c}{a}$. $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

3.1.4 Парабола

На плоскости задана прямая Δ и $F \notin \Delta$. **Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от Δ и F.** При этом Δ - директрисса параболы, F - фокус Параболы. Введем ПСК: Ox проходит через F и $\perp \Delta \Rightarrow F(\frac{p}{2}; 0)$ где p - расстояние от F до Δ.

Уравнение параболы
wywod urawnenija tuta

$$\boxed{y = \pm 2px} \tag{3.5}$$

y в уравнении в чтной степени $\Rightarrow$ парабола симметрична относительно Ox при $x \geq 0$ получается, что парабола расположена в правой полуплоскости.

Глава 4

DPMW

Глава 5

Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.

Числовая последовательность называется отображением в котором каждому $\mathbb{N}$ числу соответствует некоторое число. Последовательности принято изображать $\{x_n\} = x_1; x_2; \dots x_n$ Если из $\{x_n\}$ взято некое бесконечное подмножество, из которого сформирована другая последовательность, в которой **порядок следования членов такой же как и в исходной последовательности, то она называется подпоследовательностью.** Обозначение $\{x_{nm}\}$. Из определения последовательности: если $k_1 < k_2 \Rightarrow m_1 < m_2$.
Число а называется пределом последовательности
$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ в сколь угодно малой $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ может находиться **конечное число членов этой последовательности**.

Предел числовой последовательности есть точчка, в которой *кучкуются* почти все члены последовательности за исключением, может последнего члена.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*; в противном случае - *расходящейся.* Расходящиеся последовстельности также включают бесконечно большие последовательности.

бесконечно большие последовательности:

$$lim_{n\to\infty} k_n = \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$$

бесконечно малые последовательности:

$$lim_{n\to\infty}k_n = -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall M < 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| < M$$

5.1 Свойства сходящихся последовательностей

DOKAZAT' SWOJSTWA

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Действительно, если предположжть, что пределов 2, можноуказать несколько $\mathcal{U}_\epsilon$ этих пределов, не пересекающте друг друга. По определению предела внутри каждой из этих $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ должно содержаться бесконечно много членов последовательности, что есть противоречие.

2. Если Последовательность сходится к a, то любая подпоследовательность этоц последовательности сходиться к a.

3. Любая мходящаяся последовательность ограничена:

   Пусть $\epsilon = 1 : \exists \in \mathbb{N}, n \geq N : |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow$
   $|x_n| - |a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$
   Пусть члены $x_1 \dots x_{N-1}$, не попавшие в рассматриваемую окрестность точки a. и Пусть $M = max(|x_1| \dots |x_{N-1}|, |a+1|)$
   $\forall n, |x_n| \leq M$

4. Если для 2х членов последоватеьностей x_n и y_n, сходящихся к числам a и b соответственно, начиная с некоторого номера $x_n < y_n, a \leq b$:

   $$\text{Пусть } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$
   $$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$
   $$a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, A_n \geq N : x_n < y_n$$
   $$\text{Примем } \epsilon = \frac{b-a}{2}$$
   $$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{2},$$
   $$\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \frac{b-a}{2}$$
   $$\therefore \text{ при } N = max(N_1, N_2)$$
   $$\forall n \geq N : \begin{cases} \begin{cases} x_n > a - \frac{b-a}{2} \\ x_n > a + \frac{b-a}{2} \end{cases} \\ b - \frac{b-a}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

5. Если для 3х последовательностей x_n, y_n, z_n выполняется $x_n \leq y_n \leq z_n$ $lim_{x_n\to\infty}x_n = a$ $lim_{x_n\to\infty}z_n = a$, то y_n также сходится к a

6. Если $lim_{x_n\to\infty}x_n = a \neq 0$, то начиная с некоторого номера $|x_m| > \frac{a}{2}$ все члены этой последовательности имеют тот же знак, что и a.

7.

Тероэма 5.1. *Пусть x_n и y_n сходятся к a и b, тогда*

(a) $\{x_n \pm y_n\} = k \ \lim_{n\to\infty} k_n = a \pm b$

(b) $\forall c \{c \cdot x_n\} \ \lim_{n\to\infty} = c \cdot a$

(c) $lim_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$

(d) $lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{x_n}\}= \frac{1}{a}$, *если* $a \neq 0$

(e) $lim_{n\to\infty}\{\frac{y_n}{x_n}\} = \frac{b}{a}$, *если* $a \neq 0$

Глава 6

DPMW

Глава 7

Монотонные последовательности, теорема Вейкерштрасса

ебаьт где это в конспекте?

Глава 8

DPMW

Глава 9

Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.

КАК-ТО МАЛО НАПИСАНО

Предел функции на бесконечности определяется так:

9.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности

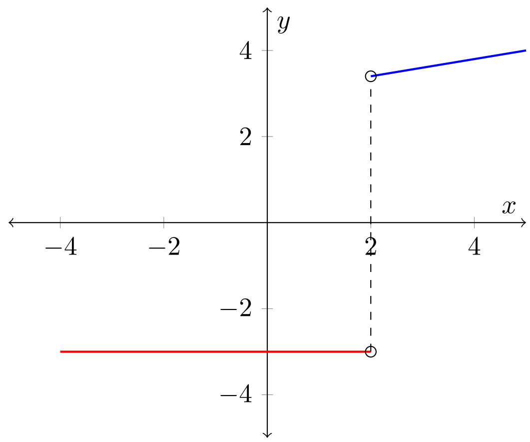
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
  $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, |x| > \delta; |f(x) - A| < \epsilon$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
  $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \dot{\mathcal{U}}_{\delta(x_0)}, |f(x)| > \epsilon$

9.2 Односторонние пределы

$y = f(x)$ определена на $(x - \delta; x)$.
$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$: Односторонним пределом слева функции $y = f(x)$ называется $A : \forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$, если A существует.
Анологично определяется предел справа: $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 + \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0+0} f(x)} \tag{9.1}$$

предел слева(точка на красном) и справа(точка на синем)



в данном случае предела у функции нет

Глава 10

DPMW

Глава 11

Непрерывность функций в точке, их свойства.

$y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в этой точке, а также в $\mathcal{U}_{(x)}$ и при этом $\lim_{x \to x_0} f(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0| < \epsilon$
$\Delta_x = x - x_0$ - приращение аргумента
$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ - есть приращение функции в x_0
$y = f(x)$ непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0} \tag{11.1}$$

Непрерывность функции в точке означает то, что в любой, сколь угодно маленькой окрестности, бесконечно малое приращение аргумента влечёт за собой бесконечно маое приращение функции.

Свойства непрерывной функции в точке

1. Если функция непрерывна в точке x_0, тов некоторой окрестности этой точки эта функция ограничена.

2. Если функция непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности x_0 функция имеет тот же знак, что и $f(x_0)$

3. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) < g(x_0)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)}$ где $f(x) < g(x)$

4. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0, то так же непрерывны $y = f(x_0) \pm y = g(x_0)$, $y = f(x_0) \cdot y = g(x_0)$, $y = f(x_0) y \div g(x_0)$

5. Непрерывность композиции функций: Если $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0, $z = f(x_0)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.
$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$
$\forall\sigma > 0, \exists\tau > 0, \forall y \in \mathcal{U}_{\tau(y_0)} : |f(y) - f(y_0)| < \sigma$
$\forall\sigma > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \sigma$
что и означает непрерывность $y = f(g(x))$ в точке x_0 $\square$

11.1 Односторонняя непрерывность

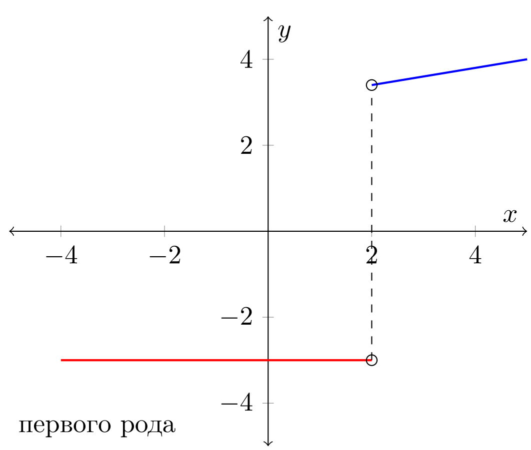
$y = f(x)$ определена на $(x_0 - \delta; x_0]$ такая функция называется непрерывной слева, если $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ аналогично функция называется непрерывной справа, если $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$. Так как функция непрерывна, она непрерывна слева и справа.
Функция называется разрывна в точке x_0, если она либо не определена в этой точке, либо определена, но не непрерывна.
Классификация точек разрыва:

1. Если существуют и конечны оба односторонних пределаи эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.

2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва. $lim_{x\to x_0+0}f(x) = lim_{x\to x_0-0}f(x) \neq f(x_0)$

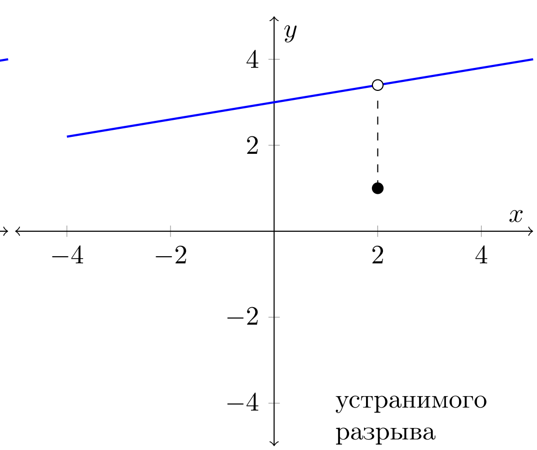
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода

Точки разрыва



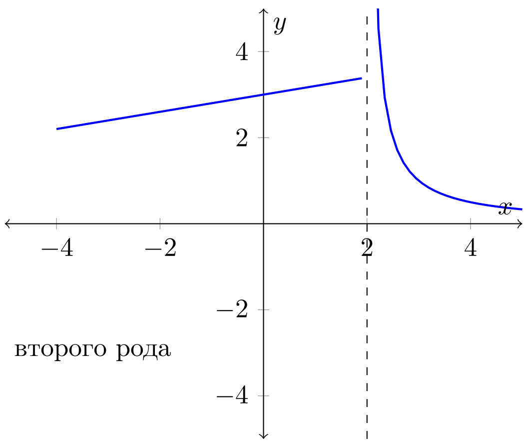
первого рода

Точки разрыва



устранимого разрыва

Точки разрыва



второго рода

11.2 непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$

- постоянные функции
- $y = x$
- $y = a_n x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$
- дробно-рациональные функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P(x), Q(x) - многочлены степени x
- функции $\sin, \cos, \tan, \cot$

Глава 12

DPMW

Глава 13

Сравение функций, эквивалентные функции

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в $\mathcal{U}_{x_0}$. Говорят, что $f(x)$ сравнима с $g(x)$, если

$$\boxed{\exists\epsilon, \exists\mathcal{U}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|} \tag{13.1}$$

В этом случае пишут, что $f(x) = O(g(x))$.
Очевидно, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} \leq \epsilon$ а это означает, что $\frac{f(x)}{f(x)}$ ограничена в $\mathcal{U}_{x_0}$.

Говорят, что $y = f(x)$ бесконечно мала по сравнению $y = g(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| <$ $HILFE\_\_MIR!\_\_ICH\_\_HABE\_\_DAS\_\_KONSPEKT\_\_NICHT!$ тогда пишут, что $f(x) = o(f(x))$ при $x \to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |\frac{f(x)}{f(x)}| = 0 \Leftrightarrow f(x0 = f(x) \cdot \alpha(x))$ где $\alpha(x)$ - БМФ при $x \to x_0$.

13.1 Эквивалентность

Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ квивалентны при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ или конечному числу A, тогда пишется $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$, тут $y = g(x)$ - главная часть $y = f(x)$

Тероэма 13.1. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $\forall x$:*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot h(x) = lim_{x\to x_0} g(x) \cdot h(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

Таблица эквивалентных при $x \to x_0$:

sin(x)	x
tg(x)	x
arcsin(x)	x
arctg(x)	x
$1 - cos(x)$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln a$	x
$a^x - 1$	$x \cdot \ln a$
$\log_a 1 + x$	$\frac{x}{\ln a}$
$e^x - 1$	x
$(1 + x)^\beta - 1$	βx
$x^\beta - 1$	$\beta(x - 1)$

Глава 14

DPMW

Глава 15

Непрерывность функции на отрезке

Пусть $y = f(x), [a;b] \subset \mathcal{D}(y)$. $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$ и непрерывна справа в точке a и слува в точке b.

Тероэма 15.1. *Кантора о вложенных отрезках.*
Имеется $[a;b]$ *и совокупность вложенных отрезков* $[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \dots \supset [a_n;b_n] \supset \dots$ *и при этом* $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$[1], *тогда*

$$\boxed{\exists a \in [a;b] : \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n} \tag{15.1}$$

Используя теорему Кантора Докажем теорему Больцана-Вейерштрасса

Доказательство. $\forall \{x_n\} \subset [a;b]$ можно выделить мходящуюся подпоследовательность:
Разобьём $[a;b]$ точкой C пополам и рассмотрим $[a_1;b_1]$, половину первоначального отрезка.
Эта половна содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$. Пусть $x_{n_1} \in [a_1;b_1]$.
Точкой C_2 Разобьём отрезок $[a_1;b_1]$ пополам и мрассмотрим $[a_2;b_2]$, она содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$
и в этом отрезке обозначим x_{n_k}, чтобы $n_2 > n_1$ и так далее. Получим

$$\{x_{n_k}\} \in [a_k;b_k], \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$a_k \le x_{n_k} \le, b_k - a_k = \tfrac{b_k - a_k}{2^k}$$
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{b_k-a_k}{2^k} = 0$$

По теореме Кантора имеем: $\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_k = a$
В неравенстве $a_k \le x \le b_k$ перейдём к пределам.

[1] вложены друг в друга и уменьшаются

По теореме о 2х милиционерах:
$a_0 \leq \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \leq a_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a_0 \in [a;b]$

□

Тероэма 15.2. *Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*
$\exists c > 0, \forall x \in [a;b] : |f(x)| \leq c$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Предположим, что она неограничена на этом отрезке.
Отсюда $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a;b] : |f(x)| \geq n$
Отсюда по Больцана-Вейерштрасса в $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ с пределом $x_0 \in [a;b]$
Отсюда $\forall k, |f(x_{x_k})| > n_k, \lim_{k\to\infty} |f(x_{x_k})| \geq \infty$
Поскольку $\{x_n\} \to x_0$, в x_0 функция не является непрерывной, а терпит разрыв второго рода, что протеворечит нашему утверждению. □

Тероэма 15.3. *Вейерштрасса.*
Непрерывная на $[a;b]$ функция достинает на нём своего максимального и минимального значений.

Глава 16

DPMW

Глава 17

Производная функции, односторонние производные

Пусть $y = f(x), x_0 \in \mathcal{D}(f(x))$. Рассмотрим график функции. и прямые $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ Среди всех таких прямвх рассмотрим ту, которая наиболее тесно прижимается к графику функции $f(x)$. Такая прямая называется касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$. Эту прямую можно найти так: На графике функции рассмотрим кроме $(x_0; f(x_0))$ рассмотрим $(x_1; f(x_1))$ и прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая - секущая, приближённая[1]

Уравнение секущей с угловым коэффициентом. Так как секущая должна роходить через $(x_0; f(x_0))$ должно выпоняться равенство $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow (x_1; f(x_1)) \to (x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow x_1 - x_0 \Rightarrow k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ Если этот преел конечен и существует, то он есть производная функции $y = f(x)$ в x_0 и обозначается $f'(x_0)$
$x_1 - x_0 = \Delta x, f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$
$f'(x_0) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ иногда обозначается $\frac{df(x_0)}{dx}$

Может оказаться, что $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ бесконечен, в этом случае касательая к графику в точке вертикальна

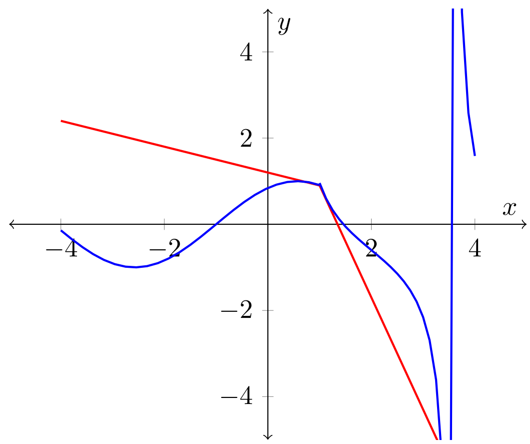
Как известно, существование конечного предела равносильно существованию и равенству между собой односторонних пределов $lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и $lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ Эти односторонние пределы, если они конечны и существуют, называются односторонними производными и обозначаются $f'(x_{0-0})$ и $f'(x_{0+0})$ Их существование означает существование касательной к фрагменту графика функции левее и правее $(x_0; f(x_0))$. Справедливо и обратное.

Возможны случаи, когда односторонние пределы существуют, но не равны друг другу это значит, что в точке $(x_0; f(x_0))$ терпит излом и не является гладким.

---

[1] Размытое определение

Излом графика функции



Тероэма 17.1. *Если $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть Существует конечный предел
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) + o(\Delta x)$
Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:
$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow f(x_0)$ непрерывна в x_0
Заметим, что обратное утверждение неверно. □

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(cf)' = c(f)'$
3. $(f \cdot g)' = f'g \cdot g'f$
4. [2] $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $c' = 0$

[2]proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{cos^2(x)}$
x^k	$k \cdot x^{x-1}$
e^x	e^x
$log_a x$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ при $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$ при $y = f(x)$

Глава 18

DPMW

Глава 19

Основные правила дифференцирования, производные элементарных функций.

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(cf)' = c(f)'$
3. $(f \cdot g)' = f'g \cdot g'f$
4. [1] $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $c' = 0$

[1]proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{cos^2(x)}$
x^k	$k \cdot x^{x-1}$
e^x	e^x
$log_a x$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ при $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$ при $y = f(x)$

Глава 20

Дифференциал функции

Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если её $\Delta f(\Delta x)$ можно предстваить так: $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$ где A - конечное число; $A(x - x_0)$ называется дифференциалом.

Тероэма 20.1. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция имеет конечную производную в этой точке и производная функции равна A*

Доказательство. Если $y = f(x)$ дифференцируема в x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)|_{\div(x-x_0)}$$

при перезоде к пределам:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{A + o(x - x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

Предположим, что $f(x)$ имеет конечную производную

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'x_0 + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow A = f'(x_0)$$

□

Таким образом дифференцируемость функции равносильна существованию её конечной производной.

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = df(x_0) + (x - x_0)} \tag{20.1}$$

При $x \to x_0, df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Бесконечно малое приращение аргумента Δx обозначается dx, отсюда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \tag{20.2}$$

Заметим, что формула справедлива и когда x - функция.

$$\boxed{df(x(t)) = (f'(x(t)))'dt = f'(x) \cdot x(t)dt = f'(x)dx} \tag{20.3}$$

Дифференциал можно использовать и при приблиэённом вычислении значения функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0), x \to x_0 \Rightarrow$$

при x близких к x_0 $o(x - x_0) \approx 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)} \tag{20.4}$$

Пример:

$$\sqrt[100]{1.1} \approx |_{x_0 \approx 1 = \sqrt{x}|_{x=1}}$$

$$(1.1 - 1) + \sqrt[100]{1} = (x^{\frac{1}{100}})|_{x=1} \cdot 0.1 + 1 = \frac{1}{100} \cdot x^{-0.99}|_{x=1} \Rightarrow$$

$$0.1 \cdot \frac{1}{100} + 1 = 1.001$$

20.1 Основные свойства производной на отрезке

Тероэма 20.2. *Ферма: Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум*[1] $\Rightarrow$ *если*

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

[1] max || min

для мин. экстр $f(x_0) \geq f(x)$

Доказательство. Если x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

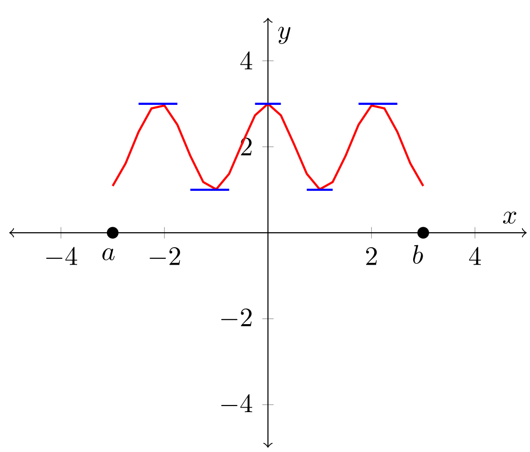
$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

Тероэма 20.3. *Ролля: Пусть* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$ *и Если* $f(a) = f(b), \exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

Доказательство. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего маесимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, чтчо хоть один их нах отличается от $f(a) = f(b)$. Обозначим такую точку экстремума $c \in (a; b)$
$f(c) \neq f(a) = f(b)$ и по теореме Ферма $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля
обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой
будет горизонтальная прямая

□

Тероэма 20.4. *Коши: Пусть $y = f(x)$ и Пусть $y = g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b), g'(x) \neq 0$, тогда*

$$\exists c \in (a;b) : \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Функция F уодвлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$
$\exists c \in (a;b) : F'(x) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

F'(c) = 0 $\Leftrightarrow f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$ □

Глава 21

Производные и дифференциалы высших порядков

Данная глава находится в разработке, при отсутствии в ней полезной информации (или вообще какой-либо информации вините еврея, араба и немца (с явными расистскими наклонностями)

Глава 22

Дифференцирование функции, заданной параметрически

Данная глава находится в разработке, при отсутствии в ней полезной информации (или вообще какой-либо информации вините еврея, араба и немца (с явными расистскими наклонностями)

Глава 23

Локальный экстремум функции, теорема Ферма

Определение локального максимума и локального минимума Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой $\delta-$окрестности точки x_0, где $\delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, $\forall x \neq x_0 \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : f(x) \leq f(x_0)$. Если поменять знак на строгий, то максимум строгий, если знак перевернуть, то будет смнимум, а если знак перевернуть и поменять на строгий, то строгого минимума.

Тероэма 23.1. *Ферма: Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум*[1] $\Rightarrow$ *если*

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

для мин. экстр $f(x_0) \geq f(x)$

Доказательство. Если x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

[1] max || min

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

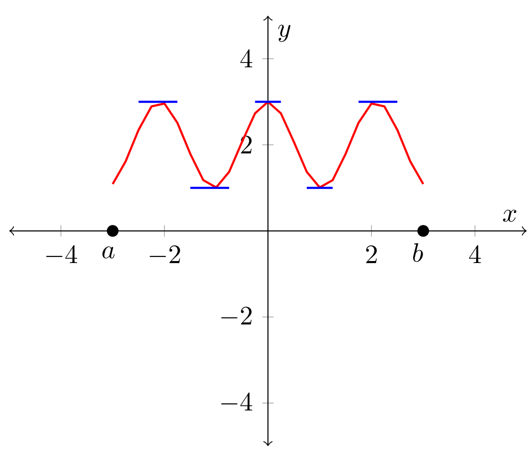
Глава 24

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Тероэма 24.1. *Ролля: Пусть* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$ *и Если* $f(a) = f(b), \exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

Доказательство. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего маесимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, чтчо хоть один их нах отличается от $f(a) = f(b)$. Обозначим такую точку экстремума $c \in (a; b)$
$f(c) \neq f(a) = f(b)$ и по теореме Ферма $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

Тероэма 24.2. *Коши: Пусть $y = f(x)$ и Пусть $y = g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b), g'(x) \neq 0$, тогда*

$$\exists c \in (a;b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$
$\exists c \in (a;b) : F'(x) = 0$

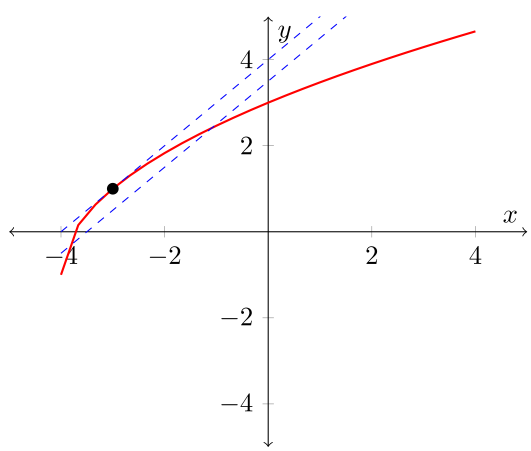
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

F'(c) $= 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$ □

Тероэма 24.3. *Лагранжа о конечном приращении.*
Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$ тогда $\exists c \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Доказательство. наряду с $y = f(x)$ рассмотрим $g(x) \equiv x$. Заметим, что эти 2 функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда получается, что $\exists c \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$ □

Геосмысл



Геосмысл теоремы Лагранжа: Прямая, прохлдящая через точки $(a; f(a)), (b; b(b))$ задаётся уравнением $y = k(x-a) + f(a)$. k найдём из условия прохождения этой прямой через точку $(b; f(b))$. $f(b) = k(b-a) + f(a)$
$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ на $(a;b)$ в условиях теоремы Лагранжа Существует такая точка c, в которой касательная к графику функции параллельна хорде, стягивающей $(a; f(a)), (b; b(b))$

Глава 25

Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Пусть $g'(x_0) \neq 0$. Если существует предел $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: Правило Лопиталя также справедливо, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$

Доказательство
Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0, значит $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. По теореме Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестностях x_0 существует $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где c лежит между точками x и x_0. Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При $x \to x_0$ c также стремится к x_0; перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получается$\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, а $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c\to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, значит

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{25.1}$$

А если кратенько, то полученную формулу можно читать так: **предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если по следний существует.**

Замечания:

1. Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. В этом случае $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
2. Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда $x \to \infty$:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
3. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить еще раз:
$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}} \tag{25.2}$$

Виды неопределенностей:

1. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$:
$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-cos(6x)}{2x^2}=[\dfrac{0}{0}]=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-cos(6x))'}{(2x^2)'}=\lim_{x\to 0}\dfrac{6sin(6x)}{4x}=\dfrac{3}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{sin(6x)}{x}=\dfrac{3}{2}\times[\dfrac{0}{0}]=\dfrac{3}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{(sin(6x))'}{(x)'}=\dfrac{3}{2}\lim_{x\to 0}\dfrac{6cos(6x)}{1}=\dfrac{3}{2}\times 6=9$
2. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$:
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg(3x)}{tg(5x)}=[\dfrac{\infty}{\infty}]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(tg(3x))'}{(tg(5x))'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3cos^2(5x)}{5cos^2(3x)}=\dfrac{3}{5}\times[\dfrac{0}{0}]=\dfrac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{cos^2(5x)-1+1}{cos^2(3x)-1+1}=\dfrac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{cos(10x)+1}{cos(6x)+1}=\dfrac{3}{5}\times[\dfrac{0}{0}]=\dfrac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(cos(10x)+1)'}{(cos(6x)+1)'}=\dfrac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{10sin(10x)}{6sin(6x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{sin(10x)}{sin(6x)}=[\dfrac{0}{0}]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(sin(10x))'}{(sin(6x))'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{10cos(10x)}{6cos(6x)}=\dfrac{5}{3}$

Для пунктов 3-7 рассмотрим преобразования в общих случаях:

3. Неопределенность вида $\infty - \infty$:
   Пусть $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, тогда:

   $$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)}}\right) =$$
   $$[\frac{0}{0}] = ...$$

4. Неопределенность вида $\infty \times 0$:
   Пусть $f(x) \to 0, g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, тогда:

   $$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = [\infty \times 0] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} = ...$$

5. Неопределенность вида 1^{∞}
6. Неопределенность вида ∞^0
7. Неопределенность вида 0^0

Для неопределенностей вида 4-7 воспользуемся следующим преобразованием:

Пусть $f(x) \to 1, g(x) \to \infty$; или $f(x) \to \infty, g(x) \to 0$; или $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение

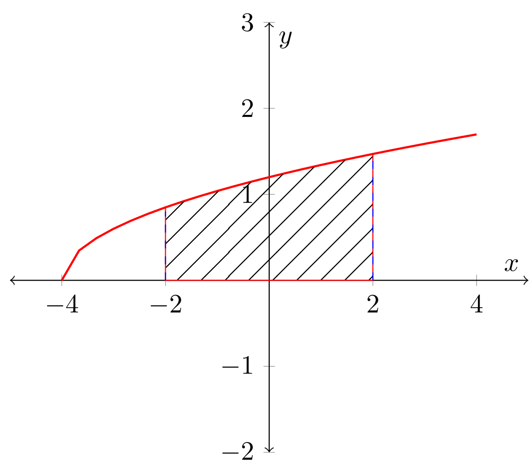
$$A = f(x)^{g(x)}$$

Глава 35

Определённый интеграл и его свойства

Пусть задана $y = f(x)$, предположим, что $\forall x \in [a; b] \subset \mathcal{D}(f)$: $f(x) \geq 0$

Излом графика функции



Рассмотрим фигуру, ограниченную снизу Ox, сверху графиком функции, слева и справа - вертикальными прямыми $x = a, x = b$ это называется криволинейной трапецией. Чтоб найти площадь этой фигуры, разобьём её на досаточно большое количество очень узких вертикальных полосок, чтобы ступенчатая форма была ближе к кривой. Площадь криволинейной трапеции буде равна сумме площадей полосок.

Разбиение $[a; b]$(конечное множество точек) таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$. На каждом $x_{[i-1;x_i]}$ выберем ξ_i и рассмотрим

$f(\xi_i)$ Рассмотрим итый прямоугольник со сторонами $x_i - x_{i-1}$, площадь которого равна $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ Обозначим $(x_i - x_{i-1})$ за Δ_i и пусть $\Delta = \max(\Delta_i..\Delta_n)$ Δ - диаметр разбиения.

Интегральная сумма соответствующая данному разбиению:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)$$

Рассмотрим $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)$. Если такой предел существует и конечен, не зависит от разбиения и от выбора ξ_i , то этот предел называется определённым интегралом $\int_a^b f(x)dx$

Тероэма 35.1. *необходимые условия интегрируемости. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Произведём разбиение $[a;b]$. Если функция неограничена на $[a;b]$, она неограничена хотя бы на одном из отрезков $[x_i - x_{i-1}]$. Следовательно точку ξ_i можно выбрать так, что $|\xi_i|$ будет сколь угодно велик. В этом случае интегральная сумма стремится к бесконечности и предел интегральной суммы будет зависеть от выбора ξ_i и, при некотором ξ_i он будет бесконечным, что противоречит условиям интегрирования. □

Тероэма 35.2. *Если функция непрерывна на $[a;b]$, она интегрируема на $[a;b]$.*

Следствие: Если функция на $[a;b]$ имеет конечное количество точек разрыва первого рода[1], то она интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. Функция кусочно-непрерывна на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда этот отрезок разбивается на конечное число меньших отрезков, на каждом из которых эта функция непрерывна и ограничена, по теореме 2 доказательство. □

Тероэма 35.3. *Если функция монотонна на $[a;b]$, она интегрируема на $[a;b]$.*

35.1 Свойства определённго интеграла

(a) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(b) $\int_a^b dx = b - a$

(c) $\forall f(x), g(x)$ интегрируемой на $[a;b], \forall \alpha, \beta$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

[1] кусочно-непрерывна

(d) Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, $\forall x \in [a;b] : f(x) \geq g(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(e)

$$|\int_a^b g(x)dx| \leq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство.

$$\forall |\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot |f(\xi_i)|$$

При $\Delta \to 0$ доказывается □

(f) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(g)

$$\forall a, b, c : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. i. Пусть $c \in (a;b)$, тогда рассмотрим разбиения отрезка $[a;b]$, содержащие c. Тогда интегральная сумма разивается на 2 суммы: слева от c и справа от c. При $\Delta \to 0$ доказывается.

ii. $c \notin (a;b) \Rightarrow b \in (a;c)$ по пункту i:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

iii. $a \in (c;b)$ аналогично

iv. $c = a$ или $c = b$: по первому свойству.

□

Тероэма 35.4. *о среднем: Если функция непрерывна на* $[a;b]$, $\exists \xi \in [a;b] : f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b] \Rightarrow$ на этом отрезке она достигает своих максимального и минимального значений. $m = min(f(x)); M = max(f(x)), x \in [a;b]$

$$\forall x \in [a;b] : m \leq f(x) \leq M. \Rightarrow \int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).a < b \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции:

$$\exists \xi \in [a;b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

умножим на $(b-a) > 0$ получим доказываемое равенство. □

35.2 Формула Ньютона-Лейбница