Cinematiche inverse complete

Alfano Emanuele
Badalamenti Filippo
Vitti Gabriele

25 febbraio 2020

In questa relazione andremo a vedere come si calcolano le cinematiche inverse complete di due robot attraverso il disaccoppiamento polso-strutura portante in cui, se sono soddisfatti certi vincoli algebrici e geometrici, allora il problema completo della cinematica inversa può essere ricondotto ai due sotto-problemi di cinematica inversa di posizione e di orientamento separati:

- Manipolatore di Stanford + Polso Sferico
- Antropomorfo + Polso Sferico (Puma)

Risolvere un problema di cinematica inversa completa vuol dire che, assegnata una matrice di trasformazione del tipo:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & df_1 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & df_2 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & df_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sapendo che:

$$d_f = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} \text{ e } R_f = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dove d_f è il vettore posizione del punto terminale del robot completo di Stanford (manipolatore + polso sferico), ricavato con la cinematica diretta del robot, rispetto al sistema di riferimento inerziale e R_f è la matrice di rotazione che indica l'orientamento del punto terminale del robot completo di Stanford rispetto al sistema di riferimento inerziale.
Bisogna determinare due vettori (almeno) q_a e q_b tali che:

$$\begin{cases} R_f = R_{03}(q_a) \cdot R_{36}(q_b) \\ d_f = R_{03}(q_a) \cdot d_{36}(q_b) + d_{03}(q_a) \end{cases}$$

dove q_a è l'insieme delle variabili di giunto q_1, q_2, q_3 che servono per posizionare il punto terminale e q_b è l'insieme delle variabili di giunto q_4, q_5, q_6 che servono per orientare il punto terminale.

1 Calcolo costanti attraverso la matrice di trasformazione del polso sferico

Per prima cosa è necessario trovare i due termini costanti (d_0 e d_1) che permettono il disaccoppiamento polso-struttura portante. Data la matrice di trasformazione del polso sferico:

$$Q_{36} = \begin{pmatrix} c_{q4}c_{q5}c_{q6} - s_{q4}s_{q6} & -c_{q4}c_{q5}s_{q6} - s_{q4}c_{q6} & c_{q4}s_{q5} & L_6 c_{q4}s_{q5} \\ c_{q4}s_{q6} + s_{q4}c_{q5}c_{q6} & c_{q4}c_{q6} - s_{q4}c_{q5}s_{q6} & s_{q4}s_{q5} & L_6 s_{q4}s_{q5} \\ -s_{q5}c_{q6} & s_{q5}s_{q6} & c_{q5} & L_6 c_{q5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che:

$$R_{36} = \begin{pmatrix} c_{q4}c_{q5}c_{q6} - s_{q4}s_{q6} & -c_{q4}c_{q5}s_{q6} - s_{q4}c_{q6} & c_{q4}s_{q5} \\ c_{q4}s_{q6} + s_{q4}c_{q5}c_{q6} & c_{q4}c_{q6} - s_{q4}c_{q5}s_{q6} & s_{q4}s_{q5} \\ -s_{q5}c_{q6} & s_{q5}s_{q6} & c_{q5} \end{pmatrix} \qquad d_{36} = \begin{pmatrix} L_6 c_{q4}s_{q5} \\ L_6 s_{q4}s_{q5} \\ L_6 c_{q5} \end{pmatrix}$$

Da queste due matrici cerchiamo di ricavare le due costanti (d_0 e d_1) che rendono vera la seguente equazione:

$$d_{36} = R_{36} \cdot d_1 + d_0$$

Trovando d_0 e d_1 sarà possibile disaccoppiare la soluzione delle due cinematiche inverse di posizione e di orientamento.

$$\begin{pmatrix} L_6 c_{q4}s_{q5} \\ L_6 s_{q4}s_{q5} \\ L_6 c_{q5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{q4}c_{q5}c_{q6} - s_{q4}s_{q6} & -c_{q4}c_{q5}s_{q6} - s_{q4}c_{q6} & c_{q4}s_{q5} \\ c_{q4}s_{q6} + s_{q4}c_{q5}c_{q6} & c_{q4}c_{q6} - s_{q4}c_{q5}s_{q6} & s_{q4}s_{q5} \\ -s_{q5}c_{q6} & s_{q5}s_{q6} & c_{q5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a0 \\ b0 \\ c0 \end{pmatrix}$$

Dove:

$$d_1 = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} \quad d_0 = \begin{pmatrix} a0 \\ b0 \\ c0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo sia con d_0 che con d_1 si ottengono ∞ soluzioni, ma si vede anche a occhio che una soluzione semplice è:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_6 \end{pmatrix} \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Orientamento inverso del Polso Sferico

Nel calcolo disaccoppiato, in seguito al calcolo di $R_{03}(q_a)$ con la cinematica inversa di pura posizione (come fatto nel capitolo 3.1: Calcolo posizione disaccoppiata), sono in grado di ricavare la matrice di orientamento del polso sferico $R_{36}(q_b)$. Portandoci avanti, siamo già in grado di ricavare $R_{36}(q_b)$ e le variabili q_4, q_5, q_6 (le quali servono per determinare l'orientamento del polso sferico) attraverso una cinematica inversa di puro orientamento. Useremo i risultati, che ora ricaveremo, nel capitolo 3.2: Calcolo orientamento disaccoppiato.

Nel calcolo disaccoppiato risulta che l'orientamento del polso sferico è pari a:

$$R_{36}(q_b) = R_{03}^T(q_a) \cdot R_f$$

Essendo però la matrice di orientamento del polso sferico $R_{36}(q_b)$ esattamente pari alla matrice di orientamento della terna di Eulero R_{zyz}, trovare α, β, γ della matrice $R_{zyz}(\alpha, \beta, \gamma)$ equivale a trovare q_4, q_5, q_6 della matrice $R_{36}(q_b)$:

$$R_{zyz}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{c}(\alpha)\mathrm{c}(\beta)\mathrm{c}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\mathrm{s}(\gamma) & -\mathrm{c}(\alpha)\mathrm{s}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\mathrm{c}(\beta)\mathrm{c}(\gamma) & \mathrm{s}(\beta)\mathrm{c}(\gamma) \\ \mathrm{c}(\alpha)\mathrm{c}(\beta)\mathrm{s}(\gamma) + \mathrm{s}(\alpha)\mathrm{c}(\gamma) & \mathrm{c}(\alpha)\mathrm{c}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\mathrm{c}(\beta)\mathrm{s}(\gamma) & \mathrm{s}(\beta)\mathrm{s}(\gamma) \\ -\mathrm{c}(\alpha)\mathrm{s}(\beta) & \mathrm{s}(\alpha)\mathrm{s}(\beta) & \mathrm{c}(\beta) \end{pmatrix}$$

Definito: $R_{03}^T(q_a) \cdot R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$. Avremo che q_4, q_5, q_6 sono:

- $c(\beta) = r_{33} \Longrightarrow s(\beta) = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2} \qquad \longrightarrow \qquad \beta = atan2(\pm s(\beta), c(\beta)) = \begin{cases} q_5 \\ -q_5 \end{cases}$

Se $\beta \neq 0, \pi$ (non sono dunque in singolarità):

- $\begin{cases} s(\beta)c(\gamma) = r_{13} \\ s(\beta)s(\gamma) = r_{23} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c(\gamma) = \dfrac{r_{13}}{s(\beta)} \\ s(\gamma) = \dfrac{r_{23}}{s(\beta)} \end{cases}$

  $$\gamma = atan2(\pm s(\gamma), \pm c(\gamma)) = atan2(\pm \frac{r_{23}}{s(\beta)} \pm \frac{r_{13}}{s(\beta)}) = \begin{cases} q_4 \\ q_4 + \pi \end{cases}$$

- $\begin{cases} -s(\beta)c(\alpha) = r_{31} \\ s(\beta)s(\alpha) = r_{32} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c(\alpha) = \dfrac{r_{31}}{-s(\beta)} \\ s(\alpha) = \dfrac{r_{32}}{s(\beta)} \end{cases}$

  $$\alpha = atan2(\pm s(\alpha), \mp c(\alpha)) = atan2(\pm \frac{r_{32}}{s(\beta)} \mp \frac{r_{31}}{s(\beta)}) = \begin{cases} q_6 \\ q_6 + \pi \end{cases}$$

  N.B. $s(\beta)$ che è al denominatore non è pari a $\pm\sqrt{1 - r_{33}^2}$ bensì al seno del valore di β che ho ricavato.

3 Cinematica inversa completa: Manipolatore di Stanford + Polso Sferico

3.1 Calcolo posizione disaccoppiata

Avendo già calcolato le due costanti che permettono il disaccoppiamento polso-struttura portante possiamo dire subito che: dati

$$d_f = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} \text{ e } R_f = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dove d_f è il vettore posizione del punto terminale del robot completo di Stanford (manipolatore + polso sferico), ricavato con la cinematica diretta del robot, rispetto al sistema di riferimento inerziale e R_f è la matrice di rotazione che indica l'orientamento del punto terminale del robot completo di Stanford rispetto al sistema di riferimento inerziale.
L'equazione per ottenere le variabili q_a che servono per posizionare il punto terminale del manipolatore di Stanford (cioè il polso sferico, infatti con $d_f - R_f \cdot d_1$ mi trovo sul polso) rispetto al sistema di riferimento di base è:

$$d_f - R_f \cdot d_1 = R_{03}(q_a) \cdot d_0 + d_{03}(q_a)$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} df_1 - L_6 r_{13} \\ df_2 - L_6 r_{23} \\ df_3 - L_6 r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2 s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_2} q_3 \\ L_2 c_{q_1} + s_{q_1} s_{q_2} q_3 \\ L_1 + c_{q_2} q_3 \end{pmatrix}$$

Applicando la cinematica inversa del Manipolatore di Stanford ricavo il valore delle variabili di giunto che servono per posizionare il polso sferico rispetto al sistema di riferimento di base:

- $q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - L_1)^2 - L_2^2}$
- $q_2 = atan2(\pm\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - L2^2}{q_3^2}}, \dfrac{z - L_1}{q_3})$
- $q_1 = atan2(q_3 s_{q_2} y - L_2 x, q_3 s_{q_2} x + L_2 y)$

3.2 Calcolo Orientamento disaccoppiato

Arrivati a questo punto basta calcolare il risultato di $R_{03}^T(q_a) \cdot R_f$ per ottenere la matrice di orientamento del polso sferico $R_{36}(q_b)$. Calcolata la matrice $R_{36}(q_b)$ è possibile risalire (grazie alla cinematica inversa fatta nel capitolo 2: Orientamento inverso del Polso Sferico) ai valori degli ultimi tre giunti q_4, q_5, q_6 necessari per determinare l'orientamento del polso sferico.

3.3 Conclusione

Attraverso la conoscenza di q_a e q_b sono in grado di determinare l'orientamento e la posizione del punto terminale del robot:

$$\begin{cases} R_f = R_{03}(q_a) \cdot R_{36}(q_b) \\ d_f = R_{03}(q_a) \cdot d_{36}(q_b) + d_{03}(q_a) \end{cases}$$

4 Cinematica inversa completa: Antropomorfo + Polso Sferico (Puma)

4.1 Calcolo posizione disaccoppiata

Avendo già calcolato le due costanti che permettono il disaccoppiamento polso-struttura portante possiamo dire subito che: dati

$$d_f = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} \text{ e } R_f = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

dove d_f è il vettore posizione del punto terminale del robot completo di Stanford (manipolatore + polso sferico), ricavato con la cinematica diretta del robot, rispetto al sistema di riferimento inerziale e R_f è la matrice di rotazione che indica l'orientamento del punto terminale del robot completo di Stanford rispetto al sistema di riferimento inerziale.
L'equazione per ottenere le variabili q_a che servono per posizionare il punto terminale dell'antropomorfo (cioè il polso sferico, infatti con $d_f - R_f \cdot d_1$ mi trovo sul polso) rispetto al sistema di riferimento di base è:

$$d_f - R_f \cdot d_1 = R_{03}(q_a) \cdot d_0 + d_{03}(q_a)$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} df_1 - L_6 r_{13} \\ df_2 - L_6 r_{23} \\ df_3 - L_6 r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 c_{q_1} c_{q_2} + D_3 c_{q_1} c_{q_2} c_{q_3} + -D_3 c_{q_1} s_{q_2} s_{q_3} \\ D_2 s_{q_1} c_{q_2} + D_3 s_{q_1} c_{q_2} c_{q_3} + -D_3 s_{q_1} s_{q_2} s_{q_3} \\ L_1 + D_2 s_{q_2} + D_3 s_{q_2} c_{q_3} + D_3 c_{q_2} s_{q_3} \end{pmatrix}$$

Applicando la cinematica inversa dell'Antropomorfo ricavo il valore delle variabili di giunto che servono per posizionare il polso sferico rispetto al sistema di riferimento di base:

- $q_3 = atan2(\pm\sqrt{1-a^2}, a) \leftarrow a = \dfrac{x^2 + y^2 + (z - L_1)^2 - D_3^2 - D_2^2}{2 D_2 D_3}$
- $q_2 = atan2(z D_3 c_{q_3} + z D_2 - L_1 D_3 c_{q_3} - L_1 D_2 \mp \sqrt{x^2+y^2} D_3 s_{q_3},$
  $\pm\sqrt{x^2+y^2} D_3 c_{q_3} \pm \sqrt{x^2+y^2} D_2 + z D_3 s_{q_3} - L_1 D_3 s_{q_3})$
- $q_1 = atan2(\dfrac{y}{D_2 c_{q_2} + D_3 c_{q_2+q_3}}, \dfrac{x}{D_2 c_{q_2} + D_3 c_{q_2+q_3}})$

4.2 Calcolo Orientamento disaccoppiato

Arrivati a questo punto basta calcolare il risultato di $R_{03}^T(q_a) \cdot R_f$ per ottenere la matrice di orientamento del polso sferico $R_{36}(q_b)$. Calcolata la matrice $R_{36}(q_b)$ è possibile risalire (grazie alla cinematica inversa fatta nel capitolo 2: Orientamento inverso del Polso Sferico) ai valori degli ultimi tre giunti q_4, q_5, q_6 necessari per determinare l'orientamento del polso sferico.

4.3 Conclusione

Attraverso la conoscenza di q_a e q_b sono in grado di determinare l'orientamento e la posizione del punto terminale del robot:

$$\begin{cases} R_f = R_{03}(q_a) \cdot R_{36}(q_b) \\ d_f = R_{03}(q_a) \cdot d_{36}(q_b) + d_{03}(q_a) \end{cases}$$