

Ответы на теоретические вопросы к экзамену  
по математике.  
Семестр 1, 2019

по конспектам лекций Рачковского Н.Н.  
студентов группы 950501 Кагановича М.М., Поддубного Д.П., Веселова М.С.  
Под редакцией Рачковского Н.Н. и К<sup>о</sup>

12 января 2020 г.

# Оглавление

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>PUBLIC SERVICE ANNOUNCEMENT</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1</b> | <b>Множества</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1      | Множества и операции над ними . . . . .                                       | 7         |
| 1.2      | Замкнутость множеств . . . . .  | 7         |
| 1.3      | Ограниченность множеств . . . . .   | 8         |
| 1.4      | Окрестности . . . . .   | 8         |
| <b>2</b> | <b>Функции</b>  | <b>9</b>  |
| 2.1      | Графики . . . . .   | 10        |
| 2.1.1    | угол между прямыми . . . . .  | 10        |
| 2.1.2    | Основные элементарные функции . . . . .                                       | 11        |
| <b>3</b> | <b>Плоские фигуры</b>   | <b>13</b> |
| 3.1      | Уравнения фигур . . . . .   | 13        |
| 3.1.1    | Окружность . . . . .  | 13        |
| 3.1.2    | Эллипс . . . . .  | 13        |
| 3.1.3    | Гипербола . . . . .   | 14        |
| 3.1.4    | Парабола . . . . .  | 15        |
| <b>4</b> | <b>Бином Ньютона</b>  | <b>16</b> |
| <b>5</b> | <b>Последовательности</b>   | <b>18</b> |
| 5.1      | Свойства . . . . .  | 19        |
| <b>6</b> | <b>Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства</b> | <b>21</b> |
| 6.1      | Основные свойства б.м. и б.б. последовательностей . . . . .                   | 21        |
| <b>8</b> | <b>Число <math>e</math></b>   | <b>22</b> |
| 8.1      | Сходимость . . . . .  | 22        |
| 8.2      | Убывание . . . . .  | 22        |
| 8.3      | Число $e$ . . . . .   | 23        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>9</b>  | <b>Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.</b>            | <b>24</b> |
| 9.1       | Бесконечный предел, Предел на бесконечности . . . . .                               | 24        |
| 9.2       | Односторонние пределы . . . . .   | 24        |
| <b>10</b> | <b>Бесконечно малые и бесконечно большие функции</b>                                | <b>26</b> |
| <b>11</b> | <b>Непрерывность</b>  | <b>27</b> |
| 11.1      | Односторонняя . . . . .   | 28        |
| 11.2      | непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$ . . . . .                              | 29        |
| <b>12</b> | <b>Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы</b>                    | <b>30</b> |
| 12.1      | Непрерывность элементарных функций . . . . .  | 30        |
| 12.2      | Непрерывность синуса . . . . .  | 30        |
| 12.3      | Еще непрерывные функции . . . . .   | 31        |
| 12.4      | Замечательные пределы . . . . .   | 31        |
| <b>13</b> | <b>Сравнение функций</b>  | <b>32</b> |
| 13.1      | Эквивалентность . . . . .   | 32        |
| <b>14</b> | <b>Точки разрыва</b>  | <b>34</b> |
| <b>15</b> | <b>Непрерывность функции на отрезке</b>   | <b>36</b> |
| <b>16</b> | <b>Теорема Коши о прохождении через ноль. Теорема Коши о промежуточном значении</b> | <b>38</b> |
| 16.1      | Теорема Больцано-Коши о среднем значении . . . . .                                  | 38        |
| 16.1.1    | Доказательство . . . . .  | 38        |
| 16.2      | Важное следствие . . . . .  | 39        |
| <b>17</b> | <b>Производная функции, односторонние производные</b>                               | <b>40</b> |
| <b>18</b> | <b>Уравнение касательной и нормали к графику функции</b>                            | <b>43</b> |
| <b>19</b> | <b>правила дифференцирования</b>  | <b>45</b> |
| <b>20</b> | <b>Дифференциал функции</b>   | <b>47</b> |
| 20.1      | Св. производной . . . . .   | 48        |
| <b>21</b> | <b>Производные и дифференциалы высших порядков</b>                                  | <b>51</b> |
| <b>22</b> | <b>Дифференцирование функции, заданной параметрически</b>                           | <b>52</b> |
| <b>23</b> | <b>Локальный экстремум функции, теорема Ферма</b>                                   | <b>53</b> |
| <b>24</b> | <b>Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши</b>  | <b>55</b> |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| <b>25</b> | <b>Правило Лопиталья</b>  | <b>57</b> |
| <b>27</b> | <b>Признаки монотонности функции</b>  | <b>60</b> |
| <b>28</b> | <b>Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции</b>     | <b>61</b> |
| 28.1      | Первое необходимое условие . . . . .  | 61        |
| 28.2      | Второе достаточное условие . . . . .  | 61        |
| <b>29</b> | <b>Направление выпуклости и перегибы прямой</b>                               | <b>63</b> |
| <b>30</b> | <b>Комплексные числа и действия над ними. Формы записи комплексного числа</b> | <b>65</b> |
| 30.1      | Комплексные числа . . . . .   | 65        |
| 30.2      | Действия над комплексными числами . . . . .                                   | 66        |
| 30.3      | Геометрическая интерпретация комплексных чисел . . . . .                      | 67        |
| 30.4      | Тригонометрическая форма записи комплексных чисел . . . . .                   | 68        |
| 30.4.1    | Действия над комплексными числами в тригонометрической форме . . . . .        | 68        |
| 30.4.2    | Пример 1 . . . . .  | 69        |
| 30.5      | Показательная форма записи комплексного числа . . . . .                       | 69        |
| 30.5.1    | Формула Эйлера . . . . .  | 69        |
| 30.5.2    | Показательная форма . . . . .   | 69        |
| <b>31</b> | <b>Извлечение корня из комплексного числа</b>                                 | <b>70</b> |
| 31.0.1    | Пример 1 . . . . .  | 70        |
| <b>32</b> | <b>Неопределённый интеграл</b>  | <b>71</b> |
| 32.1      | Первообразная . . . . .   | 71        |
| 32.2      | Свойства . . . . .  | 71        |
| 32.3      | Таблица Интегралов . . . . .  | 72        |
| <b>33</b> | <b>Замен переменной</b>   | <b>74</b> |
| <b>34</b> | <b>Интегрирование по частям</b>   | <b>75</b> |
| <b>35</b> | <b>Определённый интеграл</b>  | <b>76</b> |
| 35.1      | Свойства . . . . .  | 77        |
| <b>36</b> | <b>Формула Ньютона-Лейбница</b>   | <b>80</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>37 Несобственные интегралы, их свойства и вычисление</b>      | <b>82</b>  |
| 37.1 Вопрос о сходимости интегралов . . . . .                    | 84         |
| 37.2 Множества и операции над ними . . . . .                     | 84         |
| 37.2.1 Признак сравнения . . . . .                               | 84         |
| 37.2.2 Предельный признак сравнения . . . . .                    | 84         |
| 37.2.3 Признак Абеля-Дирихле . . . . .                           | 84         |
| 37.2.4 Свойства несобственного интеграла второго рода . . . .    | 85         |
| <b>38 Матрицы и операции над ними</b>                            | <b>86</b>  |
| 38.1 Свойства сложения и вычитания . . . . .                     | 87         |
| 38.2 Свойства умножения матриц . . . . .                         | 87         |
| 38.2.1 Умножение матрицы на число . . . . .                      | 87         |
| 38.2.2 Перемножение матриц . . . . .                             | 88         |
| 38.3 Определитель матрицы . . . . .                              | 88         |
| <b>39 Свойства определителя</b>                                  | <b>90</b>  |
| <b>40 Векторы и линейные операции над ними</b>                   | <b>92</b>  |
| <b>41 Линейная зависимость и независимость векторов</b>          | <b>94</b>  |
| <b>42 Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов</b> | <b>96</b>  |
| 42.1 Скалярное произведение . . . . .                            | 96         |
| 42.2 Векторное произведение . . . . .                            | 97         |
| 42.3 Смешанное произведение . . . . .                            | 97         |
| <b>43 Прямая на плоскости</b>                                    | <b>98</b>  |
| <b>44 Уравнение плоскости в пространстве</b>                     | <b>103</b> |
| 44.1 общее уравнение плоскости . . . . .                         | 103        |
| 44.2 уравнение плоскости, проходящей через 3 точки . . . . .     | 103        |
| 44.3 уравнение плоскости в отрезках . . . . .                    | 103        |
| 44.4 Нормальное уравнение плоскости . . . . .                    | 104        |
| <b>45 Уравнение прямой в пространстве</b>                        | <b>105</b> |
| <b>46 Поверхности второго порядка, метод сечения</b>             | <b>106</b> |
| 46.1 Метод сечений . . . . .                                     | 106        |
| <b>47 Поверхности вращения</b>                                   | <b>107</b> |
| <b>48 Цилиндрические поверхности</b>                             | <b>108</b> |
| 48.1 Примеры . . . . .   | 108        |
| <b>49 Конические поверхности</b>                                 | <b>110</b> |

|  |            |
|--|------------|
| <b>50 Эллипсоид, Параболоиды, Гиперболоиды</b>   | <b>112</b> |
| 50.1 Эллипсоид . . . . .   | 112        |
| 50.2 Гиперболоиды . . . . .  | 113        |
| 50.2.1 Однополостные . . . . .   | 113        |
| 50.3 Двуполостный гиперболоид, виброчаша . . . . .   | 113        |
| 50.4 Параболоиды . . . . .   | 114        |
| 50.4.1 Эллиптический . . . . .   | 114        |
| 50.4.2 Гиперболический Параболоид aka Седло для коня из<br>конических поверхностей . . . . . | 114        |

## Глава 1

# PUBLIC SERVICE ANNOUNCEMENT

Todo list

1. add pictures to latter questions
2. fix types and mistakes, pointed out by redactors
3. align pictures properly
4. fill out the progress table
5. fix chapter names
6. rearrange misaligned questions
7. redo tikzpictures for the  $2^{nd}$  quesiton

# Глава 1

## Элементы теории Множеств

### 1.1 Множества и операции над ними

Множество - совокупность некоторых объектов, обладающих определёнными свойствами. Каждый из объектов называется элементом обозначение множества:  $\{a|P(a)\}$  где  $P(a)$  - свойство, объединяющее объекты  $a$ .

Специальные символы, обозначающие операции над множествами:

1. содержится:  $A \subseteq B$ . Каждый элемент множества  $A$  содержится в  $B$ .
2. совпадает:  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$
3. объединение:  $A \cup B = \{c|c \in A \text{ или } c \in B\}$
4. пересечение:  $A \cap B = \{c|c \in A \text{ и } c \in B\}$
5. теоритическо-множественная разность:  $A \setminus B = \{c|c \in A \text{ и } c \notin B\}$
6. декартово произведение:  $A \times B = \{(a, b)|a \in A; b \in B\}$ <sup>1</sup>

Операции с  $\emptyset$ :

1.  $A \cup \emptyset = A$
2.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
3.  $A \setminus \emptyset = A$
4.  $\emptyset \setminus A = \emptyset$

### 1.2 Замкнутость множеств

Рассматривая операции умножения и деления над  $\mathbb{N}$  мы *остаёмся* в  $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$  замкнуто относительно операции умножения. Для того, чтобы  $\mathbb{N}$

---

<sup>1</sup>каждый элемент в паре с каждым другим, как при раскрытии скобок



стало замкнуто относительно операции вычитания нужно добавить к нему отрицательные числа и ноль тем самым привратив его в  $\mathbb{Z}$ . Таким образом  $\mathbb{Z}$  замкнуто относительно  $\times, \pm$  но не  $\div$ . Для того, чтобы замкнуть  $\mathbb{Z}$  относительно  $\div$ , нужно дополнить его дробями вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Т. О. получили  $\mathbb{Q}$  Получили:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  где  $\mathbb{R}$  - действительные числа.

### 1.3 Ограниченность множеств

А ограничено сверху, если  $\exists M, \forall a \in A : a \leq M$  и А ограничено снизу, если  $\exists M, \forall a \in A : a \geq M$

Таким образом, если множество ограничено **и** сверху **и** снизу, оно называется *ограниченным*.  $\Rightarrow \exists M, \forall a \in A : |a| \leq M(1)$

$$\begin{aligned} \exists M_1, M_2, \forall a \in A : M_1 \leq a \leq M_2 \\ M = \max(|M_1|, |M_2|) \\ M \geq |M_1| \geq M_2 \\ M \geq |M_1| \Rightarrow -M \leq -|M_1| \leq M_1 \Rightarrow \\ \forall a \in A : -M \leq -M_1 \leq a \leq M_2 \leq M \rightarrow -M \leq a \leq M \end{aligned}$$

Следовательно из ограниченности А получается (1).

### 1.4 Окрестности

Рассмотрим  $a \in \mathbb{R}$ . Окрестностью а является отрезок  $(b; c)$ , содержащую а. Рассмотрим  $\epsilon > 0$ .  $\epsilon$ -окрестностью а является отрезок  $(a - \epsilon; a + \epsilon)$ , содержащую а.

$\mathcal{U}_\epsilon(a)$  есть отрезок длиной  $2\epsilon$ , центром которого является а:

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \epsilon\}$$

Оно бывает и проколото: т.е. из отрезка удалена точка а:  $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(a) = \mathcal{U} \setminus \{a\}$

## Глава 2

# Функции

обведи пж важные уравнения в коробку `\boxed{eq:*\}\{\dots\}`

Пусть даны 2 непустых множества  $A$  и  $B$ . Отображением из  $A$  в  $B$  называется правило, согласно которому каждому элементу множества  $A$  соответствует не более одного элемента  $B$ . Это обозначается  $f : A \rightarrow B$ . Областью определения  $f$  называется множество  $D(f) = \{a \in A \mid \exists b = f(a)\}$ <sup>1</sup>. Множеством значений  $f$  называется множество  $E(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A; b = f(a)\}$ <sup>2</sup>. Запись  $b = f(a)$  обозначает, что  $a \in A$  в отображении  $f$  соответствует  $b \in B$  тут  $b$  - образ, а  $a$  - прообраз.

Свойства биективного<sup>2</sup> отображения  $f : A \rightarrow B$ :

1.  $D(f) = A$
2.  $E(f) = B$
3.  $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
4. обратное отображение:  $f^{-1} : B \rightarrow A; a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$

График отображения  $f : A \rightarrow B = \{(a, b) \mid b = f(a)\} \subset A \times B$ . Если  $A$  и  $B$  - числовые, то это функция, тогда график функции есть подмножество в декартовом квадрате<sup>3</sup>. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат: элементам множества  $\mathbb{R}^2$  можно поставить в соответствие точки этой плоскости, координаты которой в этой С.К. являются эти элементы  $\mathbb{R}^2$ . Тогда график функции можно представить как множество точек, причем ясно, что не каждое множество точек задает график функции. Множество точек задает график функции тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая параллельная оси ординат пересекает множество данных не более одного раза. Функция может задаваться *аналитически, графически и неявно*. Неявный способ: Рассмотрим  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и Рассмотрим  $F(x; y) = 0$ . На Координатной плоскости рассмотрим множество решений

---

<sup>1</sup> $f$  - заданное нами правило

<sup>2</sup>взаимнооднозначного

<sup>3</sup> $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

этого уравнения:  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | F(x; y) = 0\}$ : если оказывается, что это множество является графиком функции, функция задана неявно уравнением  $F(x; y) = 0$ .

## 2.1 Типовые функции, график функции

Линейная функция:

Функция вида  $y = kx + b$ ;  $k, b \in \mathbb{R}$  имеет графиком невертикальную прямую при  $b = 0$  график функции проходит через  $(0; 0)$ .  $K$  - угловой коэффициент равный тангенсу угла наклона графика к  $Ox$ . Взаимное расположение двух прямых, заданных функциями  $y_1 = k_1x + b_1$  и  $y_2 = k_2x + b_2$ :

1. совпадение прямых  $\Leftrightarrow k_1 = k_2; b_1 = b_2$
2. параллельность прямых  $\Leftrightarrow k_1 = k_2$  и  $b_1 \neq b_2$
3. пересечение прямых  $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

доказательство свойства 2:

$\Rightarrow$ ) Пусть прямые  $y_1 = k_1x + b_1$  и  $y_2 = k_2x + b_2$  параллельны.

Следовательно у них не общих точек:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

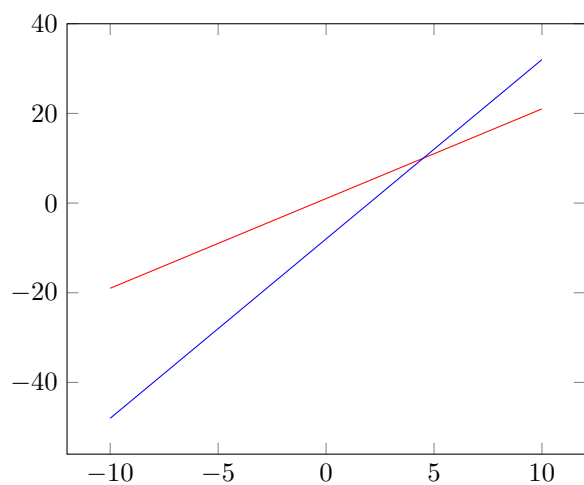
$\Rightarrow x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1$  не имеет решений

$$\text{Следовательно } x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ) Предположим, что  $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$  и проведем все эти действия в обратном порядке.

### 2.1.1 Формула получения угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



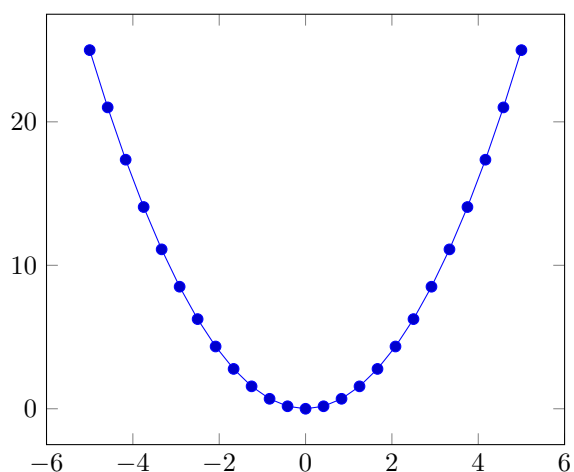
обозначим угол между красной и синей линиями за  $\theta$ , наклон линий соответственно  $\phi_1$  и  $\phi_2$   $\theta = \phi_1 - \phi_2$   
 $k_1 = \tan \phi_1$   
 $k_2 = \tan \phi_2$   
 $\theta = \tan \phi_1 - \tan \phi_2 \Rightarrow$

$$\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \quad (2.1)$$

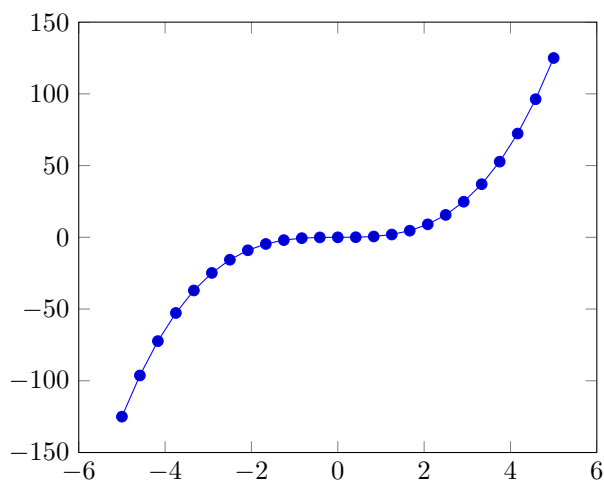
Таким образом 2 прямые взаимноперпендикулярны тогда и только тогда когда  $k_1 = \frac{-1}{k_2}$

### 2.1.2 Основные элементарные функции

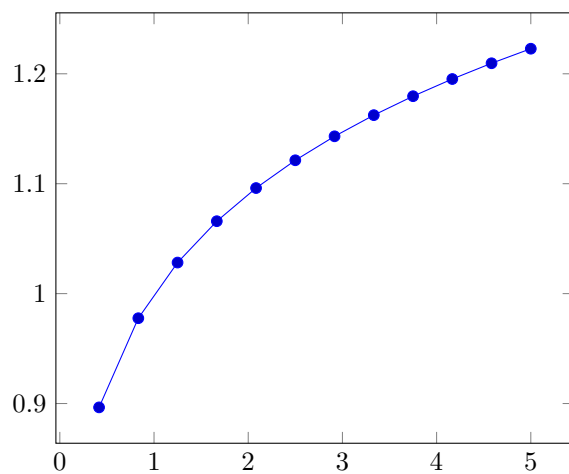
Степенная функция



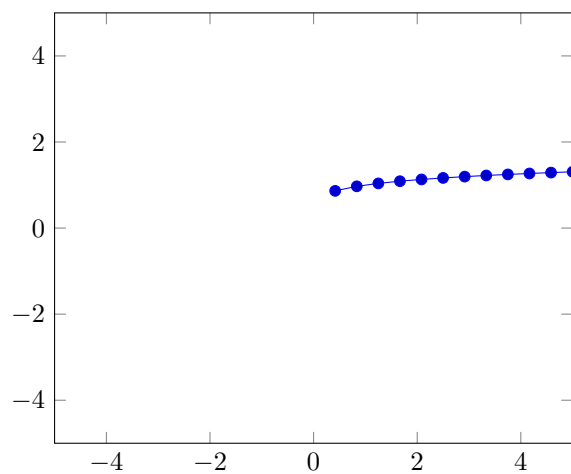
$n = 2n$



$n = 2n+1$



$x^{\frac{1}{n}}$  где  $n$  - четное



$x^{\frac{1}{n}}$  где  $n$  - нечетное

ДОДЕЛАЙС

## Глава 3

# Окружность, Эллипс, Гипербола, Парабола

Пусть Существует прямоугольная система координат  $Oxy$ ; Пусть даны две точки  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ ; Тогда расстояние между  $A$  и  $B$  вычисляется так:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (3.1)$$

### 3.1 Фигуры и канонические уравнения фигур

Говорят, что уравнение на плоскости задает некоторую фигуру, если принадлежность  $M(x; y)$  этой фигуре равносильно выполнению равенства  $f(x; y) = 0$  для каждой точки этой фигуры.

#### 3.1.1 Окружность

**Окружностью называется множество всех точек в плоскости, удаленных от данной фиксированной точки, называемой центром окружности на одно и то же расстояние, называемое радиусом окружности.**

дана точка  $M(x; y)$  и окружность с центром  $O(x_0, y_0)$ .  $M \in \omega(O, r) \Leftrightarrow |MO| = R \Leftrightarrow |MO|^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (3.2)$$

Равенство 3.2 есть уравнение окружности т.к. оно равносильно принадлежности точки  $M$  к окружности.

#### 3.1.2 Эллипс

Пусть на плоскости заданы 2 точки  $F_1, F_2$ , расстояние между которыми равно  $2c$ ; и пусть дано некоторое число  $a > c$ . **Эллипсом называется**

множество всех точек ранной плоскости, для которых сумма расстояний от этой точки до точек  $F_1$  и  $F_2 = 2a$ . Точки  $F$  называются фокусами эллипса. Вывод:

Зададим на плоскости ПСК с  $Ox = F_1F_2$ ; координаты точек  $F$  получаются:  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

Возьмем произвольную точку  $M(x; y) \Rightarrow (MF_1 + F_1F_2) = 2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\therefore a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \text{ делим на } a^2b^2$$

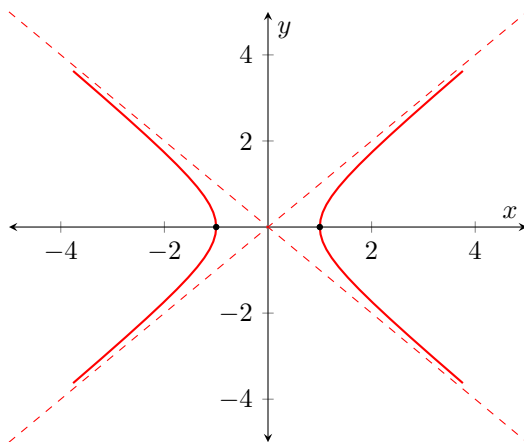
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (3.3)$$

1

Так как обе переменных  $x$  и  $y$  в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. Эллипс ограничен прямоугольником  $2a$  на  $2b$ . В случае совпадения  $a$  и  $b$  получим  $\omega(0, a)$ . **эксцентриситет эллипса:**  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ .  $\varepsilon \in [0; 1]$   $\therefore \varepsilon = 0$  для окружности.

### 3.1.3 Гипербола

На плоскости заданы несовпадающие точки  $F_1, F_2$ , расстояние между которыми равно  $2c$ . Пусть  $a \in (0; c)$ . **Гиперболой называется множество точек, для которых разность расстояний от точки до  $F_1$  и  $F_2$ .  $F_1$  и  $F_2$  это фокусы гиперболы.** На плоскости задана ПСК с  $Ox = F_1F_2$ ; координаты точек  $F$  получаются:  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$



<sup>1</sup>неуверен в записи, особенно в  $(MF_1 + F_1F_2) = 2a$

wywod urawnenija giperboly zdesja.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1 \quad (3.4)$$

Так как обе переменных  $x$  и  $y$  в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат.  $y = \pm \frac{b}{a}x$  - асимптоты гиперболы.  $a$  и  $b$  - полуоси гиперболы, точки пересечения с  $Ox$  - вершины. **эксцентриситет гиперболы:**  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ .  $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

### 3.1.4 Парабола

На плоскости задана прямая  $\Delta$  и  $F \notin \Delta$ . **Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от  $\Delta$  и  $F$ .** При этом  $\Delta$  - директриса параболы,  $F$  - фокус Параболы. Введем ПСК:  $Ox$  проходит через  $F$  и  $\perp \Delta \Rightarrow F(\frac{p}{2}; 0)$  где  $p$  - расстояние от  $F$  до  $\Delta$ .

Уравнение параболы  
wywod urawnenija tuta

$$y = \pm 2px \quad (3.5)$$

$y$  в уравнении в четной степени  $\Rightarrow$  парабола симметрична относительно  $Ox$  при  $x \geq 0$  получается, что парабола расположена в правой полуплоскости.



## Глава 4

# Бином Ньютона

Бином Ньютона:  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$

Сочетания:  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Применим метод математической индукции:

1. При  $n=1$  имеем:  $a+b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = \frac{1!}{0!(1-0)!}b + \frac{1!}{1!(1-1)!}a = b+a$   
Таким образом, при  $n=1$  формула верна

2. При  $n=2$ :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!}b^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!}ab + \frac{2!}{2!(2-2)!}a^2 = b^2 + 2ab + a^2$$

Для  $n=2$  также справедлива формула бинома Ньютона

3. Предположим, что она верна и при  $n=k$ :

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i}$$

4. Предположим, что она верна и при  $n=k+1$

*Действительно:*

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k(a+b) = \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i}\right)(a+b) = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \\ &+ \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i+1} = C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=1}^k C_k^i a^i b^{k-i+1} + \\ &C_k^0 b^{k+1} a^0 = \end{aligned}$$

Заметим, что в обеих суммах сумма показателей степеней  $a$  и  $b$  в каждом слагаемом равна одному и тому же  $(k+1)$ . С другой стороны, каждая из этих сумм содержит ровно одно слагаемое с множителями  $ab^k$  и ровно одно слагаемое с показателями  $a^2 b^{k-1}$  и  $a^k b$ , поэтому:

$$\begin{aligned} &= C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum_{i=0}^{k-1} (C_k^i + C_k^{i+1}) a^{i+1} b^{k-i} + C_k^0 b^{k+1} a^0 \\ C_k^i + C_k^{i+1} &= \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!} = \frac{k!(i+1)+k!(i-1)}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{k!(k+1)}{(i+1)!(k-i)!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{(k+1)!}{(i+1)!((k+1)-(i+1))!} = C_{k+1}^{i+1}$$

Продолжая цепочку равенств в вычисляемом  $(a+b)^{k+1}$ , получаем:

$$1 * a^{k+1}b^0 + \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i+1} a^{i+1}b^{k-i} + 1 * a^0b^{k+1}$$

$$1 = C_{k+1}^{k+1} = C_{k+1}^0$$

В сумме сделаем замену  $j = i + 1$ :

$$C_{k+1}^{k+1} a^{k+1}b^0 + \sum_{i=1}^k C_{k+1}^j a^j b^{(k+1)-j} + C_{k+1}^0 a^0 b^{k+1} = \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j a^j b^{(k+1)-j}$$

Таким образом, мы показали, что формула Бинома Ньютона справедлива при  $n = k + 1 \Rightarrow$  эта формула справедлива для любого натурального  $n$

## Глава 5

# Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.

Числовая последовательность называется отображением в котором каждому  $\mathbb{N}$  числу соответствует некоторое число. Последовательности принято изображать  $\{x_n\} = x_1; x_2; \dots x_n$ . Если из  $\{x_n\}$  взято некое бесконечное подмножество, из которого сформирована другая последовательность, в которой **порядок следования членов такой же как и в исходной последовательности, то она называется подпоследовательностью**. Обозначение  $\{x_{n_m}\}$ . Из определения последовательности: если  $k_1 < k_2 \Rightarrow m_1 < m_2$ . Число  $a$  называется пределом последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$  в сколь угодно малой  $\mathcal{U}_\epsilon(a)$  может находиться **конечное число членов этой последовательности**.

Предел числовой последовательности есть точка, в которой *кучкуются* почти все члены последовательности за исключением, может последнего члена.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*; в противном случае - *расходящейся*. Расходящиеся последовательности также включают бесконечно большие последовательности.

бесконечно большие последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$$

бесконечно малые последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| < M$$

## 5.1 Свойства сходящихся последовательностей

### DOKAZAT' SWOJSTWA

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Действительно, если предположить, что пределов 2, можно указать несколько  $\mathcal{U}_\epsilon$  этих пределов, не пересекающих друг друга. По определению предела внутри каждой из этих  $\mathcal{U}_\epsilon(a)$  должно содержаться бесконечно много членов последовательности, что есть противоречие.
2. Если Последовательность сходится к  $a$ , то любая подпоследовательность этой последовательности сходится к  $a$ .
3. Любая мходящаяся последовательность ограничена:

$$\text{Пусть } \epsilon = 1 : \exists \in \mathbb{N}, n \geq N : |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$$

Пусть члены  $x_1 \dots x_{N-1}$ , не попавшие в рассматриваемую окрестность точки  $a$ . и Пусть  $M = \max(|x_1| \dots |x_{N-1}|, |a| + 1) \forall n, |x_n| \leq M$

4. Если для 2х членов последовательностей  $x_n$  и  $y_n$ , сходящихся к числам  $a$  и  $b$  соответственно, начиная с некоторого номера  $x_n < y_n, a \leq b$ :

$$\begin{aligned} &\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \\ &a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, A_n \geq N : x_n < y_n \\ &\text{Примем } \epsilon = \frac{b-a}{2} \\ &\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \\ &\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \frac{b-a}{2} \\ &\therefore \text{при } N = \max(N_1, N_2) \\ &\forall n \geq N : \begin{cases} x_n > a - \frac{b-a}{2} \\ x_n > a + \frac{b-a}{2} \\ b - \frac{b-a}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Если для 3х последовательностей  $x_n, y_n, z_n$  выполняется  $x_n \leq y_n \leq z_n$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ , то  $y_n$  также сходится к  $a$
6. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ , то начиная с некоторого номера  $|x_n| > \frac{a}{2}$  все члены этой последовательности имеют тот же знак, что и  $a$ .
- 7.

**Терозема 5.1.** Пусть  $x_n$  и  $y_n$  сходятся к  $a$  и  $b$ , тогда

- (a)  $\{x_n \pm y_n\} \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = a \pm b$
- (b)  $\forall c \{c \cdot x_n\} \lim_{n \rightarrow \infty} = c \cdot a$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} = \frac{1}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} = \frac{b}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

## Глава 6

# Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Выделяют бесконечно большие последовательности - последовательности, имеющие пределом бесконечность. Говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет бесконечный предел, если  $\forall M > 0 \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$ . Последовательность называется бесконечно малой последовательностью (б.м.п.), если  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$  выполняется равенство  $|x_n| < \epsilon$ .

### 6.1 Основные свойства б.м. и б.б. последовательностей

1. Сумма б.м. последовательностей есть б.м.п.
2. Произведение ограниченной последовательности и б.м. есть б.м.п.
3. Если  $\{x_n\}$  б.м.п., то  $\{x_n\}$  - ограниченная последовательность
4. Произведение б.м.п. есть последовательность б.м.
5. Если  $\{x_n\}$  б.м.п. и  $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $c = 0$ , т.е.  $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$
6. Если  $\{x_n\}$  б.м.п. и  $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 : \{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^\infty$  - б.б.п
7. Если  $\{x_n\}$  б.б.п., то  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \neq 0, \forall n \geq n_0$  и последовательность  $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^\infty$  - б.м.п

## Глава 8

### Число $e$

Рассмотрим последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$

#### 8.1 Сходимость

Докажем, что она сходится. Для этого используем вспомогательную последовательность  $y_n = x_n(1 + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Заметим, что  $1 + \frac{1}{n} > 1$ , поэтому:

$$y_n = x_n(1 + \frac{1}{n}) > x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = 1^n + n * 1^{n-1}(\frac{1}{n}) + \dots + (\frac{1}{n})^n > 1 + 1 = 2$$

Таким образом,  $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > 2$

Т.е. последовательность ограничена снизу числом 2

#### 8.2 Убывание

Теперь покажем, что она является убывающей. Для этого рассмотрим отношение  $\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} * \frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} =$

$$\frac{n}{n-1} * \frac{(n^2-1)^{n+1}}{(n^2)^{n+1}} = \frac{n}{n-1} * (\frac{n^2-1}{n^2})^{n+1} = \frac{1}{\frac{n-1}{n} * (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}} = (*)$$

$$(1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} = 1^{n+1} + (n+1) * 1^n * \frac{1}{n^2-1} + \dots + (\frac{1}{n^2-1})^{n+1} < 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$* < \frac{1}{\frac{n-1}{n} * \frac{n}{n-1}} = 1$$

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow \{y_n\}$$

По теореме 4, последовательность  $y_n$  сходящаяся. Вернемся к исходной последовательности  $x_n$   $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \text{ (по пункту 5 теоремы 1)}$$

Таким образом, последовательность  $x_n$  также сходящаяся.

### 8.3 Число $e$

Пределом этой функции является число Эйлера ( $e$ ). Таким образом, получаем следующее определение числа  $e$ :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Логарифм по основанию  $e$  - натуральный ( $\ln$ )

$$\ln a = b \Leftrightarrow e^b = a$$



## Глава 9

# Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.

## КАК-ТО МАЛО НАПИСАНО

Предел функции на бесконечности определяется так:

### 9.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x| > \delta; |f(x) - A| < \epsilon$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0), |f(x)| > \epsilon$

### 9.2 Односторонние пределы

$y = f(x)$  определена на  $(x - \delta; x)$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ : Односторонним пределом слева функции  $y = f(x)$  называется  $A$  :  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$ , если  $A$  существует.

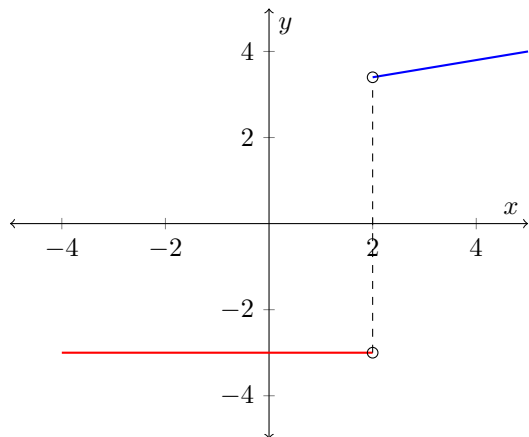
Аналогично определяется предел справа:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 + \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)} \quad (9.1)$$

*ГЛАВА 9. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА БЕСКОНЕЧНОСТИ,  
9.2. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ.*

---

предел слева(точка на красном) и справа(точка на синем)



в данном случае предела у функции  
нет

## Глава 10

# Бесконечно малые и бесконечно большие функции

БНФ не люди Пусть функция  $y = f(x)$  определена в окрестности  $U(x_0)$ .

Эта функция называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

А бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$  - если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

1. Сумма и произведение любого конечного числа б.м.ф. является б.м.ф
2. Пусть функция  $y = f(x)$  б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $y = g(x)$  ограничена в  $U(x_0)$ , то есть  $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| \leq c$ . Тогда функция  $y = f(x) * g(x)$  является б.м.ф.при  $x \rightarrow x_0$
3. произведение конечного числа б.б.ф является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
4. Пусть функция  $y = f(x)$  б.б.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $y = g(x)$  удовлетворяет свойству:  $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| > c$ , тогда функция  $y = f(x) * g(x)$  является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
5. Пусть функция  $y = f(x)$  б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \neq 0$  в  $U(x_0)$ , тогда функция  $y = \frac{1}{f(x)}$  является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
6. Если функция  $y = f(x)$  б.б.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , тогда функция  $y = \frac{1}{f(x)}$  является б.м.ф.при  $x \rightarrow x_0$

## Глава 11

# Непрерывность функций в точке, их свойства.

$y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена в этой точке, а также в  $\mathcal{U}_{(x)}$  и при этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$   
 $\Delta x = x - x_0$  - приращение аргумента  
 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  - есть приращение функции в  $x_0$   
 $y = f(x)$  непрерывна в  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \quad (11.1)$$

Непрерывность функции в точке означает то, что в любой, сколь угодно маленькой окрестности, бесконечно малое приращение аргумента влечёт за собой бесконечно малое приращение функции.

Свойства непрерывной функции в точке

1. Если функция непрерывна в точке  $x_0$ , то в некоторой окрестности этой точки эта функция ограничена.
2. Если функция непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то в некоторой окрестности  $x_0$  функция имеет тот же знак, что и  $f(x_0)$
3. Если  $y = f(x_0)$  и  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) < g(x_0)$ , то  $\exists \mathcal{U}_{(x_0)}$  где  $f(x) < g(x)$
4. Если  $y = f(x_0)$  и  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то так же непрерывны  $y = f(x_0) \pm y = g(x_0)$ ,  $y = f(x_0) \cdot y = g(x_0)$ ,  $y = f(x_0) y \div g(x_0)$
5. Непрерывность композиции функций: Если  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $z = f(x_0)$  непрерывна в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то  $y = f(g(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

$\forall \sigma > 0, \exists \tau > 0, \forall y \in \mathcal{U}_{\tau}(y_0) : |f(y) - f(y_0)| < \sigma$   
 $\forall \sigma > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \sigma$   
 что и означает непрерывность  $y = f(g(x))$  в точке  $x_0$

□

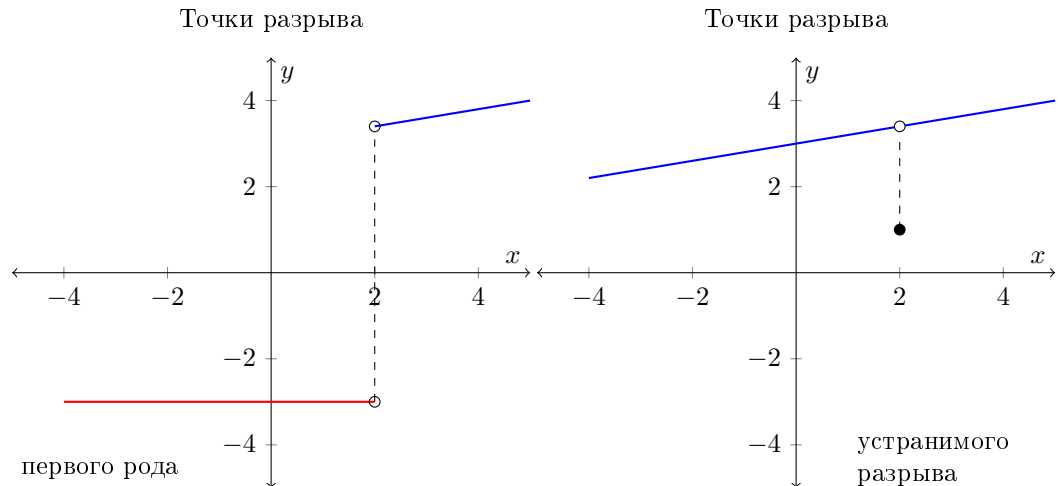
## 11.1 Односторонняя непрерывность

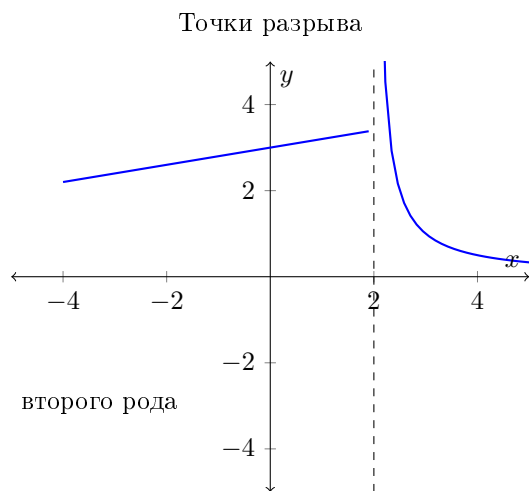
$y = f(x)$  определена на  $(x_0 - \delta; x_0]$  такая функция называется непрерывной слева, если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$  аналогично функция называется непрерывной справа, если  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ . Так как функция непрерывна, она непрерывна слева и справа.

Функция называется разрывна в точке  $x_0$ , если она либо не определена в этой точке, либо определена, но не непрерывна.

Классификация точек разрыва:

1. Если существуют и конечны оба односторонних предела и эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва.  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода





## 11.2 непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$

- постоянные функции
- $y = x$
- $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$
- дробно-рациональные функции  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены степени  $n$
- функции  $\sin, \cos, \tan, \cot$

## Глава 12

# Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы

### 12.1 Непрерывность элементарных функций

Заметим, что непрерывными в любой точке определения являются:

1. Постоянная функция:  $y = c$
2.  $y = x$
3.  $y = a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + \dots a_0$  - многочлен
4. Дробно-рациональная функция  
 $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , где  $P(x)$  и  $Q(x)$  - многочлены
5. Тригонометрические функции

### 12.2 Непрерывность синуса

Докажем непрерывность  $\sin$

Рассмотрим произвольный  $x_0$  и  $x = x_0 + \Delta x$

$$|\Delta \sin(x_0)| = |\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0| = |2 \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cos \frac{2x_0 + \Delta x}{2}| = 2 |\sin \frac{\Delta x}{2}| * |\cos(\frac{2x_0 + \Delta x}{2})| \leq 2 |\sin \frac{\Delta x}{2}| \leq 2 |\frac{\Delta x}{2}| = |\Delta x| \leq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon, \forall |\Delta x| < \delta : |\Delta \sin x_0| \leq |\Delta x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \sin x_0 = 0 \Rightarrow$$

$\sin x$  - непрерывна

Непрерывность  $\cos$  получаем из уже доказанной непрерывности синуса, теоремы о непрерывности композиции функций. Формула приведения:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

Непрерывность  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$  получаем из непрерывности  $\sin$  и  $\cos$ , частного непрерывных функций

## 12.3 Еще непрерывные функции

Можно также доказать непрерывность

1. показательной функции  $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
2.  $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
3. А также функций, обратных к тригонометрическим, в каждой точке области их определения
4. Непрерывной является также степенная функция  $y = x^\alpha, \alpha > 0$  в каждой точке своей области определения
5. Если  $\alpha < 0$  и данная функция имеет смысл при  $x < 0$ , то данная функция непрерывна в каждой точке своей области определения. При этом заметим, что точка  $x = 0$  является точкой разрыва второго рода

## 12.4 Замечательные пределы

При вычислении пределов функций часто удобно использовать так называемые "Замечательные пределы"

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  (1-й замечательный предел)
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$  (2-й замечательный предел)  
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a};$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  (3-й замечательный предел)
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  (4-й замечательный предел)  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\beta - 1}{x} = \beta$  (5-й замечательный предел)

При вычислении пределов удобно также пользоваться следующим следствием из теоремы о непрерывности композиции функций:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$  При условии, что функция  $g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $f$  непрерывна в точке  $y_0 = g(x_0)$  - доказать самостоятельно



## Глава 13

# Сравнение функций, эквивалентные функции

Пусть  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  определены в  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Говорят, что  $f(x)$  сравнима с  $g(x)$ , если

$$\boxed{\exists \epsilon, \exists \mathcal{U}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|} \quad (13.1)$$

В этом случае пишут, что  $f(x) = O(g(x))$ .

Очевидно, что  $f(x) = O(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} \leq \epsilon$  а это означает, что  $\frac{f(x)}{f(x)}$  ограничена в  $\mathcal{U}_{x_0}$ .

Говорят, что  $y = f(x)$  бесконечно мала по сравнению  $y = g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| <$

**HILFE MIR! ICH HABE DAS KONSPEKT NICHT!** тогда

пишут, что  $f(x) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{f(x)} \right| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x) \cdot \alpha(x)$  где  $\alpha(x)$  - БМФ при  $x \rightarrow x_0$ .

### 13.1 Эквивалентность

Функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  эквивалентны при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  или конечному числу  $A$ , тогда пишется  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ , тут  $y = g(x)$  - главная часть  $y = f(x)$

**Лемма 13.1.** Если  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\forall x$ :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

Таблица эквивалентных при  $x \rightarrow x_0$ :

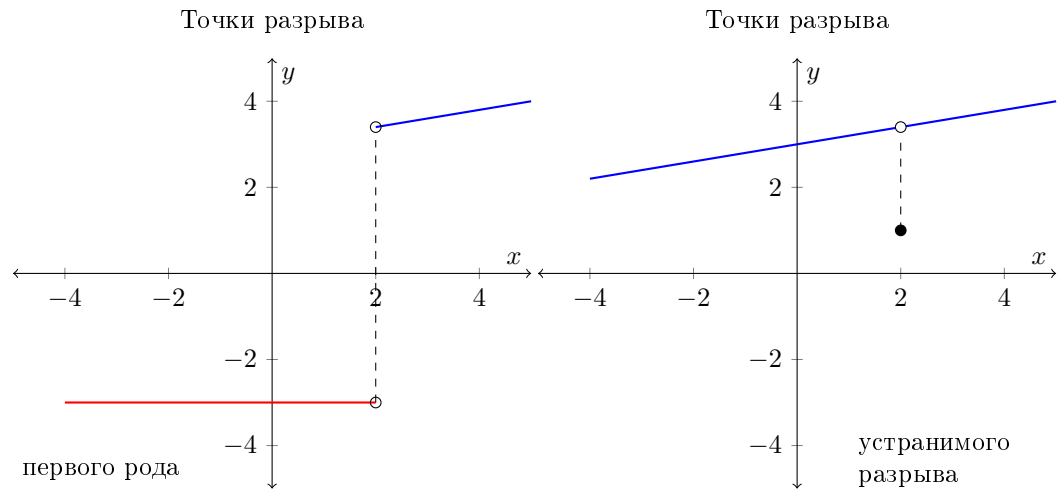
|                           |                   |
|---------------------------|-------------------|
| $\sin(x)$                 | $x$               |
| $\operatorname{tg}(x)$    | $x$               |
| $\arcsin(x)$              | $x$               |
| $\operatorname{arctg}(x)$ | $x$               |
| $1 - \cos(x)$             | $\frac{x^2}{2}$   |
| $\ln a$                   | $x$               |
| $a^x - 1$                 | $x \cdot \ln a$   |
| $\log_a 1 + x$            | $\frac{x}{\ln a}$ |
| $e^x - 1$                 | $x$               |
| $(1 + x)^\beta - 1$       | $\beta x$         |
| $x^\beta - 1$             | $\beta(x - 1)$    |

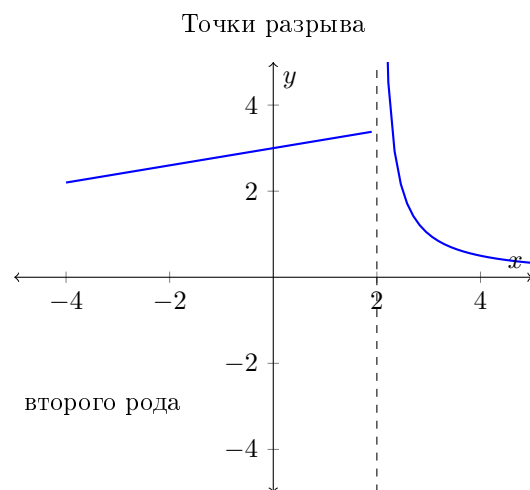
## Глава 14

# Точки разрыва

Классификация точек разрыва:

1. Если существуют и конечны оба односторонних предела и эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва.  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода





## Глава 15

# Непрерывность функции на отрезке

Пусть  $y = f(x)$ ,  $[a; b] \subset \mathcal{D}(y)$ .  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , если она непрерывна в каждой точке интервала  $(a; b)$  и непрерывна справа в точке  $a$  и слева в точке  $b$ .

**Терозма 15.1.** *Кантора о вложенных отрезках.*

*Имеется  $[a; b]$  и совокупность вложенных отрезков  $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$  и при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0^1$ , тогда*

$$\boxed{\exists a \in [a; b] : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (15.1)$$

Используя теорему Кантора Докажем теорему Больцана-Вейерштрасса

*Доказательство.*  $\forall \{x_n\} \subset [a; b]$  можно выделить мходящуюся подпоследовательность:

Разобьём  $[a; b]$  точкой  $C$  пополам и рассмотрим  $[a_1; b_1]$ , половину первоначального отрезка.

Эта половна содержит бесконечно много точек из  $\{x_n\}$ . Пусть  $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$ . Точкой  $C_2$  Разобьём отрезок  $[a_1; b_1]$  пополам и мрассмотрим  $[a_2; b_2]$ , она содержит бесконечно много точек из  $\{x_n\}$

и в этом отрезке обозначим  $x_{n_k}$ , чтобы  $n_2 > n_1$  и так далее. Получим

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\} &\in [a_k; b_k], \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ a_k &\leq x_{n_k} \leq b_k, b_k - a_k = \frac{b_k - a_k}{2^k} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k - a_k}{2^k} &= 0 \end{aligned}$$

По теореме Кантора имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = a$

В неравенстве  $a_k \leq x \leq b_k$  перейдём к пределам.

---

<sup>1</sup>вложены друг в друга и уменьшаются

По теореме о 2х милиционерах:  
 $a_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq a_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a_0 \in [a; b]$

□

**Терозма 15.2.** Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

$\exists c > 0, \forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq c$

*Доказательство.* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Предположим, что она неограничена на этом отрезке.

Отсюда  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| \geq n$

Отсюда по Больцана-Вейерштрасса в  $\{x_n\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  с пределом  $x_0 \in [a; b]$

Отсюда  $\forall k, |f(x_{n_k})| > n_k, \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| \geq \infty$

Поскольку  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , в  $x_0$  функция не является непрерывной, а терпит разрыв второго рода, что протеворечит нашему утверждению. □

**Терозма 15.3.** Вейерштрасса.

Непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает на нём своего максимального и минимального значений.

## Глава 16

# Теорема Коши о прохождении через ноль. Теорема Коши о промежуточном значении

### 16.1 Теорема Больцано-Коши о среднем значении

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и пусть  $f(a) \neq f(b)$ . Тогда для любого числа  $c$ :  $c \in (f(a); f(b))$ ,  $\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = c$   
(Для определенности предположим, что  $f(a) < f(b)$ )

#### 16.1.1 Доказательство

Рассмотрим  $x_0$  -середина отрезка  $[a; b]$ . Возможны 2 случая:

1.  $f(x_0) = c \Rightarrow \xi = x_0 \Rightarrow$  доказано
2.  $f(x_0) \neq c \Rightarrow [a_1; b_1]$  - половина  $[a; b]$ , для которой  $f(a_1) < c < f(b_1)$   
 $x_1$  - середина  $[a_1; b_1]$ , если  $f(x_1) = c \Rightarrow x_1 = \xi$ . А если  $f(x_1) \neq c \Rightarrow [a_2; b_2]$ ,  $f(a_2) < c < f(b_2)$

*Продолжим этот процесс*

В результате мы либо через число шагов найдем  $x_n : f(x_n) = c \Rightarrow \xi = x_n$ , либо построим совокупность вложенных отрезков  $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$   
 $f(a_n) < c < f(b_n)$

В этом случае, по теореме Кантора о вложенных стяг. отрезках  $\exists a_0 \in [a; b]$ ;  $a_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

ГЛАВА 16. ТЕОРЕМА КОШИ О ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ НОЛЬ.  
16.2. ВАЖНОЕ СЛЕДСТВИЕ КОШИ О ПРОМЕЖУТОЧНОМ ЗНАЧЕНИИ

Перейдя к пределу в последнем двойном неравенстве и, учитывая непрерывность функции, получим, что:

$$f(a_0) = c \Rightarrow \xi = a_0 \in [a; b]$$

## 16.2 Важное следствие

Из теоремы Больцано-Коши очевидным образом вытекает следствие: Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и пусть значения  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют различные знаки. Тогда найдется точка  $\xi \in [a; b] : f(\xi) = 0$ , т.е. график пересекает ось  $Ox$  в некоторой точке отрезка  $[a; b]$ .



## Глава 17

# Производная функции, односторонние производные

Пусть  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}(f(x))$ . Рассмотрим график функции. и прямые  $y = k(x - x_0) + f(x_0)$  Среди всех таких прямых рассмотрим ту, которая наиболее тесно прижимается к графику функции  $f(x)$ . Такая прямая называется касательной к графику функции в точке  $(x_0; f(x_0))$ . Эту прямую можно найти так: На графике функции рассмотрим кроме  $(x_0; f(x_0))$  рассмотрим  $(x_1; f(x_1))$  и прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая - секущая, приближённая<sup>1</sup>

Уравнение секущей с угловым коэффициентом. Так как секущая должна проходить через  $(x_0; f(x_0))$  должно выполняться равенство  $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow (x_1; f(x_1)) \rightarrow (x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow x_1 - x_0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$  Если этот предел конечен и существует, то он есть производная функции  $y = f(x)$  в  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$

$x_1 - x_0 = \Delta x, f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$   
 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  иногда обозначается  $\frac{df(x_0)}{dx}$

Может оказаться, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  бесконечен, в этом случае касательная к графику в точке вертикальна

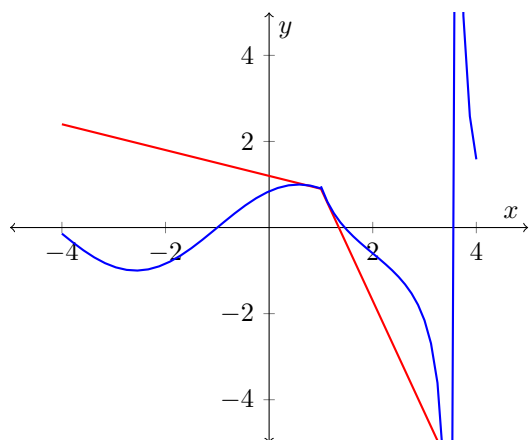
Как известно, существование конечного предела равносильно существованию и равенству между собой односторонних пределов  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  Эти односторонние пределы, если они конечны и существуют, называются односторонними производными и обозначаются  $f'(x_{0-0})$  и  $f'(x_{0+0})$  Их существование означает существование касательной к фрагменту графика функции левее и правее  $(x_0; f(x_0))$ . Справедливо и обратное.

Возможны случаи, когда односторонние пределы существуют, но не равны друг другу это значит, что в точке  $(x_0; f(x_0))$  терпит излом и не является гладким.

---

<sup>1</sup>Размытое определение

Излом графика функции



**Тероэма 17.1.** Если  $f(x)$  имеет конечную производную в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть Существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

Перейдём к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow f(x_0) \text{ непрерывна в } x_0$$

Заметим, что обратное утверждение неверно. □

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2.  $(cf)' = c(f)'$
3.  $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5.  $c' = 0$

---

<sup>2</sup>proofs are pending

| $f(x)$             | $f'(x)$                    |
|--------------------|----------------------------|
| $tg(x)$            | $\frac{1}{\cos^2(x)}$      |
| $ctg(x)$           | $\frac{-1}{\cos^2(x)}$     |
| $x^k$              | $k \cdot x^{k-1}$          |
| $e^x$              | $e^x$                      |
| $\log_a x$         | $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ |
| $\ln(x)$           | $\frac{1}{x}$              |
| $\arcsin(x)$       | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   |
| $\arccos(x)$       | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arctg(x)$        | $\frac{1}{1+x^2}$          |
| $\text{arcctg}(x)$ | $\frac{-1}{1+x^2}$         |

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$  при  $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$  при  $y = f(x)$

## Глава 18

# Уравнение касательной и нормали к графику функции

**Не найдено в конспекте. Собрано из интернета**

Предположим, что ф-я  $y = f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$  и непрерывна в точке  $x_0 \in (a, b)$ . В этой точке функция имеет значение  $y_0 = f(x_0)$ . Пусть независимая переменная в точке  $x_0$  получает приращение  $\Delta x$ . Соответствующее приращение функции  $\Delta y$  выражается формулой  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . На рисунке 1 точка  $M_1$  имеет координаты  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ . Построим секущую  $MM_1$ . Ее уравнение имеет вид  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , где  $k$  - угловой коэффициент, зависящий от приращения  $\Delta x$  и равный  $k = k(\Delta x) = \Delta y / \Delta x$ . При уменьшении  $\Delta x$  точка  $M_1$  стремится к точке  $M : M_1 \rightarrow M$ . В пределе  $\Delta x \rightarrow 0$  расстояние между точками  $M$  и  $M_1$  стремится к нулю. Это следует из непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0, \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |MM_1| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$$

Предельное положение секущей  $MM_1$  как раз и представляет собой касательную прямую к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M$ .

Возможны два вида касательных - наклонные и вертикальные.

Если существует конечный предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = k_0$ , то прямая, имеющая уравнение

$y - y_0 = k_0(x - x_0)$ , называется наклонной касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Если предельное значение  $k$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  является бесконечным:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = \pm\infty$ , то прямая, имеющая уравнение  $x = x_0$  называется вертикальной касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Важно отметить, что

$k_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ , то есть угловой коэффициент касательной равен значению производной функции  $f(x)$  в точке касания  $x_0$ .

Поэтому уравнение наклонной касательной можно записать в таком виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Поскольку угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона  $\alpha$ , который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, то справедливо следующее тройное равенство:

$$k = \tan \alpha = f'(x_0).$$

Уравнение нормали в декартовых координатах Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания  $(x_0, y_0)$ , называется нормалью к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке (рисунок 2).

Из геометрии известно, что произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно -1. Поэтому, зная уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

## Глава 19

# Основные правила дифференцирования, производные элементарных функций.

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2.  $(cf)' = c(f)'$

3.  $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

4. <sup>1</sup>  $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

5.  $c' = 0$

---

<sup>1</sup>proofs are pending

| $f(x)$             | $f'(x)$                    |
|--------------------|----------------------------|
| $tg(x)$            | $\frac{1}{\cos^2(x)}$      |
| $ctg(x)$           | $\frac{-1}{\cos^2(x)}$     |
| $x^k$              | $k \cdot x^{k-1}$          |
| $e^x$              | $e^x$                      |
| $\log_a x$         | $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ |
| $\ln(x)$           | $\frac{1}{x}$              |
| $\arcsin(x)$       | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   |
| $\arccos(x)$       | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arctg(x)$        | $\frac{1}{1+x^2}$          |
| $\text{arcctg}(x)$ | $\frac{-1}{1+x^2}$         |

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$  при  $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$  при  $y = f(x)$

## Глава 20

# Дифференциал функции

Функция называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если её  $\Delta f(\Delta x)$  можно представить так:  $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$  где  $A$  - конечное число;  $A(x - x_0)$  называется дифференциалом.

**Тероэма 20.1.** *Функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда функция имеет конечную производную в этой точке и производная функции равна  $A$*

*Доказательство.* Если  $y = f(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , то

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)|_{\div(x-x_0)}$$

при перезоде к пределам:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A + o(x - x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

Предположим, что  $f(x)$  имеет конечную производную

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'x_0 + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow A = f'(x_0)$$

□



Таким образом дифференцируемость функции равносильна существованию её конечной производной.

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + (x - x_0) \quad (20.1)$$

При  $x \rightarrow x_0$ ,  $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Бесконечно малое приращение аргумента  $\Delta x$  обозначается  $dx$ , отсюда

$$df(x_0) = f'(x_0)dx \quad (20.2)$$

Заметим, что формула справедлива и когда  $x$  - функция.

$$df(x(t)) = (f'(x(t)))'dt = f'(x) \cdot x'(t)dt = f'(x)dx \quad (20.3)$$

Дифференциал можно использовать и при приближённом вычислении значения функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0 \Rightarrow$$

при  $x$  близких к  $x_0$   $o(x - x_0) \approx 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow$

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0) \quad (20.4)$$

Пример:

$$\sqrt[100]{1.1} \approx |_{x_0 \approx 1 = \sqrt{x}}|_{x=1}$$

$$(1.1 - 1) + \sqrt[100]{1} = (x^{\frac{1}{100}})|_{x=1} \cdot 0.1 + 1 = \frac{1}{100} \cdot x^{-0.99}|_{x=1} \Rightarrow$$

$$0.1 \cdot \frac{1}{100} + 1 = 1.001$$

## 20.1 Основные свойства производной на отрезке

**Тероэма 20.2.** Ферма: Пусть  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  если

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

---

<sup>1</sup>max || min

для мин. экстр  $f(x_0) \geq f(x)$

*Доказательство.* Если  $x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , то  $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$ . Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

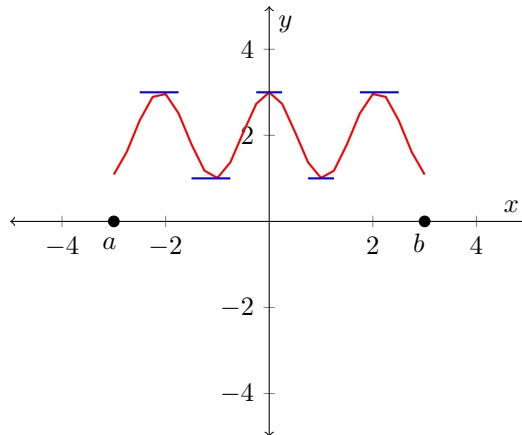
□

**Теорема 20.3.** *Ролля:* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  и Если  $f(a) = f(b)$ ,  $\exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

*Доказательство.* Если  $f(x)$  не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего максимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, что хотя один из них отличается от  $f(a) = f(b)$ . Обозначим такую точку экстремума  $c \in (a; b)$

$f(c) \neq f(a) = f(b)$  и по теореме Ферма  $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

**Тероэма 20.4.** Коши: Пусть  $y = f(x)$  и Пусть  $y = g(x)$  непрерывны на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a; b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Пусть функция  $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ . Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля  $\Rightarrow \exists c \in (a; b) : F'(x) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad \square$$

## Глава 21

# Производные и дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , и предположим, что она дифференцируема, значит для любого  $x$  определена  $f'(x)$ . Таким образом получим первую производную. Эта функция также может быть дифференцируема в каждой точке.

Вычислив ее производную, получим вторую производную.

Рассуждая аналогичным образом, можно получить производную любого порядка

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)dx^3$$

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$$

Производные высших порядков используются для вычисления приближенных значений функций.

## Глава 22

# Дифференцирование функции, заданной параметрически

Зависимость функции  $y$  от аргумента  $x$  может осуществляться через посредство третьей переменной  $t$ , называемой параметром:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (22.1)$$

В этом случае говорят, что функция  $y$  от  $x$  задана параметрически. Параметрическое задание функции удобно тем, что оно дает общую запись для прямой и обратной функций. Предположим, что на некотором промежутке функции  $x = \phi(t)$  и  $y = \psi(t)$  имеют производные, причем  $\phi'(t) \neq 0$ . Кроме того, для  $x = \phi(t)$  существует обратная функция  $x^{-1} = t(x)$  (производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции).

Тогда  $y(x) = \psi(t(x))$  - сложная функция и ее производная:

$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ . Производную тоже запишем в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \end{cases} \quad (22.2)$$

## Глава 23

# Локальный экстремум функции, теорема Ферма

Определение локального максимума и локального минимума Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , где  $\delta > 0$ . Говорят, что функция  $f(x)$  имеет локальный максимум в точке  $x_0$ ,  $\forall x \neq x_0 \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ . Если поменять знак на строгий, то максимум строгий, если знак перевернуть, то будет минимум, а если знак перевернуть и поменять на строгий, то строгого минимума.

**Теорема 23.1.** Ферма: Пусть  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  если

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

для мин. экстр  $f(x_0) \geq f(x)$

*Доказательство.* Если  $x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , то  $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$ . Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad (23.1)$$

---

<sup>1</sup>max || min

□

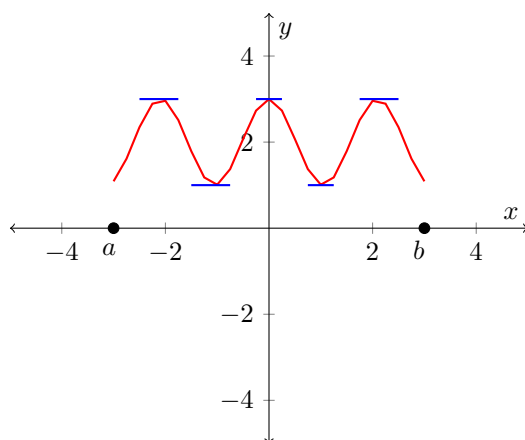
## Глава 24

# Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

**Теорема 24.1.** *Ролля:* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  и Если  $f(a) = f(b)$ ,  $\exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

*Доказательство.* Если  $f(x)$  не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего максимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, что хотя один из них отличается от  $f(a) = f(b)$ . Обозначим такую точку экстремума  $c \in (a; b)$   $f(c) \neq f(a) = f(b)$  и по теореме Ферма  $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□



**Терозема 24.2.** Коши: Пусть  $y = f(x)$  и Пусть  $y = g(x)$  непрерывны на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a; b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Пусть функция  $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ .

Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля  $\Rightarrow$

$\exists c \in (a; b) : F'(x) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad \square$$

**Терозема 24.3.** Лагранжа о конечном приращении.

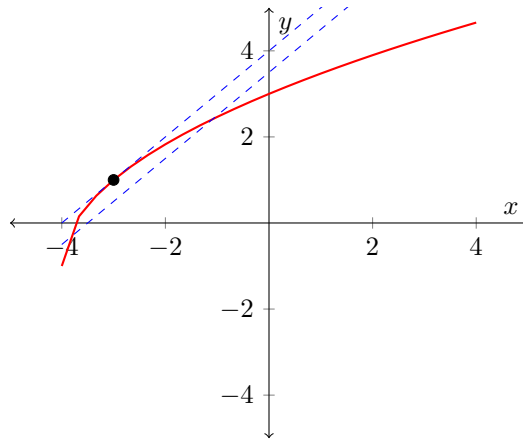
Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

*Доказательство.* наряду с  $y = f(x)$  рассмотрим  $g(x) \equiv x$ . Заметим, что эти 2 функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда получается,

что  $\exists c \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$   $\square$

Геосмысл



Геосмысл теоремы Лагранжа: Прямая, проходящая через точки  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$  задаётся уравнением  $y = k(x - a) + f(a)$ .  $k$  найдём из условия прохождения этой прямой через точку  $(b; f(b))$ .  $f(b) = k(b - a) + f(a)$

$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$  на  $(a; b)$  в условиях теоремы Лагранжа Существует такая точка  $c$ , в которой касательная к графику функции параллельна хорде, стягивающей  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$

## Глава 25

# Правило Лопиталья

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  и обращаются в нуль в этой точке:  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . Пусть  $g'(x_0) \neq 0$ . Если существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Замечание:** Правило Лопиталья также справедливо, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

### Доказательство

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$ , значит  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . По теореме Коши для отрезка  $[x_0; x]$ , лежащего в окрестностях  $x_0$  существует  $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , где  $c$  лежит между точками  $x$  и  $x_0$ . Учитывая, что  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При  $x \rightarrow x_0$   $c$  также стремится к  $x_0$ ; перейдем к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получается  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , значит

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (25.1)$$

А если кратенько, то полученную формулу можно читать так: **предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если по следний существует.**

**Замечания:**

1. Правило Лопиталья справедливо и в случае, когда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  не определены при  $x = x_0$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . В этом случае  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
2. Правило Лопиталья справедливо и в случае, когда  $x \rightarrow \infty$ :  

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
3. Если производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и  $f(x)$  и  $g(x)$ , то правило Лопиталья можно применить еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad (25.2)$$

**Виды неопределенностей:**

1. Неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ :  

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{2x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(6x))'}{(2x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin(6x)}{4x} =$$

$$\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} = \frac{3}{2} \times \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(6x))'}{(x)'} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos(6x)}{1} =$$

$$\frac{3}{2} \times 6 = 9$$
2. Неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ :  

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(5x)} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg}(3x))'}{(\operatorname{tg}(5x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2(5x)}{5\cos^2(3x)} = \frac{3}{5} \times$$

$$\left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(5x) - 1 + 1}{\cos^2(3x) - 1 + 1} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(10x) + 1}{\cos(6x) + 1} = \frac{3}{5} \times \left[ \frac{0}{0} \right] =$$

$$\frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(10x) + 1)'}{(\cos(6x) + 1)'} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(10x)}{6\sin(6x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(10x)}{\sin(6x)} =$$

$$\left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(10x))'}{(\sin(6x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10\cos(10x)}{6\cos(6x)} = \frac{5}{3}$$

**Для пунктов 3-7 рассмотрим преобразования в общих случаях:**

3. Неопределенность вида  $\infty - \infty$ :  
 Пусть  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}} \right) =$$

$$\left[ \frac{0}{0} \right] = \dots$$

4. Неопределенность вида  $\infty \times 0$ :

Пусть  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = [\infty \times 0] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} = \dots$$

5. Неопределенность вида  $1^\infty$   
 6. Неопределенность вида  $\infty^0$   
 7. Неопределенность вида  $0^0$

**Для неопределенностей вида 4-7 воспользуемся следующим преобразованием:**

Пусть  $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$ ; или  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0$ ; или  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Для нахождения предела вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  удобно сначала прологарифмировать выражение

$$A = f(x)^{g(x)}$$

## Глава 26

# Формулы Тейлора и Маклорена

Производные высших порядков удобно использовать для приблизительных вычислений значений функций. Эти значения вычисляются по формуле Тейлора, суть которой в следующем:

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$  и предположим, что она имеет производные до  $n$ -ого порядка включительно в некоторой окрестности точки  $x_0$

Зададимся целью найти многочлен  $P_n(x)$  степени не выше, чем  $n$ , значение которого в окрестности точки  $x_0$  очень мало отличается от значения функции  $f(x)$ . При это потребуем, чтобы выполнялись равенства:

$$(*) \begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0), \\ P'_n(x_0) = f'(x_0), \\ P_n^{(n)}(x_0) = f_n^{(n)}(x_0) \end{cases} \quad (26.1)$$

Запишем этот многочлен в виде  $P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n$ . Вычислим его производные:

$$P'_n(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \dots + nA_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2A_2 + 6A_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!A_n$$

Исходя из этих равенств, а также равенств  $*$ , получаем:

$$A_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$A_1 = P'_n(x_0) = f'(x_0)$$

$$A_2 = \frac{P''_n(x_0)}{2!} = \frac{f''_n(x_0)}{2!}$$

$$A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{f_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Подставив набор коэффициентов в определение  $P_n(x)$ , получим:

$$P_n(x) = \frac{f_n(x_0)}{0!} + \frac{f'_n(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''_n(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f_n^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

Рассмотрим погрешность вычислений с помощью многочлена  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Покажем, что  $P_n(x)$  есть  $o(x - x_0)^n$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Для этого нужно показать, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Вычислим этот предел, применив  $n$  раз правило Лопиталья. При этом заметим, что  $R_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$  (по \*).

$$R'_n(x_0) = f'(x_0) - P'_n(x_0) = 0 \text{ и т.д.}$$

$$R_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0$$

$$\text{Таким образом имеется, что } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \left[\left(\frac{0}{0}\right)\right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} =$$

$$\left[\left(\frac{0}{0}\right)\right] = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \left[\left(\frac{0}{n!}\right)\right] = 0$$

Получаем следующее равенство, которое называется формулой Тейлора.

Для функции  $y = f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  с остаточным членом в форме Пеано (любая наперед заданная точность)

$$f_n(x) = \frac{f_n(x_0)}{0!} + \frac{f'_n(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''_n(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f_n^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + o((x - x_0)^n)$$

Если рассматривать  $x_0 = 0$ , то получаем формулу Маклорена:

$$f_n(x) = \frac{f_n(0)}{0!} + \frac{f'_n(0)(x)}{1!} + \frac{f''_n(0)(x)^2}{2!} + \dots + \frac{f_n^{(n)}(0)(x)^n}{n!} + o((x)^n)$$

Предположим, что функция имеет также и производную порядка  $n + 1$ . Тогда имеет место формула, называемая формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f_n(x) = \frac{f_n(x_0)}{0!} + \frac{f'_n(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''_n(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f_n^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \frac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}((x - x_0)^{n+1}), \xi \in (x_0; x)$$

## Глава 27

# Признаки монотонности функции

Функция  $y = f(x)$

8. возрастающей (неубывающей) на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) ;$
9. строго возрастающей на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) ;$
10. убывающей (невозрастающей) на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) ;$  строго убывающей на интервале  $(a, b)$ , если  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) :$   
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) .$

Если функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и принадлежит к одному из четырех рассмотренных типов (т.е. является возрастающей, строго возрастающей, убывающей или строго убывающей), то такая функция называется монотонной на данном интервале.

## Глава 28

# Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции

### 28.1 Первое необходимое условие

**Лемма 28.1.** Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на  $(a; b)$  и в точке  $x_0 \in (a; b)$   $f'(x_0) = 0$ . Если при переходе через  $x_0$  производная функции меняет знак, то  $x_0$  — точка локального экстремума.  $+$   $\rightarrow$   $-$  — максимума, и  $-$   $\rightarrow$   $+$  — минимума.

*Доказательство.* Пусть, например,  $f'$  меняет знак с « $-$ » на « $+$ ». Рассмотрим точку  $x_0$  на сегменте  $[x; x_0]$ . Воспользуемся теоремой о конечных приращениях Лагранжа:  $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ ,  $\xi \in (x; x_0)$ . Поскольку при переходе через точку  $x_0$  функция меняет знак с « $-$ » на « $+$ », то  $f'(\xi) < 0$ ,  $x < x_0$ ,  $x - x_0 < 0$ ,  $f(x) - f(x_0) > 0$ . Аналогично рассмотрим сегмент  $[x_0; x]$ , получим  $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x) \Rightarrow x_0$  — точка строгого минимума функции.  $\square$

### 28.2 Второе достаточное условие

Пусть дана функция  $f(x)$ , она определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , ее первая производная  $f'(x_0) = 0$  и пусть  $\exists f''(x_0)$ , тогда:

1. Если  $f''(x_0) > 0$ , то точка  $x_0$  — точка строгого минимума;
2. Если  $f''(x_0) < 0$ , то точка  $x_0$  — точка строгого максимума.

*Доказательство.* Докажем теорему для первого случая, когда  $f''(x_0) > 0$ . Поскольку  $f''(x_0)$  непрерывна, то на достаточно малом интервале  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , т.к.  $f''(x_0) > 0$ , то  $f'(x)$  возрастает в этом интервале.  $f'(x_0) =$



ГЛАВА 28. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ  
СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

28.2. ВТОРОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ

---

0, значит  $f'(x_0) < 0$  на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$  и  $f'(x_0) > 0$  на интервале  $(x_0; x_0 + \delta)$ . Таким образом функция  $f(x)$  убывает на интервале  $(x_0 - \delta; x_0)$  и возрастает на интервале  $(x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow$  по первому достаточному условию экстремума функция в точке  $x_0$  имеет минимум. Аналогично доказывается второй случай теоремы.  $\square$

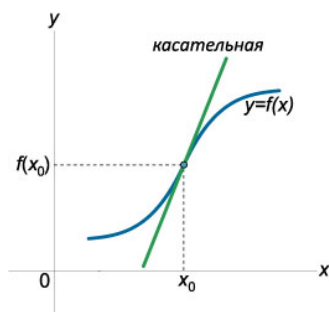
## Глава 29

# Направление выпуклости и перегибы прямой

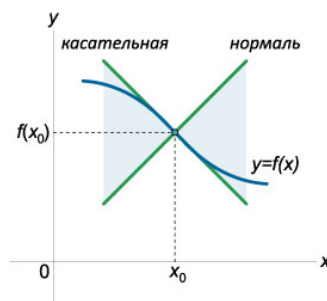
Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , которая является непрерывной в точке  $x_0$ . Функция  $f(x)$  может иметь в этой точке конечную или бесконечную производную  $f'(x_0)$ . Если при переходе через  $x_0$  функция меняет направление выпуклости, т.е. существует число  $\delta > 0$ , такое, что на одном из интервалов  $(x_0 - \delta, x_0)$  или  $(x_0, x_0 + \delta)$  функция является выпуклой вверх, а на другом выпуклой вниз, то  $x_0$  называется точкой перегиба функции  $y = f(x)$ .

Геометрический смысл точки перегиба состоит в том, что график функции  $f(x)$  переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую, т.е. кривая и касательная взаимно пересекаются (рисунок 1).

График функции  $f(x)$  в окрестности точки перегиба  $x_0$  расположен внутри одной пары вертикальных углов, образованных касательной и нормалью (рисунок 2). необходимое условие существования точки перегиба. Если  $x_0$  точка перегиба функции  $f(x)$  и данная функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки  $x_0$ , причем в точке  $x_0$  она непрерывна, то  $f''(x_0) = 0$ .



(а) рис 1



(b) рис 2

## ГЛАВА 29. НАПРАВЛЕНИЕ ВЫПУКЛОСТИ И ПЕРЕГИБЫ ПРЯМОЙ

*Доказательство.* Предположим, что в точке перегиба  $x_0$  вторая производная не равна нулю:  $f''(x_0) \neq 0$ . Поскольку она непрерывна при  $x_0$ , то существует  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , в которой вторая производная сохраняет свой знак, т.е.  $f''(x_0) < 0$  или  $f''(x) < 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . В таком случае функция будет либо строго выпукла вверх (при  $f''(x) < 0$ ), либо строго выпукла вниз (при  $f''(x) > 0$ ). Но тогда точка  $x_0$  не является точкой перегиба. Следовательно, предположение неверно и вторая производная в точке перегиба должна быть равна нулю.  $\square$

Первое достаточное условие существования точки перегиба  
Если функция  $f(x)$  непрерывна и дифференцируема в точке  $x_0$ , имеет вторую производную  $f''(x_0)$  в некоторой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  и если вторая производная меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f(x)$ .

*Доказательство.* Пусть, например, вторая производная  $f''(x)$  при переходе через точку  $x_0$  меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в левой  $\delta$ -окрестности  $(x_0 - \delta, x_0)$  выполняется неравенство  $f''(x) > 0$ , а в правой  $\delta$ -окрестности  $(x_0, x_0 + \delta)$  справедливо неравенство  $f''(x) < 0$ .

В таком случае, согласно достаточным условиям выпуклости, функция  $f(x)$  выпукла вниз в левой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  и выпукла вверх в правой  $\delta$ -окрестности.

Следовательно, в точке  $x_0$  функция меняет направление выпуклости, т.е. с является, по определению, точкой перегиба. Второе достаточное условие существования точки перегиба  $\square$

Пусть  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ . Тогда точка  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f(x)$ .

*Доказательство.* Поскольку  $f'''(x_0) \neq 0, x_0(f'''(x_0) > 0), (f'''(x_0) < 0), f''(x_0) = 0, \delta > 0 \delta - x_0, x_0 f(x)$ .  $\square$

## Глава 30

# Комплексные числа и действия над ними. Формы записи комплексного числа

### 30.1 Комплексные числа

Мнимой единицей называется число  $i$ , квадрат которого равен -1  
 $i^2 = -1$

Число  $i$  не является действительным.

Если существует какое-то действительное число  $a(a \in \mathbb{R})$ , то произведение  $a \cdot i$  называется мнимым числом. Сумма действительного и мнимого числа называется комплексным числом:

$$a + ib$$

При этом число  $a$  называется действительной частью и обозначается  $a = \operatorname{Re}(a + ib)$ , а число  $b$  называется мнимой частью и обозначается  $b = \operatorname{Im}(a + ib)$ . Таким образом:

$$\forall z : z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

Для любого комплексного числа  $z = x + iy$  определено сопряженное ему число  $\bar{z} = x - iy$ .

Два числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называются равными друг другу, если равны их действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Заметим, что действительные числа являются частным случаем комплексных чисел, у которых мнимая часть равна 0.

ГЛАВА 30. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ.  
 30.2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Другими словами, это значит, что любое действительное число  $x$  представимо в виде  $x = x + i \cdot 0$

Нетрудно также видеть, что комплексное число  $z$  является действительным  $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Действительно:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

## 30.2 Действия над комплексными числами

Над множеством комплексных чисел вводятся операции сложения, вычитания, умножения и деления.

Суммой (разностью) двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называется комплексное число  $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ . Т.е. действительная часть  $Re(z_1 \pm z_2) = Re z_1 \pm Re z_2$  и  $Im(z_1 \pm z_2) = Im z_1 \pm Im z_2$ . Произведением чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется число  $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1)$

Таким образом произведение двух комплексных чисел вычисляется как произведение двухчленов  $x_1 + iy_1$  и  $x_2 + iy_2$  с учетом того, что  $i^2 = -1$

Нетрудно убедиться, что введенные таким образом операции сложения, вычитания, умножения имеют те же свойства, что и соответствующие операции для вещественных чисел: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность

Частным двух комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  называется такое комплексное число  $z$ , для которого выполняется равенство  $z \cdot z_2 = z_1$ . Это частное обозначается  $\frac{z_1}{z_2}$ . Покажем, что для любых комплексных чисел  $z_1$  и  $z_2$  существует единственное частное  $\frac{z_1}{z_2}$ :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Убедимся, что полученное число действительно является частным  $z \cdot z_2 = z_1$ :

$$\left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \cdot (x_2 + iy_2) = \frac{x_1 x_2^2 + y_1 y_2 x_2 - (-x_1 y_2^2 + y_1 y_2 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_1 x_2 y_2 - x_2 x_1 y_2 + x_2^2 y_1 + y_1 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1(x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1(x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2 + y_2^2} = x_1 + iy_1 = z_1$$

Таким образом деление комплексных чисел друг на друга осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

Для комплексного числа  $z$  определяется модуль этого числа:  
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Получаем, что  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Учитывая, что для действительного числа  $z$  имеем равенство  $z = \bar{z}$ , получаем, что модуль действительного числа можно понимать как модуль комплексного числа.

Частное комплексных чисел можно вычислять по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Уравнение  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней (комплексных чисел).

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

$$1. \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$2. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$3. \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$4. \overline{z^n} = \bar{z}^n, n \in \mathbb{N}$$

ДОКАЗАТЬ ЭТИ СВОЙСТВА

Запись  $z = x + iy$  называется алгебраической формой комплексного числа.

Множество всех комплексных чисел обозначается  $\mathbb{C}$

### 30.3 Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа допускают геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим Декартову систему координат  $(Oxy)$

На горизонтальной оси будем откладывать действительную часть, а на вертикальной - мнимую

Часто удобно изображать комплексные числа не точками, а радиус-векторами этих точек. Нетрудно видеть, что  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  действительно является длиной соответствующего вектора.

ЗДЕСЬ РИСУНОК РАДИУС-ВЕКТОРА

Рассмотрим теперь два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$

Из геометрической интерпретации видно, что:

ЗДЕСЬ РИСУНКИ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ВЕКТОРОВ

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Координатная плоскость, на которой изображены в виде радиус-векторов точек комплексных чисел, называется комплексной плоскостью.

## 30.4 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

### СЮДА РИСУНОК УГЛА ФИ

На комплексной плоскости рассмотрим число, равное  $z = x + iy$  и угол  $\phi$  от положительного направления  $Ox$  против часовой стрелки до радиус вектора, который изображает число  $z$ .

$$x = |z| \cos \phi \quad y = |z| \sin \phi$$

Отсюда получим, что  $z = |z| \cos \phi + i |z| \sin \phi = |z| (\cos \phi + i \sin \phi)$ , что есть тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Учитывая то, что  $\sin$  и  $\cos$  периодические с периодом  $2\pi$ , получаем, что  $z = |z| (\cos \phi + i \sin \phi)$  определена для бесконечного множества значений угла  $\phi$ , отличающихся друг от друга на  $2\pi$ . Множество всех таких значений  $\phi$  называется аргументом комплексного числа  $z$  и обозначается  $\text{Arg} z$ . В этом множестве значений  $\phi$  особо рассматриваются значения в промежутка  $[-\pi; \pi)$  (иногда  $[0; 2\pi)$ ). Значения из этого промежутка называют главными значениями числа  $z$  и обозначаются  $\arg z$ .

Таким образом,  $\text{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что в качестве  $\phi$  можно рассматривать  $\phi = \arctg \frac{y}{x}$ . Однако учитывая, что множество значений  $\arctg - (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , заметим, что если  $\phi \in [\frac{\pi}{2}; \pi)$ , то  $\arg z = \arctg \frac{y}{x} + \pi$   
 если  $\phi \in [\pi; \frac{3\pi}{2})$ , то  $\arg z = \arctg \frac{y}{x} + \pi$   
 если  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , то  $\arg z = \arctg \frac{y}{x}$

### 30.4.1 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$ , запишем их в тригонометрической форме:

$$z_1 = |z_1| (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

Рассмотрим их произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot |z_1| (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot z_2 = |z_2| (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = |z_1| |z_2| (\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i \cos \phi_1 \sin \phi_2 + i \cos \phi_2 \sin \phi_1) = |z_1| |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\Rightarrow \text{получаем формулу: } z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

С помощью математической индукции можно показать (САМОСТОЯТЕЛЬНО!!!), что:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = |z_1| |z_2| \dots |z_n| (\cos(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n) + i \sin(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n))$$

Рассмотрим случай, если  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ :

$$z^n = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Корнем  $n$ -ой степени комплексного числа  $z$  называется такое число  $w$ ,

### 30.5. ГЛАВА ЗАТКОВАНАЕ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

для которого выполняется равенство  $w^n = z$ . Запишем число  $w$  в тригонометрической форме:  $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $w^n = |w|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} |w|^n = |z|, \\ n\theta = \phi + w\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}, \\ \theta = \frac{\phi + w\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (30.1)$$

Заметим, что

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos \frac{\phi + w\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + w\pi k}{n} \right)$$

различные значения корня получаются при различных значениях  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Заметим, что из-за периодичности  $\sin$  и  $\cos$  эти значения могут повторяться

#### 30.4.2 Пример 1

тут идут примеры вычислений, не думаю, что они нужны в теории

### 30.5 Показательная форма записи комплексного числа

#### 30.5.1 Формула Эйлера

Обозначим  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ , а  $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$  - формула Эйлера

$$|e^{i\phi}| = |\cos \phi + i \sin \phi| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1$$

$$|e^{-i\phi}| = |\cos \phi - i \sin \phi| = \sqrt{\cos^2 \phi + (-\sin \phi)^2} = 1$$

$$e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_2 \sin \phi_1) = \cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2) = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\frac{e^{i\phi_1}}{e^{i\phi_2}} = \frac{\cos \phi_1 + i \sin \phi_1}{\cos \phi_2 + i \sin \phi_2} = \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2)}{\cos^2 \phi_2 + \sin^2 \phi_2} =$$

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2) = e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Т.о. для функции мнимого аргумента  $e^{i\phi}$  выполняются известные свойства показательной функции

#### 30.5.2 Показательная форма

Рассмотрим теперь произвольное комплексное число  $z$  и запишем его в показательной форме:

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi}$$

Таким образом получили показательную форму записи комплексного числа ТАК. ТАМ ДАЛЬШЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРАННЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРО НИХ. НО ЭТОГО НИХУЯ НЕТ В ВОПРОСАХ. ОНО ОТНОСИТСЯ СЮДА ИЛИ НЕТ? ТАМ ЕЩЕ ПРИМЕРНО СТОЛЬКО ЖЕ ТЕКСТА КАК ЗДЕСЬ НАПИСАНО



## Глава 31

# Извлечение корня из комплексного числа

Корнем  $n$ -ой степени комплексного числа  $z$  называется такое число  $w$ , для которого выполняется равенство  $w^n = z$ . Запишем число  $w$  в тригонометрической форме:  $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$   
 $w^n = |w|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} |w|^n = |z|, \\ n\theta = \phi + w\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}, \\ \theta = \frac{\phi + w\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (31.1)$$

Заметим, что

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left( \cos \frac{\phi + w\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + w\pi k}{n} \right)$$

различные значения корня получаются при различных значениях  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Заметим, что из-за периодичности  $\sin$  и  $\cos$  эти значения могут повторяться

### 31.0.1 Пример 1

тут идут примеры вычислений, не думаю, что они нужны в теории

## Глава 32

# Неопределённый интеграл и его свойства

### 32.1 Понятие первообразной

Пусть  $y = f(x)$  - непрерывная функция, Первообразной для  $f(x)$  является  $F(x) : F'(x) = f(x)$  Если  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$ , то  $\forall C : (F(x) + C)' = f(x)$

**Лемма 32.1.** Если функция  $y = g(x)$  непрерывно-дифференцируема и её  $\forall x : g'(x) = 0, g(x) = C$

*Доказательство.* Пусть  $\forall x : g'(x) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 : g(x_1) = g(x_2)$ . Тогда по теореме Лагранжа:  $\xi \in (x_1; x_2) : g(x_2) - g(x_1) = g'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow$  так как  $g'(\xi) = 0, g(x_2) - g(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_2) = g(x_1)$   $\square$

**Лемма 32.2.** Если  $F(x)$  первообразная для  $f(x)$ , то любая первообразная для  $f(x)$  представима в виде  $G(x) = F(x) + C$

*Доказательство.* Пусть 2 различные первообразные  $F(x), G(x)$  для  $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$  и  $G'(x) = f(x)$ . Тогда  $\forall x : (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$  по теореме 1  $G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$   $\square$

совокупность всех первообразных для функции называется неопределённым интегралом этой функции  $\int f(x)dx = F(x) + C$

### 32.2 Свойства неопределённого интеграла

1.  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
2.  $\int f'(x)dx = f(x) + C$
3.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f(x), g(x) : \int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$
4.  $\forall \alpha, \beta : F'(x) = f(x), \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$

Из таблицы производных получаем таблицу интегралов:

## 32.3 Таблица Интегралов

•

$$\int 0 dx = C \quad (32.1)$$

•

$$\int dx = x + C \quad (32.2)$$

•

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad (32.3)$$

•

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C \quad (32.4)$$

•

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (32.5)$$

•

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (32.6)$$

•

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad (32.7)$$

•

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad (32.8)$$

•

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + C \quad (32.9)$$

•

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C \quad (32.10)$$

•

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (32.11)$$

•

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C \quad (32.12)$$

•

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (32.13)$$

•

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (32.14)$$

•

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \quad (32.15)$$

## Глава 33

# Метод замены переменной в неопределённом интеграле

**Тероэма 33.1.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а  $x = \phi(t)$  непрерывно-дифференцируема, причём  $\mathcal{D}(\phi(t)) \subset \mathcal{D}(f)$ , тогда  $\int f(x(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx$  Произведём по  $t$ :

$$\left(\int f(x(t))\phi'(t)dt\right)'_t = \int x(t) \cdot \phi'(t)$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x(t))dx\right)'_t = f'_t(x(t)) = f'_t(x(t))x'(t) = f'_t(x(t))\phi'(t)$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int tg(x)dx &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \left[ t = \cos(x), dt = -\sin(x)dx, \sin(x)dx = -dt \right] \\ &= \int \frac{-dt}{t} = -\ln(|t|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C \end{aligned} \quad (33.1)$$

## Глава 34

# Интегрирование по частям

Пусть есть 2 непрерывно-дифференцируемые функции  $u(x), v(x)$ :

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = u'vdx + v'udx = vdu + u dv \Rightarrow d(uv) = vdu + u dv$$

$\Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$  (34.1) Когда использовать? (за  $u$  берём многочлен и корячим столько раз, какова степень)

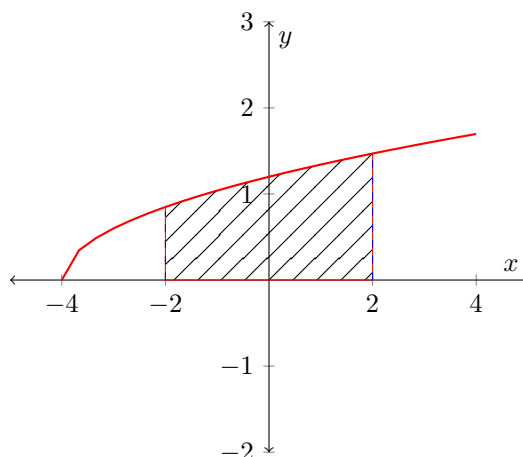
- подинтегральная функция есть произведение многочлена и синуса/косинуса
- подинтегральная функция есть произведение многочлена и показательной функции

## Глава 35

# Определённый интеграл и его свойства

Пусть задана  $y = f(x)$ , предположим, что  $\forall x \in [a; b] \subset \mathcal{D}(f) : f(x) \geq 0$

Излом графика функции



Рассмотрим фигуру, ограниченную снизу  $Ox$ , сверху графиком функции, слева и справа - вертикальными прямыми  $x = a, x = b$  это называется криволинейной трапецией. Чтоб найти площадь этой фигуры, разобьём её на достаточное большое количество очень узких вертикальных полосок, чтобы ступенчатая форма была ближе к кривой. Площадь криволинейной трапеции буде равна сумме площадей полосок.

Разбиение  $[a; b]$  (конечное множество точек) таких, что  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ . На каждом  $x_{[i-1; x_i]}$  выберем  $\xi_i$  и рассмотрим  $f(\xi_i)$  Рассмотрим итый прямоугольник со сторонами  $x_i - x_{i-1}$ , площадь которого равна  $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$  Обозначим  $(x_i - x_{i-1})$  за  $\Delta_i$  и пусть  $\Delta = \max(\Delta_i \dots \Delta_n)$   $\Delta$  - диаметр разбиения.

Интегральная сумма соответствующая данному разбиению:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i)$$

Рассмотрим  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i)$ . Если такой предел существует и конечен, не зависит от разбиения и от выбора  $\xi_i$ , то этот предел называется определённым интегралом  $\int_a^b f(x)dx$

**Терозема 35.1.** *необходимые условия интегрируемости. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

*Доказательство.* Произведём разбиение  $[a; b]$ . Если функция неограничена на  $[a; b]$ , она неограничена хотя бы на одном из отрезков  $[x_i - x_{i-1}]$ . Следовательно точку  $\xi_i$  можно выбрать так, что  $|\xi_i|$  будет сколь угодно велик. В этом случае интегральная сумма стремится к бесконечности и предел интегральной суммы будет зависеть от выбора  $\xi_i$  и, при некотором  $\xi_i$  он будет бесконечным, что противоречит условиям интегрирования.  $\square$

**Терозема 35.2.** *Если функция непрерывна на  $[a; b]$ , она интегрируема на  $[a; b]$ .*

Следствие: Если функция на  $[a; b]$  имеет конечное количество точек разрыва первого рода<sup>1</sup>, то она интегрируема на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* Функция кусочно-непрерывна на  $[a; b]$  тогда и только тогда, когда этот отрезок разбивается на конечное число меньших отрезков, на каждом из которых эта функция непрерывна и ограничена, по теореме 2 доказательство.  $\square$

**Терозема 35.3.** *Если функция монотонна на  $[a; b]$ , она интегрируема на  $[a; b]$ .*

### 35.1 Свойства определённого интеграла

1.  $\int_a^a f(x)dx = 0$
2.  $\int_a^b dx = b - a$
3.  $\forall f(x), g(x)$  интегрируемой на  $[a; b], \forall \alpha, \beta$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

4. Если  $f(x) \geq 0$  на  $[a; b], \forall x \in [a; b] : f(x) \geq g(x)$ ,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

---

<sup>1</sup>кусочно-непрерывна



5.

$$\left| \int_a^b g(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx$$

*Доказательство.*

$$\forall \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot |f(\xi_i)|$$

При  $\Delta \rightarrow 0$  доказывается □

6.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

7.

$$\forall a, b, c : \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

*Доказательство*(а) Пусть  $c \in (a; b)$ , тогда рассмотрим разбиения отрезка  $[a; b]$ , содержащие  $c$ . Тогда интегральная сумма разбивается на 2 суммы: слева от  $c$  и справа от  $c$ . При  $\Delta \rightarrow 0$  доказывается.

(b)  $c \notin (a; b) \Rightarrow b \in (a; c)$  по пункту i:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(c)  $a \in (c; b)$  аналогично(d)  $c = a$  или  $c = b$ : по первому свойству. □

**Терозема 35.4.** о среднем: Если функция непрерывна на  $[a; b]$ ,  $\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$

*Доказательство.* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \Rightarrow$  на этом отрезке она достигает своих максимального и минимального значений.  $m = \min(f(x))$ ;  $M = \max(f(x))$ ,  $x \in [a; b]$

$$\forall x \in [a; b] : m \leq f(x) \leq M. \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). a < b \Rightarrow m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции:

$$\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

умножив на  $(b-a) > 0$  получим доказываемое равенство.

□

## Глава 36

# Формула Ньютона-Лейбница

Для  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a; b]$

**Тероэма 36.1.** Если функция интегрируема на  $[a; b]$ ,  $\Phi(x)$  непрерывна на  $[a; b]$

*Доказательство.* так как функция интегрируема она граничена на  $[a; b]$

$$\exists M > 0, \forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq M.$$

Возьмём произвольное  $x \in [a; b], \Delta_x > 0$ . Рассмотрим

$$| -\Phi(x) + \Phi(x + \Delta_x) | = | \int_a^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$| \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt | =$$

$$| \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt | \leq | \int_x^{x+\Delta_x} |f(t)|dt |$$

$$\leq | \int_x^{x+\Delta_x} Mdt | \leq M | \int_x^{x+\Delta_x} dt | = M\Delta_x$$

$0 \leq |\Phi(x+\Delta_x) - \Phi(x)| \leq M\Delta_x$   $M\Delta_x \rightarrow 0$  при  $\Delta_x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \Phi(x + \Delta_x) = \Phi(x)$  Следовательно  $\Phi(x)$  непрерывна из-за того, что  $x$  выбран произвольно.  $\square$

**Тероэма 36.2.**  $y = f(x)$  непрерывна, отсюда  $\Phi(x)$  дифференцируема на  $[a; b]$ . При этом  $\Phi'(x) = f(x)$ .

*Доказательство.*

$$x \in (a; b), x + \Delta_x \in (a; b).$$

$$\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta_x} f(t) dt \mid \div \Delta_x$$

$$\frac{\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta_x} f(t) dt$$

По теореме о среднем

$$\frac{1}{\Delta_x} f(\xi)(x + \Delta_x - x) = f(\xi), \xi \in [x; x + \Delta_x]$$

Если  $\Delta_x \rightarrow 0, \xi \rightarrow x$

$$\frac{\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = f(\xi)$$

При переходе к пределу с  $\Delta_x \rightarrow 0$  получим  $\Phi'(x) = f(x)$  Таким образом, Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  $\Phi(x)$  - первообразная для  $f(x)$   $\square$

Рассмотрим Вас первообразные  $F(x)$  для  $f(x)$ .  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(t) = F(x) + C$ . Найдём  $z$ , взяв  $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t) dt = f(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

При  $x = b : \int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(x) dx = F(b) - f(a) \Rightarrow F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)} \quad (36.1)$$

## Глава 37

# Несобственные интегралы, их свойства и вычисление

Если существует конечный предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ , функции  $f(x)$ , которая определена на промежутке  $[a; +\infty)$ , то его называют *несобственным интегралом* первого рода и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (37.1)$$

Если он существует и конечен, то это *сходящийся* интеграл. В противном случае такой интеграл называют *расходящимся*. Аналогично рассматривается несобственный интеграл на промежутке  $(-\infty; b]$ . Так как несобственный интеграл первого рода определен как предел, то из свойств интеграла и предела получаем *линейности несобственного интеграла*:

Для любого  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и для любых интегрируемых на промежутке  $[a; b]$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx \quad (37.2)$$

Данное свойство также выполняется для и для интегралов с пределами интегрирования  $(-\infty; b)$  и  $(-\infty; +\infty)$

Из свойств интеграла и предела получаем формулы замены переменной в собственном интеграле и формулы интегрирования по частям. Пусть

функция  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$  и пусть  $x = \varphi(t)$  непрерывна и дифференцируема на  $[\alpha; \beta]$  и монотонна, причем  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = \infty$  тогда:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

**Я НЕ ПОНИМАЮ, ЧТО ДАЛЬШЕ НАПИСАНО. ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ? ПОМОГИТЕ!!!**

Пусть  $u$  и  $v$  непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int_a^{+\infty} u dv = \lim_{b \rightarrow \infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v du$$

Аналогично можно продифференцировать и оставшиеся интегралы.

**Пример:** Выяснить, сходится ли несобственный интеграл.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

Рассмотрим случаи:

1.  $p=0$

$$\int_1^{+\infty} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (x \Big|_1^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (b - 1) = +\infty - \text{интеграл расходится}$$

2.  $p < 0$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty - \text{интеграл расходится}$$

3.  $0 < p < 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1+p}}{1+p} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{1+p}}{1+p} - \frac{1}{1+p} \right) = +\infty - \text{интеграл расходится}$$

4.  $p=1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \ln x = \infty$$

5.  $p > 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{1}{p-1}$$

Из этого можно сделать вывод, что при  $p < 1$  - интеграл расходится, а при  $p > 1$  - интеграл сходится к  $\frac{1}{p-1}$

### 37.1 Вопрос о сходимости интегралов

А признаки нужно доказывать или и так норм?

### 37.2 Множества и операции над ними

При выяснении неудобно пользоваться определениями, поэтому принимают *признаки сходимости*

#### 37.2.1 Признак сравнения

Пусть  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  неотрицательны и интегрируемы. Для любого  $x \in [a; +\infty]$  справедливо  $f(x) \leq g(x)$ . Тогда из сходимости несобственного интеграла  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  следует сходимость  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ , а из расходимости  $\int_a^{+\infty} g(x)dx$  следует расходимость  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

#### 37.2.2 Предельный признак сравнения

называется элементом обозначение множества:  $\{a | P(a)\}$  где  $P(a)$  - свойство, объединяющее объекты  $a$ .

Пусть  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  неотрицательны и интегрируемы на промежутке  $[a; b]$  и пусть существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0$ , значит они либо обе сходятся, либо обе расходятся.

#### 37.2.3 Признак Абеля-Дирихле

КАК ЭТИ ВЕЩИ ВООБЩЕ СВЯЗАНЫ?

Пусть  $y = f(x)$  интегрируема на промежутке  $[a; b]$  и имеет первообразную  $F(x)$ , а  $y = g(x)$  непрерывно дифференцируема на  $(a; +\infty)$  и

**ГЛАВА 37. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ИХ СВОЙСТВА И  
37.2. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ ВЫЧИСЛЕНИЕ**

---

интегрируема на  $[a; b]$ , стремится к 0 при  $x \rightarrow +\infty$ , тогда

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

– сходится

**Замечание:**

содержится:  $A \subseteq B$ . Каждый элемент множества  $A$  содержится в  $B$ . Предыдущий признак удобно использовать при рассмотрении несобственных интегралов дробно-рациональной функции. Его удобно сравнивать с интегралами, сходимость которых исследована. Аналогичные признаки сравнения справедливы и для оставшихся двух интегралов.

Рассмотрим случай, когда на  $[a; b]$   $y = f(x)$  имеет особенную точку, то есть существует  $c \in [a; b]$ :

$$\lim_{x \rightarrow c+0} = \infty$$

или

$$\lim_{x \rightarrow c-0} = \infty$$

В этом случае вычислить  $\int_a^b f(x)dx$  нельзя.

**на ЭТОМ МЕСТЕ Я ОПЯТЬ ОТКЛЮЧИЛСЯ** При  $c=a$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} = \infty$$

$$\int_a^b f(x)dx - \lim \int_a^b f(x)dx$$

– это несобственный интеграл второго рода, если предел существует, то он сходящийся, а в противном случае расходящийся. **тут чет то невнятное пропустил**

#### **37.2.4 Свойства несобственного интеграла второго рода**

Так как несобственный интеграл определяется как предел, то исходя из свойств предела получаем несобственного интеграла второго рода.

1.  $\forall \alpha, \beta \in, f(x), g(x)$  интегрируемых на  $[a; b]$ ,  $a < \alpha < b$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2. если  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a; b]$ ,  $a < \alpha < b$ ,  $x = \varphi(t)$  ( $a; b$ ) монотонна  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$ ,  $\varphi(b) = b$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

3. интегрирование по частям



## Глава 38

# Матрицы и операции над ними

**Матрица** – прямоугольная таблица, составленная из чисел, которые называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы располагаются в горизонтальных и вертикальных рядах, которые называются строками и столбцами. Их принято нумеровать. Для матрицы важны также ее размеры, которые записываются в виде  $m \times n$ , где  $m$  – строки, а  $n$  – столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы принято обозначать заглавными буквами. Иногда, чтобы указать размеры матрицы пишут  $A_{m \times n}$ ,  $B_{m \times n}$ . Элементы обозначают строчными буквами  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ .

Матрицы, где все элементы равны 0 называются **нулевыми** и записываются  $O_{m \times n}$ .

Для квадратной матрицы определяют диагонали (**главная** – слева на право, **побочная** – справа налево)

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, элементы главной диагонали которой равны между собой и не равны 0, называется *скалярной*.

Скалярная матрица, где элементы на главной диагонали равны единице

### 38.1. СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ МАТРИЦ НАД НИМИ

называется *единичной*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для любой матрицы определяется операция транспонирования: каждая строка матрицы записывается в виде столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$(A^t)^t = A$$

### 38.1 Свойства сложения и вычитания

Для двух матриц одинаковых размеров определяются операции сложение и вычитание. Для матриц  $A$  и  $B$  суммой/разностью называется матрица  $(A \pm B)$ , элементы которой равны сумме/разности элементов матриц  $A$  и  $B$  то есть  $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$ .

1.  $A + B = B + A$  – сложение матриц коммутативно
2.  $A_{m \times n} \pm O_{m \times n} = A_{m \times n}$  – идемпотентность сложения с нулевой матрицей
3.  $(A_{m \times n} + B_{m \times n}) + C_{m \times n} = A_{m \times n} + (B_{m \times n} + C_{m \times n})$  – ассоциативность сложения
4.  $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
5.  $A_{m \times n} \exists B_{m \times n} : A_{m \times n} + B_{m \times n} = O_{m \times n}$

Отсюда следует, что  $B$  противоположна  $A$  и обозначается  $-A$

### 38.2 Свойства умножения матриц

#### 38.2.1 Умножение матрицы на число

Также для матриц определяется операция умножения на число:  $A_{m \times n} \cdot \alpha = \alpha A_{m \times n}$ , элементы которой являются произведением элементов матрицы  $A$  и  $\alpha$

1.  $-1 \cdot A = -A$
2.  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  – дистрибутивность
3.  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4.  $\alpha \cdot \beta A = (\alpha \beta)A$

### 38.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

#### 38.2.2 Перемножение матриц

Для матриц также определяется операция умножения на матрицу. Для этого матрица должна быть **согласованной** (иметь согласованные размеры): *то есть количество столбцов левого множителя должно совпадать с количеством строк правого.*

Пусть матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{k \times p}$  имеют согласованные размеры ( $n = k$ ). Произведением  $AB$  будет называться матрица размерами  $m \times p$ , где

$$c_{ij} = \sum_1^m a_{ik} \cdot b_{kj};$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$

**Свойства перемножения матриц**

1. Произведение матриц не коммутативная операция то есть  $AB \neq BA$ , более того даже если  $\exists AB$ , то может  $\nexists BA$
2.  $\forall AB$  справедливо  $E_{m \times n} \cdot A_{m \times n} = E_{n \times m} \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$ , где  $E$  - единичная матрица.
3.  $\forall A_{m \times n} \cdot O_{m \times n} = O_{m \times n}$
4.  $(AB)^t = A^t \cdot B^t$
5.  $\forall A, B, C$  согласованных матриц справедливо свойство ассоциативности  $(AB)C = A(BC)$
6.  $\forall A_{m \times n}, B_{m \times n}, C_{n \times p}$  справедливо:  $(A + B)C = AC + BC$

### 38.3 Определитель матрицы

Для любой квадратной матрицы вводится понятие **определителя**, который обозначается как  $\det A$

Введем это понятие рекуррентным образом

$$A_{1 \times 1} \Rightarrow A = (a) \Rightarrow \det A = a$$

Для матриц размером больше  $1 \times 1$  введем понятие **алгебраических дополнений**. Алгебраическим дополнением к  $a_{i \times j}$  называется  $A_{i \times j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i \times j}$ , где  $M$  - матрица, полученная из матрицы  $A$  путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -столбца.

Определитель будет равен сумме произведений элементов первой строки и их алгебраических дополнений.

Определитель матрицы  $2 \times 2$  является разностью произведений элементов на главной и побочной диагоналях:

$$\det A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (38.1)$$

### 38.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

---

Определитель матрицы  $3 \times 3$  можно найти по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

## Глава 39

# Свойства определителя

1. Определитель можно вычислить по любой строке матрицы (не только первой) как сумму произведений этой строки и их алгебраических дополнений:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} \quad (39.1)$$

2. Определитель матрицы не изменяется при транспонировании:

$$\det A^t = \det A \quad (39.2)$$

Потому все свойства строк будут верными и для столбцов. В частности определитель матрицы можно вычислить как сумму элементов матрицы и их алгебраических дополнений:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} \quad (39.3)$$

3. Если какая либо строка или столбец состоит только из нулей, то

$$\det A = 0 \quad (39.4)$$

4. Если в матрице поменять две строки(или столбца) местами, то определитель изменит знак.
5. Если в матрице имеется две одинаковые строки(столбца), то ее определитель равен 0.
6. Если все элементы строки(столбца) матрицы имеют один и тот же общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.


7.

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ b_{i1} \pm c_{i1} & b_{i2} \pm c_{i2} & \dots & b_{in} \pm c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Определитель не изменится, если к какой-нибудь её строке прибавить другую, умноженное на некоторое число.
9. Сумма произведений элементов в какой-нибудь строке(столбце) матрицы и их алгебраических дополнений равна 0.

## Глава 40

# Векторы и линейные операции над ними

Пусть даны  $A$  и  $B$ , **направленным отрезком**  $\overrightarrow{AB}$  будет называться отрезок, для которого указано, что  $A$  - начало,  $B$  - конец.  $\overrightarrow{AB}$  

При этом  $\overrightarrow{AA}$  отображается как точка, и если  $A \neq B$ , то  $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ . Говорят, что направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  – сонаправлены, если лучи  $[AB)$  и  $[CD)$  – сонаправлены.<sup>1</sup> Говорят, что отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  – противоположно направлены, если лучи  $[AB)$  и  $[CD)$  – противоположно направлены.

Два луча сонаправлены, если:

1. Они лежат на одной прямой и один целиком содержится в другом.
2. Они лежат на параллельных прямых по одну сторону прямой, проходящей через начало этих лучей.

Длина  $\overrightarrow{AB}$  – называется длиной отрезка  $AB$ . Отрезок  $\overrightarrow{AA}$  имеет длину 0.  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  – эквивалентны, если они имеют одинаковые длины и направления. Совокупность всех сонаправленных отрезков называется **вектором**. Каждый направленный отрезок является элементом вектора и называется **представителем вектора**  $\vec{AB}$  или  $\vec{a}$ .

Класс нулевых направленных отрезков называется **нуль-вектором** ( $\vec{0}$ ).

Для вектора определяются операции откладывания от заданной точки. Пусть существуют  $A$  и  $\vec{a}$ , тогда отложить  $\vec{a}$  от  $A$  означает найти такое  $B$ , что  $\overrightarrow{AB} \in \vec{a} \iff \overrightarrow{AB} \in \vec{a}$

ABCD

Рассмотрим параллелограмм ABCD:

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{DC} \\ \vec{BC} &= \vec{AD}\end{aligned}$$

<sup>1</sup> $[AB)$  – луч;  $[AB]$  – отрезок;  $(AB)$  – прямая

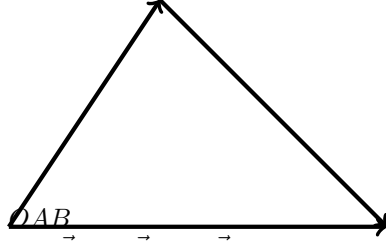
$\vec{AB}$  и  $\vec{BA}$  противоположные, значит  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .

Для векторов также определяются операции сложения и умножения:

Отложим  $\vec{a}$  от  $O$ ;  $\vec{a} = \vec{OA}$

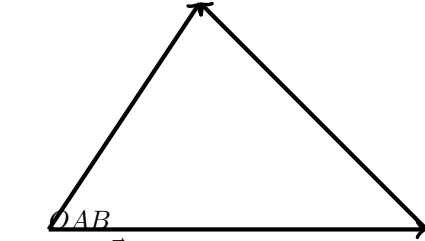
Отложим  $\vec{b}$  от  $\vec{a}$ ;  $\vec{b} = \vec{AB}$ ;

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$



$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$  – правило замыкающей (из начала первого в конец последнего; применимо для любого количества векторов)

Разностью  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  будет  $\vec{c}$ , представляется направленным отрезком, соединяющим концы этих векторов и имеющим направление «к концу того вектора, из которого вычитают».



$\vec{a} = \vec{OA}$

$\vec{b} = \vec{OB}$

$\vec{c} = \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$

Умножение на число:

$\vec{a}$  и  $\lambda \in$ :

1.  $\lambda = 0$ , то  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$
2.  $\lambda > 0$ , то  $\lambda \vec{a} \uparrow \vec{a}$  и имеющий длину  $l = \lambda |a|$
3.  $\lambda < 0$ , то  $\lambda \vec{a} \updownarrow \vec{a}$  и имеющий длину  $l = \lambda |a|$



## Глава 41

# Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$  и  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ , тогда  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  будет являться линейной комбинацией векторов.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$  называются **линейно зависимыми**, если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  такие что  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$  при хотя бы одном  $\lambda_n \neq 0$ .

$\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$  называются **линейно НЕзависимыми**, если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  такие что  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$  при  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n = 0$ .

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – коллинеарны, если они отложены от одной точки, а их представители лежат на одной прямой.  $\vec{0}$  коллинеарен с любым другим вектором.

Точно также определяется коллинеарность для любого количества векторов.

**Терозема 41.1.**  $\vec{a} \neq 0; \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda : \vec{b} = \lambda \vec{a}$

*Доказательство.* Необходимость:

1.  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

$$\lambda = \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \right| > 0 \Rightarrow$$

$$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \uparrow \uparrow \lambda \vec{a} \Rightarrow$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \right| \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Из всего вышеперечисленного следует, что  $\lambda \vec{a} = \vec{b}$

2.  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$

$$\lambda = - \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \right| < 0 \Rightarrow$$

$$\lambda \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} \Rightarrow \lambda \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = \left| \frac{\vec{b}}{\vec{a}} \right| \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \lambda \vec{a} = \vec{b}$$

Достаточность:

1.  $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0} \uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
2.  $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
3.  $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \downarrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

□

**Тероэма 41.2.** Рассмотрим  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Отложим их от  $O$  и получим  $A_1, A_2, \dots, A_n$   
 $O\vec{A}_1 = \vec{a}_1, O\vec{A}_2 = \vec{a}_2, \dots, O\vec{A}_n = \vec{a}_n$

Векторы называются **компланарными**, если  $0, A_1, A_2, \dots, A_n$  лежат в одной плоскости

*Доказательство.* It's hard to explain: <https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k>

□

**Тероэма 41.3.** Легко видеть, что  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  содержат подсистему векторов. В любой линейнозависимой системе подсистема будет также линейнозависима.

*Доказательство.* It's hard to explain: <https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k>

□

**Тероэма 41.4.** В любой линейнозависимой системе векторов существует хотя бы один, который является линейной комбинацией других.

*Доказательство.* It's hard to explain: <https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k>

□

Из вышеперечисленных теорем следуют следующие свойства:

1. 2 линейнозависимых вектора **коллинеарны**
2. 3 линейнозависимых вектора **компланарны**
3.  $n+1 > 3$  **всегда линейнозависимы** в трехмерном пространстве

Свойства векторов:

1.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2.  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3.  $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
4.  $\alpha \cdot (\beta \vec{a}) = (\alpha\beta) \vec{a}$
5.  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
6.  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

## Глава 42

# Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

### 42.1 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\phi) \quad (42.1)$$

Можно записать через проекции:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_a \vec{b} \quad (42.2)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором. Скалярное произведение через координаты равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (42.3)$$

Свойства скалярного произведения:

1.  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$  – переместительное свойство
2.  $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$  – сочетательное свойство
3.  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

## 42.2 Векторное произведение

Векторным произведением  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ , который перпендикулярен  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{c} = |\vec{a}\vec{b}| \sin(\phi)} \quad (42.4)$$

Свойства векторного произведения:

1. модуль  $[\vec{a}; \vec{b}]$  равен площади параллелограмма
2.  $[\vec{a}; \vec{b}] = 0$ , то  $\vec{a} \parallel \vec{b}$
3.  $[\vec{a}; \vec{b}] = -[\vec{b}; \vec{a}]$
4.  $\alpha[\vec{a}; \vec{b}] = [\alpha\vec{a}; \vec{b}] = [\vec{a}; \alpha\vec{b}]$
5.  $[\vec{a} + \vec{b}; \vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$

В координатной форме в. п. будет равно определителю матрицы, где первая строка i,j,k, а последующие – координаты векторов

## 42.3 Смешанное произведение

Смешанное произведение равно определителю матрицы координат векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и соответственно равно объему параллелепипеда из этих векторов. Если все вектора ненулевые, смешанное произведение определяет их компланарность

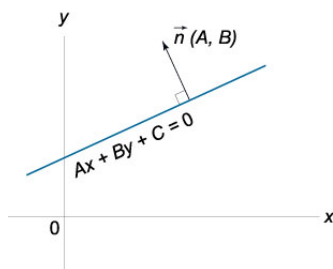
## Глава 43

# Прямая на плоскости

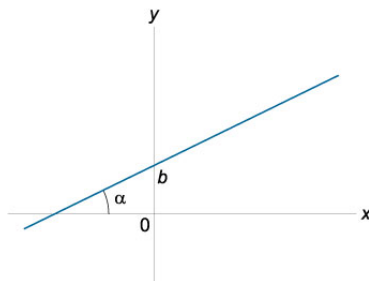
Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:  $Ax + By + C = 0$ , где  $x, y$  — координаты точек прямой,  $A, B, C$  — действительные числа при условии  $A^2 + B^2 \neq 0$ .

- Нормальный вектор к прямой

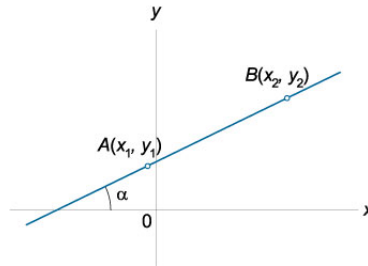
Пусть прямая задана общим уравнением  $Ax + By + C = 0$ . Тогда вектор  $\vec{n}(A, B)$ , координаты которого равны коэффициентам  $A, B$ , является вектором нормали к данной прямой.



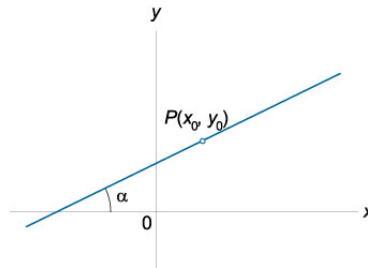
- Уравнение прямой с угловым коэффициентом  
 $y = kx + b$  Здесь коэффициент  $k = \tan \alpha$  называется угловым коэффициентом прямой, число  $b$  является координатой точки пересечения прямой с осью  $Oy$ .



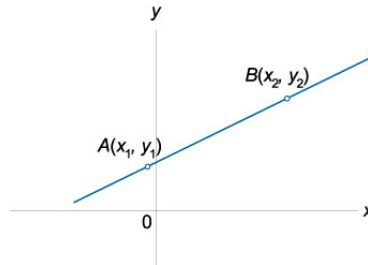
Угловым коэффициентом прямой определяется соотношением  $k = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , где  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  — координаты двух точек прямой. угловой коэффициент



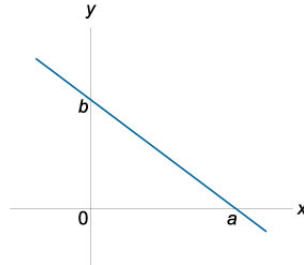
• Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту  $y = y_0 + k(x - x_0)$ , где  $k$  — угловой коэффициент, а точка  $P(x_0, y_0)$  принадлежит прямой. уравнение прямой по заданной точке и угловому коэффициенту



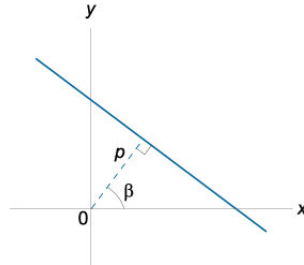
• Уравнение прямой, проходящей через две точки  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$  или  $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ . уравнение прямой, проходящей через две точки



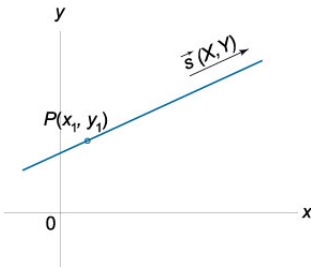
• Уравнение прямой в отрезках имеет вид  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , где  $a$  и  $b$  соответствуют отрезкам, отсекаемым прямой на осях  $Ox$  и  $Oy$ . уравнение прямой в отрезках



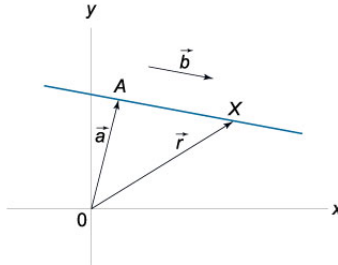
- Нормальное уравнение прямой  $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$  Здесь  $\cos \beta$  и  $\sin \beta = \cos(90^\circ - \beta)$  представляют собой направляющие косинусы вектора нормали. Параметр  $p$  равен расстоянию прямой от начала координат. нормальное уравнение прямой



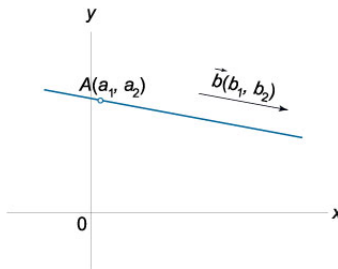
- Уравнение прямой по точке и направляющему вектору  $\frac{x-x_1}{X} = \frac{y-y_1}{Y}$ , где вектор  $\mathbf{s}(X, Y)$  направлен вдоль прямой, а точка  $P(x_1, y_1)$  лежит на этой прямой. Данное уравнение называется также каноническим уравнением прямой. уравнение прямой по точке и направляющему вектору



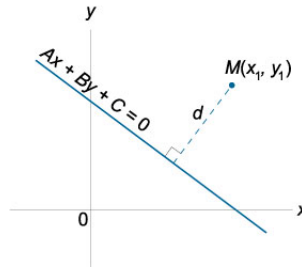
- Уравнение прямой в векторной форме  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ , где вектор  $\mathbf{a}$  проведен из начала координат к некоторой точке  $A$  с известными координатами, лежащей на данной прямой. Вектор  $\mathbf{b}$  определяет направление прямой. Вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{OX}$  представляет собой позиционный вектор, направленный из начала координат к произвольной точке  $X$  данной прямой. Число  $t$  является параметром, изменяющимся от  $-\infty$  до  $\infty$ .



- Уравнение прямой в параметрической форме  $\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \end{cases}$ , где  $(a_1, a_2)$  являются координатами некоторой известной точки  $A$ , лежащей на прямой,  $(x, y)$  координаты произвольной точки прямой,  $(b_1, b_2)$  координаты вектора  $\vec{b}$ , параллельного данной прямой,  $t$  — параметр.

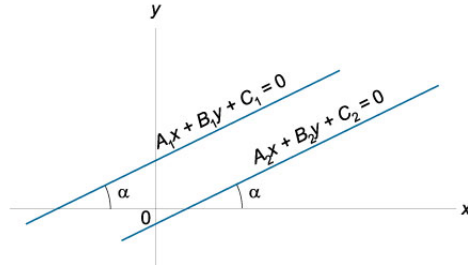


- Расстояние от точки до прямой Расстояние  $d$  от точки  $M(x_1, y_1)$  до прямой  $Ax + By + C = 0$  выражается формулой  $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . расстояние от точки до прямой

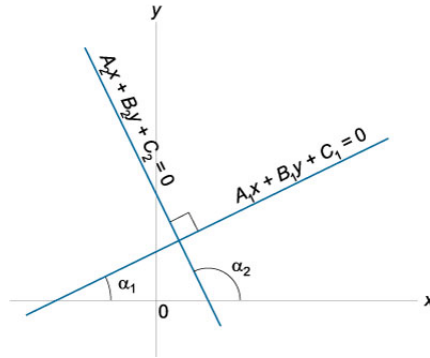


- Параллельные прямые Две прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  параллельны при условии  $k_1 = k_2$ . Две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  параллельны, если  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ .

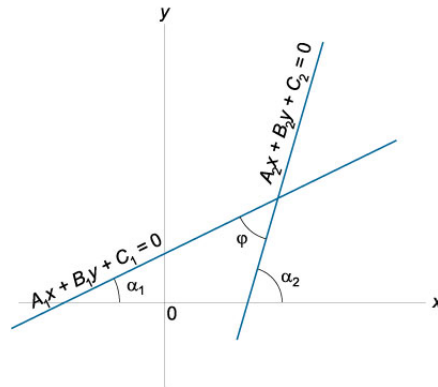




- Перпендикулярные прямые Две прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  перпендикулярны, если  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$  или (что эквивалентно)  $k_1k_2 = -1$ . Две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  перпендикулярны, если  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .



- Угол между прямыми  $\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$



- Пересечение двух прямых Если две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  пересекаются, то координаты точки пересечения равны  $x_0 = \frac{-C_1B_2 + C_2B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$ ,  $y_0 = \frac{-A_1C_2 + A_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$ .

## Глава 44

# Уравнение плоскости в пространстве

Пусть в пространстве задана плоскость  $Q$ . Задана точкой  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  и вектором  $\vec{n} = (A; B; C)$ .  $M(x; y; z) := (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ . При любой ориентации плоскости вектора взаимно перпендикулярны и, таким образом их скалярное произведение равно 0.  $M_0M \cdot \vec{n} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (44.1)$$

### 44.1 общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (44.2)$$

### 44.2 уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Сделаем на плоскости 3 вектора: сделаем их из точки  $M(x; y; z)$ . Все эти векторы компланарны  $\Rightarrow (M_1M, [M_2M, M_3M]) = 0$

### 44.3 уравнение плоскости в отрезках

То же самое, что и по точкам, просто точки на осях. В предыдущее вклячить эти точки и определитель определить.

## 44.4 Нормальное уравнение плоскости

Возьмем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  трехмерного пространства. Если плоскость удалена на расстояние  $p \geq 0$  в положительном направлении нормального вектора  $\vec{n}$ . Возьмем за единицу длину вектора  $\vec{n}$ . Получим, что координатами направляющего косинуса являются  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ , тогда  $|\vec{n}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ .

Из вышесказанного получим, что определение скалярного произведения векторов по формуле  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ;  $\vec{OM} = (x, y, z)$  в результате дают равенство

$$(\vec{n}, \vec{OM}) = |\vec{n}| \cdot |\vec{OM}| \cdot \cos(\vec{n}, \vec{OM}) = |\vec{n}| \cdot np = 1 \cdot p = p$$

Данная формула представляет скалярное произведение в координатной форме. Тогда получаем следующее выражение:

$$(\vec{n}, \vec{OM}) = \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z$$

При сопоставлении двух последних равенств получаем уравнение плоскости такого вида  $\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = p$ . Упростим выражения. Для этого необходимо перенести значение  $p$  в левую сторону, получим

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0. \quad (44.3)$$

Можно корячить иначе, через нормирующий множитель (умножаем общее уравнение)  $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ; знак берём обратным знаком свободного члена.

## Глава 45

# Уравнение прямой в пространстве

1.  $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (P_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (P_2) \end{cases}$  - общее уравнение прямой L в пространстве, как линии пересечения двух плоскостей  $P_1P_2$ .
2.  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  - каноническое уравнение прямой L, которая проходит через точку  $M(x_0, y_0, z_0)$   $\vec{S} = (m, n, p)$ . Вектор  $\vec{S}$  является направляющим вектором прямой L.
3.  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$  - уравнение прямой, которая проходит через две точки  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$ .
4. Приравняв каждую из частей канонического уравнения 2 к параметру  $t$ , получаем параметрическое уравнение прямой: 
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}.$$

## Глава 46

# Поверхности второго порядка, метод сечения

Пусть в пространстве задана ПСК  $Oxyz$ . Фигурой, задаваемой уравнением  $F(x, y, z) = 0$  называется множество тех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Если  $F(x, y, z)$  многочлен, т.е. конечная сумма вида  $ax^p y^q z^r$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;  $p, q, r \in \mathbb{N}$ , фигура на выходе - алгебраическая поверхность. Если  $F(x, y, z)$  - многочлен степени  $k$ , фигура будет порядка  $k$ . Таким образом поверхности второго порядка задаются уравнением вида  $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz + a_7 x + a_8 y + a_9 z + a_0 = 0$ ;  
 $a_0, a_1 \dots a_9 \in \mathbb{R}$   
 $\exists x \in \{a_1, a_2 \dots, a_6\} : x \neq 0$

### 46.1 Метод сечений

**Лемма 46.1.** Пусть задано уравнение  $F(x, y, z) = 0$ , тогда проекция на  $Oxy$ , пересечения поверхности с плоскостью  $z = h$  задаётся уравнением  $F(x, y, h) = 0$ .

*Доказательство.*  $F(x, y, z) = 0 \iff$  Пусть  $M(x_1, y_1, z_1)$  - произвольная точка. Тогда проекция этой точки на  $Oxy = M_1(x_1, y_1, 0)$ . Пусть  $M$  принадлежит пересечению этой поверхности с плоскостью  $z = h \iff M(x_1, y_1, h)$  при этом  $F(x_1, y_1, h) = 0$

Тогда  $M_1$  в  $Oxy = M(x_1, y_1)$  есть проекция пересечения данной поверхности с плоскостью  $z = h$  тогда и только тогда, когда  $M(x_1, y_1, h)$  принадлежит этому пересечению, что значит, что  $F(x_1, y_1, h) = 0$   $\square$

## Глава 47

# Поверхности вращения

Пусть в пространстве задана некая линия  $\gamma$  и прямая  $d$ . Фигура, получающаяся при вращении  $\gamma$  вокруг  $d$  называется поверхностью вращения. Выберем в пространстве ПСК  $Oxyz$  так, чтобы ось вращения совпадала с  $Ox \Rightarrow$  поверхность вращения можно задать так:  $y \in Oxz = x = f(z)$ , где  $f$  - некоторая функция, и рассмотрим Поверхность вращения, полученную при вращении  $\gamma$  вокруг  $Oz$ . Рассмотрим  $M(x, y, z) \in$  этой поверхности, и плоскость, проходящую через  $M \perp Oz$  и  $M_0$ , точку пересечения этой плоскости с  $Oz \Rightarrow M_0 = M_0(0, 0, z_1) \Rightarrow$  вся окружность с центром в  $M_0$ , проходящая через  $M$ , целиком лежит на этой поверхности.

Рассмотрим пересечение этой окружности с  $Oxz : M_1 M_2$ . Заметим, что  $M_0 M_1, M_0 M_2, M_0 M$  - радиусы одной окружности (поэтому они равны друг другу).  $\Rightarrow M_0 M_1 = M_0 M_2 = M_0 M = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - z_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \Rightarrow M_1(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1), M_2(-\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1)$ . Так как  $M$  принадлежит поверхности вращения,  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = f(z_1) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = (f(z_1))^2 \Rightarrow$  эта линия вращения задана

$$\boxed{x^2 = y^2 = f^2(z)} \quad (47.1)$$

Поверхности второго порядка тогда, когда многочлен от  $z$  не более второго порядка:

- $f(z) = a$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + b}$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + bz + c}$

Добавить рисунки сюда, кто-нибудь похуйб на редактуру добавим

## Глава 48

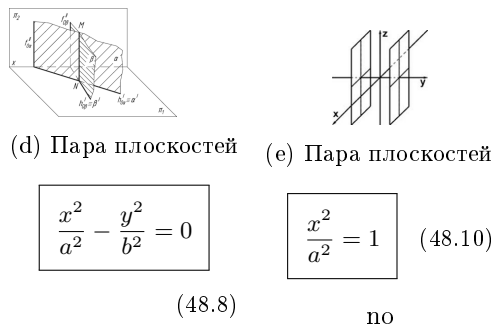
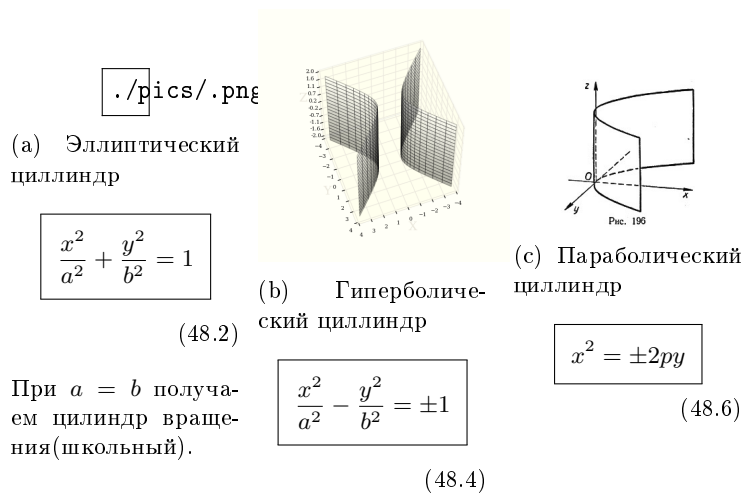
# Цилиндрические поверхности

Пусть в пространстве задана линия  $\gamma$  и ненулевой вектор  $\vec{p}$ . Поверхность называется цилиндрической, если вместе с любой своей точкой она содержит и всю прямую, параллельную  $\vec{p}$  и проходящую через эту точку. Такие прямые называются образующими. В пространстве рассмотрим СК  $Oxyz$  такую, что  $Oz \parallel \vec{p} \Rightarrow$  Все образующие Ц.П. параллельны  $Oz$  и имеют направляющим вектором  $\vec{p}$ . Ц.П. можно задать следующим образом: Пусть в плоскости  $Oxy$  задана линия  $\gamma := f(x, y) = 0$ ; через каждую точку этой линии проведём прямую, параллельную  $Ox$ . Тут  $\gamma$  называется направляющей для этой Ц.П.

Найдём уравнение, задающее Ц.П. Рассмотрим произвольную точку  $M(x, y, z)$  в пространстве. Её проекция  $M_1$  на  $Oxy$  имеет координаты  $M_1(x, y, 0) \Rightarrow M_1 \in \gamma \Rightarrow f(x, y) = 0$ . Если направляющая  $\gamma$  в  $Oxy$  задаётся уравнением  $f(x, y) = 0$ , Ц.П. так же задаётся уравнением  $f(x, y) = 0$  и  $f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_0 = 0$  - второго порядка. Из  $a_1, a_2, a_3$  хотя бы один ненулевой.

### 48.1 Примеры

# 48.1. ПРИМЕРЫ ГЛАВА 48. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ





## Глава 49

# Конические поверхности

Пусть в пространстве зафиксирована точка  $A$  и линия  $\gamma$ . Конической поверхностью с центром в  $A$  называется множество точек, лежащих на всех прямых, проходящих через  $A$  и некоторую точку  $\in \gamma$ . Выберем в пространстве ПСК  $Oxyz$  так, чтобы начало координат было центром данной К.П. Тогда эту К.П. можно задать так:

Рассмотрим плоскость  $z = 1$ , в этой плоскости рассмотрим  $\gamma$ , заданную уравнением  $f(x, y) = 0$  и рассмотрим все прямые, проходящие через начало координат и точку, принадлежащую  $\gamma$ . Относительно прямых, проходящих через  $O$ : если  $M(x, y, z) \neq O$  принадлежит такой прямой,  $\forall t \in \mathbb{R} : M_t(t_x; t_y; t_z) \in$  этой прямой<sup>1</sup>.

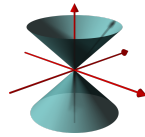
Пусть К.П.  $K$  имеет центром  $O(0, 0, 0)$  и определена линией  $\gamma$ , заданной уравнением  $f(x, y) = 0$ , тогда рассматривая произвольную точку  $M(x; y; z) : M \in K \Leftrightarrow \exists t : M_t(t_x; t_y; t_z) \in \gamma \Leftrightarrow \exists t : f(x_t, y_t) = 0 \Leftrightarrow \exists t = \frac{1}{z} : f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0 \Rightarrow f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$  - уравнение К.П.  $K \setminus \{0\}$ .

Рассмотрим сечения конуса вращения различными плоскостями. 3 случая, если через начало координат:

1. Сечение К.В. есть точка  $O$

---

<sup>1</sup>Господа редакторы, что?



[1] Эллиптический конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0 \quad (49.1)$$

2. Сечение К.В. есть касательная прямая
3. Пара пересекающихся прямых (в начале координат)

Рассмотрим плоскости, не проходящие через начало координат:

1. Плоскость  $\perp Ox$  - окружность.
2. Эллипс(при небольшом угле наклона секущей плоскости).
3. Параболаб если секущая плоскость параллельна одной из образующих.
4. Гипербола, если угол наклона велик.

## Глава 50

# Эллипсоид, Параболоиды, Гиперболоиды

### 50.1 Эллипсоид

Пусть задана ПСК  $Oxyz$ . Эллипсоидом называется фигура, заданная уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \quad (50.1)$$

Все переменные в чётных степенях: Симметричность относительно каждой координатной плоскости, оси, начала координат. Он лежит в коробке размерами  $2a \times 2b \times 2c$  ака Дыня в коробке. Выведем через метод сечений: Режем плоскостями  $z = h$ , тогда проекция на  $Oxy$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \quad (50.2)$$

3 случая:

1.  $|h| > c \Leftrightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0 \Rightarrow$  нет таких точек
2.  $|h| = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm h = \pm c \end{cases}$
3.  $|h| < c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \frac{h^2}{c^2} < 1 \Rightarrow$  Эллипс

Аналогичные результаты получим при резании и другими плоскостями. Вершины эллипсоида:  $(a; 0; 0), (-a; 0; 0), (0; b; 0), (0; -b; 0), (0; 0; c), (0; 0; -c)$ , центр эллипсоида:  $(0; 0; 0)$

## 50.2 Гиперболоиды

### 50.2.1 Однополостные

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (50.3)$$

симметричность как у гиперболоида.

Выведем через сечения:

1.  $z = h : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2}, 1 + \frac{h^2}{a^2} > 0 \Rightarrow \forall h$  эллипс, он растёт, при  $h = 0$  горловой эллипс, он самый мелкий.

2.  $x = h : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} :$

(a)  $|h| < a, 1 - \frac{h^2}{a^2} > 0 \Rightarrow$  Гипербола

(b)  $|h| = a, \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$  Пара пересекающихся прямых

(c)  $|h| > a, 1 - \frac{h^2}{a^2} < 0 \Rightarrow$  Перевернутая начальная парабола (свопнуты действительная и мнимая оси)

3.  $y = h$  см.  $x = h$

## 50.3 Двуполостный гиперболоид, виброчаша

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (50.4)$$

симметричность, как у остальных посонов

сечём  $z = h$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \quad (50.5)$$

1.  $|h| < c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \Rightarrow \emptyset$

2.  $|h| = c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$  Точки, низ и верх виброчаш

3.  $|h| > c : \frac{h^2}{c^2} - 1 > 0 \Rightarrow$  Эллипс

теперь сечём  $x = h$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2} \Rightarrow \quad (50.6)$$

Гипербола

## 50.4 Параболоиды

### 50.4.1 Эллиптический

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z} \quad (50.7)$$

симметричен, но не как виброкаша, его нет сверху, он яма. сечём  $z = h$ :

1.  $h < 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \Rightarrow \emptyset$
2.  $h = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow (0; 0; 0)$
3.  $h > 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \Rightarrow \text{Эллипс}$

теперь режем  $x = h$  (также будет и с  $y = h$ )

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 2(z - \frac{h^2}{2a^2}) \quad (50.8)$$

получаем сдвигающуюся вверх на  $\frac{h^2}{2b^2}$  параболу.

### 50.4.2 Гиперболический Параболоид aka Седло для конических поверхностей

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z} \quad (50.9)$$

Чёткий, симметричный, но не относительно  $Oxy, O$  Режем  $z = h$

1.  $h < 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0 \Rightarrow \text{Гипербола (действительная } Oy)$
2.  $h = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow 2 \text{ пересекающиеся прямые}$
3.  $h > 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \Rightarrow \text{Гипербола (действительная } Ox) \text{ Теперь } x = h$

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow \frac{-y^2}{b^2} = 2(z - \frac{h^2}{2a^2}) \quad (50.10)$$

это парабола, полученная сдвигом на  $\frac{h^2}{2a^2}$  Теперь  $y = h$

$$\frac{x^2}{a^2} = 2(z + \frac{h^2}{b^2}) \quad (50.11)$$

Эта парабола, сдвигающаяся вниз