



Ответы на теоретические вопросы к экзамену  
по математике.  
Семестр 1, 2019

по конспектам лекций Рачковского Н.Н.  
студентов группы 950501

4 января 2020 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>PUBLIC SERVICE ANNOUNCEMENT</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Множества</b>	<b>5</b>
2.1	Множества и операции над ними . . . . .	5
2.2	Замкнутость множеств . . . . .	6
2.3	Ограниченность множеств . . . . .	6
2.4	Окрестности . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Функции</b>	<b>7</b>
3.1	Графики . . . . .	8
3.1.1	угол между прямыми . . . . .	8
3.1.2	Основные элементарные функции . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Плоские фигуры</b>	<b>11</b>
4.1	Уравнения фигур . . . . .	11
4.1.1	Окружность . . . . .	11
4.1.2	Эллипс . . . . .	11
4.1.3	Гипербола . . . . .	12
4.1.4	Парабола . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Бином Ньютона</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства</b>	<b>16</b>
6.1	Основные свойства б.м. и б.б. последовательностей . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Последовательности</b>	<b>17</b>
7.1	Свойства . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Бесконечно малые и бесконечно большие функции</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Монотонные последовательности, теорема Вейерштрасса</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	<b>DPMW</b>	<b>22</b>

<b>11 Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.</b>	<b>23</b>
11.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности . . . . .	23
11.2 Односторонние пределы . . . . .	23
<b>12 DPMW</b>	<b>25</b>
<b>13 Непрерывность</b>	<b>26</b>
13.1 Односторонняя . . . . .	27
13.2 непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$ . . . . .	28
<b>14 DPMW</b>	<b>29</b>
<b>15 Сравнение функций</b>	<b>30</b>
15.1 Эквивалентность . . . . .	30
<b>16 DPMW</b>	<b>32</b>
<b>17 Непрерывность функции на отрезке</b>	<b>33</b>
<b>18 DPMW</b>	<b>35</b>
<b>19 Производная функции, односторонние производные</b>	<b>36</b>
<b>20 DPMW</b>	<b>39</b>
<b>21 правила дифференцирования</b>	<b>40</b>
<b>22 Дифференциал функции</b>	<b>42</b>
22.1 Св. производной . . . . .	43
<b>23 Производные и дифференциалы высших порядков</b>	<b>46</b>
<b>24 Дифференцирование функции, заданной параметрически</b>	<b>47</b>
<b>25 Локальный экстремум функции, теорема Ферма</b>	<b>48</b>
<b>26 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши</b>	<b>50</b>
<b>27 Правило Лопиталя</b>	<b>52</b>
<b>32 Неопределённый интеграл</b>	<b>55</b>
32.1 Первообразная . . . . .	55
32.2 Свойства . . . . .	55
32.3 Таблица Интегралов . . . . .	56
<b>33 Замен переменной</b>	<b>58</b>

---

<b>34 Интегрирование по частям</b>	<b>59</b>
<b>35 Определённый интеграл</b>	<b>60</b>
35.1 Свойства . . . . .	61
<b>36 Формула Ньютона-Лейбница</b>	<b>64</b>
<b>46 Поверхности второго порядка, метод сечения</b>	<b>66</b>
46.1 Метод сечений . . . . .	66
<b>47 Поверхности вращения</b>	<b>67</b>
<b>48 Цилиндрические поверхности</b>	<b>68</b>

## Глава 1

# PUBLIC SERVICE ANNOUNCEMENT

DEAR SLAVS, TODAY, I HAVE  
TO ASK YOU TO HELP ME! HELP  
ME AND THIS PROJECT BY REARRANGING  
QUESTIONS IN THE CORRENT  
ORDER, SO IT MAKES SENSE.  
ALSO, I'D LIKE TO SEE PLACEHOLDERS  
FOR ALL OF THE QUESTIONS  
THAT ARE NOT IMPLEMENTED  
YET.  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-хуячеры

## Глава 2

# Элементы теории Множеств

### 2.1 Множества и операции над ними

Множество - совокупность некоторых объектов, обладающих определёнными свойствами. Каждый из объектов называется элементом обозначение множества:  $\{a|P(a)\}$  где  $P(a)$  - свойство, объединяющее объекты  $a$ .

Специальные символы, обозначающие операции над множествами:

1. содержится:  $A \subseteq B$ . Каждый элемент множества  $A$  содержится в  $B$ .
2. совпадает:  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$
3. объединение:  $A \cup B = \{c|c \in A \text{ или } c \in B\}$
4. пересечение:  $A \cap B = \{c|c \in A \text{ и } c \in B\}$
5. теоретическо-множественная разность:  $A \setminus B = \{c|c \in A \text{ и } c \notin B\}$
6. декартово произведение:  $A \times B = \{(a, b)|a \in A; b \in B\}$ <sup>1</sup>

Операции с  $\emptyset$ :

1.  $A \cup \emptyset = A$
2.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
3.  $A \setminus \emptyset = A$
4.  $\emptyset \setminus A = \emptyset$

---

<sup>1</sup>каждый элемент в паре с каждым другим, как при раскрытии скобок

## 2.2 Замкнутость множеств

Рассматривая операции умножения и деления над  $\mathbb{N}$  мы остаёмся в  $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$  замкнуто относительно операции умножения. Для того, чтобы  $\mathbb{N}$  стало замкнуто относительно операции вычитания нужно добавить к нему отрицательные числа и ноль тем самым привратив его в  $\mathbb{Z}$ . Таким образом  $\mathbb{Z}$  замкнуто относительно  $\times, \pm$  но не  $\div$ . Для того, чтобы замкнуть  $\mathbb{Z}$  относительно  $\div$ , нужно дополнить его дробями вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Т. О. получили  $\mathbb{Q}$  Получили:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  где  $\mathbb{R}$  - действительные числа.

## 2.3 Ограниченность множеств

$A$  ограничено сверху, если  $\exists M, \forall a \in A : a \leq M$  и  $A$  ограничено снизу, если  $\exists M, \forall a \in A : a \geq M$

Таким образом, если множество ограничено **и** сверху **и** снизу, оно называется *ограниченным*.  $\Rightarrow \exists M, \forall a \in A : |a| \leq M(1)$

$$\begin{aligned} \exists M_1, M_2, \forall a \in A : M_1 \leq a \leq M_2 \\ M = \max(|M_1|, |M_2|) \\ M \geq |M_1| \geq M_2 \\ M \geq |M_1| \Rightarrow -M \leq -|M_1| \leq M_1 \Rightarrow \\ \forall a \in A : -M \leq -M_1 \leq a \leq M_2 \leq M \rightarrow -M \leq a \leq M \end{aligned}$$

Следовательно из ограниченности  $A$  получается (1).

## 2.4 Окрестности

Рассмотрим  $a \in \mathbb{R}$ . Окрестностью  $a$  является отрезок  $(b; c)$ , содержащую  $a$ . Рассмотрим  $\epsilon > 0$ .  $\epsilon$ -окрестностью  $a$  является отрезок  $(a - \epsilon; a + \epsilon)$ , содержащую  $a$ .

$\mathcal{U}_\epsilon(a)$  есть отрезок длиной  $2\epsilon$ , центром которого является  $a$ :

$$\mathcal{U}_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \epsilon\}$$

Оно бывает и проколото: т.е. из отрезка удалена точка  $a$ :  $\dot{\mathcal{U}}_\epsilon(a) = \mathcal{U} \setminus \{a\}$



## Глава 3

# Функции

обведи пж важные уравнения в коробку `\boxed{eq:*\}\{...\}`

Пусть даны 2 непустых множества  $A$  и  $B$ . Отображением из  $A$  и  $B$  называется правило, согласно которому каждому элементу множества  $A$  соответствует не более одного элемента  $B$ . Это обозначается  $f : A \rightarrow B$ . Областью определения  $f$  называется множество  $D(f) = \{a \in A \mid \exists b = f(a)\}$ <sup>1</sup>. Множеством значений  $f$  называется множество  $E(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A; b = f(a)\}$ <sup>2</sup>. Запись  $b = f(a)$  обозначает, что  $a \in A$  в отображении  $f$  соответствует  $b \in B$  тут  $b$  - образ, а  $a$  - прообраз.

Свойства биективного<sup>2</sup> отображения  $f : A \rightarrow B$ :

1.  $D(f) = A$
2.  $E(f) = B$
3.  $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$
4. обратное отображение:  $f^{-1} : B \rightarrow A; a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow b = f(a)$

График отображения  $f : A \rightarrow B = \{(a, b) \mid b = f(a)\} \subset A \times B$ . Если  $A$  и  $B$  - числовые, то это функция, тогда график функции есть подмножество в декартовом квадрате<sup>3</sup>. Рассмотрим плоскость с прямоугольной системой координат: элементам множества  $\mathbb{R}^2$  можно поставить в соответствие точки этой плоскости, координаты которой в этой С.К. являются эти элементы  $\mathbb{R}^2$ . Тогда график функции можно представить как множество точек, причем ясно, что не каждое множество точек задает график функции. Множество точек задает график функции тогда и только тогда, когда любая вертикальная прямая, параллельная оси ординат, пересекает множество данных не более одного раза. Функция может задаваться *аналитически, графически и неявно*. Неявный способ: Рассмотрим  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и Рассмотрим

---

<sup>1</sup> $f$  - заданное нами правило

<sup>2</sup>взаимнооднозначного

<sup>3</sup> $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$F(x; y) = 0$ . На Координатной плоскости рассмотрим множество решений этого уравнения:  $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | F(x; y) = 0\}$ : если оказывается, что это множество является графиком функции, функция задана неявно уравнением  $F(x; y) = 0$ .

### 3.1 Типовые функции, график функции

Линейная функция:

Функция вида  $y = kx + b$ ;  $k, b \in \mathbb{R}$  имеет графиком невертикальную прямую при  $b = 0$  график функции проходит через  $(0; 0)$ .  $K$  - угловой коэффициент равный тангенсу угла наклона графика к  $Ox$ . Взаимное расположение двух прямых, заданных функциями  $y_1 = k_1x + b_1$  и  $y_2 = k_2x + b_2$ :

1. совпадение прямых  $\Leftrightarrow k_1 = k_2; b_1 = b_2$
2. параллельность прямых  $\Leftrightarrow k_1 = k_2$  и  $b_1 \neq b_2$
3. пересечение прямых  $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$

доказательство свойства 2:

$\Rightarrow$ ) Пусть прямые  $y_1 = k_1x + b_1$  и  $y_2 = k_2x + b_2$  параллельны.

Следовательно у них не общих точек:

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

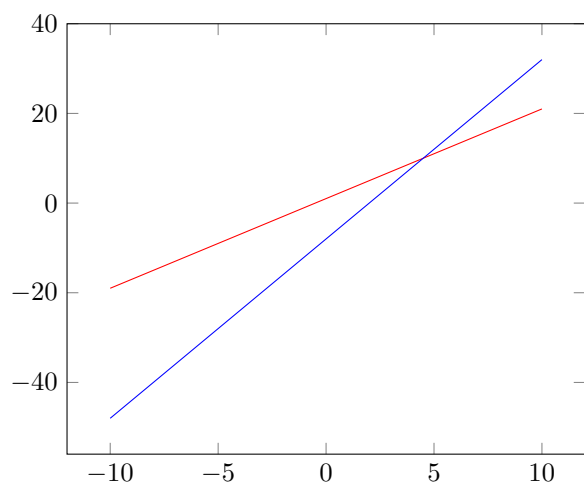
$\Rightarrow x(k_1 - k_2) = b_2 - b_1$  не имеет решений

$$\text{Следовательно } x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ ) Предположим, что  $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$  и проведем все эти действия в обратном порядке.

#### 3.1.1 Формула получения угла между двумя прямыми

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$



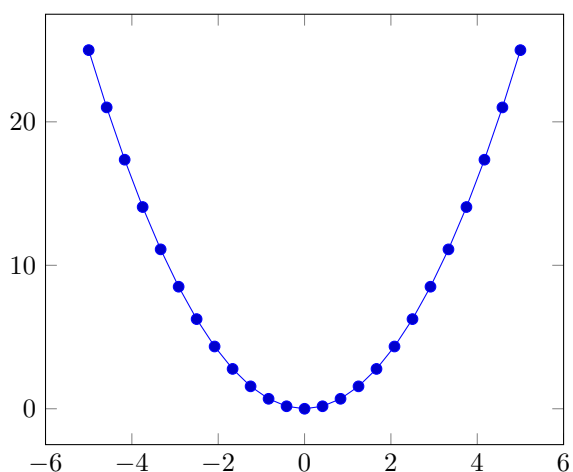
обозначим угол между красной и синей линиями за  $\theta$ , наклон линий соответственно  $\phi_1$  и  $\phi_2$   $\theta = \phi_1 - \phi_2$   
 $k_1 = \tan \phi_1$   
 $k_2 = \tan \phi_2$   
 $\theta = \tan \phi_1 - \tan \phi_2 \Rightarrow$

$$\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \quad (3.1)$$

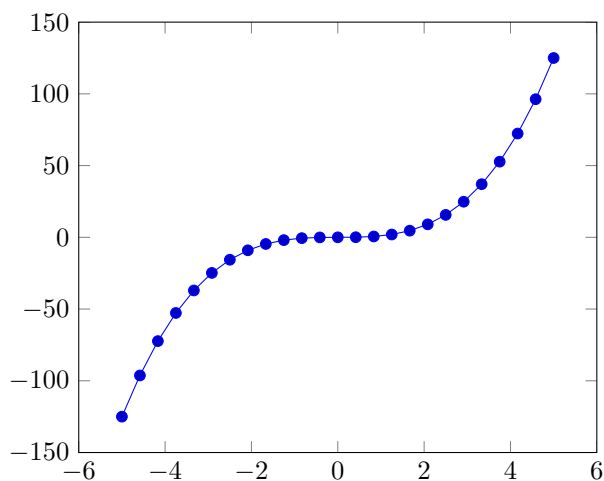
Таким образом 2 прямые взаимоперпендикулярны тогда и только тогда когда  $k_1 = -\frac{1}{k_2}$

### 3.1.2 Основные элементарные функции

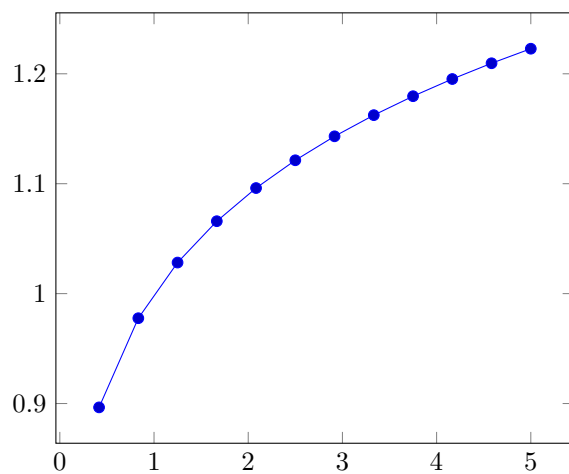
Степенная функция



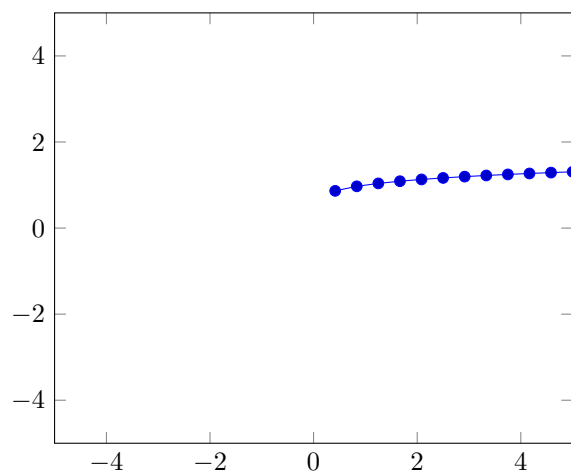
$n = 2n$



$n = 2n+1$



$x^{\frac{1}{n}}$  где  $n$  - четное



$x^{\frac{1}{n}}$  где  $n$  - нечетное

ДОДЕЛАЙС

## Глава 4

# Окружность, Эллипс, Гипербола, Парабола

Пусть Существует прямоугольная система координат  $Oxy$ ; Пусть даны две точки  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ ; Тогда расстояние между  $A$  и  $B$  вычисляется так:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4.1)$$

### 4.1 Фигуры и канонические уравнения фигур

Говорят, что уравнение на плоскости задает некоторую фигуру, если принадлежность  $M(x; y)$  этой фигуре равносильно выполнению равенства  $f(x; y) = 0$  для каждой точки этой фигуры.

#### 4.1.1 Окружность

**Окружностью** называется множество всех точек в плоскости, удаленных от данной фиксированной точки, называемой **центром окружности** на одно и то же расстояние, называемое **радиусом окружности**.

дана точка  $M(x; y)$  и окружность с центром  $O(x_0, y_0)$ .  $M \in \omega(O, r) \Leftrightarrow |MO| = R \Leftrightarrow |MO|^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (4.2)$$

Равенство 3.2 есть уравнение окружности т.к. оно равносильно принадлежности точки  $M$  к окружности.

#### 4.1.2 Эллипс

Пусть на плоскости заданы 2 точки  $F_1, F_2$ , расстояние между которыми равно  $2c$ ; и пусть дано некоторое число  $a > c$ . **Эллипсом** называется

множество всех точек ранной плоскости, для которых сумма расстояний от этой точки до точек  $F_1$  и  $F_2 = 2a$ . Точки  $F$  называются фокусами эллипса. Вывод:

Зададим на плоскости ПСК с  $Ox = F_1F_2$ ; координаты точек  $F$  получаются:  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$

Возьмем произвольную точку  $M(x; y) \Rightarrow (MF_1 + F_1F_2) = 2a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \therefore (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \therefore a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore b^2 &= a^2 - c^2 \\ \therefore b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \text{ делим на } a^2b^2 \end{aligned}$$

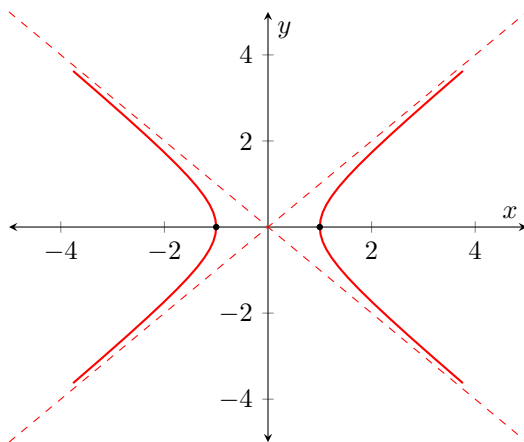
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1} \quad (4.3)$$

1

Так как обе переменных  $x$  и  $y$  в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат. Эллипс ограничен прямоугольником  $2a$  на  $2b$ . В случае совпадения  $a$  и  $b$  получим  $\omega(0, a)$ . эксцентриситет эллипса:  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ .  $\varepsilon \in [0; 1]$   $\therefore \varepsilon = 0$  для окружности.

### 4.1.3 Гипербола

На плоскости заданы несовпадающие точки  $F_1, F_2$ , расстояние между которыми равно  $2c$ . Пусть  $a \in (0; c)$ . Гиперболой называется множество точек, для которых разность расстояний от точки до  $F_1$  и  $F_2$ .  $F_1$  и  $F_2$  это фокусы гиперболы. На плоскости задана ПСК с  $Ox = F_1F_2$ ; координаты точек  $F$  получаются:  $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$



<sup>1</sup>неуверен в записи, особенно в  $(MF_1 + F_1F_2) = 2a$

wywod urawnenija giperboly zdesja.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (4.4)$$

Так как обе переменных  $x$  и  $y$  в четных степенях, эллипс симметричен относительно начала координат.  $y = \pm \frac{b}{a}x$  - асимптоты гиперболы.  $a$  и  $b$  - полуоси гиперболы, точки пересечения с  $Ox$  - вершины. **эксцентриситет гиперболы:**  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ .  $c > a \Rightarrow \varepsilon > 1$

#### 4.1.4 Парабола

На плоскости задана прямая  $\Delta$  и  $F \notin \Delta$ . **Параболой** называется множество точек плоскости равноудаленных от  $\Delta$  и  $F$ . При этом  $\Delta$  - директриса параболы,  $F$  - фокус Параболы. Введем ПСК:  $Ox$  проходит через  $F$  и  $\perp \Delta \Rightarrow F(\frac{p}{2}; 0)$  где  $p$  - расстояние от  $F$  до  $\Delta$ .

Уравнение параболы  
wywod urawnenija tuta

$$y = \pm 2px \quad (4.5)$$

$y$  в уравнении в четной степени  $\Rightarrow$  парабола симметрична относительно  $Ox$  при  $x \geq 0$  получается, что парабола расположена в правой полуплоскости.

## Глава 5

# Бином Ньютона

Бином Ньютона:  $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^i b^{n-i}$

Сочетания:  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Применим метод математической индукции:

1. При  $n=1$  имеем:  $a + b = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = \frac{1!}{0!(1-0)!} b + \frac{1!}{1!(1-1)!} a = b + a$   
Таким образом, при  $n = 1$  формула верна

2. При  $n = 2$ :

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^0 b^2 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^2 b^0 = \frac{2!}{0!(2-0)!} b^2 + \frac{2!}{1!(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!(2-2)!} a^2 = b^2 + 2ab + a^2$$

Для  $n = 2$  также справедлива формула бинома Ньютона

3. Предположим, что она верна и при  $n = k$ :

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i}$$

4. Предположим, что она верна и при  $n = k + 1$

*Действительно:*

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= (a+b)^k (a+b) = \left( \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i} \right) (a+b) = \sum_{i=0}^k C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \\ &+ \sum_{i=0}^k C_k^i a^i b^{k-i+1} = C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i a^{i+1} b^{k-i} + \sum_{i=1}^k C_k^i a^i b^{k-i+1} + \\ &C_k^0 b^{k+1} a^0 = \end{aligned}$$

Заметим, что в обеих суммах сумма показателей степеней  $a$  и  $b$  в каждом слагаемом равна одному и тому же  $(k + 1)$ . С другой стороны, каждая из этих сумм содержит ровно одно слагаемое с множителями  $ab^k$  и ровно одно слагаемое с показателями  $a^2 b^{k-1}$  и  $a^k b$ , поэтому:



$$\begin{aligned}
 &= C_k^k a^{k+1} b^0 + \sum_{i=0}^{k-1} (C_k^i + C_k^{i+1} a^{i+1} b^{k-i} + C_k^0 b^{k+1} a^0) \\
 C_k^i + C_k^{i+1} &= \frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!} = \frac{k!(i+1)+k!(i-1)}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{k!(k+1)}{(i+1)!(k-i)!} = \\
 &= \frac{(k+1)!}{(i+1)!(k-i)!} = \frac{(k+1)!}{(i+1)!((k+1)-(i+1))!} = C_{k+1}^{i+1}
 \end{aligned}$$

Продолжая цепочку равенств в вычисляемом  $(a+b)^{k+1}$ , получаем:

$$\begin{aligned}
 &1 * a^{k+1} b^0 + \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^{i+1} a^{i+1} b^{k-i} + 1 * a^0 b^{k+1} \\
 1 &= C_{k+1}^{k+1} = C_{k+1}^0
 \end{aligned}$$

В сумме сделаем замену  $j = i + 1$ :

$$C_{k+1}^{k+1} a^{k+1} b^0 + \sum_{i=1}^k C_{k+1}^j a^j b^{(k+1)-j} + C_{k+1}^0 a^0 b^{k+1} = \sum_{j=0}^k C_{k+1}^j a^j b^{(k+1)-j}$$

Таким образом, мы показали, что формула Бинома Ньютона справедлива при  $n = k + 1 \Rightarrow$  эта формула справедлива для любого натурального  $n$

## Глава 6

# Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Выделяют бесконечно большие последовательности - последовательности, имеющие пределом бесконечность. Говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  имеет бесконечный предел, если  $\forall M > 0 \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$ . Последовательность называется бесконечно малой последовательностью (б.м.п.), если  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$  выполняется равенство  $|x_n| < \epsilon$ .

### 6.1 Основные свойства б.м. и б.б. последовательностей

1. Сумма б.м. последовательностей есть б.м.п.
2. Произведение ограниченной последовательности и б.м. есть б.м.п.
3. Если  $\{x_n\}$  б.м.п., то  $\{x_n\}$  - ограниченная последовательность
4. Произведение б.м.п. есть последовательность б.м.
5. Если  $\{x_n\}$  б.м.п. и  $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $c = 0$ , т.е.  $x_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$
6. Если  $\{x_n\}$  б.м.п. и  $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 : \{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$  - б.б.п
7. Если  $\{x_n\}$  б.б.п., то  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n \neq 0, \forall n \geq n_0$  и последовательность  $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$  - б.м.п

## Глава 7

# Числовая последовательность и ее предел. Свойства сходящихся последовательностей.

Числовая последовательность называется отображением в котором каждому  $\mathbb{N}$  числу соответствует некоторое число. Последовательности принято изображать  $\{x_n\} = x_1; x_2; \dots x_n$ . Если из  $\{x_n\}$  взято некое бесконечное подмножество, из которого сформирована другая последовательность, в которой **порядок следования членов такой же как и в исходной последовательности, то она называется подпоследовательностью**. Обозначение  $\{x_{n_m}\}$ . Из определения последовательности: если  $k_1 < k_2 \Rightarrow m_1 < m_2$ . Число  $a$  называется пределом последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow$  в сколь угодно малой  $\mathcal{U}_\epsilon(a)$  может находиться **конечное число членов этой последовательности**.

Предел числовой последовательности есть точка, в которой *кучкуются* почти все члены последовательности за исключением, может последнего члена.

Последовательность, имеющая предел называется *сходящейся*; в противном случае - *расходящейся*. Расходящиеся последовательности также включают бесконечно большие последовательности.

бесконечно большие последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| > M$$

бесконечно малые последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N = N(M) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |x_n| < M$$

## 7.1 Свойства сходящихся последовательностей

### DOKAZAT' SWOJSTWA

1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел. Действительно, если предположить, что пределов 2, можно указать несколько  $\mathcal{U}_\epsilon$  этих пределов, не пересекающих друг друга. По определению предела внутри каждой из этих  $\mathcal{U}_\epsilon(a)$  должно содержаться бесконечно много членов последовательности, что есть противоречие.
2. Если Последовательность сходится к  $a$ , то любая подпоследовательность этой последовательности сходится к  $a$ .
3. Любая мходящаяся последовательность ограничена:

$$\text{Пусть } \epsilon = 1 : \exists \in \mathbb{N}, n \geq N : |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1 \Leftrightarrow |x_n| - |a| < 1 \Rightarrow |x_n| < |a| + 1$$

Пусть члены  $x_1 \dots x_{N-1}$ , не попавшие в рассматриваемую окрестность точки  $a$ . и Пусть  $M = \max(|x_1| \dots |x_{N-1}|, |a| + 1)$   
 $\forall n, |x_n| \leq M$

4. Если для 2х членов последовательностей  $x_n$  и  $y_n$ , сходящихся к числам  $a$  и  $b$  соответственно, начиная с некоторого номера  $x_n < y_n, a \leq b$ :

$$\begin{aligned} &\text{Пусть } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \\ &a < b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n < y_n \\ &\text{Примем } \epsilon = \frac{b-a}{2} \\ &\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \\ &\forall n \geq N_2, |y_n - b| < \frac{b-a}{2} \\ &\therefore \text{при } N = \max(N_1, N_2) \\ &\forall n \geq N : \begin{cases} x_n > a - \frac{b-a}{2} \\ x_n > a + \frac{b-a}{2} \\ b - \frac{b-a}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Если для 3х последовательностей  $x_n, y_n, z_n$  выполняется  $x_n \leq y_n \leq z_n$   
 $\lim_{x_n \rightarrow \infty} x_n = a \lim_{x_n \rightarrow \infty} z_n = a$ , то  $y_n$  также сходится к  $a$
6. Если  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ , то начиная с некоторого номера  $|x_m| > \frac{a}{2}$   
 все члены этой последовательности имеют тот же знак, что и  $a$ .
- 7.

**Терозма 7.1.** Пусть  $x_n$  и  $y_n$  сходятся к  $a$  и  $b$ , тогда

$$(a) \{x_n \pm y_n\} = k \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = a \pm b$$

$$(b) \forall c \{c \cdot x_n\} \lim_{n \rightarrow \infty} = c \cdot a$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{x_n} \right\} = \frac{1}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\} = \frac{b}{a}, \text{ если } a \neq 0$$

## Глава 8

# Бесконечно малые и бесконечно большие функции

БНФ не люди Пусть функция  $y = f(x)$  определена в окрестности  $U(x_0)$ . Эта функция называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

А бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$  - если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

1. Сумма и произведение любого конечного числа и б.м.ф. является б.м.ф.
2. Пусть функция  $y = f(x)$  б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $y = g(x)$  ограничена в  $U(x_0)$ , то есть  $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| \leq c$ . Тогда функция  $y = f(x) * g(x)$  является б.м.ф.при  $x \rightarrow x_0$
3. произведение конечного числа б.б.ф является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
4. Пусть функция  $y = f(x)$  б.б.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , а функция  $y = g(x)$  удовлетворяет свойству:  $\exists c > 0 : \forall x \in U(x_0) : |g(x)| > c$ , тогда функция  $y = f(x) * g(x)$  является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
5. Пусть функция  $y = f(x)$  б.м.ф. при  $x \rightarrow x_0$  и  $f(x) \neq 0$  в  $U(x_0)$ , тогда функция  $y = \frac{1}{f(x)}$  является б.б.ф.при  $x \rightarrow x_0$
6. Если функция  $y = f(x)$  б.б.ф. при  $x \rightarrow x_0$ , тогда функция  $y = \frac{1}{f(x)}$  является б.м.ф.при  $x \rightarrow x_0$

## Глава 9

# Монотонные последовательности, теорема Вейкерштрасса

ебать где это в конспекте?

## Глава 10

## DPMW



## Глава 11

# Предел функции в точке и на бесконечности, Односторонние пределы.

### КАК-ТО МАЛО НАПИСАНО

Предел функции на бесконечности определяется так:

#### 11.1 Бесконечный предел, Предел на бесконечности

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x| > \delta; |f(x) - A| < \epsilon$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta(x_0)}, |f(x)| > \epsilon$

#### 11.2 Односторонние пределы

$y = f(x)$  определена на  $(x - \delta; x)$ .

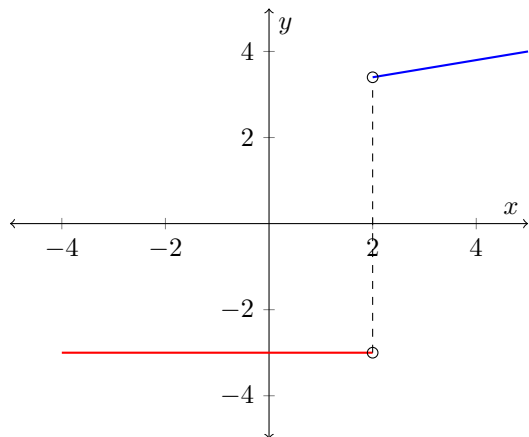
$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$ : Односторонним пределом слева функции  $y = f(x)$  называется  $A : \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 - \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$ , если  $A$  существует.

Аналогично определяется предел справа:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x \in (x_0 + \delta_0; x_0) : |f(x) - A| < \epsilon$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)} \quad (11.1)$$

ГЛАВА 11. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА БЕСКОНЕЧНОСТИ,  
11.2. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ.

предел слева(точка на красном) и справа(точка на синем)



в данном случае предела у функции  
нет

## Глава 12

## DPMW

## Глава 13

# Непрерывность функций в точке, их свойства.

$y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если она определена в этой точке, а также в  $\mathcal{U}(x_0)$  и при этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$   
 $\Delta x = x - x_0$  - приращение аргумента  
 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  - есть приращение функции в  $x_0$   
 $y = f(x)$  непрерывна в  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta x| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \quad (13.1)$$

Непрерывность функции в точке означает то, что в любой, сколь угодно маленькой окрестности, бесконечно малое приращение аргумента влечёт за собой бесконечно малое приращение функции.

Свойства непрерывной функции в точке

1. Если функция непрерывна в точке  $x_0$ , то в некоторой окрестности этой точки эта функция ограничена.
2. Если функция непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то в некоторой окрестности  $x_0$  функция имеет тот же знак, что и  $f(x_0)$
3. Если  $y = f(x_0)$  и  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) < g(x_0)$ , то  $\exists \mathcal{U}(x_0)$  где  $f(x) < g(x)$
4. Если  $y = f(x_0)$  и  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то так же непрерывны  $y = f(x_0) \pm y = g(x_0)$ ,  $y = f(x_0) \cdot y = g(x_0)$ ,  $y = f(x_0) y \div g(x_0)$
5. Непрерывность композиции функций: Если  $y = g(x_0)$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $z = f(x_0)$  непрерывна в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то  $y = f(g(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

*Доказательство.*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

$$\forall \sigma > 0, \exists \tau > 0, \forall y \in \mathcal{U}_{\tau}(y_0) : |f(y) - f(y_0)| < \sigma$$

$$\forall \sigma > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \sigma$$

что и означает непрерывность  $y = f(g(x))$  в точке  $x_0$  □

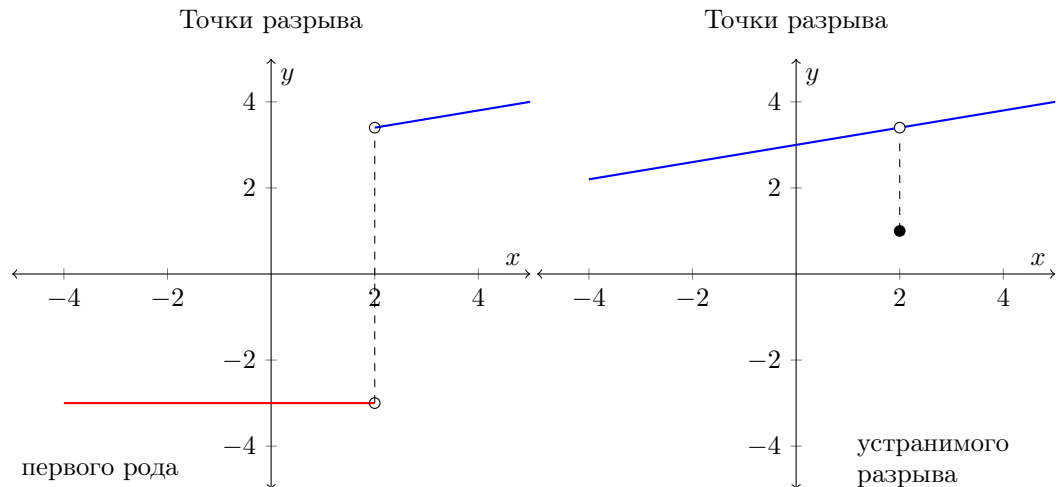
### 13.1 Односторонняя непрерывность

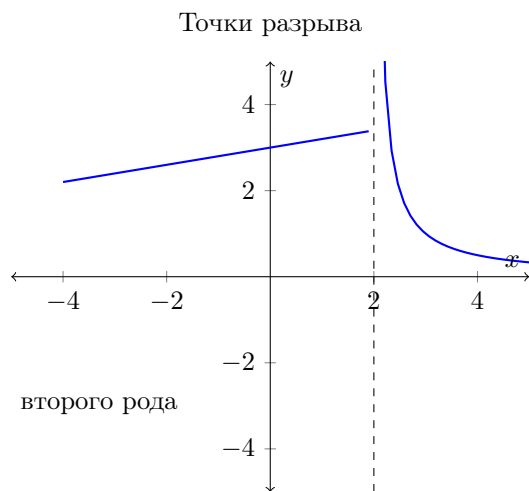
$y = f(x)$  определена на  $(x_0 - \delta; x_0]$  такая функция называется непрерывной слева, если  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$  аналогично функция называется непрерывной справа, если  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ . Так как функция непрерывна, она непрерывна слева и справа.

Функция называется разрывна в точке  $x_0$ , если она либо не определена в этой точке, либо определена, но не непрерывна.

Классификация точек разрыва:

1. Если существуют и конечны оба односторонних предела эти односторонние пределы не равны друг другу, то эта точка - точка разрыва первого рода.
2. Если функции справа равен пределу слева и не равен значению функции в точке, это точка устранимого разрыва.  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$
3. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует - точка разрыва второго рода





## 13.2 непрерывны $\forall x \in \mathcal{D}(f(x))$

- постоянные функции
- $y = x$
- $y = a_n x^m + a_{n-1} x^{m-1} + \dots + a_0$
- дробно-рациональные функции  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P(x)$ ,  $Q(x)$  - многочлены степени  $x$
- функции  $\sin, \cos, \tan, \cot$

## Глава 14

## DPMW

## Глава 15

# Сравнение функций, эквивалентные функции

Пусть  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  определены в  $\mathcal{U}_{x_0}$ . Говорят, что  $f(x)$  сравнима с  $g(x)$ , если

$$\boxed{\exists \epsilon, \exists \mathcal{U}_{x_0}, \forall x_0 \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| \leq \epsilon |g(x)|} \quad (15.1)$$

В этом случае пишут, что  $f(x) = O(g(x))$ .

Очевидно, что  $f(x) = O(g(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} \leq \epsilon$  а это означает, что  $\frac{f(x)}{f(x)}$  ограничена в  $\mathcal{U}_{x_0}$ .

Говорят, что  $y = f(x)$  бесконечно мала по сравнению с  $y = g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} : |f(x)| <$

**HILFE \_MIR! \_ICH \_HABE \_DAS \_KONSPEKT \_NICHT!** тогда пишут, что  $f(x) = o(f(x))$  при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{f(x)} \right| = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(x) \cdot \alpha(x)$  где  $\alpha(x)$  - БМФ при  $x \rightarrow x_0$ .

### 15.1 Эквивалентность

Функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  эквивалентны при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  или конечному числу  $A$ , тогда пишется  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ , тут  $y = g(x)$  - главная часть  $y = f(x)$

**Терозема 15.1.** Если  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\forall x$ :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)}$

Таблица эквивалентных при  $x \rightarrow x_0$ :



$\sin(x)$	$x$
$\operatorname{tg}(x)$	$x$
$\arcsin(x)$	$x$
$\operatorname{arctg}(x)$	$x$
$1 - \cos(x)$	$\frac{x^2}{2}$
$\ln a$	$x$
$a^x - 1$	$x \cdot \ln a$
$\log_a 1 + x$	$\frac{x}{\ln a}$
$e^x - 1$	$x$
$(1 + x)^\beta - 1$	$\beta x$
$x^\beta - 1$	$\beta(x - 1)$

## Глава 16

## DPMW

## Глава 17

# Непрерывность функции на отрезке

Пусть  $y = f(x)$ ,  $[a; b] \subset \mathcal{D}(y)$ .  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , если она непрерывна в каждой точке интервала  $(a; b)$  и непрерывна справа в точке  $a$  и слева в точке  $b$ .

**Тероэма 17.1.** *Кантора о вложенных отрезках.*

*Имеется  $[a; b]$  и совокупность вложенных отрезков  $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$  и при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0^1$ , тогда*

$$\boxed{\exists a \in [a; b] : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (17.1)$$

Используя теорему Кантора Докажем теорему Больцана-Вейерштрасса

*Доказательство.*  $\forall \{x_n\} \subset [a; b]$  можно выделить мходящуюся подпоследовательность:

Разобьём  $[a; b]$  точкой  $C$  пополам и рассмотрим  $[a_1; b_1]$ , половину первоначального отрезка.

Эта половна содержит бесконечно много точек из  $\{x_n\}$ . Пусть  $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$ . Точкой  $C_2$  Разобьём отрезок  $[a_1; b_1]$  пополам и мрассмотрим  $[a_2; b_2]$ , она содержит бесконечно много точек из  $\{x_n\}$

и в этом отрезке обозначим  $x_{n_k}$ , чтобы  $n_2 > n_1$  и так далее. Получим

$$\begin{aligned} \{x_{n_k}\} &\in [a_k; b_k], \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ a_k &\leq x_{n_k} \leq b_k, b_k - a_k = \frac{b_k - a_k}{2^k} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_k - a_k}{2^k} &= 0 \end{aligned}$$

По теореме Кантора имеем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_k = a$

В неравенстве  $a_k \leq x \leq b_k$  перейдём к пределам.

---

<sup>1</sup>вложены друг в друга и уменьшаются

По теореме о 2х милиционерах:  
 $a_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} \leq a_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a_0 \in [a; b]$

□

**Терозма 17.2.** Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

$\exists c > 0, \forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq c$

*Доказательство.* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ . Предположим, что она неограничена на этом отрезке.

Отсюда  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a; b] : |f(x_n)| \geq n$

Отсюда по Больцана-Вейерштрасса в  $\{x_n\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  с пределом  $x_0 \in [a; b]$

Отсюда  $\forall k, |f(x_{n_k})| > n_k, \lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| \geq \infty$

Поскольку  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , в  $x_0$  функция не является непрерывной, а терпит разрыв второго рода, что протеворечит нашему утверждению. □

**Терозма 17.3.** Вейерштрасса.

Непрерывная на  $[a; b]$  функция достигает на нём своего максимального и минимального значений.

## Глава 18

## DPMW

## Глава 19

# Производная функции, односторонние производные

Пусть  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in \mathcal{D}(f(x))$ . Рассмотрим график функции. и прямые  $y = k(x - x_0) + f(x_0)$  Среди всех таких прямых рассмотрим ту, которая наиболее тесно прижимается к графику функции  $f(x)$ . Такая прямая называется касательной к графику функции в точке  $(x_0; f(x_0))$ . Эту прямую можно найти так: На графике функции рассмотрим кроме  $(x_0; f(x_0))$  рассмотрим  $(x_1; f(x_1))$  и прямую, проходящую через эти точки. Эта прямая - секущая, приближённая<sup>1</sup>

Уравнение секущей с угловым коэффициентом. Так как секущая должна проходить через  $(x_0; f(x_0))$  должно выполняться равенство  $k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow (x_1; f(x_1)) \rightarrow (x_0; f(x_0)) \Leftrightarrow x_1 - x_0 \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  Если этот предел конечен и существует, то он есть производная функции  $y = f(x)$  в  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0)$   
 $x_1 - x_0 = \Delta x, f(x_1) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$   
 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  иногда обозначается  $\frac{df(x_0)}{dx}$

Может оказаться, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  бесконечен, в этом случае касательная к графику в точке вертикальна

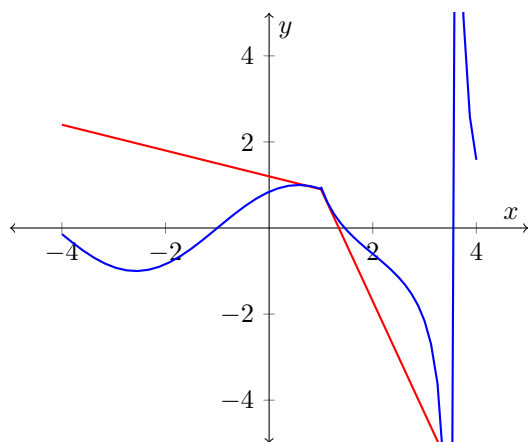
Как известно, существование конечного предела равносильно существованию и равенству между собой односторонних пределов  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$  Эти односторонние пределы, если они конечны и существуют, называются односторонними производными и обозначаются  $f'(x_{0-0})$  и  $f'(x_{0+0})$  Их существование означает существование касательной к фрагменту графика функции левее и правее  $(x_0; f(x_0))$ . Справедливо и обратное.

Возможны случаи, когда односторонние пределы существуют, но не равны друг другу это значит, что в точке  $(x_0; f(x_0))$  терпит излом и не является гладким.

---

<sup>1</sup>Размытое определение

Излом графика функции



**Терозма 19.1.** Если  $f(x)$  имеет конечную производную в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Пусть Существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x)$$

Перейдём к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow f(x_0) \text{ непрерывна в } x_0$$

Заметим, что обратное утверждение неверно.  $\square$

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

$$1. (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$2. (cf)' = c(f)'$$

$$3. (f \cdot g)' = f'g + g'f$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$5. c' = 0$$

---

<sup>2</sup>proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{\cos^2(x)}$
$x^k$	$k \cdot x^{k-1}$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$  при  $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$  при  $y = f(x)$



## Глава 20

## DPMW

## Глава 21

# Основные правила дифференцирования, производные элементарных функций.

Так как производная - предел, из свойств пределов можно вывести свойства производных:

1.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$

2.  $(cf)' = c(f)'$

3.  $(f \cdot g)' = f'g + g'f$

4. <sup>1</sup>  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

5.  $c' = 0$

---

<sup>1</sup>proofs are pending

$f(x)$	$f'(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$ctg(x)$	$\frac{-1}{\cos^2(x)}$
$x^k$	$k \cdot x^{k-1}$
$e^x$	$e^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arcctg}(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Производная сложной функции:

- $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$  при  $y = f(x)$
- $f'(x) = \frac{1}{f^{-1}(y)}$  при  $y = f(x)$

## Глава 22

# Дифференциал функции

Функция называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если её  $\Delta f(\Delta x)$  можно представить так:  $f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)$  где  $A$  - конечное число;  $A(x - x_0)$  называется дифференциалом.

**Терозма 22.1.** Функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда функция имеет конечную производную в этой точке и производная функции равна  $A$

*Доказательство.* Если  $y = f(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , то

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + o(x - x_0)|_{\div (x - x_0)}$$

при перезоде к пределам:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A + o(x - x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

Предположим, что  $f(x)$  имеет конечную производную

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'x_0 + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow A = f'(x_0)$$

□

Таким образом дифференцируемость функции равносильна существованию её конечной производной.

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = df(x_0) + (x - x_0)} \quad (22.1)$$

При  $x \rightarrow x_0$ ,  $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Бесконечно малое приращение аргумента  $\Delta x$  обозначается  $dx$ , отсюда

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \quad (22.2)$$

Заметим, что формула справедлива и когда  $x$  - функция.

$$\boxed{df(x(t)) = (f'(x(t)))'dt = f'(x) \cdot x'(t)dt = f'(x)dx} \quad (22.3)$$

Дифференциал можно использовать и при приближённом вычислении значения функции:

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(x - x_0), x \rightarrow x_0 \Rightarrow$$

$$\text{при } x \text{ близких к } x_0 \quad o(x - x_0) \approx 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + df(x_0)} \quad (22.4)$$

Пример:

$$\sqrt[100]{1.1} \approx \left|_{x_0 \approx 1 = \sqrt{x}} \right|_{x=1}$$

$$(1.1 - 1) + \sqrt[100]{1} = (x^{\frac{1}{100}})|_{x=1} \cdot 0.1 + 1 = \frac{1}{100} \cdot x^{-0.99}|_{x=1} \Rightarrow$$

$$0.1 \cdot \frac{1}{100} + 1 = 1.001$$

## 22.1 Основные свойства производной на отрезке

**Терозма 22.2. Ферма:** Пусть  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  если

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

---

<sup>1</sup>max || min

для мин. экстр  $f(x_0) \geq f(x)$

*Доказательство.* Если  $x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , то  $\exists \mathcal{U}(x_0) \forall x \in \mathcal{U}(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$ . Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

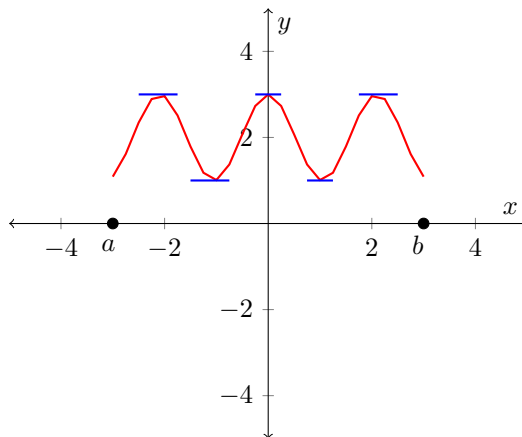
□

**Терозма 22.3.** *Ролля:* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  и Если  $f(a) = f(b)$ ,  $\exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

*Доказательство.* Если  $f(x)$  не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего маесимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, чтчо хоть один их нах отличается от  $f(a) = f(b)$ . Обозначим такую точку экстремума  $c \in (a; b)$

$f(c) \neq f(a) = f(b)$  и по теореме Ферма  $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



22.1. СВ. ПРОИЗВОДНОЙ ГЛАВА 22. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

---

Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля  
обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой  
будет горизонтальная прямая

□

**Терозма 22.4.** Коши: Пусть  $y = f(x)$  и Пусть  $y = g(x)$  непрерывны  
на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a; b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Пусть функция  $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ . Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля  $\Rightarrow$   
 $\exists c \in (a; b) : F'(x) = 0$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad \square$$

## Глава 23

# Производные и дифференциалы высших порядков

Данная глава находится в разработке, при отсутствии в ней полезной информации (или вообще какой-либо информации вините еврея, араба и немца (с явными расистскими наклонностями))



## Глава 24

# Дифференцирование функции, заданной параметрически

Данная глава находится в разработке, при отсутствии в ней полезной информации (или вообще какой-либо информации вините еврея, араба и немца (с явными расистскими наклонностями))

## Глава 25

# Локальный экстремум функции, теорема Ферма

**Определение локального максимума и локального минимума** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , где  $\delta > 0$ . Говорят, что функция  $f(x)$  имеет локальный максимум в точке  $x_0$ ,  $\forall x \neq x_0 \in \mathcal{U}_{\delta}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ . Если поменять знак на строгий, то максимум строгий, если знак перевернуть, то будет минимум, а если знак перевернуть и поменять на строгий, то строгого минимума.

**Терозма 25.1. Ферма:** Пусть  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет локальный экстремум<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  если

$$\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$$

для мин. экстр  $f(x_0) \geq f(x)$

*Доказательство.* Если  $x_0$  - точка локального максимума функции  $f(x)$ , то  $\exists \mathcal{U}_{(x_0)} \forall x \in \mathcal{U}_{(x_0)} : f(x_0) \leq f(x)$ . Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, x < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f(x) - f(x_0) \leq 0, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

---

<sup>1</sup>max || min

Так как функция дифференцируема в точке, то Существует предел, равный производной функции, равный обоим односторонним пределам и

$$\begin{cases} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

## Глава 26

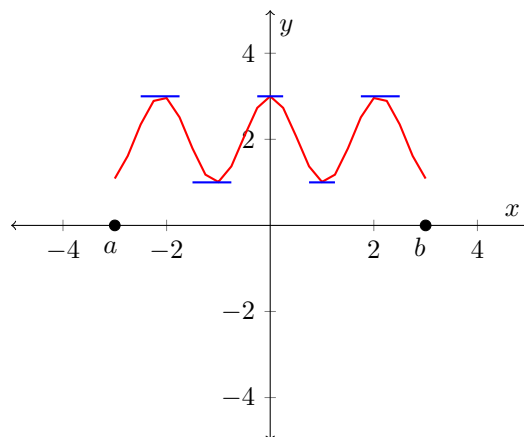
# Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

**Теорема 26.1.** *Ролля:* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  и Если  $f(a) = f(b)$ ,  $\exists c \in [a; b] : f'(c) = 0 \forall (a; b)$

*Доказательство.* Если  $f(x)$  не постоянна, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего максимального и минимального значений, что не равны друг другу, а значит, что хотя один из них отличается от  $f(a) = f(b)$ . Обозначим такую точку экстремума  $c \in (a; b)$

$f(c) \neq f(a) = f(b)$  и по теореме Ферма  $f'(c) = 0$

удовлетв. усл.



Для функции удовлетворяющей условиям теоремы Ролля обязательно найдётся точка на графике, касательной в которой будет горизонтальная прямая

□

**Терозма 26.2.** Коши: Пусть  $y = f(x)$  и Пусть  $y = g(x)$  непрерывны на  $[a; b]$  и дифференцируемы на  $(a; b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , тогда

$$\exists c \in (a; b) : \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Пусть функция  $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ . Функция  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля  $\Rightarrow \exists c \in (a; b) : F'(x) = 0$

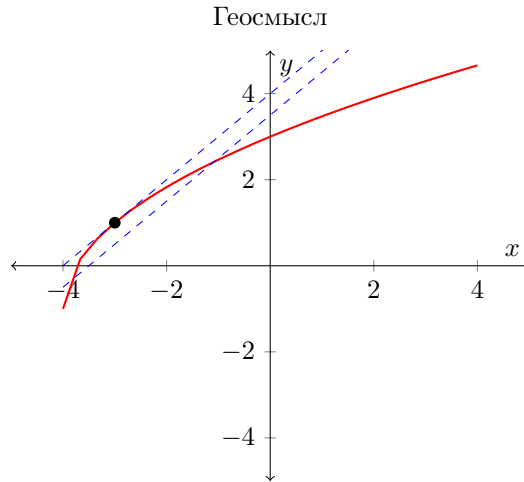
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$$

$$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \quad \square$$

**Терозма 26.3.** Лагранжа о конечном приращении.

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$  и дифференцируема на  $(a; b)$  тогда  $\exists c \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

*Доказательство.* наряду с  $y = f(x)$  рассмотрим  $g(x) \equiv x$ . Заметим, что эти 2 функции удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда получается, что  $\exists c \in (a; b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1} \quad \square$



Геосмысл теоремы Лагранжа: Прямая, проходящая через точки  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$  задаётся уравнением  $y = k(x - a) + f(a)$ .  $k$  найдём из условия прохождения этой прямой через точку  $(b; f(b))$ .  $f(b) = k(b - a) + f(a)$   
 $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$  на  $(a; b)$  в условиях теоремы Лагранжа Существует такая точка  $c$ , в которой касательная к графику функции параллельна хорде, стягивающей  $(a; f(a))$ ,  $(b; f(b))$

## Глава 27

# Правило Лопиталя

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  и обращаются в нуль в этой точке:  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ .

Пусть  $g'(x_0) \neq 0$ . Если существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Замечание:** Правило Лопиталя также справедливо, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

### Доказательство

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$ , значит  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . По теореме Коши для отрезка  $[x_0; x]$ , лежащего в окрестностях  $x_0$  существует  $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , где  $c$  лежит между точками  $x$  и  $x_0$ . Учитывая, что  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , получаем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При  $x \rightarrow x_0$   $c$  также стремится к  $x_0$ ; перейдем к пределу:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Получается  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , значит

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (27.1)$$

А если кратенько, то полученную формулу можно читать так: **предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.**

**Замечания:**

1. Правило Лопиталья справедливо и в случае, когда функции  $f(x)$  и  $g(x)$  не определены при  $x = x_0$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ . В этом случае  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
2. Правило Лопиталья справедливо и в случае, когда  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. Если производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и  $f(x)$  и  $g(x)$ , то правило Лопиталья можно применить еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad (27.2)$$

**Виды неопределенностей:**

1. Неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{2x^2} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(6x))'}{(2x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\sin(6x)}{4x} = \\ \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{x} &= \frac{3}{2} \times \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(6x))'}{(x)'} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos(6x)}{1} = \\ \frac{3}{2} \times 6 &= 9 \end{aligned}$$

2. Неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(5x)} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg}(3x))'}{(\operatorname{tg}(5x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2(5x)}{5\cos^2(3x)} = \\ \frac{3}{5} \times \left[ \frac{0}{0} \right] &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(5x) - 1 + 1}{\cos^2(3x) - 1 + 1} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(10x) + 1}{\cos(6x) + 1} = \\ \frac{3}{5} \times \left[ \frac{0}{0} \right] &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos(10x) + 1)'}{(\cos(6x) + 1)'} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(10x)}{6\sin(6x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(10x)}{\sin(6x)} = \\ \left[ \frac{0}{0} \right] &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(10x))'}{(\sin(6x))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{10\cos(10x)}{6\cos(6x)} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

**Для пунктов 3-7 рассмотрим преобразования в общих случаях:**

3. Неопределенность вида  $\infty - \infty$ :

Пусть  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{g(x)}} \right) =$$

$$\left[ \frac{0}{0} \right] = \dots$$

4. Неопределенность вида  $\infty \times 0$ :

Пусть  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_0$ , тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = [\infty \times 0] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} = \dots$$

5. Неопределенность вида  $1^\infty$

6. Неопределенность вида  $\infty^0$

7. Неопределенность вида  $0^0$

**Для неопределенностей вида 4-7 воспользуемся следующим преобразованием:**

Пусть  $f(x) \rightarrow 1, g(x) \rightarrow \infty$ ; или  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow 0$ ; или  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ . Для нахождения предела вида  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$  удобно сначала прологарифмировать выражение

$$A = f(x)^{g(x)}$$



## Глава 32

# Неопределённый интеграл и его свойства

### 32.1 Понятие первообразной

Пусть  $y = f(x)$  - непрерывная функция, Первообразной для  $f(x)$  является  $F(x) : F'(x) = f(x)$  Если  $F(x)$  - первообразная для  $f(x)$ , то  $\forall C : (F(x) + C)' = f(x)$

**Лемма 32.1.** Если функция  $y = g(x)$  непрерывно-дифференцируема и её  $\forall x : g'(x) = 0$ ,  $g(x) = C$

*Доказательство.* Пусть  $\forall x : g'(x) = 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 : g(x_1) = g(x_2)$ . Тогда по теореме Лагранжа:  $\xi \in (x_1; x_2) : g(x_2) - g(x_1) = g'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \Rightarrow$  так как  $g'(\xi) = 0$ ,  $g(x_2) - g(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_2) = g(x_1) \quad \square$

**Лемма 32.2.** Если  $F(x)$  первообразная для  $f(x)$ , то любая первообразная для  $f(x)$  представима в виде  $G(x) = F(x) + C$

*Доказательство.* Пусть 2 различные первообразные  $F(x), G(x)$  для  $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$  и  $G'(x) = f(x)$ . Тогда  $\forall x : (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$  по теореме 1  $G(x) - F(x) = C \Rightarrow G(x) = F(x) + C \quad \square$

совокупность всех первообразных для функции называется неопределённым интегралом этой функции  $\int f(x)dx = F(x) + C$

### 32.2 Свойства неопределённого интеграла

(а)  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

$$(b) \int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$(c) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f(x), g(x) : \int \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

$$(d) \forall \alpha, \beta : F'(x) = f(x), \int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$$

Из таблицы производных получаем таблицу интегралов:

### 32.3 Таблица Интегралов

$$\int 0dx = C \quad (32.1)$$

$$\int dx = x + C \quad (32.2)$$

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad (32.3)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + C \quad (32.4)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (32.5)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (32.6)$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C \quad (32.7)$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C \quad (32.8)$$

$$\int \operatorname{tg}(x)dx = \ln\left(\frac{1}{|\cos(x)|}\right) + C \quad (32.9)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C \quad (32.10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (32.11)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + C \quad (32.12)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (32.13)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right) + C \quad (32.14)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C \quad (32.15)$$

## Глава 33

# Метод замены переменной в неопределённом интеграле

**Тероэма 33.1.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна, а  $x = \phi(t)$  непрерывно-дифференцируема, причём  $\mathcal{D}(\phi(t)) \subset \mathcal{D}(f)$ , тогда  $\int f(x(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx$  Произведём по  $t$ :

$$\left(\int f(x(t))\phi'(t)dt\right)'_t = \int x(t) \cdot \phi'(t)$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x(t))dx\right)'_t = f'_t(x(t)) = f'_t(x(t))x'(t) = f'_t(x(t))\phi'(t)$$

Пример:

$$\int tg(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \left[ t = \cos(x), dt = -\sin(x)dx, \sin(x)dx = -dt \right]$$

$$= \int \frac{-dt}{t} = -\ln(|t|) + C = -\ln(|\cos(x)|) + C \quad (33.1)$$

## Глава 34

# Интегрирование по частям

Пусть есть 2 непрерывно-дифференцируемые функции  $u(x), v(x)$ :

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + v'u) dx = u'v dx + v'udx = vdu + u dv \Rightarrow d(uv) = vdu + u dv$$

$\Rightarrow \int u dv = uv - \int v du$  (34.1) Когда использовать? (за  $u$  берём многочлен и корячим столько раз, какова степень)

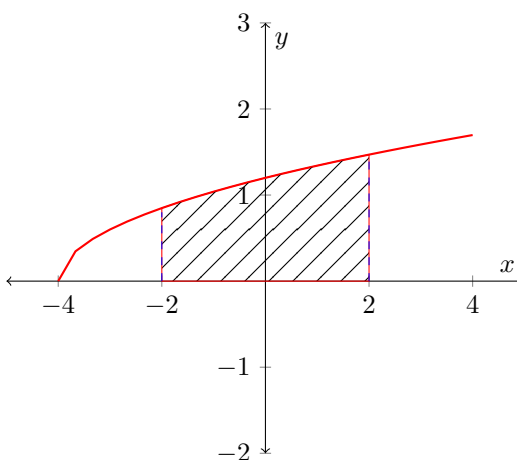
- подинтегральная функция есть произведение многочлена и синуса/косинуса
- подинтегральная функция есть произведение многочлена и показательной функции

## Глава 35

# Определённый интеграл и его свойства

Пусть задана  $y = f(x)$ , предположим, что  $\forall x \in [a; b] \subset \mathcal{D}(f) : f(x) \geq 0$

Излом графика функции



Рассмотрим фигуру, ограниченную снизу  $Ox$ , сверху графиком функции, слева и справа - вертикальными прямыми  $x = a, x = b$  это называется криволинейной трапецией. Чтоб найти площадь этой фигуры, разобьём её на достаточно большое количество очень узких вертикальных полосок, чтобы ступенчатая форма была ближе к кривой. Площадь криволинейной трапеции буде равна сумме площадей полосок.

Разбиение  $[a; b]$  (конечное множество точек) таких, что  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ . На каждом  $x_{[i-1; x_i]}$  выберем  $\xi_i$  и рассмотрим

$f(\xi_i)$  Рассмотрим итый прямоугольник со сторонами  $x_i - x_{i-1}$ , площадь которого равна  $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$  Обозначим  $(x_i - x_{i-1})$  за  $\Delta_i$  и пусть  $\Delta = \max(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$   $\Delta$  - диаметр разбиения.

Интегральная сумма соответствующая данному разбиению:

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i)$$

Рассмотрим  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i)$ . Если такой предел существует и конечен, не зависит от разбиения и от выбора  $\xi_i$ , то этот предел называется определённым интегралом  $\int_a^b f(x)dx$

**Тероэма 35.1.** *необходимые условия интегрируемости. Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

*Доказательство.* Произведём разбиение  $[a; b]$ . Если функция неограничена на  $[a; b]$ , она неограничена хотя бы на одном из отрезков  $[x_i - x_{i-1}]$ . Следовательно точку  $\xi_i$  можно выбрать так, что  $|f(\xi_i)|$  будет сколь угодно велик. В этом случае интегральная сумма стремится к бесконечности и предел интегральной суммы будет зависеть от выбора  $\xi_i$  и, при некотором  $\xi_i$  он будет бесконечным, что противоречит условиям интегрирования.  $\square$

**Тероэма 35.2.** *Если функция непрерывна на  $[a; b]$ , она интегрируема на  $[a; b]$ .*

Следствие: Если функция на  $[a; b]$  имеет конечное количество точек разрыва первого рода<sup>1</sup>, то она интегрируема на  $[a; b]$ .

*Доказательство.* Функция кусочно-непрерывна на  $[a; b]$  тогда и только тогда, когда этот отрезок разбивается на конечное число меньших отрезков, на каждом из которых эта функция непрерывна и ограничена, по теореме 2 доказательство.  $\square$

**Тероэма 35.3.** *Если функция монотонна на  $[a; b]$ , она интегрируема на  $[a; b]$ .*

### 35.1 Свойства определённого интеграла

(a)  $\int_a^a f(x)dx = 0$

(b)  $\int_a^b dx = b - a$

(c)  $\forall f(x), g(x)$  интегрируемой на  $[a; b], \forall \alpha, \beta$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

---

<sup>1</sup>кусочно-непрерывна

(d) Если  $f(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ ,  $\forall x \in [a; b] : f(x) \geq g(x)$ ,

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

(e)

$$\left| \int_a^b g(x)dx \right| \leq \int_a^b g(x)dx$$

*Доказательство.*

$$\forall \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot f(\xi_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |\Delta_i \cdot f(\xi_i)| \leq \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot |f(\xi_i)|$$

При  $\Delta \rightarrow 0$  доказывается

□

(f)  $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

(g)

$$\forall a, b, c : \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Доказательство.* i. Пусть  $c \in (a; b)$ , тогда рассмотрим разбиения отрезка  $[a; b]$ , содержащие  $c$ . Тогда интегральная сумма разбивается на 2 суммы: слева от  $c$  и справа от  $c$ . При  $\Delta \rightarrow 0$  доказывается.

ii.  $c \notin (a; b) \Rightarrow b \in (a; c)$  по пункту i:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

iii.  $a \in (c; b)$  аналогично

iv.  $c = a$  или  $c = b$ : по первому свойству.

□

**Тероэма 35.4.** о среднем: Если функция непрерывна на  $[a; b]$ ,  $\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$

*Доказательство.* Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b] \Rightarrow$  на этом отрезке она достигает своих максимального и минимального значений.  $m = \min(f(x)); M = \max(f(x)), x \in [a; b]$

$$\forall x \in [a; b] : m \leq f(x) \leq M. \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$



$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). a < b \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции:

$$\exists \xi \in [a; b] : f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

умножив на  $(b-a) > 0$  получим доказываемое равенство.  $\square$

## Глава 36

# Формула Ньютона-Лейбница

Для  $y = f(x)$  на  $[a; b]$  рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a; b]$

**Тероэма 36.1.** Если функция интегрируема на  $[a; b]$ ,  $\Phi(x)$  непрерывна на  $[a; b]$

*Доказательство.* так как функция интегрируема она ограничена на  $[a; b]$

$$\exists M > 0, \forall x \in [a; b] : |f(x)| \leq M.$$

Возьмём произвольное  $x \in [a; b], \Delta_x > 0$ . Рассмотрим

$$| -\Phi(x) + \Phi(x + \Delta_x) | = \left| \int_a^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| =$$

$$\left| \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| =$$

$$\left| \int_x^{x+\Delta_x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta_x} |f(t)|dt \right|$$

$$\leq \left| \int_x^{x+\Delta_x} M dt \right| \leq M \left| \int_x^{x+\Delta_x} dt \right| = M \Delta_x$$

$0 \leq |\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x)| \leq M \Delta_x$   $M \Delta_x \rightarrow 0$  при  $\Delta_x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \Phi(x + \Delta_x) = \Phi(x)$  Следовательно  $\Phi(x)$  непрерывна из-за того, что  $x$  выбран произвольно.  $\square$

**Тероэма 36.2.**  $y = f(x)$  непрерывна, отсюда  $\Phi(x)$  дифференцируема на  $[a; b]$ . При этом  $\Phi'(x) = f(x)$ .

*Доказательство.*

$$x \in (a; b), x + \Delta_x \in (a; b).$$

$$\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta_x} f(t) dt \mid \div \Delta_x$$

$$\frac{\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta_x} \int_x^{x+\Delta_x} f(t) dt$$

По теореме о среднем

$$\frac{1}{\Delta_x} f(\xi)(x + \Delta_x - x) = f(\xi), \xi \in [x; x + \Delta_x]$$

Если  $\Delta_x \rightarrow 0, \xi \rightarrow x$

$$\frac{\Phi(x + \Delta_x) - \Phi(x)}{\Delta_x} = f(\xi)$$

При переходе к пределу с  $\Delta_x \rightarrow 0$  получим  $\Phi'(x) = f(x)$  Таким образом, Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ,  $\Phi(x)$  - первообразная для  $f(x)$   $\square$

Рассмотрим Вас первообразные  $F(x)$  для  $f(x)$ .  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(t) = F(9x) + C$ . Найдём  $z$ , взяв  $x = a \Rightarrow \int_a^a f(t) dt = f(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

При  $x = b : \int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(x) dx = F(b) - f(a) \Rightarrow F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)} \quad (36.1)$$

## Глава 46

# Поверхности второго порядка, метод сечения

Пусть в пространстве задана ПСК  $Oxyz$ . Фигурой, задаваемой уравнением  $F(x, y, z) = 0$  называется множество тех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Если  $F(x, y, z)$  многочлен, т.е. конечная сумма вида  $ax^p y^q z^r$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;  $p, q, r \in \mathbb{N}$ , фигура на выходе - алгебраическая поверхность. Если  $F(x, y, z)$  - многочлен степени  $k$ , фигура будет порядка  $k$ . Таким образом поверхности второго порядка задаются уравнением вида  $a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 xy + a_5 xz + a_6 yz + a_7 x + a_8 y + a_9 z + a_0 = 0$ ;  
 $a_0, a_1 \dots a_9 \in \mathbb{R}$   
 $\exists x \in \{a_1, a_2 \dots, a_6\} : x \neq 0$

### 46.1 Метод сечений

**Лемма 46.1.** Пусть задано уравнение  $F(x, y, z) = 0$ , тогда проекция на  $Oxy$ , пересечения поверхности с плоскостью  $z = h$  задаётся уравнением  $F(x, y, h) = 0$ .

*Доказательство.*  $F(x, y, z) = 0$  // Пусть  $M(x_1, y_1, z_1)$  - произвольная точка. Тогда проекция этой точки на  $Oxy = M_1(x_1, y_1, 0)$ . Пусть  $M$  принадлежит пересечению этой поверхности с плоскостью  $z = h \Leftrightarrow M(x_1, y_1, h)$  при этом  $F(x_1, y_1, h) = 0$   
Тогда  $M_1$  в  $Oxy = M(x_1, y_1)$  есть проекция пересечения данной поверхности с плоскостью  $z = h$  тогда и только тогда, когда  $M(x_1, y_1, h)$  принадлежит этому пересечению, что значит, что  $F(x_1, y_1, h) = 0$   $\square$

## Глава 47

# Поверхности вращения

Пусть в пространстве задана некая линия  $\gamma$  и прямая  $d$ . Фигура, получающаяся при вращении  $\gamma$  вокруг  $d$  называется поверхностью вращения. Выберем в пространстве ПСК  $Oxyz$  так, чтобы ось вращения совпадала с  $Ox \Rightarrow$  поверхность вращения можно задать так:  $y \in Oxz = x = f(z)$ , где  $f$  - некоторая функция, и рассмотрим Поверхность вращения, полученную при вращении  $\gamma$  вокруг  $Oz$ . Рассмотрим  $M(x, y, z) \in$  этой поверхности, и плоскость, проходящую через  $M \perp Oz$  и  $M_0$ , точку пересечения этой плоскости с  $Oz \Rightarrow M_0 = M_0(0, 0, z_1) \Rightarrow$  вся окружность с центром в  $M_0$ , проходящая через  $M$ , целиком лежит на этой поверхности. Рассмотрим пересечение этой окружности с  $Oxz : M_1$  и  $M_2$ . Заметим, что  $M_0M_1, M_0M_2, M_0M$  - радиусы одной окружности (поэтому они равны друг другу).  $\Rightarrow M_0M_1 = M_0M_2 = M_0M = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - z_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$   
 $\Rightarrow M_1(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1), M_2(-\sqrt{x_1^2 + y_1^2}, 0, z_1)$ . Так как  $M$  принадлежит поверхности вращения,  $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = f(z_1) \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = (f(z_1))^2 \Rightarrow$  эта линия вращения задана

$$\boxed{x^2 = y^2 = f^2(z)} \quad (47.1)$$

Поверхности второго порядка тогда, когда многочлен от  $z$  не более второго порядка:

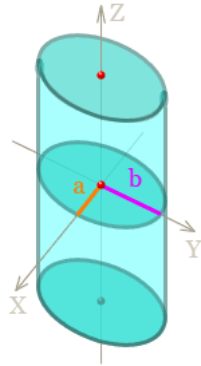
- $f(z) = a$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + b}$
- $f(z) = \sqrt{az^2 + bz + c}$

## Глава 48

# Цилиндрические поверхности

Пусть в пространстве задана линия  $\gamma$  и ненулевой вектор  $\vec{p}$ . Поверхность называется цилиндрической, если вместе с любой своей точкой она содержит и всю прямую, параллельную  $\vec{p}$  и проходящую через эту точку. Такие прямые называются образующими. В пространстве рассмотрим СК  $Oxyz$  такую, что  $Oz \parallel \vec{p} \Rightarrow$  Все образующие Ц.П. параллельны  $Oz$  и имеют направляющим вектором  $\vec{p}$ . Ц.П. можно задать следующим образом: Пусть в плоскости  $Oxy$  задана линия  $\gamma := f(x, y) = 0$ ; через каждую точку этой линии проведём прямую, параллельную  $Ox$ . Тут  $\gamma$  называется направляющей для этой Ц.П.

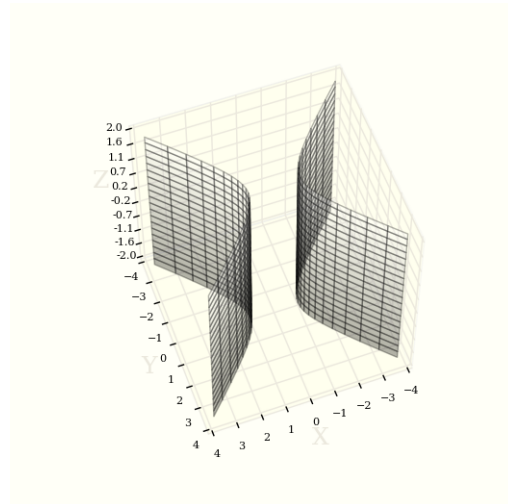
Найдём уравнение, задающее Ц.П. Рассмотрим произвольную точку  $M(x, y, z)$  в пространстве. Её проекция  $M_1$  на  $Oxy$  имеет координаты  $M_1(x, y, 0) \Rightarrow M_1 \in \gamma \Rightarrow f(x, y) = 0$ . Если направляющая  $\gamma$  в  $Oxy$  задаётся уравнением  $f(x, y) = 0$ , Ц.П. так же задаётся уравнением  $f(x, y) = 0$  и  $f(x, y) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3xy + a_4x + a_5y + a_0 = 0$  - второго порядка. Из  $a_1, a_2, a_3$  хотя бы один ненулевой.



(а) Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(48.2) (б) Гиперболический цилиндр



При  $a = b$  получаем цилиндр вращения (школьный).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad (48.4)$$

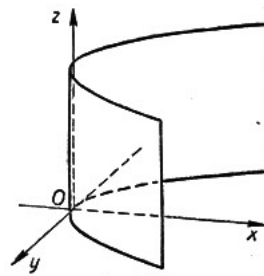
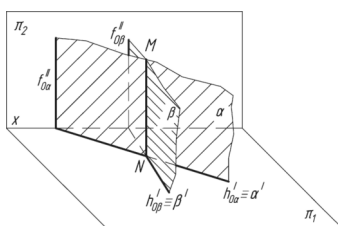


Рис. 196

(с) Параболический цилиндр

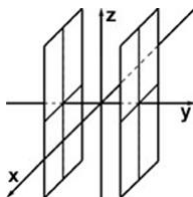
$$x^2 = \pm 2py$$

(48.6)



(a) Пара плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (48.8)$$



(b) Пара плоскостей

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (48.10)$$