Ответы на теоретические вопросы к экзамену по математике. Семестр 1, 2019

по конспектам лекций Рачковского Н.Н.
студентов группы 950501 Кагановича М.М., Поддубного Д.П., Веселова М.С.
Под редакцией Рачковского Н.Н. и К^o

12 января 2020 г.

Оглавление

Глава 1

PUBLIC SERVICE ANNOUNCEMENT

Todo list

1. add pictures to latter questions
2. fix types and mistakes, pointed out by redactors
3. align pictures properly
4. fill out the progress table
5. fix chapter names
6. rearrange misaligned questions
7. redo tikzpictures for the 2^{nd} quesiton

Глава 1

Элементы теортии Множеств

1.1 Множества и операции над ними

Множество - совокупность некоторых объектов, обладающих определёнными свойствами. Каждый из объектов называется элементом обозначение множества: $\{a|P(a)\}$ где $P(a)$ - свойство, объединяющее объекты a.

Специльные символы, обозначающие операции над множествами:

1. содержится: A $\subseteq$ B. Каждый элемент множества A содержится в B.
2. совпадает: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$
3. объединение: $A \cup B = \{c|c \in A$ **или** $c \in B\}$
4. пересечение: $A \cap B = \{c|c \in A$ **и** $c \in B\}$
5. теоритическо-множественная разность: $A \setminus B = \{c|c \in A$ **и** $c \notin B\}$
6. декартово произведение: $A \times B = \{(a,b)|a \in A; b \in B\}$ [1]

Операции с $\emptyset$:

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \setminus \emptyset = A$
4. $\emptyset \setminus A = \emptyset$

1.2 Замкнутость множеств

Рассматривая операции умножения и и деления над $\mathbb{N}$ мы *остаёмся* в $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ замкнуто относительно операции умножения.Для того, чтобы $\mathbb{N}$

[1] каждый элемент в паре с каждым другим, как при раскрытии скобок

стало замкнуто относительно операции вычитания нужно добавить к нему отрицательные числа и ноль тем самым привратив его в $\mathbb{Z}$. Таким образом $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно $\times, \pm$ но не $\div$. Для того, чтобы замкнуть $\mathbb{Z}$ относительно $\div$, нужно дополнить его дробями вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Т. О. получили $\mathbb{Q}$ Получили: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ где $\mathbb{R}$ - действительные числа.

1.3 Ограниченность множеств

А ограничено сверху, если $\exists M, \forall a \in A : a \leq M$ и А ограничено снизу, если $\exists M, \forall a \in A : a \geq M$

Таким образом, если множество ограничено **и** сверху **и** снизу, оно называется *ограниченным.* $\Rightarrow \exists M, \forall a \in A : |a| \leq M(1)$

$$\exists M_1, M_2, \forall a \in A : M_1 \leq a \leq M_2$$
$$M = max(|M_1|, |M_2|)$$
$$M \geq |M_1| \geq M_2$$
$$M \geq |M_1| \Rightarrow -M \leq -|M_1| \leq M_1 \Rightarrow$$
$$\forall a \in A : -M \leq -M_1 \leq a \leq M_2 \leq M \rightarrow -M \leq a \leq M$$

Следовательно из ограниченности А получается (1).

1.4 Окрестности

Рассмотрим $a \in \mathbb{R}$. Окрестностью а является отрезок $(b; c)$, содержущюю а. Рассмотрим $\epsilon > 0$. ϵ-окрестностью а является отрезок $(a - \epsilon; a + \epsilon)$, содержущюю а.
$\mathcal{U}_\epsilon(a)$ есть отрезок длиной 2ϵ, центром которого является а:
$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} || x - a| < \epsilon\}$
Оно бывает и проколото: т.е. из отрезка удалена точка а: $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(a) = \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Глава 2

Функции

обведи пж важные уравнения в коробку boxedeq{eq:*}{...}

Пусть даны 2 непустых множества А и В. Отображением из А и В называется правило, согласно которому каждому элементу множества А соответствует не более одного элемента В. Это обозначается $f : A \to B$ Областью определения f называется множество $D(f) = \{a \in A | \exists b = f(a)\}$[1] Множеством значений f называется множество $E(f) = \{b \in B | \exists a \in A; b = f(a)\}$[2] Запись $b = f(a)$ обозначает, что $a \in A$ в отображениии f соответствует $b \in B$ тут b - образ, а а - прообраз.
Свойства биективного[2] отображения $f : A \to B$:

1. $D(f) = A$
2. $E(f) = B$
3. $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
4. обратное оторажение: $f^{-1} : B \to A; a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$

График отображения $fA \to B = \{(a, b)| b = f(a)\} \subset A \times B$ Если А и В - числовые, то это функция тогда график функции есть подмножество в декартовом квадрате[3]. Рассмотрим полскость с прямоугольной системой координат: элементам множества $\mathbb{R}^2$ можно поставить в соответствие точки этой полскости, координаты которой в этой С.К. являются эти элементы $\mathbb{R}^2$. Тогда график функции можно предстваить как множество точек, причем ясно, что не каждое множество точек задает график функции. Множество точек задает график функции тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая параллельная оси ординат пересекает множество данных не более одного раза. Функция может задаваться *аналитически, графичекси и неявно.* Неявный способ: Рассмотрим $F : \mathbb{R}^2 \to R$ и Рассмотрим $F(x; y) = 0$. На Координатной плоскости рассмотрим множество решений

[1] f - заданное нами правило
[2] взаимооднозначного
[3] $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

этого уравнения: $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | F(x;y) = 0\}$: если оказывается, что это множество является графиком функции, функция задана нефвно унавнением $F(x;y) = 0$.

2.1 Типовые функции, график функции

Линейная функция:
Функция вида $y = kx + b; k, b \in \mathbb{R}$ имеет графиком невертикальную прямую при b = 0 график функции проходит через $(0;0)$. К - угловой коеффициент равный тангенсу кгла наклона графика к Ох. Взаимное расположение двух прямых, заданных функциями $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$:

1. совпаление прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2; b_1 = b_2$
2. параллельность прямых $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ **и** $b_1 \neq b_2$
3. пересечение прямых $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

доказательство свойства 2:

$\Rightarrow$) Пусть прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ параллельны.
Следовательно у них не общих точек:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{не имеет решений}$$

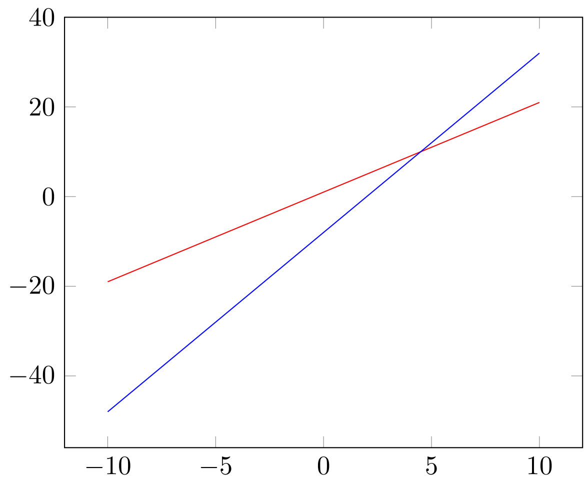
$$\Rightarrow x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1 \text{ не имеет решений}$$

$$\text{Следовательно } x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Предположим, что $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$ и проведем все эти действия в обратном порядке.

2.1.1 Формула получения угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



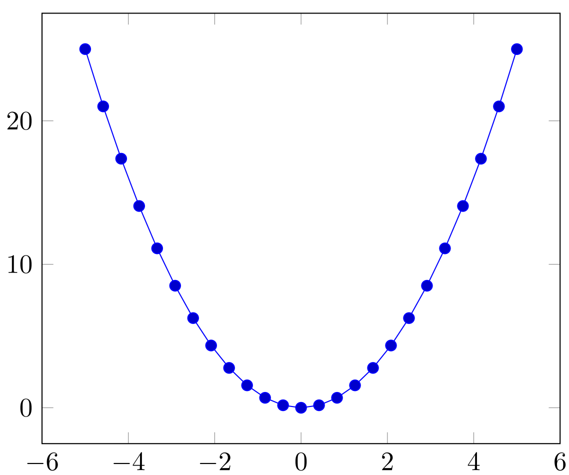
обозначим угол между красной и синей линиями за θ, наклон линий соответственно ϕ_1 и ϕ_2 $\theta = \phi_1 - \phi_2$
$k_1 = \tan\phi_1$
$k_2 = \tan\phi_2$
$\theta = \tan\phi_1 - \tan\phi_2 \Rightarrow$

$$\boxed{\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}} \tag{2.1}$$

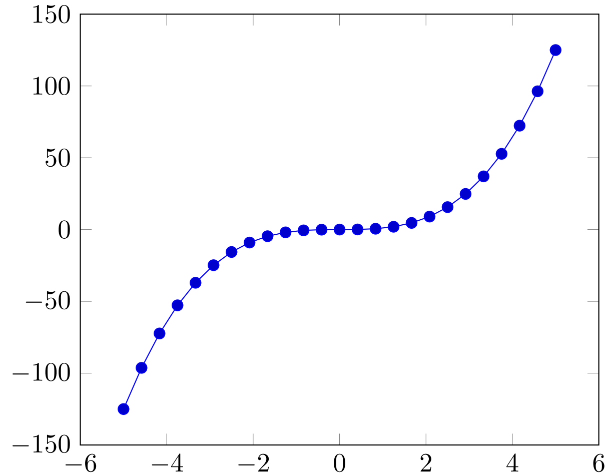
Таким образом 2 прямые взаимоперпендикулярны тогда и только тогда когда $k_1 = \frac{-1}{k_2}$

2.1.2 Основные элементарные функции

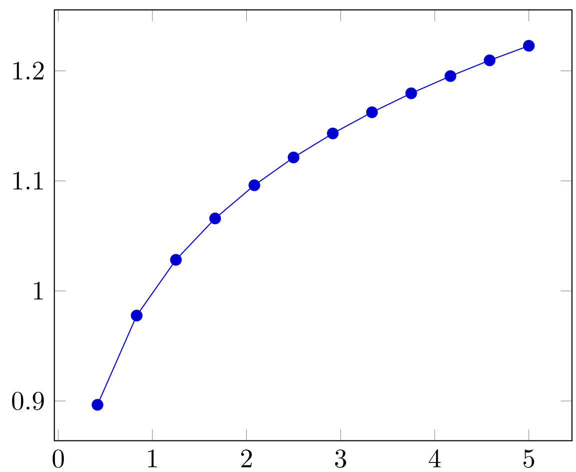
Степенная функция



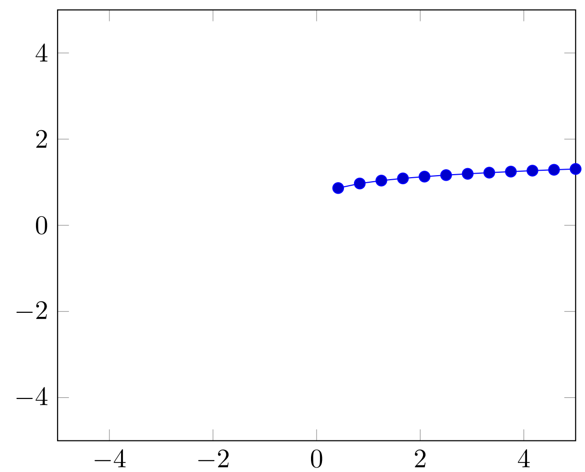
n = 2n



n = 2n+1



$x^{\frac{1}{n}}$ где н - четное



$x^{\frac{1}{n}}$ где н - нечетное

ДОДЕЛАЙС

Глава 3

Окружность, Эллипс, Гипербола, Парабола

Пусть Существует прямоугольная система координат Oxy; Пусть даны две точки $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$; Тогда расстояние между A и B вычисляется так:

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{3.1}$$

3.1 Фигуры и канонические уравнения фигур

Говорят, что уравнение на плоскости задет некоторую фигуру, если принадлежность $M(x; y)$ этой фигуре равносильно выполнению равенства $f(x; y) = 0$ для каждой точки этой фигуры.

3.1.1 Окружность

Окружностью называется множество всех точек в плоскости, удаленных от данной фиксированной точки, называемой центром окружности на одно и то же расстояние, называемое радиусом окружности.
дана точа $M(x; y)$ и окружность с центром $\mathrm{O}(x_0, r_0)$. $\in \omega(O, r) \Leftrightarrow |MO| = R \Leftrightarrow |MO|^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{3.2}$$

Равенство 3.2 есть уравнение окружности т.к. оно равносильно принадлежности точки M к окружности.

3.1.2 Эллипс

Пусть на плоскости заданы 2 точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно 2c; и пусть дано некоторое число $a > c$. **Эллипсом называется**

множество всех точек ранной плоскости, длял которых сумма расстояний от этой точки до точек F_1 и $F_2 = 2a$. Точки F называются фокусами эллипса. Вывод:

Зададим на плоскости ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c;0), F_2(c;0)$

Возьмем произвольную точку $M(x;y) \Rightarrow (MF_1 + F_1F_2) = 2a \Rightarrow$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\therefore a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\ldots$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2$$

$\therefore b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, делим на a^2b^2

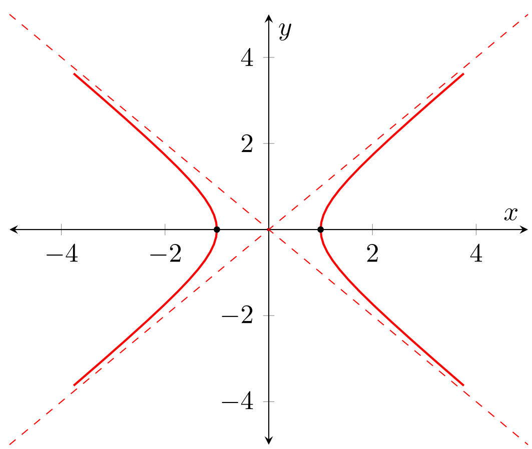
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{3.3}$$

[1]

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. Эллипс ограничен прямоугольником 2a на 2b. В случае совпадения a и b получим $\omega(0,a)$. **эксцентриситет эллипса:** $\varepsilon = \frac{c}{a}$. $\varepsilon \in [0;1] \therefore \varepsilon = 0$ для окружности.

3.1.3 Гипербола

На плоскости заданы несовпадающие точки F_1, F_2, расстояние между которыми равно 2c. Пусть $a \in (0;c)$. **Гиперболой называется множество точек, для которых разность расстояний от точки до F_1 и F_2.** F_1 и F_2 это фокусы гиперболы. На плоскости задана ПСК с $Ox = F_1F_2$; координаты точек F получаются: $F_1(-c;0), F_2(c;0)$



[1]неуверен в записи, особенно в $(MF_1 + F_1F_2) = 2a$

wywod urawnenija giperboly zdesja.

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1} \tag{3.4}$$

Так как обе переменных x и y в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. $y=\pm\frac{b}{a}x$ - асимптоты гиперболы. a и b - полуоси гиперболыб точки пересеччения с Ox - вершины. **эксцентриситет гиперболы:** $\varepsilon=\frac{c}{a}$. $c>a\Rightarrow\varepsilon>1$

3.1.4 Парабола

На плоскости задана прямая Δ и $F\notin\Delta$. **Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от Δ и F.** При этом Δ - директрисса параболы, F - фокус Параболы. Введем ПСК: Ox проходит через F и $\perp\Delta\Rightarrow F(\frac{p}{2};0)$ где p - расстояние от F до Δ.

Уравнение параболы
wywod urawnenija tuta

$$\boxed{y=\pm 2px} \tag{3.5}$$

y в уравнении в чтной степени $\Rightarrow$ парабола симметрична относительно Ox при $x\geq 0$ получается, что парабола расположена в правой полуплоскости.

Глава 4

Бином Ньютона

Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

Сочетания: $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Применим метод математической индукции:

1. При n=1 имеем: $a+b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = \frac{1!}{0!(1-0)!} b + \frac{1!}{1!(1-1)!} a = b + a$
Таким образом, при $n = 1$ формула верна
2. При $n = 2$:

   $(a+b)^2 = C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!} b^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} ab +$
   $+ \frac{2!}{2!(2-2)!} a^2 = b^2 + 2ab + a^2$

   Для $n = 2$ также справедлива формула бинома Ньютона
3. Предположим, что она верна и при $n = k$:

   $(a+b)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i}$
4. Докажем, что она верна и при $n = k+1$
Действительно:

   $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (\sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i})(a+b) = \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} +$
   $+ \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i a^i b^{k-i+1} = C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i a^i b^{k-i+1} +$
   $C_k^0 b^{k+1} a^0 =$

   Заметим, что в обеих суммах сумма показателей степеней a и b в каждом слагаемом равна одному и тому же $(k+1)$. С другой стороны, каждая из этих сумм содержит ровно одно слагаемое с множителями ab^k и ровно одно слагаемое с показателями $a^2 b^{k-1}$ и $a^k b$, поэтому:

   $= C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} (C_k^i + C_k^{i+1} a^{i+1} b^{k-i} + C_k^0 b^{k+1} a^0$

   $C_k^i + C_k^{i+1} = \frac{k!}{i!(k-1)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!} = \frac{k!(i+1)+k!(i-1)}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{k!(k+1)}{(i+1)!(k-i)!} =$

$= \frac{(k+1)!}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{(k+1)!}{(i+1)!((k+1)-(i+1))!} = C_{k+1}^{i+1}$

Продолжая цепочку равенств в вычисляемом $(a+b)^{k+1}$, получаем:

$$1 * a^{k+1}b^0 + \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i+1} a^{i+1} b^{k-1} + 1 * a^0 b^{k+1}$$
$$1 = C_{k+1}^{k+1} = C_{k+1}^{0}$$

В сумме сделаем замену $j = i + 1$:

$$C_{k+1}^{k+1} a^{k+1} b^0 + \sum_{i=1}^{k} C_{k+1}^{j} a^j b^{(k+1)-j} + C_{k+1}^{0} a^0 b^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j} a^j b^{(k+1)-j}$$

Таким образом, мы показали, что формула Бинома Ньютона справедлива при $n = k+1 \Rightarrow$ эта формула справедлива для любого натурального n

Глава 5

Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.

Числовая последовательность называется отображением в котором каждому $\mathbb{N}$ числу соответствует некоторое число. Последовательности принято изображать $\{x_n\} = x_1; x_2; \dots x_n$ Если из $\{x_n\}$ взято некое бесконечное подмножество, из которого сформирована другая последовательность, в которой **порядок следования членов такой же как и в исходной последовательности, то она называется подпоследовательностью.** Обозначение $\{x_{nm}\}$. Из определения последовательности: если $k_1 < k_2 \Rightarrow m_1 < m_2$.
Число а называется пределом последовательности
$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ в сколь угодно малой $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ может находиться **конечное число членов этой последовательности**.

Предел числовой последовательности есть точчка, в которой *кучкуются* почти все члены последовательности за исключением, нескольких первых членов.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*; в противном случае - *расходящейся.* Расходящиеся последовстельности также включают бесконечно большие последовательности.

бесконечно большие последовательности:

$$lim_{n\to\infty} k_n = \infty \Leftrightarrow$$
$$\forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$$

бесконечно малые последовательности:

$$lim_{n\to\infty}k_n = -\infty \Leftrightarrow$$
$$\forall M < 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| < M$$

5.1 Свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Действительно, если предположить, что пределов 2, можноуказать несколько $\mathcal{U}_\epsilon$ этих пределов, не пересекающте друг друга. По определению предела внутри каждой из этих $\mathcal{U}_\epsilon(a)$ должно содержаться бесконечно много членов последовательности, что есть противоречие.
2. Если Последовательность сходится к a, то любая подпоследовательность этоц последовательности сходиться к a.
3. Любая сходящаяся последовательность ограничена:
$$\text{Пусть } \epsilon = 1 : \exists \in \mathbb{N}, n \geq N : |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow$$
$$|x_n| - |a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$$
Пусть члены $x_1 \dots x_{N-1}$, не попавшие в рассматриваемую окрестность точки a. и Пусть $M = max(|x_1| \dots |x_{N-1}|, |a+1|)$ $\forall n, |x_n| \leq M$
4. Если для 2х членов последоватеьностей x_n и y_n, сходящихся к числам a и b соответственно $a < b$, начиная с некоторого номера $x_n < y_n, a \leq b$:
$$\text{Пусть } \lim_{n\to\infty} x_n = a$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b$$
$$a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, A_n \geq N : x_n < y_n$$
$$\text{Примем } \epsilon = \tfrac{b-a}{2}$$
$$\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \tfrac{b-a}{2},$$
$$\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \tfrac{b-a}{2}$$
$$\therefore \text{ при } N = max(N_1, N_2)$$
$$\forall n \geq N : \begin{cases} \begin{cases} x_n > a - \frac{b-a}{2} \\ x_n > a + \frac{b-a}{2} \end{cases} \\ b - \frac{b-a}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2} \end{cases}$$
5. Если для 3х последовательностей x_n, y_n, z_n выполняется $x_n \leq y_n \leq z_n$ $lim_{x_n\to\infty}x_n = a$ $lim_{x_n\to\infty}z_n = a$, то y_n также сходится к a
6. Если $lim_{x_n\to\infty}x_n = a \neq 0$, то начиная с некоторого номера $|x_m| > \frac{a}{2}$ все члены этой последовательности имеют тот же знак, что и a.
7.

Тероэма 5.1. *Пусть x_n и y_n сходятся к a и b, тогда*

(a) $\{x_n \pm y_n\} = a \pm b$
(b) $\forall c\{c \cdot x_n\}$ $\lim_{n\to\infty} = c \cdot a$
(c) $lim_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$
(d) $lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{x_n}\} = \frac{1}{a}$, *если* $a \neq 0$
(e) $lim_{n\to\infty}\{\frac{y_n}{x_n}\} = \frac{b}{a}$, *если* $a \neq 0$

Глава 6

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Выделяют бесконечно большие последовательности - последовательности, имеющие пределом бесконечность. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечный предел, если $\forall M > 0 \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$ Последовательность называется бесконечно малой последовательностью (б.м.п.), если $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ выполняется равенство $|x_n| < \epsilon$

6.1 Основные свойства б.м. и б.б. последовательностей

1. Сумма б.м. последовательностей есть б.м.п.
2. Произведение ограниченной последовательности и б.м. есть б.м.п.
3. Если $\{x_n\}$ б.м.п., то $\{x_n\}$ - ограниченная последовательность
4. Произведение б.м.п. есть последовательность б.м.
5. Если все элем бмп начиная с некоторого номера равны одному и тому же числу, то это число – ноль.
6. Если $\{x_n\}$ б.м.п. и $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 : \{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ - б.б.п
7. Если $\{x_n\}$ б.б.п., то $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \neq 0, \forall n \geq n_0$ и последовательность $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ - б.м.п

Глава 8

Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$

8.1 Сходимость

Докажем, что она сходится. Для этого используем вспомогательную последовательность $y_n = x_n(1 + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Заметим, что $1 + \frac{1}{n} > 1$, поэтому:
$y_n = x_n(1 + \frac{1}{n}) > x_n = (1 + \frac{1}{n})^n =$
$= 1^n + n * 1^{n-1}(\frac{1}{n}) + ...(\frac{1}{n})^n > 1 + 1 = 2$
Таким образом, $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > 2$
Т.е. последовательность ограниченна снизу числом 2

8.2 Убывание

Теперь покажем, что она является убывающей. Для этого рассмотрим отношение $\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} * \frac{(n-1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{2n+1}} =$
$\frac{n}{n-1} * \frac{(n^2-1)^{n+1}}{(n^2)^{n+1}} = \frac{n}{n-1} * (\frac{n^2-1}{n^2})^{n+1} = \frac{1}{\frac{n-1}{n} * (1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1}} = (*)$
$(1 + \frac{1}{n^2-1})^{n+1} = 1^{n+1} + (n+1) * 1^n * \frac{1}{n^2-1} + ... + (\frac{1}{n^2-1})^{n+1} < 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$
$* < \frac{1}{\frac{n-1}{n} * \frac{n}{n-1}} = 1$
$\frac{y_n}{y_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow y_n < y_{n-1} \Rightarrow \{y_n\}$убывающая
По теореме 4, последовательность y_n сходящаяся. Вернемся к исходной последовательности x_n. $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$(по пункту 5 теоремы 1)
Таким образом, последовательность x_n также сходящаяся.

8.3 Число e

Предел этой последовательности есть число Эйлера (e). Таким образом, получаем следующее определение числа e:
$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
Логарифм по основанию e - натуральный (ln)
$\ln a = b \Leftrightarrow e^b = a$

Глава 9

Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.

Предел функции на бесконечности определяется так:

9.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности

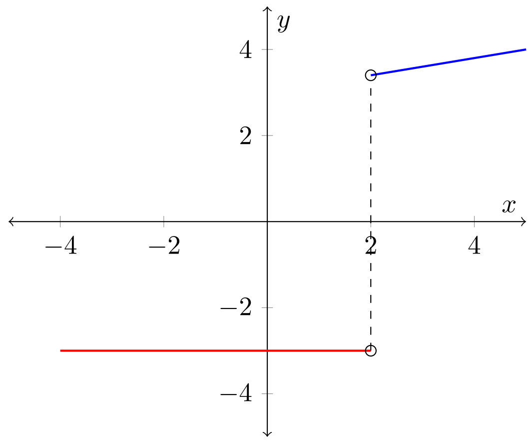
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$
  $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, |x| > \delta; |f(x) - A| < \epsilon$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow$
  $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \dot{\mathcal{U}}_{\delta(x_0)}, |f(x)| > \epsilon$

9.2 Односторонние пределы

$y = f(x)$ определена на $(x - \delta; x)$.
$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$: Односторонним пределом слева функции $y = f(x)$ называется $A : \forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$, если A существует.
Анологично определяется предел справа: $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ $\forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 + \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-0} f(x) = A = \lim_{x\to x_0+0} f(x)} \tag{9.1}$$

предел слева(точка на красном) и справа(точка на синем)



в данном случае предела у функции нет

Глава 10

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$. Эта функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
А бесконечно большой при $x \to x_0$ - если
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

1. Сумма и произведение любого конечного числа и б.м.ф. является б.м.ф
2. Пусть функция $y = f(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$, а функция $y = g(x)$ ограничена в $U(x_0)$, то есть $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| \leq c$. Тогда функция $y = f(x) * g(x)$ является б.м.ф.при $x \to x_0$
3. произведение конечного числа б.б.ф является б.б.ф.при $x \to x_0$
4. Пусть функция $y = f(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$, а функция $y = g(x)$ удовлетворяет свойству: $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| > c$, тогда функция $y = f(x) * g(x)$ является б.б.ф.при $x \to x_0$
5. Пусть функция $y = f(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$ и $f(x) \neq 0$ в $U(x_0)$, тогда функция $y = \frac{1}{f(x)}$ является б.б.ф.при $x \to x_0$
6. Если функция $y = f(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$, тогда функция $y = \frac{1}{f(x)}$ является б.м.ф.при $x \to x_0$

Глава 11

Непрерывность функций в точке, их свойства.

$y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в этой точке, а также в $\mathcal{U}_{(x)}$ и при этом $\lim_{x \to x_0} f(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0| < \epsilon$
$\Delta_x = x - x_0$ - приращение аргумента
$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ - есть приращение функции в x_0
$y = f(x)$ непрерывна в $x_0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0} \tag{11.1}$$

Непрерывность функции в точке означает то, что в любой, сколь угодно маленькой окрестности, бесконечно малое приращение аргумента влечёт за собой бесконечно маое приращение функции.

Свойства непрерывной функции в точке

1. Если функция непрерывна в точке x_0, тов некоторой окрестности этой точки эта функция ограничена.
2. Если функция непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности x_0 функция имеет тот же знак, что и $f(x_0)$
3. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) < g(x_0)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)}$ где $f(x) < g(x)$
4. Если $y = f(x_0)$ и $y = g(x_0)$ непрерывны в точке x_0, то так же непрерывны $y = f(x_0) \pm y = g(x_0)$, $y = f(x_0) \cdot y = g(x_0)$, $y = f(x_0) y \div g(x_0), g(x) \neq 0$
5. Непрерывность композиции функций: Если $y = g(x_0)$ непрерывна в точке x_0, $z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$, то $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

   Доказательство.
   $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$

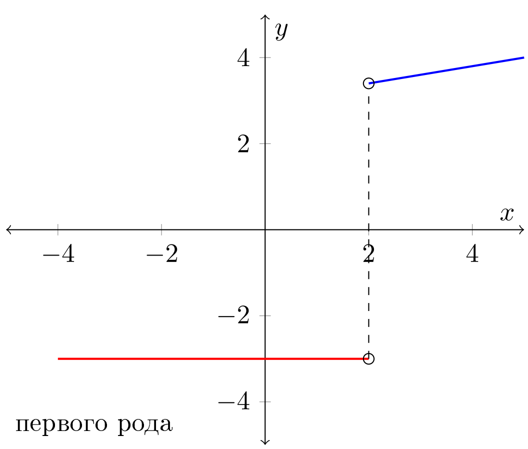
$\forall \sigma > 0, \exists \tau > 0, \forall y \in \mathcal{U}_{\tau(y_0)} : |f(y) - f(y_0)| < \sigma$
$\forall \sigma > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \sigma$
что и означает непрерывность $y = f(g(x))$ в точке x_0 □

11.1 Односторонняя непрерывность

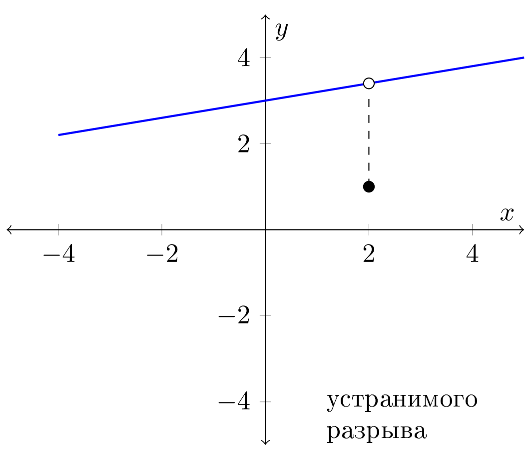
$y = f(x)$ определена на $(x_0 - \delta; x_0]$ такая функция называется непрерывной слева, если $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ аналогично функция называется непрерывной справа, если $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$. Функция непрерывна она непрерывна слева и справа.
Функция называется разрывна в точке x_0, если она либо не определена в этой точке, либо определена, но не непрерывна.
Классификация точек разрыва:

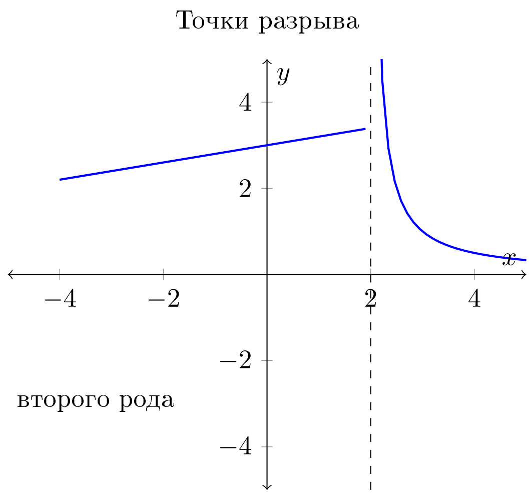
1. Если существуют и конечны оба односторонних пределаи эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва. $lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода

Точки разрыва



Точки разрыва





11.2 непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$

- постоянные функции
- $y = x$
- $y = a_n x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \cdots + a_0$
- дробно-рациональные функции $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P(x), Q(x) - многочлены степени x
- функции $\sin, \cos, \tan, \cot$

Глава 12

Непрерывность элементарных функций. Замечательные пределы

12.1 Непрерывность элементарных функций

Заметим, что непрерывными в любой точке определения являются:

1. Постоянная функция: $y = c$
2. $y = x$
3. $y = a_n * x^n + a_{n-1} * x^{n-1} + ...a_0$ - многочлен
4. Дробно-рациональная функция
   $y = \frac{P(x)}{Q(X)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены
5. Тригонометрические функции

12.2 Непрерывность синуса

Докажем непрерывность sin
Рассмотрим произвольный x_0 и $x = x_0 + \Delta x$
$|\Delta sin(x_0)| = |sin(x_0 + \Delta x) - sinx_0| = |2sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}| = 2|sin\frac{\Delta x}{2}| *$
$*|cos(\frac{2x_0+\Delta x}{2})| \leq 2|sin\frac{\Delta x}{2}| \leq 2|\frac{\Delta x}{2}| = |\Delta x| \leq 1$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon, \forall |\Delta x| < \delta : |\Delta sinx_0| \leq |\Delta x| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta sinx_0 = 0 \Rightarrow$
$sinx$ - непрерывна
Непрерывность cos получаем из уже даказанной непрерывности синуса, теоремы о непрерывности композиции функций. Формула приведения:
$cosx = sin(\frac{pi}{2} - x)$
Непрерывность tg и ctg получаем из непрерывности sin и cos, частного непрерывных функций

12.3 Еще непрерывные функции

Можно также доказать непрерывность

1. показательной функции $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
2. $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
3. А также функций, обратных к тригонометричесим, в каждой точке области их определения
4. Непрерывной является также степенная функция
$y = x^\alpha, \alpha > 0$ в каждой точке своей области определения
5. Если $\alpha < 0$ и данная функция имеет смысл при $x < 0$, то данная функция непрерывна в каждой точке своей области определения. При этом заметим, что точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода

12.4 Замечательные пределы

При вычислении приделов функций часто удобно использовать так называемые "Замечательные пределы"

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ (1-й замечательный предел)
2. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ (2-й замечательный предел)
$\lim\limits_{x \to 0} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$; (3-й замечательный предел)
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (4-й замечательный предел)
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^\beta - 1}{x} = \beta$(5-й замечательный предел)

При вычислении пределов удобно также пользоваться следующим следствием из теоремы о непрерывност композиции функций:
$\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} g(x))$ При условии, что функция $g(x_0)$ непрерывна в точке x_0, а функция f непрерывна в точке $y_0 = g(x_0)$ - доказать самостоятельно

Глава 13

Сравение функций, эквивалентные функции

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в $\mathcal{U}_{x_0}$. Говорят, что $f(x)$ сравнима с $g(x)$, если

$$\boxed{\exists\epsilon, \exists\mathcal{U}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| \leq \epsilon|g(x)|} \tag{13.1}$$

В этом случае пишут, что $f(x) = O(g(x))$.
Очевидно, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} \leq \epsilon$ а это означает, что $\frac{f(x)}{f(x)}$ ограничена в $\mathcal{U}_{x_0}$.

Говорят, что $y = f(x)$ бесконечно мала по сравнению $y = g(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| < \epsilon \cdot |g(x)|;$,f(x) = o(f(x))x $\to x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} |\frac{f(x)}{g(x)}| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \alpha(x))$ где $\alpha(x)$ - БМФ при $x \to x_0$.

13.1 Эквивалентность

Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ квивалентны при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ или конечному числу A, тогда пишется $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$, тут $y = g(x)$ - главная часть $y = f(x)$

Тероэма 13.1. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $\forall x$:*

- $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot h(x) = lim_{x\to x_0} g(x) \cdot h(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

Таблица эквивалентных при $x \to 0$:

sin(x)	x
tg(x)	x
arcsin(x)	x
arctg(x)	x
$1 - cos(x)$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln a$	x
$a^x - 1$	$x \cdot \ln a$
$\log_a(1+x)$	$\frac{x}{\ln a}$
$e^x - 1$	x
$(1+x)^\beta - 1$	βx
$x^\beta - 1$	$\beta(x-1)$

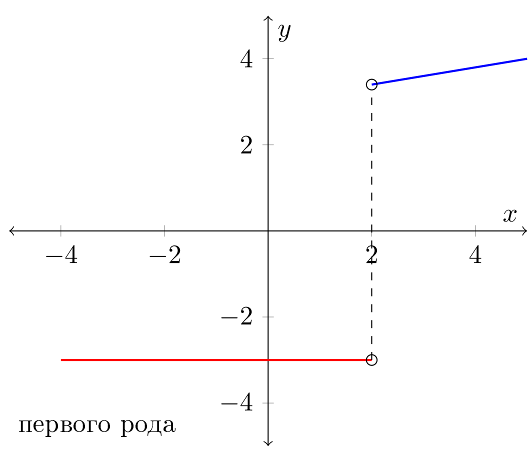
Глава 14

Точки разрыва

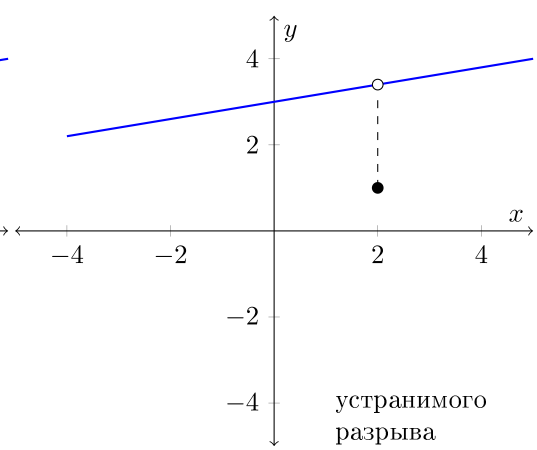
Классификация точек разрыва:

1. Если существуют и конечны оба односторонних пределаи эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва. $lim_{x \to x_0+0} f(x) = lim_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода

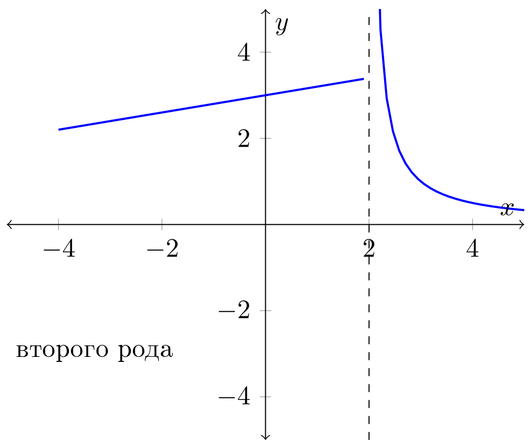
Точки разрыва



Точки разрыва



Точки разрыва



второго рода

Глава 15

Непрерывность функции на отрезке

Пусть $y = f(x), [a; b] \subset \mathcal{D}(y)$. $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$ и непрерывна справа в точке a и слува в точке b.

Тероэма 15.1. *Кантора о вложенных отрезках.*
Имеется $[a; b]$ *и совокупность вложенных отрезков* $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$ *и при этом* $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$[1], *тогда*

$$\boxed{\exists c \in [a; b] : \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c} \tag{15.1}$$

Используя теорему Кантора Докажем теорему Больцана-Вейерштрасса

Доказательство. $\forall \{x_n\} \subset [a; b]$ можно выделить мходящуюся подпоследовательность:
Разобьём $[a; b]$ точкой C пополам и рассмотрим $[a_1; b_1]$, половину первоначального отрезка.
Эта половна содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$. Пусть $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$.
Точкой C_2 Разобьём отрезок $[a_1; b_1]$ пополам и мрассмотрим $[a_2; b_2]$, она содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$
и в этом отрезке обозначим x_{n_2}, чтобы $n_2 > n_1$ и так далее. Получим

$$\{x_{n_k}\} \in [a_k; b_k], \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$a_k \leq x_{n_k} \leq, b_k - a_k = \tfrac{b_n - a_n}{2^k}$$
$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{b_k - a_k}{2^k} = 0$$

По теореме Кантора имеем: $\lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_k = c$

В неравенстве $a_k \leq x \leq b_k$ перейдём к пределам.

[1]вложены друг в друга и уменьшаются

По теореме о 2х милиционерах:
$a_0 \leq \lim_{n\to\infty} x_{n_k} \leq c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = c \in [a;b]$

□

Тероэма 15.2. *Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.*
$\exists c > 0, \forall x \in [a;b] : |f(x)| \leq c$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Предположим, что она неограничена на этом отрезке.
Отсюда $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a;b] : |f(x)| \geq n$
Отсюда по Больцана-Вейерштрасса в $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ с пределом $x_0 \in [a;b]$
Отсюда $\forall k, |f(x_{x_k})| > n_k, \lim_{k\to\infty} |f(x_{x_k})| \geq \infty$
Поскольку $\{x_n\} \to x_0$, в x_0 функция не является непрерывной, а терпит разрыв второго рода, что протеворечит нашему утверждению. □

Тероэма 15.3. *Вейерштрасса.*
Непрерывная на $[a;b]$ функция достинает на нём своего максимального и минимального значений.

Глава 16

Теорема Коши о прохождении через ноль. Теорема Коши о промежуточном значении

16.1 Теорема Больцано-Коши о среднем значении

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и пусть $f(a) \neq f(b)$.
Тогда для любого числа c: $c \in (f(a); f(b)), \exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = c$
(Для определенности предположем, что $f(a) < f(b)$)

16.1.1 Доказательство

Рассмотрим x_0 -середина отрезка $[a; b]$. Возможны 2 случая:

1. $f(x_0) = c \Rightarrow \xi = x_0 \Rightarrow$ доказано
2. $f(x_0) \neq c \Rightarrow [a_1; b_1]$ - половина $[a; b]$, для которой $f(a_1) < c < F(b_1)$
   x_1 - середина $[a_1; b_1]$, если $f(x_1) = c \Rightarrow x_1 = \xi$. А если $f(x_1) \neq c \Rightarrow$ $[a_2; b_2], f(a_2) < c < f(b2)$
   Продолжим этот процесс
   В результате мы либо через число шагов найдем $x_n : f(x_n) = c \Rightarrow \xi = x_1$, либо построим совокупность вложенных отрезков $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$
   $f(a_n) < c < f(b_n)$
   В этом случае, по теореме Кантора о вложенных стяг. отрезках $\exists a_0 \in [a; b]; a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Перейдя к пределу в последнем двойном неравенстве и, учитывая непрерывность функции, получим, что:
$f(a_0) = c \Rightarrow \xi = a_0 \in [a;b]$

16.2 Важное следствие

Из теоремы Больцано-Коши очевидным образом вытекает следствие: Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и пусть значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют различные знаки. Тогда найдется точка $\xi\ in[a;b] : f(\xi) = 0$, т.е. график пересекает ось Ох в некоторой точке отрезка $[a;b]$.

Глава 17

Производная функции, односторонние производные

Пусть $y = f(x), x_0 \in \mathcal{D}(f(x))$. Рассмотрим график функции. и прямые $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ Среди всех таких прямвх рассмотрим ту, которая наиболее тесно прижимается к графику функции $f(x)$. Такая прямая называется касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$. Эту прямую можно найти так: На графике функции рассмотрим кроме $(x_0; f(x_0))$ рассмотрим $(x_1; f(x_1))$ и прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая - секущая, приближённая[1]

Уравнение секущей с угловым коеффициентом. Так как секущая должна роходить через $(x_0; f(x_0))$ должно выпоняться равенство $k = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Rightarrow (x_1; f(x_1)) \to (x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow x_1 - x_0 \Rightarrow k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ Если этот преел конечен и существует, то он есть производная функции $y = f(x)$ в x_0 и обозначается $f'(x_0)$

$x_1 - x_0 = \Delta x, f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$

$f'(x_0) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ иногда обозначается $\frac{df(x_0)}{dx}$

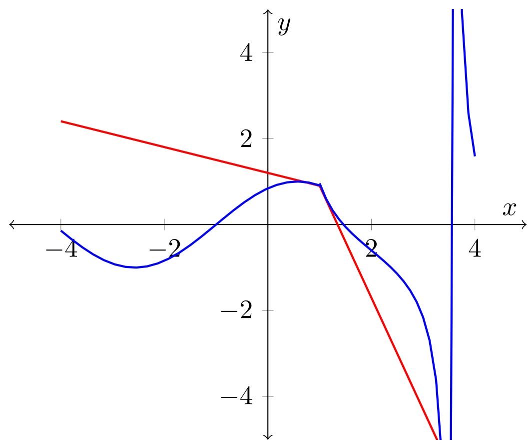
Может оказаться, что $lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ бесконечен, в этом случае касательая к графику в точке вертикальна

Как известно, существование конечного предела равносильно существованию и равенству между собой односторонних пределов $lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ и $lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ Эти односторонние пределы, если они конечны и существуют, называются односторонними производными и обозначаются $f'(x_{0-0})$ и $f'(x_{0+0})$ Их существование означает существование касательной к фрагменту графика функции левее и правее $(x_0; f(x_0))$. Справедливо и обратное.

Возможны случаи, когда односторонние пределы существуют, но не равны друг другу это значит, что в точке $(x_0; f(x_0))$ терпит излом и не является гладким.

[1] Размытое определение

Излом графика функции



Тероэма 17.1. *Если $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть Существует конечный предел
$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) + o(\Delta x)$
Перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$:
$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow f(x_0)$ непрерывна в x_0
Заметим, что обратное утверждение неверно. □

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(cf)' = c(f)'$
3. $(f \cdot g)' = f'g \cdot g'f$
4. [2] $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $c' = 0$

[2]proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{cos^2(x)}$
x^k	$k \cdot x^{x-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot lna$
$log_a x$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ при $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$ при $y = f(x)$

Глава 18

Уравнение касательной и нормали к графику функции

Не найдено в конспекте. Собрано из интернета
Предположим, что ф-я $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$. В этой точке функция имеет значение $y_0 = f(x_0)$. Пусть независимая переменная в точке x_0 получает приращение Δx. Соответствующее приращение функции Δy выражается формулой $\Delta y = f(x0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рисунке 1 точка M_1 имеет координаты $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Построим секущую MM_1. Ее уравнение имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где k - угловой коэффициент, зависящий от приращения Δx и равный $k = k(\Delta x) = \Delta y \Delta x$. При уменьшении Δx точка M_1 стремится к точке $M : M1 \to M$. В пределе $\Delta x \to 0$ расстояние между точками M и M_1 стремится к нулю. Это следует из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0:
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} |MM_1| = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = 0$
Предельное положение секущей MM_1 как раз и представляет собой касательную прямую к графику функции $y = f(x)$ в точке M.
Возможны два вида касательных - наклонные и вертикальные.
Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k_0$, то прямая, имеющая уравнение
$y - y_0 = k(x - x_0)$, называется наклонной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0).
Если предельное значение k при $\Delta x \to 0$ является бесконечным: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \pm\infty$, то прямая, имеющая уравнение $x = x_0$ называется вертикальной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0).
Важно отметить, что
$k_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, то есть угловой коэффициент касательной равен значению производной функции $f(x0)$ в точке касания x_0.

Поэтому уравнение наклонной касательной можно записать в таком виде:
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ или $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Поскольку угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона α, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, то справедливо следующее тройное равенство:
$k = \tan\alpha = f'(x_0)$.

Уравнение нормали в декартовых координатах Прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания (x_0, y_0), называется нормалью к графику функции $y = f(x)$ в этой точке (рисунок 2).
Из геометрии известно, что произведение угловых коэффициентов перпендикулярных прямых равно -1. Поэтому, зная уравнение касательной в точке (x_0, y_0):
$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Глава 19

Основные правила дифференцирования, производные элементарных функций.

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2. $(cf)' = c(f)'$
3. $(f \cdot g)' = f'g \cdot g'f$
4. [1] $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $c' = 0$

[1]proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{cos^2(x)}$
x^k	$k \cdot x^{x-1}$
e^x	e^x
$log_a x$	$\frac{1}{x \cdot ln(a)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ при $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$ при $y = f(x)$

Глава 20

Дифференциал функции

Функция называется дифференцируемой в точке x_0, если её $\Delta f(\Delta x)$ можно предстваить так: $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$ где A - конечное число; $A(x - x_0)$ называется дифференциалом.

Тероэма 20.1. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда функция имеет конечную производную в этой точке и производная функции равна A*

Доказательство. Если $y = f(x)$ дифференцируема в x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)|_{\div(x - x_0)}$$

при перезоде к пределам:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{A + o(x - x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

Предположим, что $f(x)$ имеет конечную производную

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'x_0 + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow A = f'(x_0)$$

$\square$

Таким образом дифференцируемость функции равносильна существованию её конечной производной.

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = df(x_0) + (x - x_0)} \tag{20.1}$$

При $x \to x_0, df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Бесконечно малое приращение аргумента Δx обозначается dx, отсюда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \tag{20.2}$$

Заметим, что формула справедлива и когда x - функция.

$$\boxed{df(x(t)) = (f'(x(t)))'dt = f'(x) \cdot x(t)dt = f'(x)dx} \tag{20.3}$$

Дифференциал можно использовать и при приблиэённом вычислении значения функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0), x \to x_0 \Rightarrow$$

при x близких к x_0 $o(x - x_0) \approx 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)} \tag{20.4}$$

Пример:

$$\sqrt[100]{1.1} \approx |_{x_0 \approx 1 = \sqrt{x}|_{x=1}}$$

$$(x^{\frac{1}{100}})|_{x=1} \cdot 0.1 + 1 = \frac{1}{100} \cdot x^{-0.99}|_{x=1} + 1 =$$

$$0.1 \cdot \frac{1}{100} + 1 = 1.001$$

20.1 Основные свойства производной на отрезке

Тероэма 20.2. *Ферма: Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум*[1] $\Rightarrow$ *если*

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \le f(x)$$

[1] max || min

для мин. экстр $f(x_0) \geq f(x)$

Доказательство. Если x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$, то $f'(x_0) = 0$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

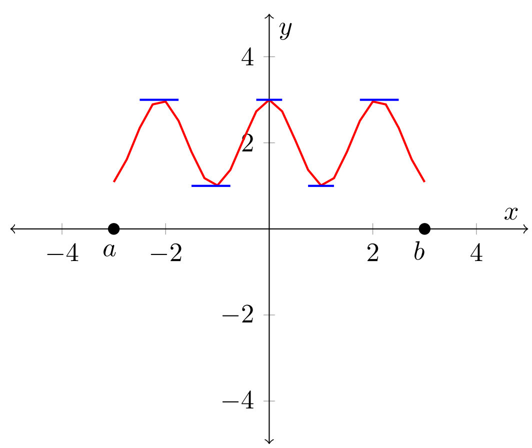
$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

Тероэма 20.3. *Ролля: Пусть* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$ *и дифференцируема на* $(a;b)$ *и Если* $f(a) = f(b), \exists c \in [a;b] : f'(c) = 0 \forall (a;b)$

Доказательство. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего маесимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, чтчо хоть один их нах отличается от $f(a) = f(b)$. Обозначим такую точку экстремума $c \in (a;b)$
$f(c) \neq f(a) = f(b)$ и по теореме Ферма $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

Тероэма 20.4. *Коши: Пусть $y = f(x)$ и Пусть $y = g(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и дифференцируемы на $(a; b), g'(x) \neq 0$, тогда*

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$
$\exists c \in (a; b) : F'(x) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

F'(c) $= 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$ □

Глава 21

Производные и дифференциалы высших порядков

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, и предположим, что она дифференцируема, значит для любого x определена $f'(x)$. Таким образом получим первую произввводную. Эта функция также может быть дифференцируема в каждой точке.
Вычислив ее производную, получим вторую производную.
Рассуждая аналогичным образом, можно получить производную любого порядка
$f''(x) = (f'(x))'$
$f^{(n)}(n) = (f^{(n-1)}(x))'$
Аналогично определяются дифференциалы высших порядков
$d^2f(x) = d(df(x)) = f''(x)dx^2$
$d^3f(x) = d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3$
$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n$
Производные высших порядков используются для вычисления приблизительных значений функций.

Глава 22

Дифференцирование функции, заданной параметрически

Зависимость функции y от аргумента x может осуществляться через посредство третьей переменной t, называемой параметром:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{22.1}$$

В этом случае говорят, что функция у от х задана параметрически. Параметрическое задание функции удобно тем, что оно дает общую запись для прямой и обратной функций. Предположим, что на некотором промежутке функции $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ имеют производные, причем $\phi'(t) \neq 0$. Кроме того, для $x = \phi(t)$ существует обратная функция $x^{-1} = t(x)$ (производная обратной функции равна обратной величине производной прямой функции).
Тогда $y(x) = \psi(t(x))$ - сложная функция и ее производная:
$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Производную тоже запишем в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases} \tag{22.2}$$

Глава 23

Локальный экстремум функции, теорема Ферма

Определение локального максимума и локального минимума Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой $\delta-$окрестности точки x_0, где $\delta > 0$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум в точке x_0, $\forall x \neq x_0 \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)} : f(x) \leq f(x_0)$. Если поменять знак на строгий, то максимум строгий, если знак перевернуть, то будет смнимум, а если знак перевернуть и поменять на строгий, то строгого минимума.

Тероэма 23.1. *Ферма: Пусть $y = f(x)$ в точке x_0 имеет локальный экстремум*[1] $\Rightarrow$ *если*

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

для мин. экстр $f(x_0) \geq f(x)$

Доказательство. Если x_0 - точка локального максимума функции $f(x)$, то $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \tag{23.1}$$

[1] max || min

□

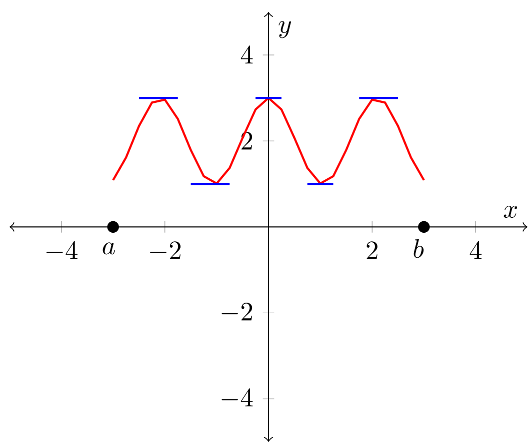
Глава 24

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Тероэма 24.1. *Ролля: Пусть* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$ *и Если* $f(a) = f(b), \exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

Доказательство. Если $f(x)$ не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего маесимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, чтчо хоть один их нах отличается от $f(a) = f(b)$. Обозначим такую точку экстремума $c \in (a; b)$
$f(c) \neq f(a) = f(b)$ и по теореме Ферма $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

Тероэма 24.2. *Коши: Пусть $y = f(x)$ и Пусть $y = g(x)$ непрерывны на $[a;b]$ и дифференцируемы на $(a;b), g'(x) \neq 0$, тогда*

$$\exists c \in (a;b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Пусть функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$. Функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля $\Rightarrow$
$\exists c \in (a;b) : F'(x) = 0$

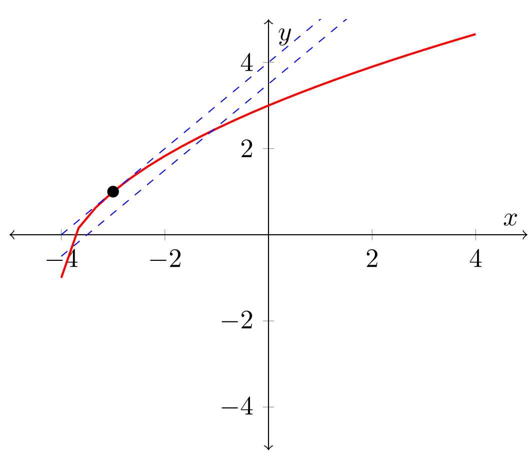
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

F'(c) $= 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$ □

Тероэма 24.3. *Лагранжа о конечных приращениях.*
Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$ тогда $\exists c \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Доказательство. наряду с $y = f(x)$ рассмотрим $g(x) \equiv x$. Заметим, что эти 2 функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда получается, что $\exists c \in (a;b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$ □

Геосмысл



Геосмысл теоремы Лагранжа: Прямая, прохлдящая через точки $(a; f(a)), (b; b(b))$ задаётся уравнением $y = k(x - a) + f(a)$. k найдём из условия прохождения этой прямой через точку $(b; f(b))$. $f(b) = k(b - a) + f(a)$
$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ на $(a;b)$ в условиях теоремы Лагранжа Существует такая точка c, в которой касательная к графику функции параллельна хорде, стягивающей $(a; f(a)), (b; b(b))$

Глава 25

Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Пусть $g'(x_0) \neq 0$. Если существует предел $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: Правило Лопиталя также справедливо, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Доказательство
Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0, значит $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. По теореме Коши для отрезка $[x_0; x]$, лежащего в окрестностях x_0 существует $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где c лежит между точками x и x_0. Учитывая, что $f(x_0) = g(x_0) = 0$, получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При $x \to x_0$ c также стремится к x_0; перейдем к пределу:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получается$\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, а $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c \to x_0} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, значит

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{25.1}$$

А если кратенько, то полученную формулу можно читать так: **предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если по следний существует.**

Замечания:

1. Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ не определены при $x = x_0$, но $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. В этом случае $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ и $g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$
2. Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда $x \to \infty$:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
3. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}} \tag{25.2}$$

Виды неопределенностей:

1. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$:
$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(6x)}{2x^2} = [\dfrac{0}{0}] = \lim_{x \to 0} \dfrac{(1 - cos(6x))'}{(2x^2)'} = \lim_{x \to 0} \dfrac{6sin(6x)}{4x} = \dfrac{3}{2} \lim_{x \to 0} \dfrac{sin(6x)}{x} = \dfrac{3}{2} \times [\dfrac{0}{0}] = \dfrac{3}{2} \lim_{x \to 0} \dfrac{(sin(6x))'}{(x)'} = \dfrac{3}{2} \lim_{x \to 0} \dfrac{6cos(6x)}{1} = \dfrac{3}{2} \times 6 = 9$
2. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$:
$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tg(3x)}{tg(5x)} = [\dfrac{\infty}{\infty}] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(tg(3x))'}{(tg(5x))'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3cos^2(5x)}{5cos^2(3x)} = \dfrac{3}{5} \times [\dfrac{0}{0}] = \dfrac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{cos^2(5x) - 1 + 1}{cos^2(3x) - 1 + 1} = \dfrac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{cos(10x) + 1}{cos(6x) + 1} = \dfrac{3}{5} \times [\dfrac{0}{0}] = \dfrac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(cos(10x) + 1)'}{(cos(6x) + 1)'} = \dfrac{3}{5} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{10sin(10x)}{6sin(6x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sin(10x)}{sin(6x)} = [\dfrac{0}{0}] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(sin(10x))'}{(sin(6x))'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{10cos(10x)}{6cos(6x)} = \dfrac{5}{3}$

Для пунктов 3-7 рассмотрим преобразования в общих случаях:

3. Неопределенность вида $\infty - \infty$:
Пусть $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, тогда:
$\lim_{x \to x_0}(f(x) - g(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \to x_0}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\frac{1}{g(x)}}\right) = [\dfrac{0}{0}] = ...$

4. Неопределенность вида $\infty \times 0$:
   Пусть $f(x) \to 0, g(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, тогда:

   $\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = [\infty \times 0] = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{0}{0} = ...$
5. Неопределенность вида 1^∞
6. Неопределенность вида ∞^0
7. Неопределенность вида 0^0

Для неопределенностей вида 4-7 воспользуемся следующим преобразованием:
Пусть $f(x) \to 1, g(x) \to \infty$; или $f(x) \to \infty, g(x) \to 0$; или $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$ удобно сначала прологарифмировать выражение

$$A = f(x)^{g(x)}$$

Глава 26

Формулы Тейлора и Маклорена

Производные высших порядков удобно использовать для приблизительных вычислений значений функций. Эти значения вычисляются по формуле Тейлора, суть которой в следующем:
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ и предположим, что она имеет производные до n-ого порядка включительно в некоторой окрестности точки x_0
Зададимся целью найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, значение которого в окрестности точки x_0 очень мало отличается от значения функции $f(x)$. При это потребуем, чтобывыполнялись равенства:

$$(*)\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0), \\ P_n'(x_0) = f'(x_0), \\ P_n^{(n)}(x_0) = f_n^{(n)}(x_0) \end{cases} \tag{26.1}$$

Запишем этот многочлен в виде $P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + ... + A_n(x - x_0)^n$. Вычислим его производные:
$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1}$
$P_n''(x) = 2A_2 + 6A_3(x - x_0) + ... + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$
$P_n^{(n)}(x) = n!A_n$
Исходя из этих равенств, а также равенств *, получаем:
$A_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$
$A_1 = P_n'(x_0) = f'(x_0)$
$A_2 = \dfrac{P_n''(x_0)}{2!} = \dfrac{f_n''(x_0)}{2!}$
$A_n = \dfrac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!} = \dfrac{f_n^{(n)}(x_0)}{n!}$
Подставив набор коэффициентов в определение $P_n(x)$, получим:
$P_n(x) = \dfrac{f_n(x_0)}{0!} + \dfrac{f_n'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \dfrac{f_n''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... + \dfrac{f_n^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$

Рассмотрим погрешность вычислений с помощью многочлена $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Покажем, что $P_n(x)$ есть $o(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$.
Для этого нужно показать, что
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$
Вычислим этот предел, применив n раз правило Лопиталя. При этом заметим, что $R_n(x_0) = f(x_0) - P_n(x_0) = 0$ (по *).
$R'_n(x_0) = f'(x_0) - P'_n(x_0) = 0$ и т.д.
$R_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0$
Таким образом имеется, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = [(\dfrac{0}{0})] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = [(\dfrac{0}{0})] = ... = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = [(\dfrac{0}{n!})] = 0$
Получаем следующее равенство, которое называется формулой Тейлора.
Для функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано (любая наперед заданная точность)
$f_n(x) = \dfrac{f_n(x_0)}{0!} + \dfrac{f'_n(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dfrac{f''_n(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + ... + \dfrac{f_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n)$
Если рассматривать $x_0 = 0$, то получаем фломулу Маклорена:
$f_n(x) = \dfrac{f_n(0)}{0!} + \dfrac{f'_n(0)(x)}{1!} + \dfrac{f''_n(0)(x)^2}{2!} + ... + \dfrac{f_n^{(n)}(0)(x)^n}{n!} + o((x)^n)$
Предположим, что функция имеет также и производную порядка $n+1$. Тогда имеет место формула, называемая формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:
$f_n(x) = \dfrac{f_n(x_0)}{0!} + \dfrac{f'_n(x_0)(x-x_0)}{1!} + \dfrac{f''_n(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + ... + \dfrac{f_n^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dfrac{f_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}((x-x_0)^{n+1}), \xi \in (x_0; x)$

Глава 27

Признаки монотонности функции

Функция y = f(x)

8. возрастающей (неубывающей) на интервале (a, b), если $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b):$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right);$
9. строго возрастающей на интервале (a, b), если $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b):$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) f\left(x_2\right);$
10. убывающей (невозрастающей) на интервале (a, b), если $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b):$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right);$ строго убывающей на интервале (a, b), если $\forall\ x_1, x_2 \in (a, b):$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) f\left(x_2\right).$

Если функция $f\left(x\right)$ дифференцируема на интервале (a, b) и принадлежит к одному из четырех рассмотренных типов (т.е. является возрастающей, строго возрастающей, убывающей или строго убывающей), то такая функция называется монотонной на данном интервале.

Глава 28

Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции

28.1 Первое необходимое условие

Тероэма 28.1. *Пусть фунеция $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и в точке $x_0 \in (a;b) f'(x_0) = 0$. Если при переходе через x_0 производная функции меняет знак, то x_0 - точка локального экстремума. $+ \to -$ максимума, и $- \to +$ - минимума.*

Доказательство. Пусть, например, f' меняет знак с «-» на «+». Рассмотрим точку x_0 на сегменте $[x;x_0]$. Воспользуемся теоремой о конечных приращениях Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \xi \in (x;x_0)$. Поскольку при переходе через точку x_0 функция меняет знак с «-» на «+», то $f'(\xi) < 0 x < x_0, x - x_0 < 0 f(x) - f(x_0) > 0$. Аналогично рассмотрим сегмент $[x_0;x]$, получим $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x) \Rightarrow x_0$ — точка строгого минимума функции. □

28.2 Второе достаточное условие

thm Пусть дана функция $f(x)$, она определена в некоторой окрестности точки x_0 , ее первая производная $f'(x_0) = 0$ и пусть $\exists f''(x_0)$, тогда:

1. Если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 — точка строгого минимума;
2. Если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка строгого максимума.

Доказательство. Докажем теорему для первого случая, когда $f''(x_0) > 0$. По скольку $f''(x_0)$ непрерывна, то на достаточно малом интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.к $f''(x_0) > 0$, то $f'(x_0)$ возрастает в этом интервале. $f'(x_0) =$

0, значит $f'(x_0) < 0$ на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x_0) > 0$ на интервале $(x_0; x_0 + \delta)$. Таким образом функция $f(x)$ убывает на интервале $(x_0 - \delta; x_0)$ и возрастает на интервале $(x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow$ по первому достаточному условию экстремума функция в точке x_0 имеет минимум. Аналогично доказывается второй случай теоремы. $\square$

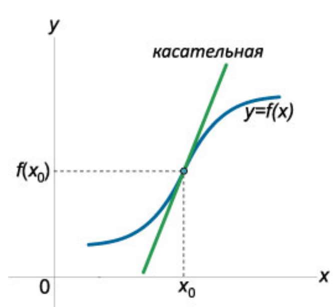
Глава 29

Направление выпуклости и перегибы прямой

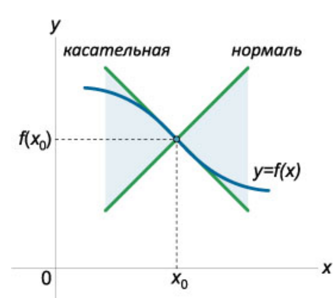
Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является непрерывной в точке x_0. Функция $f(x)$ может иметь в этой точке конечную или бесконечную производную $f'(x_0)$. Если при переходе через x_0 функция меняет направление выпуклости, т.е. существует число $\delta > 0$, такое, что на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ или $(x_0, x_0 + \delta)$ функция является выпуклой вверх, а на другом выпуклой вниз, то x_0 называется точкой перегиба функции $y = f(x)$.

Геометрический смысл точки перегиба состоит в том, что график функции $f(x)$ переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую, т.е. кривая и касательная взаимно пересекаются (рисунок 1).

График функции $f(x)$ в окрестности точки перегиба x_0 расположен внутри одной пары вертикальных углов, образованных касательной и нормалью (рисунок 2). еобходимое условие существования точки перегиба
Если x_0 точка перегиба функции $f(x)$ и данная функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, причем в точке x_0 она непрерывна, то $f''(x_0) = 0$.



(a) рис 1



(b) рис 2

Доказательство. Предположим, что в точке перегиба x_0 вторая производная не равна нулю: $f''(x_0) \neq 0$. Поскольку она непрерывна при x_0, то существует $\delta-$окрестность точки x_0, в которой вторая производная сохраняет свой знак, т.е. $f''(x_0) < 0$ или $f''(x_0) < 0 \ \forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. В таком случае функция будет либо строго выпукла вверх (при $f''(x) < 0$), либо строго выпукла вниз (при $f''(x) > 0$). Но тогда точка x_0 не является точкой перегиба. Следовательно, предположение неверно и вторая производная в точке перегиба должна быть равна нулю. □

Первое достаточное условие существования точки перегиба
Если функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0, имеет вторую производную $f''(x_0)$ в некоторой проколотой $\delta-$окрестности точки x_0 и если вторая производная меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть, например, вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в левой $\delta-$окрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$, а в правой $\delta-$окрестности $(x_0, x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f''(x) < 0$.

В таком случае, согласно достаточным условиям выпуклости, функция $f(x)$ выпукла вниз в левой $\delta-$окрестности точки x_0 и выпукла вверх в правой $\delta-$окрестности.

Следовательно, в точке x_0 функция меняет направление выпуклости, т.е. с является, по определению, точкой перегиба. Второе достаточное условие существования точки перегиба □

Пусть $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Поскольку f"'$(x_0) \neq 0, x_0(f'''(x_0) > 0), (f'''(x_0) < 0).f''(x_0) = 0, \delta > 0\delta - x_0.,, x_0 f(x)$. □

Глава 30

Комплексные числа и действия над ними. Формы записи комплексного числа

30.1 Комплексные числа

Мнимой единицей называется число i, квадрат которого равен -1
$i^2 = -1$

Число i не является действительным.

Если существует какое-то действительное число $a (a \in \mathbb{R})$, то произведение $a \cdot i$ называется мнимым числом. Сумма действительного и мнимомго числа называется комплексным числом:
$a + ib$

При этом число a называется действительной частью и обозначается $a = Re(a + ib)$, а число b называется мнимой частью и обозначается $b = Im(a + ib)$. Таким образом:
$\forall z : z = Re(x) + i \cdot Im(z)$

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ определено сопряженное ему число $\overline{z} = x - iy$.

Два числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными друг другу, если равны их действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Заметим, что действительные числа являются частным случаем комплексных чисел, у которых мнимая часть равна 0.

Другими словами, это значит, что любое действительное число x представимо в виде $x = x + i \cdot 0$

Нетрудно также видеть, что комплексное число z является действительным $\Leftrightarrow z = \overline{z}$

Действительно:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

30.2 Действия над комплексными числами

Над множеством комплексных чисел вводятся операции сложения,вычитания, умножения и деления.

Суммой (разностью) двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$. Т.е. действительная часть $Re(z_1 \pm z_2) = Rez_1 \pm Rez_2$ и $Im(z_1 \pm z_2) = Imz_1 \pm Imz_2$. Произведением чисел z_1 и z_2 называется число $z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(y_1 x_2 + y_2 x_1)$

Таким образом произведение двух комплексных чисел вычисляется как произведение двухчленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ с учетом того, что $i^2 = -1$

Нетрудно убедиться, что введенные такимо образом операции сложения, вычитания, умножения имеют те же свойства, что и соответствующие операции для вещественных чисел: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность

Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, для которого выполняется равенство $z \cdot z_2 = z_1$. Это частное обозначается $\frac{z_1}{z_2}$. Покажем, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует единственное частное $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 + -iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Убедимся, что полученное число действительно является частным $z \cdot z_2 = z_1$:

$$\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \cdot (x_2 + iy_2) = \frac{x_1 x_2^2 + y_1 y_2 x_2 - (-x_1 y_2^2 + y_1 y_2 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_1 x_2 y_2 - x_2 x_1 y_2 + x_2^2 y_1 + y_1 y_2^2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1(x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1(x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2 + y_2^2} = x_1 + iy_1 = z_1$$

Таким образом деление комплексных чисел друг на друга осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Для комплексного числа z определяется модуль этого числа:
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Получаем, что $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

Учитывая, что для действительного числа z имеем равенство $z = \overline{z}$, получаем, что модель действительного числа можно понимать как модуль комплексного числа.

Частное комплексных чисел можно вычислять по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z|^2}$$

Уравнение n-ой степени имеет ровно n корней(комплексных чисел).

Свойства комплексно-сопряженных чисел:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n, n \in \mathbb{N}$

ДОКАЗАТЬ ЭТИ СВОЙСТВА

Запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$

30.3 Геометрическая интерпритация комплексных чисел

Комплексные числа допускают геометрическую интерпритацию.
Рассмотрим Декартову систему координат (Oxy)

На горизонтальной оси будем откладывать действительную часть, а на вертикальной - мнимую

Часто удобно изображать комплексные числа не точками, а радиус-векторами этих точек. Нетрудно видеть, что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ действительно является длиной соответствующего вектора.
ЗДЕСЬ РИСУНОК РАДИУС-ВЕКТОРА

Рассмотрим теперь два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$

Из геометрической интерпритации видно, что:

ЗДЕСЬ РИСУНКИ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ ВЕКТОРОВ
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Координатная плоскость, на которой изображены в виде радиус-векторов точек комплексных чисел, называется комплексной плоскостью.

30.4 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

СЮДА РИСУНОК УГЛА ФИ
На комплексной плоскости рассмотрим число, равное $z = x + iy$ и угол ϕ от положительного направления Ox против часовой стрелки до радиус вектора, который изображает число z.
$x = |z| \cos\phi$ $y = |z| \sin\phi$

Отсюда получим, что $z = |z|cos\phi + i|z| \sin\phi = |z|(cos\phi + i \sin\phi)$, что есть тригонометрическая форма записи комплексного числа.
Учитывая то, что sin и cos периодические с периодом 2π, получаем, что $z = |z|(cos\phi + i \sin\phi)$ определена для бесконечного множества значений угла ϕ, отличающихся друг от друга на 2π. Множество всех таких значений ϕ называется аргументом комплексного числа z и обозначается $Argz$. В этом множестве значений ϕ особо рассматриваются значения в промежутка $[-\pi; \pi)$ (иногда $[0; 2\pi)$). Значения из этого промежутка называют главными значениями числа z и оюозначаются $\arg z$.

Таким образом, $Argz = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что в качестве ϕ можно рассматривать $\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Однако учитывая, что множество значений arctg - $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, заметим, что если $\phi \in [\frac{\pi}{2}; \pi)$, то $\arg z = \operatorname{arctg} yx + \pi$
если $\phi \in [\pi; \frac{3\pi}{2})$, то $\arg z = \operatorname{arctg} yx + \pi$
если $\phi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\arg z = \operatorname{arctg} yx$

30.4.1 Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$, запишем их в тригонометрической форме:
$z_1 = |z_1|(cos\phi_1 + i \sin\phi_1)$
$z_2 = |z_2|(cos\phi_2 + i \sin\phi_2)$

Рассмотрим их произведение:
$z_1 \cdot z_2 = z_1 = |z_1|(cos\phi_1 + i \sin\phi_1) \cdot z_2 = |z_2|(cos\phi_2 + i \sin\phi_2) = |z_1||z_2|(\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2 + i \cos\phi_1 \sin\phi_2 + i \cos\phi_2 \sin\phi_1) = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$
$\Rightarrow$ получаем формулу: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$

С помощью математической индукции можно показать (САМОСТОЯТЕЛЬНО!!!), что:
$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = |z_1||z_2|...|z_n|(\cos(\phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_n) + i \sin(\phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_n)$

Рассмотрим случай, если $z_1 = z_2 = ... = z_n$:
$z^n = |z|^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$

Корнем n-ой степени комплексного числа z называется такое число w,

для которого выполняется равенство $w^n = z$. Запишем число w в тригонометрической форме: $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$
$w^n = |w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(cos\phi + i\sin\phi)$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} |w|^n = |z|, \\ n\theta = \phi + w\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}, \\ \theta = \dfrac{\phi + w\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{30.1}$$

Заметим, что
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\dfrac{\phi + w\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\phi + w\pi k}{n})$
различные значения корня получаются при различных значениях $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Заметим, что из-за периодичности sin и cos эти значения могут повторяться

30.4.2 Пример 1

тут идут примеры вычислений, не думаю, что они нужны в теории

30.5 Показательная форма записи комплексного числа

30.5.1 Формула Эйлера

Обозначим $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, а $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$ - формула Эйлера
$|e^{i\phi}| = |\cos\phi + i\sin\phi| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$
$|e^{-i\phi}| = |\cos\phi - i\sin\phi| = \sqrt{\cos^2\phi + (-\sin\phi)^2} = 1$
$e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} = (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(cos\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_2\sin\phi_1) = \cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2) = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
$\dfrac{e^{i\phi_1}}{e^{i\phi_2}} = \dfrac{\cos\phi_1 + i\sin\phi_1}{\cos\phi_2 + i\sin\phi_2} = \dfrac{\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 - \cos\phi_1\sin\phi_2)}{cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_2} = \cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2) = e^{i(\phi_1-\phi_2)}$

Т.о. для функции мнимого аргумента $e^{i\phi}$ выполняются известные свойства показательной функции

30.5.2 Показательная форма

Рассмотрим теперь произвольное комплексное число z и запишем его в показательной форме:
$z = |z|(cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$
Таким образом получили показательную форму записи комплексного числа ТАК. ТАМ ДАЛЬШЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРАННЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРО НИХ. НО ЭТОГО НИХУЯ НЕТ В ВОПРОСАХ. ОНО ОТНОСИТСЯ СЮДА ИЛИ НЕТ? ТАМ ЕЩЕ ПРИМЕРНО СТОЛЬКО ЖЕ ТЕКСТА КАК ЗДЕСЬ НАПИСАНО

Глава 31

Извлечение корня из комплексного числа

Корнем n-ой степени комплексного числа z называется такое число w, для которого выполняется равенство $w^n = z$. Запишем число w в тригонометрической форме: $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$
$w^n = |w|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|(cos\phi + i\sin\phi)$

Отсюда получаем, что:

$$\begin{cases} |w|^n = |z|, \\ n\theta = \phi + w\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|}, \\ \theta = \dfrac{\phi + w\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{31.1}$$

Заметим, что
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\dfrac{\phi + w\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\phi + w\pi k}{n})$
различные значения корня получаются при различных значениях $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Заметим, что из-за периодичности sin и cos эти значения могут повторяться

31.0.1 Пример 1

тут идут примеры вычислений, не думаю, что они нужны в теории

Глава 32

Неопределённый интеграл и его свойства

32.1 Понятие первообразной

Пусть $y = f(x)$ - непрерывная функция, Первообразной для $f(x)$ является $F(x) : F'(x) = f(x)$ Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$, то $\forall C : (F(x) + C)' = f(x)$

Тероэма 32.1. *Если функция $y = g(x)$ непрерывно-дифференцируема и её $\forall x : g'(x) = 0$, $g(x) = C$*

Доказательство. Пусть $\forall x : g'(x) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 : g(x_1) = g(x_2)$. Тогда по теореме Лагранжа: $\xi \in (x_1; x_2) : g(x-2) - g(x_1) = g'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow$ так как $g'(\xi) = 0, g(x_2) - g(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_2) = g(x_1)$ □

Тероэма 32.2. *Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то любая первообразная для $f(x)$ представима в виде $G(x) = F(x) + C$*

Доказательство. Пусть 2 различные первообразные $F(x), G(x)$ для $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = f(x)$. Тогда $\forall x : (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$ по теорете 1 $G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C$ □

совокупность всех первообразных для функции называется неопределённым интегралом этой функции $\int f(x)dx = F(x) + C$

32.2 Свойства неопределённого интеграла

1. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f(x), g(x) : \int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$
4. $\forall \alpha, \beta : F'(x) = f(x), \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$

Из таблицы производных получаем таблицу интегралов:

32.3 Таблица Интегралов

- $$\int 0dx = C \tag{32.1}$$
- $$\int dx = x + C \tag{32.2}$$
- $$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1 \tag{32.3}$$
- $$\int \frac{dx}{x} = ln(|x|) + C \tag{32.4}$$
- $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \tag{32.5}$$
- $$\int e^x dx = e^x + C \tag{32.6}$$
- $$\int \sin(x) dx = -cos(x) + C \tag{32.7}$$
- $$\int \cos(x) dx = sin(x) + C \tag{32.8}$$
- $$\int \operatorname{tg}(x) dx = \ln(\frac{1}{|cos(x)}) + C \tag{32.9}$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + C \tag{32.10}$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin(\frac{x}{a}) + C \tag{32.11}$$
- $$\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x) + C \tag{32.12}$$
- $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg(\frac{x}{a}) + C \tag{32.13}$$

- $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln(|\frac{x-a}{x+a}|) + C \tag{32.14}$$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \tag{32.15}$$

Глава 33

Метод замены переменной в неопределённом интеграле

Тероэма 33.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна, а $x = \phi(t)$ непрерывно-дифференцируема, причём $\mathcal{E}(\phi(t)) \subset \mathcal{D}(f)$, тогда$F \int f(x(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx$*
Произведём по t:

$$(\int f(x(t))\phi'(t)dt)'_t = \int x(t) \cdot \phi'(t)$$

$$(\int f(x)dx)'_t = (\int f(x(t))dx)'_t = f'_t(x(t)) = f'_t(x(t))x'(t) = f'_t(x(t))\phi'(t)$$

Пример:

$$\int tg(x)dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx \left[t = cos(x), dt = -sin(x)dx, sin(x)dx = -dt\right]$$

$$= \int \frac{-dt}{t} = -\ln(|t|) + C = -\ln(|cos(x)|) + C \tag{33.1}$$

Глава 34

Интегрирование по частям

Пусть есть 2 нерерывно-дифференцируемые функции $u(x), v(x)$:

$d(uv) = (uv)'dx = (u'v+v'u)dx = u'vdx+v'udx = vdu+udv \Rightarrow d(uv) = vdu+udv$

$\Rightarrow \int udv = uv - \int vdu$(34.1)Когда использовать?

- подинтегральная функция есть произведение многочлена и синуса/косинуса
- подинтегральная функция есть произведение многочлена и показательной функции

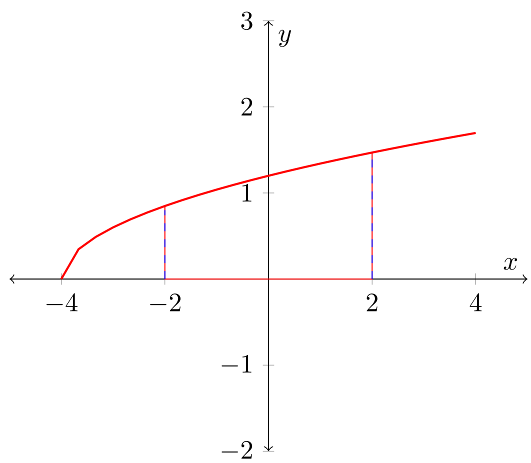
(за u берём многочлен и корячим столько раз,какова степень)

Глава 35

Определённый интеграл и его свойства

Пусть задана $y = f(x)$, предположим, что $\forall x \in [a; b] \subset \mathcal{D}(f) : f(x) \geq 0$

Излом графика функции



Рассмотрим фигуру, ограниченную сниху Ox, сверху графиком функции, слева и справа - вертикальными прямыми $x = a, x = b$ это называется криволинейной трапецией. Чтоб найти площадь этой фигуры, разобьём её на досаточно большое количество очень узких вертикальных Прямоугольных полосок, чтобы ступенчатая форма была ближе к кривой. Площадь криволинейной трапеции буде близка сумме площадей полосок.

Разбиение $[a; b]$(конечное множество точек) таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$. На каждом $x_{[i-1;x_i]}$ выберем ξ_i и рассмотрим $f(\xi_i)$ Рассмотрим итый прямоугольник со сторонами $x_i - x_{i-1}$, площадь которого равна $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ Обозначим $(x_i - x_{i-1})$ за Δ_i и пусть $\Delta = \max(\Delta_i..\Delta_n)$ Δ - диаметр разбиения.

Интегральная сумма соответствующая данному разбиению:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)$$

Рассмотрим $\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)$. Если такой предел существует и конечен, не зависит от разбиения и от выбора ξ_i , то этот предел называется определённым интегралом $\int_a^b f(x)dx$

Тероэма 35.1. *необходимые условия интегрируемости. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Произведём разбиение $[a;b]$. Если функция неограничена на $[a;b]$, она неограничена хотя бы на одном из отрезков $[x_i - x_{i-1}]$. Следовательно точку ξ_i можно выбрать так, что $|f(\xi_i)|$ будет сколь угодно велик. В этом случае интегральная сумма стремится к бесконечности и предел интегральной суммы будет зависеть от выбора ξ_i и, при некотором ξ_i он будет бесконечным, что противоречит условиям интегрирования. □

Тероэма 35.2. *Если функция непрерывна на $[a;b]$, она интегрируема на $[a;b]$.*

Следствие: Если функция на $[a;b]$ имеет конечное количество точек разрыва первого рода[1], то она интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. Функция кусочно-непрерывна на $[a;b]$ тогда и только тогда, когда этот отрезок разбивается на конечное число меньших отрезков, на каждом из которых эта функция непрерывна и ограничена, по теореме 2 доказательство. □

Тероэма 35.3. *Если функция монотонна на $[a;b]$, она интегрируема на $[a;b]$.*

35.1 Свойства определённго интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b dx = b - a$
3. $\forall f(x), g(x)$ интегрируемой на $[a;b], \forall \alpha, \beta$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

4. Если $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, $\forall x \in [a;b] : f(x) \geq g(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

[1] кусочно-непрерывна

5.
$$|\int_a^b g(x)dx| \leq \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство.
$$\forall |\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \cdot |f(\xi_i)|$$

При $\Delta \to 0$ доказывается □

6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7.
$$\forall a, b, c : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство(a) Пусть $c \in (a;b)$, тогда рассмотрим разбиения отрезка $[a;b]$, содержащие c. Тогда интегральная сумма разивается на 2 суммы: слева от c и справа от c. При $\Delta \to 0$ доказывается.

(b) $c \notin (a;b) \Rightarrow b \in (a;c)$ по пункту i:
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(c) $a \in (c;b)$ аналогично

(d) $c = a$ или $c = b$: по первому свойству.

□

Тероэма 35.4. *о среднем: Если функция непрерывна на* $[a;b]$, $\exists \xi \in [a;b]$: $f(\xi) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)dx$

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b] \Rightarrow$ на этом отрезке она достигает своих максимального и минимального значений. $m = min(f(x)); M = max(f(x)), x \in [a;b]$

$$\forall x \in [a;b] : m \leq f(x) \leq M. \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). a < b \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции:

$$\exists\xi \in [a; b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

умножив на $(b - a) > 0$ получим доказываемое равенство. $\square$

Глава 36

Формула Ньютона-Лейбница

Для $y = f(x)$ на $[a;b]$ рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a;b]$
Тероэма 36.1. *Если функция интегрируема на* $[a;b]$, $\Phi(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$

Доказательство. так как функция интегрируема она граничена на $[a;b]$

$$\exists M > 0, \forall x \in [a;b] : |f(x)| \leq M.$$

Возьмём произвольное $x \in [a;b], \Delta_x > 0$. Рассмотрим

$$|-\Phi(x) + \Phi(x+\Delta_x)| = |\int_a^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$|\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt| =$$

$$|\int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt| \leq |\int_x^{x+\Delta_t} |f(t)|dt|$$

$$\leq |\int_x^{x+\Delta_x} Mdt| \leq M|\int_x^{x+\Delta_x} dt| = M\Delta_x$$

$0 \leq |\Phi(x+\Delta_x) - \Phi(x)| \leq M\Delta_x$ $M\Delta_x \to 0$ при $\Delta_x \to 0 \Rightarrow \lim_{\Delta_x \to 0} \Phi(x+\Delta_x) = \Phi(x)$ Следовательно $\Phi(x)$ непрерывна из-за того, что x выбран произвольно. □

Тероэма 36.2. $y = f(x)$ *непрерывна, отсюда* $\Phi(x)$ *дифференцируема на* $[a;b]$. *При этом* $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство.

$$x \in (a;b), x + \Delta_x \in (a;b).$$

$$\Phi(x+\Delta_x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt|_{\div \Delta_x}$$

$$\frac{\Phi(x+\Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt$$

По теореме о среднем

$$\frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)(x+\Delta_x - x) = f(\xi), \xi \in [x; x+\Delta_x]$$

Если $\Delta_x \to 0, \xi \to x$

$$\frac{\Phi(x+\Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = f(\xi)$$

При переходе к пределу с $\Delta_x \to 0$ получим $\Phi'(x) = f(x)$ Таким образом, Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, $\Phi(x)$ - первообразная для $f(x)$ □

Рассмотрим Все первообразные $F(x)$ для $f(x)$. $\int_a^x f(t)dt = \Phi(t) = F9x) + C$. Найдём c, взяв $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = f(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

При $x = b : \int_a^b f(t)dt = F(b) - f(a) \Leftrightarrow F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)} \tag{36.1}$$

Глава 37

Несобственные интегралы, их свойства и вычисление

Если существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, функции $f(x)$, которая определена на промежутке $[a;+\infty)$, то его называют *несобственным интегралом* первого рода и обозначают

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx} \qquad (37.1)$$

Если он существует и конечен, то это *сходящийся* интеграл. В противном случае такой интеграл называют *расходящимся*. Аналогично рассматривается несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;b]$. Так как несобственный интеграл первого рода определен как предел, то из свойств интеграла и предела получаем *линейности несобственного интеграла*:

Для любого $\alpha,\beta\in$ и для любых интегрируемых на промежутке $[a;b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\boxed{\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)dx} \qquad (37.2)$$

Данное свойство также выполняется для и для интегралов с пределами интегрирования $(-\infty;b)$ и $(-\infty;+\infty)$

Из свойств интеграла и предела получаем формулы замены переменной в собственном интеграле и формулы интегрирования по частям. Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и пусть $x = \varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и монотонна, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t) = \infty$ тогда:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$$

Я НЕ ПОНИМАЮ, ЧТО ДАЛЬШЕ НАПИСАНО. ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ? ПОМОГИТЕ!!!

Пусть u и v непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int_a^{+\infty} udv = \lim_{b\to\infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} vdu$$

Аналогично можно продифференцировать и оставшиеся интегралы.

Пример: Выяснить, сходится ли несобственный интеграл.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$$

Рассмотрим случаи:

1. p=0

   $\int_1^{+\infty} dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b dx = \lim_{b\to+\infty}(x\Big|_1^b) = \lim_{b\to+\infty}(b-1) = +\infty$ – интеграл расходится

2. p<0

   $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b) = \lim_{b\to+\infty}(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}) = +\infty$ – интеграл расходится

3. 0<p<1

   $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}(\frac{x^{1+p}}{1+p}\Big|_1^b) = \lim_{b\to+\infty}(\frac{b^{1+p}}{1+p} - \frac{1}{1+p}) = +\infty$ – интеграл расходится

4. p=1

   $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\ln x = \infty$

5. p>1

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}(\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b) = \lim_{b\to+\infty}(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}) = \frac{1}{p-1}$

Из этого можно сделать вывод, что при p<1 - интеграл расходится, а при p>1 - интеграл сходится к $\frac{1}{p-1}$

37.1 Вопрос о сходимости интегралов

А признаки нужно доказывать или и так норм?

37.2 Множества и операции над ними

При выяснении неудобно пользоваться определениями, поэтому принимают *признаки сходимости*

37.2.1 Признак сравнения

Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны и интегрируемы. Для любого $x \in [a; +\infty]$ справедливо $f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

37.2.2 Предельный признак сравнения

называется элементом обозначение множества: $\{a|P(a)\}$ где P(a) - свойство, объединяющее объекты a.
Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ неотрицательны и интегрируемы на промежутке $[a; b]$ и пусть существует $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x) = 1 > 0}$, значит они либо обе сходятся, либо обе расходятся.

37.2.3 Признак Абеля-Дирихле

КАК ЭТИ ВЕЩИ ВООБЩЕ СВЯЗАНЫ?

Пусть $y = f(x)$ интегрируема на промежутке $[a; b]$ и имеет первообразную $F(x)$, а $y = g(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a; +\infty)$ и интегрируема на $[a;b]$, стремится к 0 при $x \to +\infty$, тогда

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

– сходится
Замечание:

содержится: A ⊆ B. Каждый элемент множества A содержится в B. Предыдущий признак удобно использовать при рассмотрении несобственных интегралов дробно-рациональной функции. Его удобно сравнивать с интегралами, сходимость которых исследована. Аналогичные признаки сравнения справедливы и для оставшихся двух интегралов.
Рассмотрим случай, когда на $[a;b]$ $y = f(x)$ имеет особенную точку, то есть существует $c \in [a;b]$:

$$lim_{x \to c+0} = \infty$$

или

$$lim_{x \to c-0} = \infty$$

В этом случае вычислить $\int_a^b f(x)dx$ нельзя.
на этом месте я опять отключился При c=a

$$lim_{x \to a+0} = \infty$$

$$\int_a^b f(x)dx - \lim \int_a^b f(x)dx$$

– это несобственный интеграл второго рода, если предел существует, то он сходящийся, а в противном случае рассходящийся. тут чет то невнятное пропустил

37.2.4 Свойства несобственного интеграла второго рода

Так как несобственный интеграл определяется как предел, то исходя из свойств предела получаем несобственного интеграла второго рода.

1. $\forall \alpha, \beta \in, f(x), g(x)$ интегрируемых на $[a;b]$, $a < \alpha < b$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2. если $y = f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $a < \alpha < b$, $x = varphi(t)$ (a;b) монотонна $lim_{t \to \alpha} \varphi(t) = a, \varphi(b) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

3. интегрирование по частям

Глава 38

Матрицы и операции над ними

Матрица– прямоугольная таблица, составленная из чисел, которые называются *элементами матрицы.* Элементы матрицы располагаются в горизонтальных и вертикальных рядах, которые называются строками и столбцами. Их принято нумеровать. Для матрицы важны также ее размеры, которые записываются в виде $m \times n$, где m – строки, а n – столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы принято обозначать заглавными буквами. Иногда, чтобы указать размеры матрицы пишут $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$. Элементы обозначают строчными буквам a_{ij}, b_{ij}.
Матрицы, где все элементы равны 0 называются **нулевыми** и записываются $O_{m\times n}$.
Для квадратной матрицы определяют диагонали(**главная** – слево на право, **побочная** – справа налево)
Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 00 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda 44 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, элементы главной диагонали которой равны между собой и не равны 0, называется *скалярной.*
Скалярная матрица, где элементы на главной диагонали равны единице

называется *единичной*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для любой матрицы определяется операция транспонирования:каждая строка матрицы записывается ввиде столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A^t)^t = A$$

38.1 Свойства сложения и вычитания

Для двух матриц одинаковых размеров определяются операции сложение и вычитание. Для матриц A и B суммой/разностью называется матрица $(A \pm B)$, элементы которой равны сумме/разности элементов матриц A и B то есть $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}$.

1. $A + B = B + A$ – сложение матриц коммутативно
2. $A_{m\times n} \pm O_{m\times n} = A_{m\times n}$ – идемпотентность сложения с нулевой матрицей
3. $(A_{m\times n} + B_{m\times n}) + C_{m\times n} = A_{m\times n} + (B_{m\times n} + C_{m\times n})$ – ассоциативность сложения
4. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
5. $A_{m\times n} \exists B_{m\times n} : A_{m\times n} + B_{m\times n} = O_{m\times n}$
   Отсюда следует, что B противоположна A и обозначается $-A$

38.2 Свойства умножения матриц

38.2.1 Умножение матрицы на число

Также для матриц определяется операция умножения на число:
$A_{m\times n} \cdot \alpha = \alpha A_{m\times n}$, элементы которой являются произведением элементов матрицы A и α

1. $-1 \cdot A = -A$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивность
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $\alpha \cdot \beta A = (\alpha\beta)A$

38.2.2 Перемножение матриц

Для матриц также определяется операция умножения на матрицу. Для этого матрица должна быть **согласованной** (иметь согласованные размеры): *то есть количество столбцов левого множителя должно совпадать с количеством строк правого.*
Пусть матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{k\times p}$ имеют согласованные размеры ($n = k$). Произведением AB будет называться матрица размерами $m \times p$, где

$$c_{ij} = \sum_{1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj};$$

$i = 1, 2...m$
$j = 1, 2...p$
Свойства перемножения матриц

1. Произведение матриц не коммутативная операция то есть $AB \neq BA$, более того даже если $\exists AB$, то может $\nexists BA$
2. $\forall AB$ справедливо $E_{m\times n} \cdot Am \times n = E_{n\times m} \cdot Am \times n = Am \times n$, где E - единичная матрица.
3. $\forall Am \times n \cdot O_{m\times n} = O_{m\times n}$
4. $(AB)^t = A^t \cdot B^t$
5. $\forall A, B, C$ согласованных матриц справедливо свойство ассоциативности $(AB)C = A(BC)$
6. $\forall Am \times n, Bm \times n, Cn \times p$ справедливо: $(A + B)C = AC + BC$

38.3 Определитель матрицы

Для любой квадратной матрицы вводится понятие **определителя**, который обозначается как $detA$
Введем это понятие рекурентным образом
$A_{1\times 1} \Rightarrow A = (a) \Rightarrow detA = a$
Для матриц размером больше 1×1 введем понятие **алгебраических дополнений**. Алгебраическим дополнением к $a_{i\times j}$ называется $A_{i\times j} = (-1)^{i+j} \cdot M_{i\times j}$, где M - матрица, полученная из матрицы A путем вычеркивания i-ой строки и j-столбца.
Определитель будет равен сумме произведений элементов первой строки и их алгебраических дополнений.
Определитель матрицы 2×2 является разностью произведений элементов на главной и побочной диагоналях:

$$\boxed{detA_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} \tag{38.1}$$

Определитель матрицы 3×3 можно найти по правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Глава 39

Свойства определителя

1. Определитель можно вычислить по любой строке матрицы (не только первой) как сумму произведений этой строки и их алгебраических дополнений:

$$\boxed{detA = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}} \tag{39.1}$$

2. Определитель матрицы не изменяется при транспонировании:

$$\boxed{detA^t = detA} \tag{39.2}$$

   Потому все свойства строк будут верными и для столбцов. В частности определитель матрицы можно вычислить как сумму элеметов матрицы и их алгебраических дополнений:

$$\boxed{detA = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}} \tag{39.3}$$

3. Если какая либо строка или столбец состоит только из нулей, то

$$\boxed{detA = 0} \tag{39.4}$$

4. Если в матрице поменять две строки(или столбца) местами, то определитель изменит знак.

5. Если в матрице имеется две одинаковые строки(столбца), то ее определитель равен 0.

6. Если все элементы строки(столбца) матрицы имеют один и тот же общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

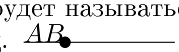
7.
$$detA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ b_{i1} \pm c_{i1} & b_{i2} \pm c_{i2} & ... & b_{in} \pm c_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \pm det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{n1} \\ c_{i1} & c_{i2} & ... & c_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

8. Определитель не изменится, если к какой-нибудь её строке прибавить другую, умноженное на некоторое число.

9. Сумма произведений элементов в какой-нибудь строке(столбце) матрицы и их алгебраических дополнений равна 0.

Глава 40

Векторы и линейные операции над ними

Пусть даны A и B, **направленным отрезком** $\overline{AB}$ будет называться отрезок, для которого указано, что A - начало, B - конец. 

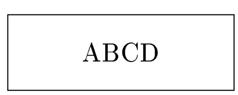
При этом $\overline{AA}$ отображается как точка, и если $A \neq B$, то $\overline{AB} \neq \overline{BA}$ Говорят, что направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ – сонаправлены, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ – сонаправлены. [1] Говорят, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ – противоположно направлены, если лучи $[AB)$ и $[CD)$– противоположно направлены.

Два луча сонаправленны, если:

1. Они лежат на одной прямой и один целиком содержится в другом.

2. Они лежат на параллельных прямых по одну сторону прямой, проходящей через начало этих лучей.

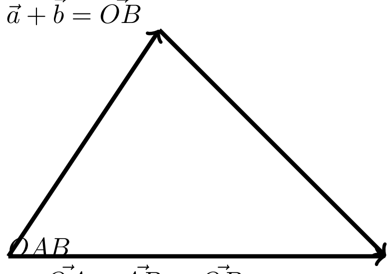
Длинна $\overline{AB}$ – называется длинна отрезка AB. Отрезок $\overline{AA}$ имеет длинну 0. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ – эквивалентны, если они имеют одинаковые длинны и направления. Совокупность всех сонаправленных отрезков называется **вектором**. Каждый направленный отрезок является элементом вектора и называется **представителем вектора** $\vec{AB}$ или $\vec{a}$.
Класс нулевых направленных отрезков называется **нуль-вектором**($\vec{0}$).
Для вектора определяются операции откладывания от заданной точки. Пусть существуют A и $\vec{a}$, тогда отложить $\vec{a}$ от A означает найти такое B, что $\overline{AB} \in \vec{a} \iff \vec{AB} \in \vec{a}$

Рассмотрим параллелограмм ABCD: 

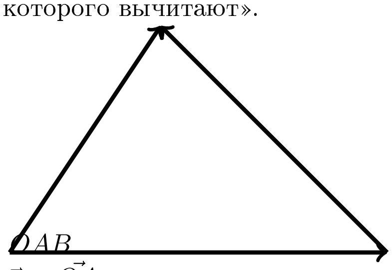
$\vec{AB} = \vec{DC}$
$\vec{BC} = \vec{AD}$

[1] $[AB)$– луч; $[AB]$–отрезок; (AB)–прямая

$\vec{AB}$ и $\vec{BA}$ противоположные, значит $\vec{AB} = -\vec{BA}$.
Для векторов также определяются операции сложения и умножения:
Отложим $\vec{a}$ от O; $\vec{a} = \vec{OA}$
Отложим $\vec{b}$ от $\vec{a}$;$\vec{b} = \vec{AB}$;
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$



$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ – правило замыкающей(из начала первого в конец последнего; применимо для любого количества векторов)
Разностью $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет $\vec{c}$, представляется направленным отрезком, соединяющим концы этих векторов и имеющим направление «к концу того вектора, из которого вычитают».



$\vec{a} = \vec{OA}$
$\vec{b} = \vec{OB}$
$\vec{c} = \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$

Умножение на число:
$\vec{a}$ и $\lambda \in$:

1. $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$
2. $\lambda > 0$, то $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и имеющий длинну $l = \lambda \mid a \mid$
3. $\lambda < 0$, то $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и имеющий длинну $l = \lambda \mid a \mid$

Глава 41

Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть даны $\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_n}$ и $\lambda_1, \lambda_2...\lambda_n$, тогда $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2}... + \lambda_n\vec{a_n}$ будет являться линейной комбинацией векторов.
$\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2...\lambda_n$ такие что $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2}... + \lambda_n\vec{a_n} = 0$ при хотя бы одном $\lambda_n \neq 0$.
$\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_n}$ называются **линейно НЕзависимыми**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2...\lambda_n$ такие что $\lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2}... + \lambda_n\vec{a_n} = 0$ при $\lambda_1, \lambda_2...\lambda_n = 0$.
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны, если они отложены от одной точки, а их представители лежат на одной прямой. $\vec{0}$ коллинеарен с любым другим вектором.
Точно также определяется коллинеарность для любого количества векторов.

Тероэма 41.1. *$\vec{a} \neq 0$; $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists\lambda : \vec{b} = \lambda\vec{a}$*

Доказательство. Необходимость:

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

   $\lambda = \left|\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| > 0 \Longrightarrow$

   $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a} \Longrightarrow$

   $\mid \lambda\vec{a} \mid = \mid \lambda \mid \cdot \mid \vec{a} \mid = \left|\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| \cdot \mid \vec{a} \mid = \mid \vec{b} \mid$

   Из всего вышеперечисленного следует, что $\lambda\vec{a} = \vec{b}$

2. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

   $\lambda = -\left|\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| < 0 \Longrightarrow$

   $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a} \Longrightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

   $\mid \lambda\vec{a} \mid = \mid \lambda \mid \cdot \mid \vec{a} \mid = \left|\dfrac{\vec{b}}{\vec{a}}\right| \cdot \mid \vec{a} \mid = \mid \vec{b} \mid \Rightarrow \lambda\vec{a} = \vec{b}$

Достаточность:

1. $\lambda = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

□

Тероэма 41.2. *Рассмотрим $\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_n}$. Отложим их от O и получим $A_1, A_2...A_n$*
$\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{OA_2} = \vec{a_2}...\vec{OA_n} = \vec{a_n}$
Векторы называются компланарными, если $0, A_1, A_2...A_n$ лежат в одной плоскости

Доказательство. It's hard to explain: https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k □

Тероэма 41.3. *Легко видеть, что $\vec{a_1}, \vec{a_2}...\vec{a_n}$ содержат подсистему векторов. В любой линейнозависимой системе подсистема будет также линейнозависема.*

Доказательство. It's hard to explain: https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k □

Тероэма 41.4. *В любой линейнозависимой системе векторов существует хотя бы один, который является линейной комбинацией других.*

Доказательство. It's hard to explain: https://www.youtube.com/watch?v=BXkm6h6uq0k □

Из вышеперечисленных теорем следуют следующие свойства:

1. 2 линейнозависимых вектора **коллинеарны**
2. 3 линейнозависимых вектора **компланарны**
3. n+1>3 **всегда линейнозависимы** в трехмерном пространстве

Свойства векторов:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
4. $\alpha \cdot (\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
6. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Глава 42

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

42.1 Скалярное произведение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \mid \vec{a} \mid \cdot \mid \vec{b} \mid cos(\phi)} \tag{42.1}$$

Можно записать через проекции:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \mid \vec{a} \mid \cdot pr_a \vec{b}} \tag{42.2}$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с пер вым вектором. Скалярное произведение через координаты равно:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \tag{42.3}$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ – переместительное свойство
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ – сочетательное свойство
3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длинны $\vec{a}^2 = \mid \vec{a}^2 \mid$

42.2 Векторное произведение

Векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, который перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\boxed{\vec{c} = \mid \vec{a}\vec{b} \mid sin(\phi)} \tag{42.4}$$

Свойства векторного произведения:

1. модуль $[\vec{a};\vec{b}]$ равен площади параллелограмма
2. $[\vec{a};\vec{b}] = 0$, то $\vec{a}||\vec{b}$
3. $[\vec{a};\vec{b}] = -[\vec{b};\vec{a}]$
4. $\alpha[\vec{a};\vec{b}] = [\alpha\vec{a};\vec{b}] = [\vec{a};\alpha\vec{b}]$
5. $[\vec{a}+\vec{b};\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$

В координатной форме в. п. будет равно определителю матрицы, где первая строка i,j,k, а последующие – координаты векторов

42.3 Смешанное произведение

Смешанное произведение равен определителю матрицы координат векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и соответственно равно объему параллелепипеда из этих векторов. Если все вектора ненулевые, смешанное произведение определяет их компланарность

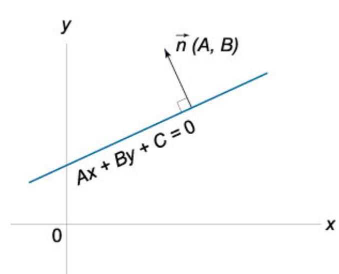
Глава 43

Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой в декартовой системе координат: Ax + By + C = 0, где x, y координаты точек прямой, A, B, C действительные числа при условии $\mathrm{A}^2 + B^2 \neq 0$.

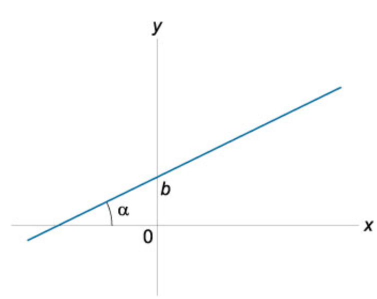
• Нормальный вектор к прямой

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, Тогда вектор $\mathbf{n}\,(A, B)$, координаты которого равны коэффициентам A, B, является вектором нормали к данной прямой.

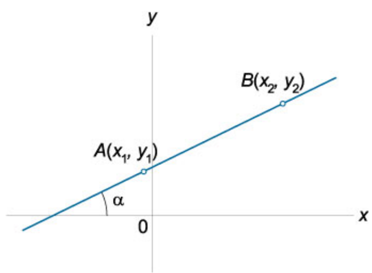


• Уравнение прямой с угловым коэффициентом

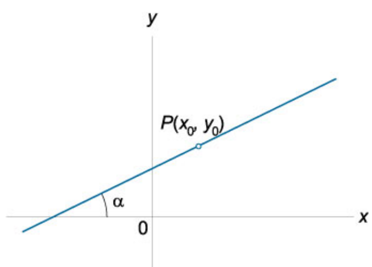
$y = kx + b$ Здесь коэффициент $k = \tan\alpha$ называется угловым коэффициентом прямой, число b является координатой точки пересечения прямой с осью Oy.



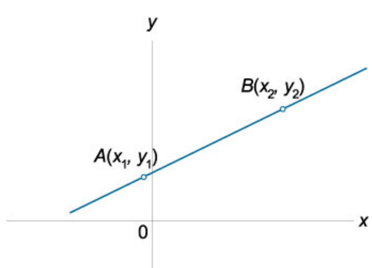
Угловой коэффициент прямой определяется соотношением $k = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, где $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ координаты двух точек прямой. угловой коэффициент



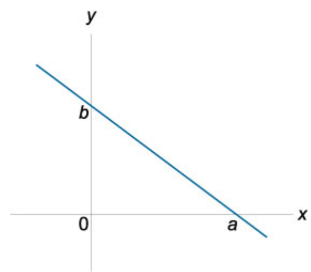
• Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту $y = y_0 + k(x - x_0)$, где k угловой коэффициент, а точка $P(x_0, y_0)$ принадлежит прямой. уравнение прямой по заданной точке и угловому коэффициенту



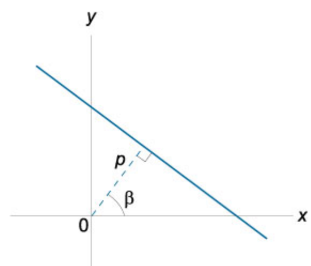
• Уравнение прямой, проходящей через две точки $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ или $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. уравнение прямой, проходящей через две точки



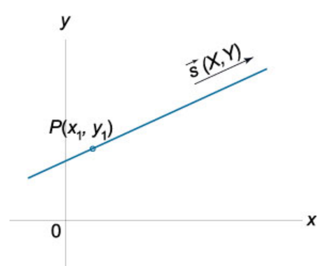
• Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b соответствуют отрезкам, отсекаемым прямой на осях Ox и Oy. уравнение прямой в отрезках



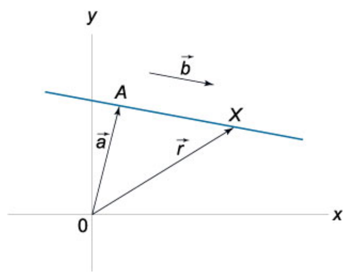
• Нормальное уравнение прямой $x\cos\beta + y\sin\beta - p = 0$ Здесь $\cos\beta$ и $\sin\beta = \cos(90^\circ - \beta)$ представляют собой направляющие косинусы вектора нормали. Параметр p равен расстоянию прямой от начала координат. нормальное уравнение прямой



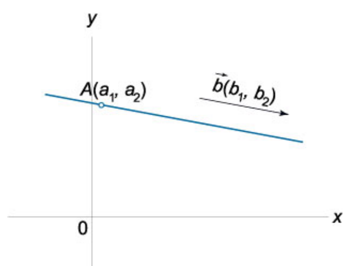
• Уравнение прямой по точке и направляющему вектору $\frac{x-x_1}{X} = \frac{y-y_1}{Y}$, где вектор $\mathbf{s}(X,Y)$ направлен вдоль прямой, а точка $P(x_1, y_1)$ лежит на этой прямой. Данное уравнение называется также каноническим уравнением прямой. уравнение прямой по точке и направляющему вектору



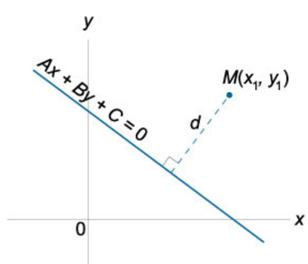
• Уравнение прямой в векторной форме $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$, где вектор $\mathbf{a}$ проведен из начала координат к некоторой точке A с известными координатами, лежащей на данной прямой. Вектор $\mathbf{b}$ определяет направление прямой. Вектор $\mathbf{r} = \mathbf{OX}$ представляет собой позиционный вектор, направленный из начала координат к произвольной точке X данной прямой. Число t является параметром, изменяющимся от $-\infty$до∞.



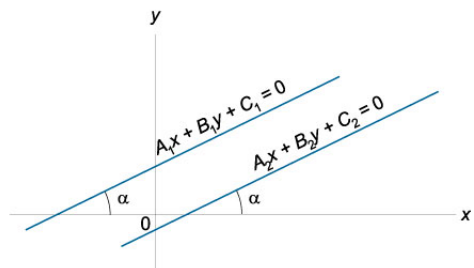
• Уравнение прямой в параметрической форме $\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \end{cases}$, где (a_1, a_2) являются координатами некоторой известной точки A, лежащей на прямой, (x, y) координаты произвольной точки прямой, (b_1, b_2) координаты вектора **b**, параллельного данной прямой, t параметр.



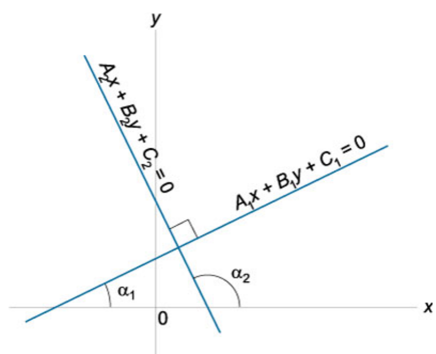
• Расстояние от точки до прямой Расстояние d от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ выражается формулой $d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. расстояние от точки до прямой



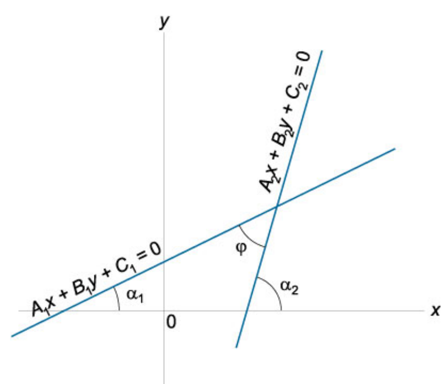
• Параллельные прямые Две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны при условии $k_1 = k_2$. Две прямые $A_1x+B_1y+C_1 = 0 A_2x+B_2y+C_2 = 0$ параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.



• Перпендикулярные прямые Две прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны, если $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ или (что эквивалентно) $k_1 k_2 = -1$. Две прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ перпендикулярны, если $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.



• Угол между прямыми $\tan\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, $\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$



•Пересечение двух прямых Если две прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ пересекаются, то координаты точки пересечения равны $x_0 = \frac{-C_1 B_2 + C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$, $y_0 = \frac{-A_1 C_2 + A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}$.

Глава 44

Уравнение плоскости в пространстве

Пусть в пространтве задана плоскость Q. Задана точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором $\vec{n}$ = (A; B; C), .M(x;y;z)) : = (x - x$_0; y - y_0; z - z_0$). При люьой ориентации плоскости вектора взаимно перпендикулярны и, таким образом их скаоярное произведение равно 0. $\vec{M_0 M} \cdot \vec{n} = 0$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \tag{44.1}$$

44.1 общее уравнение плоскости

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \tag{44.2}$$

44.2 уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Сделаем на плоскости 3 вектора: сделаем их из точки $M(x; y; z)$. Все эти векторы компланарны $\Rightarrow (\vec{M_1 M}, [\vec{M_2 M}, \vec{M_3 M}]) = 0$

44.3 уравнение плоскости в отрезках

То же самое, что и по точкам, просто точки на осях. В предыдущее вкорячить эти точки и определитель определить.

44.4 Нормальное уравнение плоскости

Возьмем прямоугольную систему координат Oxyz трехмерного пространства. Если плоскость удалена на расстояние $p \geq 0$ в положительном направлении нормального вектора $\vec{n}$. Возьмем за единицу длину вектора $\vec{n}$. Получим, что координатами направляющего косинуса являются $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, тогда $|\vec{n}| = cos2\alpha, cos2\beta, cos2\gamma = 1$.

Из вышесказанного получим, что определение скалярного произведения векторов по формуле $\vec{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma); O\vec{M} = (x, y, z)$ в результате дают равенство

$$(\vec{n}, O\vec{M}) = |\vec{n}| \cdot |O\vec{M}| \cdot cos(\vec{n}, \hat{,} O\vec{M}) = |\vec{n}| \cdot np\vec{n}O\vec{M} = 1 \cdot p = p$$

Данная формула представляет скалярное произведение в координатной форме. Тогда получаем следующее выражение:

$$(\vec{n}, O\vec{M}) = cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z$$

При сопоставлении двух последних равенств получаем уравнение плоскости такого вида $cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z = p$. Упростим выражения. Для этого необходимо перенести значение р в левую сторону, получим

$$\boxed{cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z - p = 0.} \tag{44.3}$$

Можно корячить иначе, через нормирующий множитель(домножаем общее уравнение) $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; знак берём обратным знаку свободного члена.

Глава 45

Уравнение прямой в пространстве

1. $\left\{ \begin{array}{ll} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (P_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (P_2) \end{array} \right.$ - общее уравнение прямой L в пространстве, как линии пересечения двух плоскостей P_1P_2.

2. $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ - каноническое уравнение прямой L, которая проходит через точку M(x$_0, y_0, z_0)\overline{S} = (m, n, p)$. Вектор $\overline{S}$ является направляющим вектором прямой L.

3. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - уравнение прямой, которая проходит через две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

4. Приравнивая каждую из частей канонического уравнения 2 к праметру t, получаем параметрическое уравнение прямой: $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{array} \right.$.

Глава 46

Поверхности второго порядка, метод сечения

Пусть в пространсве задана ПСК $Oxyz$. Фигурой, задаваемой уравнением $F(x, y, z) = 0$ называется множество тех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Если $F(x, y, z)$ многочлен, т.е. конечная сумма вида $ax^p y^q z^r, a \in \ athbbR; p, q, r \in \mathbb{N}$, фигура на выходе - алгебраическая поверхность. Если $F(x, y, z)$ - многочлен степени k, фигура будет порядка k. Таким образом поверхности второго порядка задаются уравнением вида
$a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_0 = 0;$
$a_0, a_1 \dots a_9 \in \mathbb{R}$
$\exists x \in \{a_1, a_2 \dots, a_6\} : x \neq 0$

46.1 Метод сечений

Тероэма 46.1. *Пусть задано уравнение $F(x, y, z) = 0$, тогда проекция на Oxy, пересечения поверхности с плоскостью $z = h$ Задаётся уравнением $F(x, y, h) = 0$.*

Доказательство. $F(x, y, z) = 0$ // Пусть $M(x_1, y_1, z_1)$ - произвольная точка. Тогда проекция этой точки на $Oxy = M_1(x_1, y_1, 0)$. Пусть M принадлежит пересечению этой поверхности с плоскостью $z = h \Leftrightarrow M(x_1, y_1, h)$ при этом $F(x_1, y_1, h) = 0$
Тогда M_1 в $Oxy = M(x_1, y_1)$ есть проекция пересечения данной поверхностии плоскость. $z = h$ тогда и только тогда, когда $M(x_1, y_1, h)$ принадлежит этому пересечению, что значит, что $F(x_1, y_1, h) = 0$ □

Глава 47

Поверхности вращения

Пусть в пространстве задана некая линия γ и прямая d. Фигура, получающаяся при вращении γ вокруг d называется поверхностью вращения. Выберем в пространсве ПСК $Oxyz$ так, чтбы ось вращения совпадала с $Ox \Rightarrow$ поверхность вращения можно задать так: $y \in Oxz = x = f(z)$, где f - некоторая функция, и рассмотрим Поверхность вращения, полученную при вращении γ вокруг Oz. Рассмотрим $M(x, y, z) \in$ этой поверхности, и плокость, проходящую через $M \perp Oz$ и M_0, точку пересечения этой плоскости с $Oz \Rightarrow M_0 = M_0(0, 0, z_1) \Rightarrow$ вся окружность с центром в M_0, проходящая через M, целиком лежит нв этой поверхности.

Рассмотри пересечение этой окружности с $Oxz : M_1$иM_2. Заметим, что M_0M_1, M_0M_2, M_0M - радиусы одной окружности(поэтому они равны друг другу). $\Rightarrow M_0M_1 = M_0M_2 = M_0M =$
$= \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - z_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
$\Rightarrow M_1(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1), M_2(-\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1)$. Так как M принадлежит поверхности вращения, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = f(z_1) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = (f(z_1))^2 \Rightarrow$ эта линия вращения задана

$$\boxed{x^2 = y^2 = f^2(z)} \tag{47.1}$$

Поверхнощение второго порядка тогда, когда многочлен от z не более второго порядка:

- $f(z) = a$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + b}$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + bz + c}$

Добавить рисунки сюды, кто-нитьб похуйб на редактуре добавим

Глава 48

Циллиндрические поверхности

Пусть в пространстве задага линия γ и ненулевой вектор $\vec{p}$. Поверхность нахывается циллиндрической, если вместе с любой своей точкой она содержит и всю прямую, параллельную $\vec{p}$ и проходящую через эту точку. Такие прямые называются образующими. В пространствк рассмотрим СК $Oxyz$ такую, что $Oz \parallel \vec{p} \Rightarrow$ Все образующие Ц.П. параллельны Oz и имеют направляющим вектором $\vec{p}$. Ц.П. можно задать следующим образом: Пусть в плоскости Oxy задана линия $\gamma := f(x, y) = 0$; через каждую точук этой линии проведём прямую, параллельную Ox. Тут γ называется направляющей для этой Ц.П.

Найдём уравнение, задающее Ц.П. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ в пространстве. Её проекция M_1 на Oxy имеет координаты $M_1(x, y, 0) \Rightarrow M_1 \in \gamma \Rightarrow f(x, y) = 0$. Если направляющая γ в Oxy задаётся уравнением $f(x, y) = 0$, Ц.П. так же задаётся уравнением $f(x, y) = 0$ и $f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_0 = 0$ - второго порядка. Из a_1, a_2, a_2 хотя бы один ненулевой.

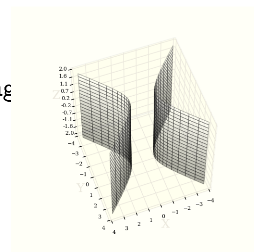
48.1 Примеры

./pics/.png

(a) Эллиптический циллиндр

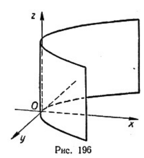
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{48.2}$$

При $a = b$ получаем цилиндр вращения(школьный).



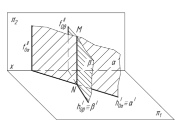
(b) Гиперболический циллиндр

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1} \tag{48.4}$$



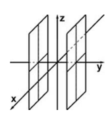
(c) Параболический циллиндр

$$\boxed{x^2 = \pm 2py} \tag{48.6}$$



(d) Пара плоскостей

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0} \tag{48.8}$$



(e) Пара плоскостей

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} = 1} \tag{48.10}$$

no

Глава 49

Конические поверхности

Пусть в пространстве зафиксирована точка A и линия γ. Конической поверхностью с центром в A называется множество точек, лежащих на всех прямых, проходящих через A и некоторую точку $\in \gamma$. Выберем в пространстве ПСК $Oxyz$ так, чтобы начало координат было центром данной К.П. Тогда этоу К.П. можно задать так:

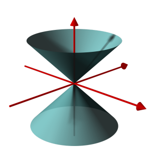
Рассмотрим плоскость $z = 1$, в этой плоскости рассмотрим γ, заданную уравнением $f(x, y) = 0$ и рассмотрим все прямые, прохрдящие через начало координат и точку, принадлежащую γ. Относительно прямых, проходящих через O: если $M(x, y, z) \neq O$ принадлежит такой прямой, $\forall t \in \mathbb{R}$: $M_t(t_x; t_y; t_z) \in$ этой прямой[1].

Пусть К.П. K имеет центром $O(0, 0, 0)$ и определена линией γ, заданной уравнением $f(x, y) = 0$, тогда рассматривая произвольную точку $M(x; y; z)$: $M \in K \Leftrightarrow \exists t : M_t(t_x; t_y; t_z) \in \gamma \Leftrightarrow \exists t : f(x_t, y_t) = 0 \Leftrightarrow \exists t = \frac{1}{z} : f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0 \Rightarrow$ $f(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ - уравнение К.П. $K \setminus \{0\}$.

Рассмотрим сечения конуса вращения различными плоскостями. 3 случая, если через начало координат:

1. Сечение К.В. есть точка O

[1] Господа редакторы, что?



[l]Эллиптический конус

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0} \tag{49.1}$$

2. Сечение К.В. есть касательная прямая
3. Пара пересекающихся прямых (в начале координат)

Рассмотрим плоскости, не проходящие через начало координат:

1. Плоскость $\perp Ox$ - окружность.
2. Эллипс(при небольшом угле наклона секущей плоскости).
3. Параболаб если секущая плоскость параллельна одной из образующих.
4. Гипербола, если угол наклона велик.

Глава 50

Эллипсоид, Параболоиды, Гиперболоиды

50.1 Эллипсоид

Пусть задана ПСК $Oxyz$. Эллипсоидом называется фигура, заданная уравнением:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{50.1}$$

Все переменные в чётных степенях: Симметричнсть относительно каждой координатной плоскости, оси, начала координат. Он лежит в коробке размерами $2a \times 2b \times 2c$ ака Дыня в коробке. Выведем через метод сечений: Режем плоскостями $z = h$, тогда проекция на Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \tag{50.2}$$

3 случая:

1. $|h| > c \Leftrightarrow 1 - \frac{h^2}{c^2} < 0 \Rightarrow$ нет таких точек

2. $|h| = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \pm h = \pm c \end{cases}$

3. $|h| < c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \frac{h^2}{c^2} < 1 \Rightarrow$ Эллипс

Аналогичные результаты получим при резании и другими плоскостями. Вершины эллипсоида: $(a;0;0), (-a;0;0), (0;b;0)$,
$(0;-b;0), (0;0;c), (0;0;-c)$, центр эллипсоида: $(0;0;0)$

50.2 Гиперболоиды

50.2.1 Однополостные

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{50.3}$$

симметриность как у гиперболоида.

Выведем через сечения:

1. $z = h : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2}, 1 + \frac{h^2}{a^2} > 0 \Rightarrow \forall h$ эллипс, он растёт, при $h = 0$ горловой эллипс, он самый мелкий.
2. $x = h : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$:
   (a) $|h| < a, 1 - \frac{h^2}{a^2} > 0 \Rightarrow$ Гипербола
   (b) $|h| = a, \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ Пара пересекающихся прямых
   (c) $|h| > a, 1 - \frac{h^2}{a^2} < 0 \Rightarrow$ Перевёрнутая начальная парабола (свопнуты действительная и мнимая оси)
3. $y = h$ см. $x = h$

50.3 Двуполостный гиперболоид, виброчаша

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2 2} - \frac{z^2}{c^2} = -1} \tag{50.4}$$

симметричность, как у остальных посонов
сечём $z = h$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \tag{50.5}$$

1. $|h| < c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \Rightarrow \emptyset$
2. $|h| = c : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ Точки, низ и верх виброчаш
3. $|h| > c : \frac{h^2}{c^2} - 1 > 0 \Rightarrow$ Эллипс

теперь сечём $x = h$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2} \Rightarrow \tag{50.6}$$

Гипербола

50.4 Параболоиды

50.4.1 Эллиптический

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z} \tag{50.7}$$

симметричен, но не как виброчаша, его нет сверху, он яма. сечём $z = h$:

1. $h < 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0 \Rightarrow \emptyset$
2. $h = 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow (0; 0; 0)$
3. $h > 0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h \Rightarrow$ Эллипс

теперь режем $x = h$ (также будет и с $y = h$)

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 2(z - \frac{h^2}{2a^2}) \tag{50.8}$$

получаем сдвигающуюсю вверх на $\frac{h^2}{2b^2}$ параболу.

50.4.2 Гиперболический Параболоил ака Седло для коня из коничесикх поверхностей

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z} \tag{50.9}$$

Чёткий, симметричный, но не относительно Oxy, O Режем $z = h$

1. $h < 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 0 \Rightarrow$ Гипербола(действительная Oy)
2. $h = 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ 2 пересекающиеся прямвые
3. $h > 0 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h \Rightarrow$ Гипербола(действительная Ox) Теперь $x = h$

$$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow \frac{-y^2}{b^2} = 2(z - \frac{h^2}{a^2}) \tag{50.10}$$

это парабола, полученная сдвигом на $\frac{h^2}{2a^2}$ Теперь $y = h$

$$\frac{x^2}{a^2} = 2(z + \frac{h^2}{b^2}) \tag{50.11}$$

Это парабола, сдвигающаяся вниз