

Ответы на теоретические вопросы к экзамену
по математике.
Семестр 1, 2019

по конспектам лекций Рачковского Н.Н.
студентов группы 950501

31 декабря 2019 г.

Глава 1

Элементы теории Множеств

1.1 Множества и операции над ними

Множество - совокупность некоторых объектов, обладающих определёнными свойствами. Каждый из объектов называется элементом обозначение множества: $\{a|P(a)\}$ где $P(a)$ - свойство, объединяющее объекты a .

Специальные символы, обозначающие операции над множествами:

1. содержится: $A \subseteq B$. Каждый элемент множества A содержится в B .
2. совпадает: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$
3. объединение: $A \cup B = \{c|c \in A \text{ или } c \in B\}$
4. пересечение: $A \cap B = \{c|c \in A \text{ и } c \in B\}$
5. теоретическо-множественная разность: $A \setminus B = \{c|c \in A \text{ и } c \notin B\}$
6. декартово произведение: $A \times B = \{(a, b)|a \in A; b \in B\}$ ¹

Операции с \emptyset :

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \setminus \emptyset = A$
4. $\emptyset \setminus A = \emptyset$

¹каждый элемент в паре с каждым другим, как при раскрытии скобок

1.2 Замкнутость множеств

Рассматривая операции умножения и деления над \mathbb{N} мы *остаёмся* в $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ замкнуто относительно операции умножения. Для того, чтобы \mathbb{N} стало замкнуто относительно операции вычитания нужно добавить к нему отрицательные числа и ноль тем самым привратив его в \mathbb{Z} . Таким образом \mathbb{Z} замкнуто относительно \times, \pm но не \div . Для того, чтобы замкнуть \mathbb{Z} относительно \div , нужно дополнить его дробями вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Т. О. получили \mathbb{Q} Получили: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ где \mathbb{R} - действительные числа.

1.3 Ограниченность множеств

A ограничено сверху, если $\exists M, \forall a \in A : a \leq M$ и A ограничено снизу, если $\exists M, \forall a \in A : a \geq M$

Таким образом, если множество ограничено **и** сверху **и** снизу, оно называется *ограниченным*. $\Rightarrow \exists M, \forall a \in A : |a| \leq M$ (1)

$$\begin{aligned} \exists M_1, M_2, \forall a \in A : M_1 \leq a \leq M_2 \\ M = \max(|M_1|, |M_2|) \\ M \geq |M_1| \geq M_2 \\ M \geq |M_1| \Rightarrow -M \leq -|M_1| \leq M_1 \Rightarrow \\ \forall a \in A : -M \leq -M_1 \leq a \leq M_2 \leq M \rightarrow -M \leq a \leq M \end{aligned}$$

Следовательно из ограниченности A получается (1).

1.4 Окрестности

Рассмотрим $a \in \mathbb{R}$. Окрестностью a является отрезок $(b; c)$, содержащую a . Рассмотрим $\epsilon > 0$. ϵ -окрестностью a является отрезок $(a - \epsilon; a + \epsilon)$, содержащую a .

$\mathcal{U}_\epsilon(a)$ есть отрезок длиной 2ϵ , центром которого является a :

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\}$$

Оно бывает и проколото: т.е. из отрезка удалена точка a : $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(a) = \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Глава 2

Функции

обведи пж важные уравнения в коробку `\boxed{eq:*\}\{...\}`

Пусть даны 2 непустых множества A и B . Отображением из A и B называется правило, согласно которому каждому элементу множества A соответствует не более одного элемента B . Это обозначается $f : A \rightarrow B$. Областью определения f называется множество $D(f) = \{a \in A \mid \exists b = f(a)\}$ ¹. Множеством значений f называется множество $E(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A; b = f(a)\}$ ². Запись $b = f(a)$ обозначает, что $a \in A$ в отображении f соответствует $b \in B$ тут b - образ, а a - прообраз.

Свойства биективного² отображения $f : A \rightarrow B$:

1. $D(f) = A$
2. $E(f) = B$
3. $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
4. обратное отображение: $f^{-1} : B \rightarrow A; a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$

График отображения $f : A \rightarrow B = \{(a, b) \mid b = f(a)\} \subset A \times B$. Если A и B - числовые, то это функция тогда график функции есть подмножество в декартовом квадрате³. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат: элементам множества \mathbb{R}^2 можно поставить в соответствие точки этой плоскости, координаты которой в этой С.К. являются эти элементы \mathbb{R}^2 . Тогда график функции можно представить как множество точек, причем ясно, что не каждое множество точек задает график функции. Множество точек задает график функции тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая параллельная оси ординат пересекает множество данных не более одного раза. Функция может задаваться *аналитически, графически и неявно*. Неявный способ: Рассмотрим $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и Рассмотрим

¹ f - заданное нами правило

²взаимнооднозначного

³ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$F(x; y) = 0$. На Координатной плоскости рассмотрим множество решений этого уравнения: $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | F(x; y) = 0\}$: если оказывается, что это множество является графиком функции, функция задана неявно уравнением $F(x; y) = 0$.

2.1 Типовые функции, график функции

Линейная функция:

Функция вида $y = kx + b$; $k, b \in \mathbb{R}$ имеет графиком невертикальную прямую при $b = 0$ график функции проходит через $(0; 0)$. K - угловой коэффициент равный тангенсу угла наклона графика к Ox . Взаимное расположение двух прямых, заданных функциями $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$:

1. совпадение прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2; b_1 = b_2$
2. параллельность прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$
3. пересечение прямых $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

доказательство свойства 2:

\Rightarrow) Пусть прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ параллельны.

Следовательно у них не общих точек:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

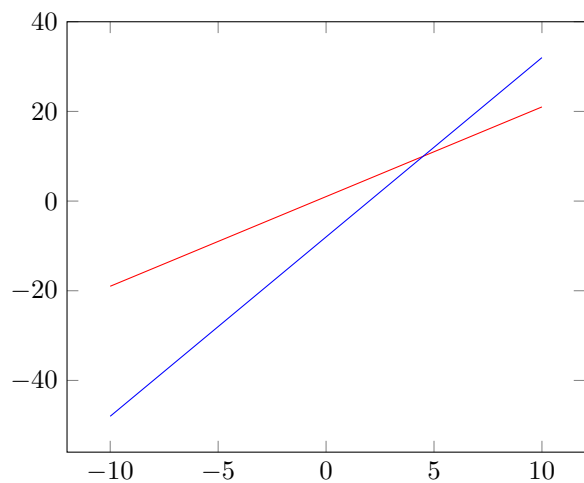
$\Rightarrow x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1$ не имеет решений

$$\text{Следовательно } x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

\Leftarrow) Предположим, что $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ и проведем все эти действия в обратном порядке.

2.1.1 Формула получения угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



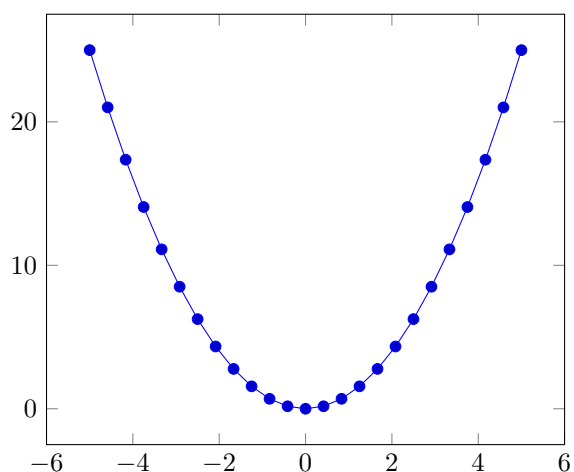
обозначим угол между красной и синей линиями за θ , наклон линий соответственно ϕ_1 и ϕ_2 $\theta = \phi_1 - \phi_2$
 $k_1 = \tan \phi_1$
 $k_2 = \tan \phi_2$
 $\theta = \tan \phi_1 - \tan \phi_2 \Rightarrow$

$$\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \quad (2.1)$$

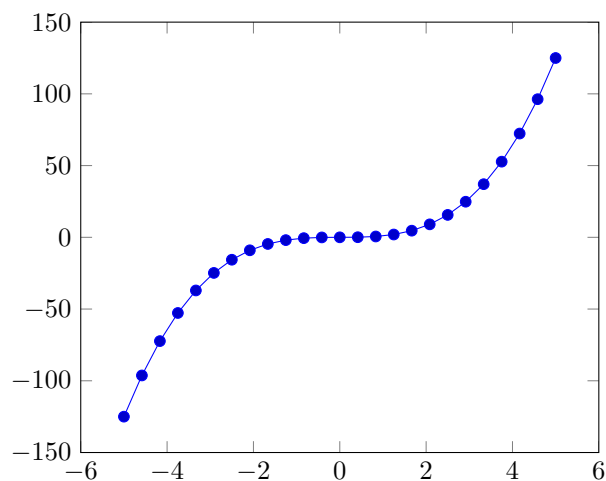
Таким образом 2 прямые взаимноперпендикулярны тогда и только тогда когда $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

2.1.2 Основные элементарные функции

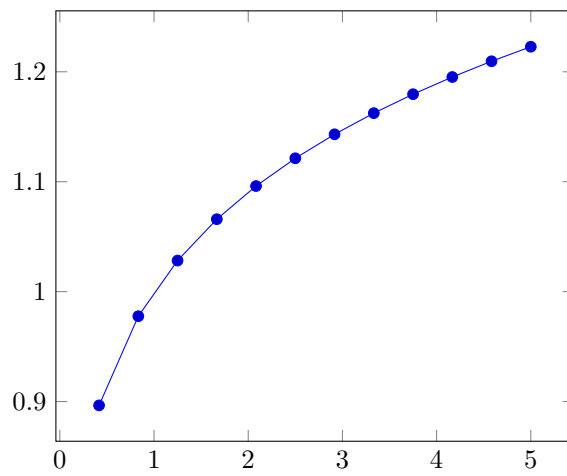
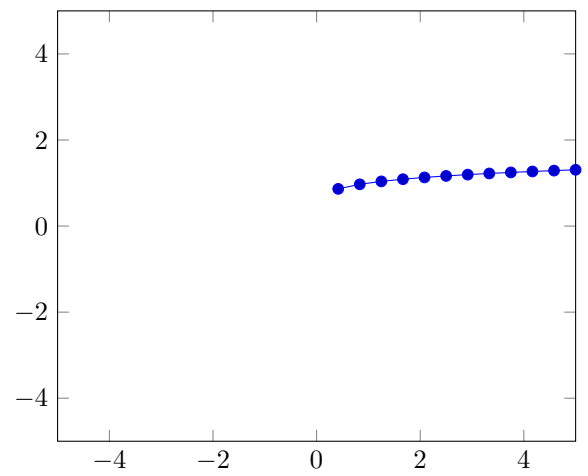
Степенная функция



$n = 2n$



$n = 2n+1$

 $x^{\frac{1}{n}}$ где n - четное $x^{\frac{1}{n}}$ где n - нечетное

ДОДЕЛАЙС

Глава 3

Окружность, Эллипс, Гипербола, Парабола

Пусть Существует прямоугольная система координат Oxy ; Пусть даны две точки $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$; Тогда расстояние между A и B вычисляется так:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

3.1 Фигуры и канонические уравнения фигур

Говорят, что уравнение на плоскости задает некоторую фигуру, если принадлежность $M(x; y)$ этой фигуре равносильно выполнению равенства $f(x; y) = 0$ для каждой точки этой фигуры.

3.1.1 Окружность

Окружностью называется множество всех точек в плоскости, удаленных от данной фиксированной точки, называемой **центром окружности** на одно и то же расстояние, называемое **радиусом окружности**.

дана точка $M(x; y)$ и окружность с центром $O(x_0, y_0)$. $M \in \omega(O, r) \Leftrightarrow |MO| = R \Leftrightarrow |MO|^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (3.2)$$

Равенство 3.2 есть уравнение окружности т.к. оно равносильно принадлежности точки M к окружности.

3.1.2 Эллипс

Пусть на плоскости заданы 2 точки F_1, F_2 , расстояние между которыми равно $2c$; и пусть дано некоторое число $a > c$. **Эллипсом** называется

множество всех точек ранной плоскости, для которых сумма расстояний от этой точки до точек F_1 и $F_2 = 2a$. Точки F называются фокусами эллипса. Вывод:

Зададим на плоскости ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

Возьмем произвольную точку $M(x; y) \Rightarrow (MF_1 + F_1F_2) = 2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\therefore a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \text{ делим на } a^2b^2$$

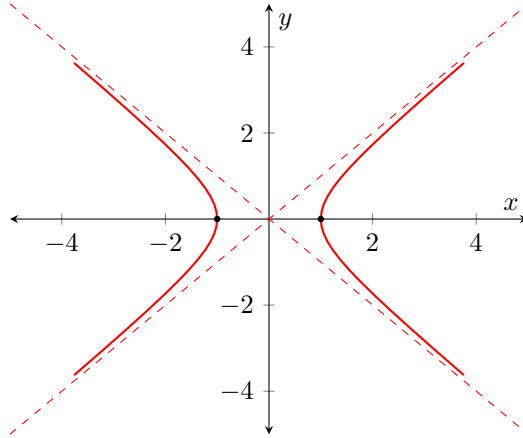
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (3.3)$$

1

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. Эллипс ограничен прямоугольником $2a$ на $2b$. В случае совпадения a и b получим $\omega(0, a)$. эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. $\varepsilon \in [0; 1]$ $\therefore \varepsilon = 0$ для окружности.

3.1.3 Гипербола

На плоскости заданы несовпадающие точки F_1, F_2 , расстояние между которыми равно $2c$. Пусть $a \in (0; c)$. Гиперболой называется множество точек, для которых разность расстояний от точки до F_1 и F_2 . F_1 и F_2 это фокусы гиперболы. На плоскости задана ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$



¹неуверен в записи, особенно в $(MF_1 + F_1F_2) = 2a$

wywod urawnenija giperboly zdesja.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.4)$$

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. $y = \pm \frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы. a и b - полуоси гиперболы, точки пересечения с Ox - вершины. **эксцентриситет гиперболы:** $\varepsilon = \frac{c}{a}$. $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

3.1.4 Парабола

На плоскости задана прямая Δ и $F \notin \Delta$. **Параболой** называется множество точек плоскости равноудаленных от Δ и F . При этом Δ - директриса параболы, F - фокус Параболы. Введем ПСК: Ox проходит через F и $\perp \Delta \Rightarrow F(\frac{p}{2}; 0)$ где p - расстояние от F до Δ .

Уравнение параболы
wywod urawnenija tuta

$$y = \pm 2px \quad (3.5)$$

y в уравнении в четной степени \Rightarrow парабола симметрична относительно Ox при $x \geq 0$ получается, что парабола расположена в правой полуплоскости.

Глава 4

DPMW

Глава 5

Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.

Числовая последовательность называется отображением в котором каждому \mathbb{N} числу соответствует некоторое число. Последовательности принято изображать $\{x_n\} = x_1; x_2; \dots x_n$. Если из $\{x_n\}$ взято некое бесконечное подмножество, из которого сформирована другая последовательность, в которой **порядок следования членов такой же как и в исходной последовательности, то она называется подпоследовательностью**. Обозначение $\{x_{n_m}\}$. Из определения последовательности: если $k_1 < k_2 \Rightarrow m_1 < m_2$. Число a называется пределом последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$ в сколь угодно малой $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ может находиться **конечное число членов этой последовательности**.

Предел числовой последовательности есть точка, в которой *кучкуются* почти все члены последовательности за исключением, может последнего члена.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*; в противном случае - *расходящейся*. Расходящиеся последовательности также включают бесконечно большие последовательности.

бесконечно большие последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$$

бесконечно малые последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| < M$$

5.1 Свойства сходящихся последовательностей DOKAZAT' SWOJSTWA

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Действительно, если предположить, что пределов 2, можно указать несколько \mathcal{U}_ϵ этих пределов, не пересекающих друг друга. По определению предела внутри каждой из этих $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ должно содержаться бесконечно много членов последовательности, что есть противоречие.
2. Если Последовательность сходится к a , то любая подпоследовательность этой последовательности сходится к a .
3. Любая сходящаяся последовательность ограничена:

$$\text{Пусть } \epsilon = 1 : \exists \in \mathbb{N}, n \geq N : |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| < |a| + 1$$

Пусть члены $x_1 \dots x_{N-1}$, не попавшие в рассматриваемую окрестность точки a . и Пусть $M = \max(|x_1| \dots |x_{N-1}|, |a| + 1)$
 $\forall n, |x_n| \leq M$

4. Если для 2х членов последовательностей x_n и y_n , сходящихся к числам a и b соответственно, начиная с некоторого номера $x_n < y_n, a \leq b$:

$$\begin{aligned} &\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \\ &a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n < y_n \\ &\text{Примем } \epsilon = \frac{b-a}{2} \\ &\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \\ &\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \frac{b-a}{2} \\ &\therefore \text{при } N = \max(N_1, N_2) \\ &\forall n \geq N : \begin{cases} x_n > a - \frac{b-a}{2} \\ x_n > a + \frac{b-a}{2} \\ b - \frac{b-a}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Если для 3х последовательностей x_n, y_n, z_n выполняется $x_n \leq y_n \leq z_n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то y_n также сходится к a
6. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то начиная с некоторого номера $|x_n| > \frac{a}{2}$
 все члены этой последовательности имеют тот же знак, что и a .
- 7.

Терозма 5.1. Пусть x_n и y_n сходятся к a и b , тогда

$$(a) \{x_n \pm y_n\} = k \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = a \pm b$$

$$(b) \forall c \{c \cdot x_n\} \lim_{n \rightarrow \infty} = c \cdot a$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} = \frac{1}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} = \frac{b}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

Глава 6

DPMW

Глава 7

Монотонные последовательности, теорема Вейкерштрасса

ебает где это в конспекте?

Глава 8

DPMW

Глава 9

Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.

КАК-ТО МАЛО НАПИСАНО

Предел функции на бесконечности определяется так:

9.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x| > \delta; |f(x) - A| < \epsilon$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)}, |f(x)| > \epsilon$

9.2 Односторонние пределы

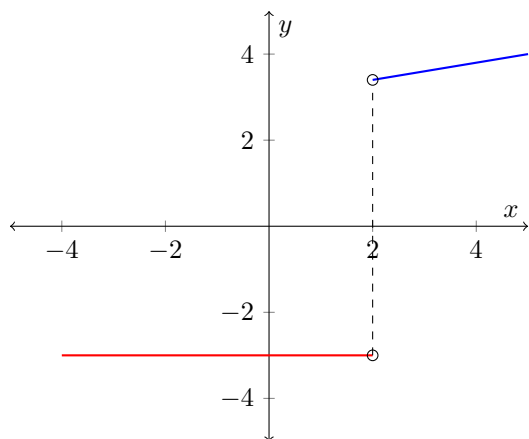
$y = f(x)$ определена на $(x - \delta; x)$.

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$: Односторонним пределом слева функции $y = f(x)$ называется $A : \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$, если A существует.

Аналогично определяется предел справа: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 + \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)} \quad (9.1)$$

предел слева(точка на красном) и справа(точка на синем)



в данном случае предела у функции
нет

Глава 10

DPMW

Глава 11

Непрерывность функций в точке, их свойства.

$y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена в этой точке, а также в $\mathcal{U}_{(x)}$ и при этом $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
 $\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента
 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ - есть приращение функции в x_0
 $y = f(x)$ непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \quad (11.1)$$

Непрерывность функции в точке означает то, что в любой, сколь угодно маленькой окрестности, бесконечно малое приращение аргумента влечёт за собой бесконечно малое приращение функции.

Свойства непрерывной функции в точке

1. Если функция непрерывна в точке x_0 , то в некоторой окрестности этой точки эта функция ограничена.
2. Если функция непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности x_0 функция имеет тот же знак, что и $f(x_0)$
3. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) < g(x_0)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)}$ где $f(x) < g(x)$
4. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0 , то так же непрерывны $y = f(x_0) \pm y = g(x_0)$, $y = f(x_0) \cdot y = g(x_0)$, $y = f(x_0) y \div g(x_0)$
5. Непрерывность композиции функций: Если $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0 , $z = f(x_0)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

$$\forall \sigma > 0, \exists \tau > 0, \forall y \in \mathcal{U}_{\tau}(y_0) : |f(y) - f(y_0)| < \sigma$$

$$\forall \sigma > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \sigma$$

что и означает непрерывность $y = f(g(x))$ в точке x_0

□

11.1 Односторонняя непрерывность

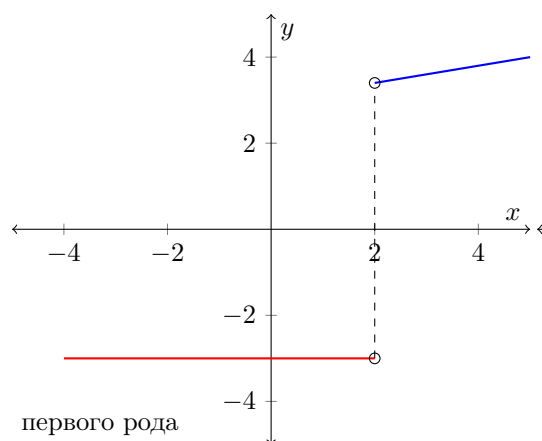
$y = f(x)$ определена на $(x_0 - \delta; x_0]$ такая функция называется непрерывной слева, если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ аналогично функция называется непрерывной справа, если $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Так как функция непрерывна, она непрерывна слева и справа.

Функция называется разрывна в точке x_0 , если она либо не определена в этой точке, либо определена, но не непрерывна.

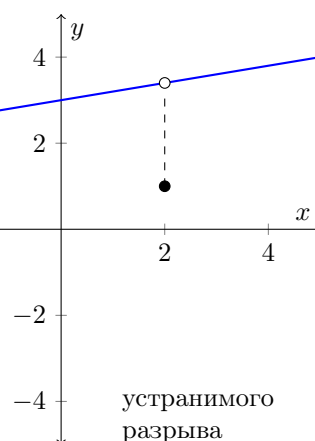
Классификация точек разрыва:

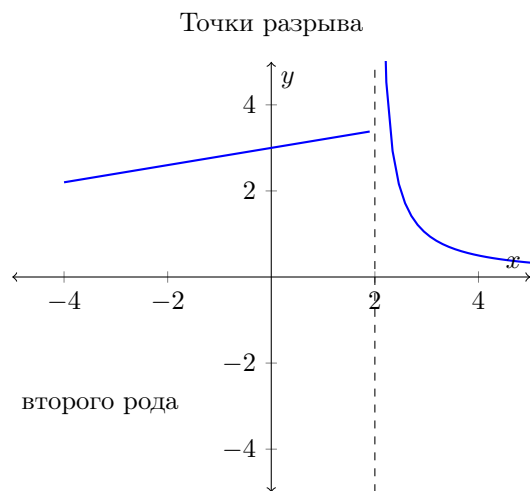
1. Если существуют и конечны оба односторонних предела эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва. $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода

Точки разрыва



Точки разрыва





11.2 Непрерывными в любой точке ОДЗ являются

- постоянные функции
- $y = x$
- $y = a_n x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \dots + a_0$
- дробно-рациональные функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x)$, $Q(x)$ - многочлены степени x
- функции \sin, \cos, \tan, \cot

Глава 12

DPMW

Глава 13

Сравнение функций, эквивалентные функции

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в \mathcal{U}_{x_0} . Говорят, что $f(x)$ сравнима с $g(x)$, если

$$\boxed{\exists \epsilon, \exists \mathcal{U}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|} \quad (13.1)$$

В этом случае пишут, что $f(x) = O(g(x))$.

Очевидно, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \epsilon$ а это означает, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена в \mathcal{U}_{x_0} .

Говорят, что $y = f(x)$ бесконечно мала по сравнению $y = g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| <$

HILFE _MIR! _ICH _HABE _DAS _KONSPEKT _NICHT! тогда пишут, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \alpha(x)$ где $\alpha(x)$ - БМФ при $x \rightarrow x_0$.

13.1 Эквивалентность

Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ или конечному числу A , тогда пишется $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$, тут $y = g(x)$ - главная часть $y = f(x)$

Лемма 13.1. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то $\forall x$:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

Таблица эквивалентных при $x \rightarrow x_0$:

$\sin(x)$	x
$\operatorname{tg}(x)$	x
$\arcsin(x)$	x
$\operatorname{arctg}(x)$	x
$1 - \cos(x)$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln a$	x
$a^x - 1$	$x \cdot \ln a$
$\log_a 1 + x$	$\frac{x}{\ln a}$
$e^x - 1$	x
$(1 + x)^\beta - 1$	βx
$x^\beta - 1$	$\beta(x - 1)$

Глава 14

DPMW

Глава 15

Непрерывность функции на отрезке

Пусть $y = f(x)$, $[a; b] \subset \mathcal{D}(y)$. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна справа в точке a и слева в точке b .

Терозма 15.1. *Кантора о вложенных отрезках.*

Имеется $[a; b]$ и совокупность вложенных отрезков $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$ и при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0^1$, тогда

$$\boxed{\exists a \in [a; b] : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (15.1)$$

Используя теорему Кантора Докажем теорему Больцана-Вейерштрасса

Доказательство. $\forall \{x_n\} \subset [a; b]$ можно выделить мходящуюся подпоследовательность:

Разобьём $[a; b]$ точкой C пополам и рассмотрим $[a_1; b_1]$, половину первоначального отрезка.

Эта половна содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$. Пусть $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$. Точкой C_2 Разобьём отрезок $[a_1; b_1]$ пополам и мрассмотрим $[a_2; b_2]$, она содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$

и в этом отрезке обозначим x_{n_k} , чтобы $n_2 > n_1$ и так далее. Получим

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\} \in [a_k; b_k], \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ a_k \leq x_{n_k} \leq b_k - a_k = \frac{b_k - a_k}{2^k} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k - a_k}{2^k} = 0 \end{aligned}$$

По теореме Кантора имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = a$

В неравенстве $a_k \leq x \leq b_k$ перейдём к пределам.

¹вложены друг в друга и уменьшаются

По теореме о 2х милиционерах:

$$a_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq a_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a_0 \in [a; b]$$

□

Терозма 15.2. Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке.

$$\exists c > 0, \forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq c$$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$. Предположим, что она неограничена на этом отрезке.

$$\text{Отсюда } \forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| \geq n$$

Отсюда по Больцана-Вейерштрасса в $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ с пределом $x_0 \in [a; b]$

$$\text{Отсюда } \forall k, |f(x_{n_k})| > n_k, \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| \geq \infty$$

Поскольку $\{x_n\} \rightarrow x_0$, в x_0 функция не является непрерывной, а терпит разрыв второго рода, что протеворечит нашему утверждению. □

Терозма 15.3. Вейерштрасса.

Непрерывная на $[a; b]$ функция достигает на нём своего максимального и минимального значений.

Глава 16

DPMW

Глава 17

Производная функции, односторонние производные

Пусть $y = f(x)$, $x_0 \in \mathcal{D}(f(x))$. Рассмотрим график функции. и прямые $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ Среди всех таких прямых рассмотрим ту, которая наиболее тесно прижимается к графику функции $f(x)$. Такая прямая называется касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$. Эту прямую можно найти так: На графике функции рассмотрим кроме $(x_0; f(x_0))$ рассмотрим $(x_1; f(x_1))$ и прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая - секущая, приближённая¹

Уравнение секущей с угловым коэффициентом. Так как секущая должна проходить через $(x_0; f(x_0))$ должно выполняться равенство $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow (x_1; f(x_1)) \rightarrow (x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow x_1 - x_0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Если этот предел конечен и существует, то он есть производная функции $y = f(x)$ в x_0 и обозначается $f'(x_0)$

$x_1 - x_0 = \Delta x$, $f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$
 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ иногда обозначается $\frac{df(x_0)}{dx}$

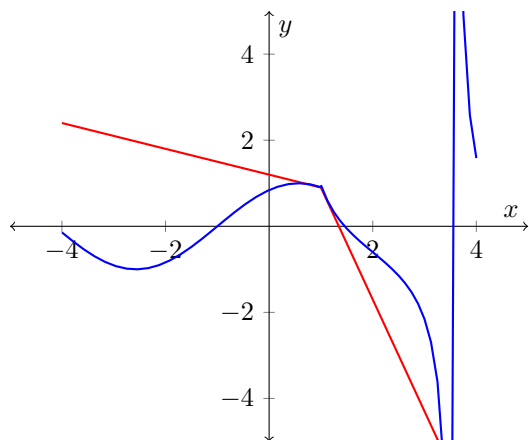
Может оказаться, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ бесконечен, в этом случае касательная к графику в точке вертикальна

Как известно, существование конечного предела равносильно существованию и равенству между собой односторонних пределов $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ Эти односторонние пределы, если они конечны и существуют, называются односторонними производными и обозначаются $f'(x_{0-0})$ и $f'(x_{0+0})$ Их существование означает существование касательной к фрагменту графика функции левее и правее $(x_0; f(x_0))$. Справедливо и обратное.

Возможны случаи, когда односторонние пределы существуют, но не равны друг другу это значит, что в точке $(x_0; f(x_0))$ терпит излом и не является гладким.

¹Размытое определение

Излом графика функции



Тероэма 17.1. Если $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть Существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

Перейдём к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow f(x_0) \text{ непрерывна в } x_0$$

Заметим, что обратное утверждение неверно. \square

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

$$1. (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$2. (cf)' = c(f)'$$

$$3. (f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$5. c' = 0$$

²proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{\cos^2(x)}$
x^k	$k \cdot x^{k-1}$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ при $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$ при $y = f(x)$

Глава 18

DPMW

Глава 19

Основные правила дифференцирования, производные элементарных функций.

Функция называется дифференцируемой в точке x_0 , если её $\Delta f(\Delta x)$ можно представить так: $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$ где A - конечное число; $A(x - x_0)$ называется дифференциалом.

Терозма 19.1. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция имеет конечную производную в этой точке и производная функции равна A

Доказательство. Если $y = f(x)$ дифференцируема в x_0 , то

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)|_{\div (x - x_0)}$$

при переезде к пределам:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A + o(x - x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

Предположим, что $f(x)$ имеет конечную производную

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow A = f'(x_0)$$

□

Таким образом дифференцируемость функции равносильна существованию её конечной производной.

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + (x - x_0) \quad (19.1)$$

При $x \rightarrow x_0$, $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Бесконечно малое приращение аргумента Δx обозначается dx , откуда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad (19.2)$$

Заметим, что формула справедлива и когда x - функция.

$$df(x(t)) = (f'(x(t)))'dt = f'(x) \cdot x'(t)dt = f'(x)dx \quad (19.3)$$

Дифференциал можно использовать и при приближённом вычислении значения функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0 \Rightarrow$$

$$\text{при } x \text{ близких к } x_0 \quad o(x - x_0) \approx 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow$$

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) \quad (19.4)$$

Пример:

$$\sqrt[100]{1.1} \approx \left|_{x_0 \approx 1 = \sqrt{x}} \right|_{x=1}$$

$$(1.1 - 1) + \sqrt[100]{1} = (x^{\frac{1}{100}})|_{x=1} \cdot 0.1 + 1 = \frac{1}{100} \cdot x^{-0.99}|_{x=1} \Rightarrow$$

$$0.1 \cdot \frac{1}{100} + 1 = 1.001$$

19.1 Основные свойства производной на отрезке

Лемма 19.2. Ферма: Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум¹ \Rightarrow если

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

для мин. экстр $f(x_0) \geq f(x)$

Доказательство. Если x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \geq f(x)$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

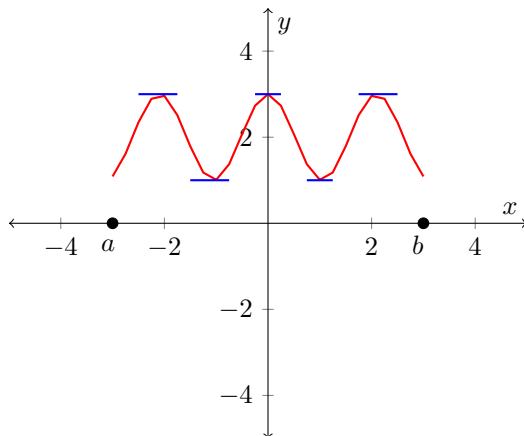
□

Лемма 19.3. Ролля: Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$ и Если $f(a) = f(b)$, $\exists c \in [a; b] : f'(c) = 0$ $\forall (a; b)$

Доказательство. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего максимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, что хотя один из них отличается от $f(a) = f(b)$. Обозначим такую точку экстремума $c \in (a; b)$ $f(c) \neq f(a) = f(b)$ и по теореме Ферма $f'(c) = 0$

¹max || min

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

Терозма 19.4. *Каши:* Пусть $y = f(x)$ и Пусть $y = g(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и дифференцируемы на $(a; b)$, $g'(x) \neq 0$, тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.

Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля \Rightarrow

$$\exists c \in (a; b) : F'(c) = 0$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad \square$$