Cinematiche inverse Disaccoppiate

Alfano Emanuele
Badalamenti Filippo
Vitti Gabriele

6 dicembre 2019

In questa relazione andremo a vedere come si calcolano le cinematiche inverse totali di 2 robot:

- Stanford + Polso Sferico
- Antropomorfo + Polso Sferico

Per prima cosa Ã¨ necessario trovare i 2 termini costanti che permettono la disaccoppiazione della struttura con il polso

1 Calcolo costanti Polso Sferico

Data la matrice totale del polso sferico:

$$Q_{46} = \begin{pmatrix} c_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} - s_{q_4}s_{q_6} & -c_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} - s_{q_4}c_{q_6} & c_{q_4}s_{q_5} & L_6c_{q_4}s_{q_5} \\ c_{q_4}s_{q_6} + s_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} & c_{q_4}c_{q_6} - s_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} & s_{q_4}s_{q_5} & L_6s_{q_4}s_{q_5} \\ -s_{q_5}c_{q_6} & s_{q_5}s_{q_6} & c_{q_5} & L_6c_{q_5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che:

$$R_{46} = \begin{pmatrix} c_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} - s_{q_4}s_{q_6} & -c_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} - s_{q_4}c_{q_6} & c_{q_4}s_{q_5} \\ c_{q_4}s_{q_6} + s_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} & c_{q_4}c_{q_6} - s_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} & s_{q_4}s_{q_5} \\ -s_{q_5}c_{q_6} & s_{q_5}s_{q_6} & c_{q_5} \end{pmatrix} \qquad d_{46} = \begin{pmatrix} L_6c_{q_4}s_{q_5} \\ L_6s_{q_4}s_{q_5} \\ L_6c_{q_5} \end{pmatrix}$$

Da queste 2 matrici cerchiamo di trovare le 2 costanti che rendono vera la seguente equazione:

$$d_{36} = R_{36} \cdot d_1 + d_0$$

Trovando queste 2 costanti sarÃ infatti possibile disaccoppiare la soluzione delle 2 cinematiche inverse.

$$\begin{pmatrix} L_6c_{q_4}s_{q_5} \\ L_6s_{q_4}s_{q_5} \\ L_6c_{q_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} - s_{q_4}s_{q_6} & -c_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} - s_{q_4}c_{q_6} & c_{q_4}s_{q_5} \\ c_{q_4}s_{q_6} + s_{q_4}c_{q_5}c_{q_6} & c_{q_4}c_{q_6} - s_{q_4}c_{q_5}s_{q_6} & s_{q_4}s_{q_5} \\ -s_{q_5}c_{q_6} & s_{q_5}s_{q_6} & c_{q_5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a0 \\ b0 \\ c0 \end{pmatrix}$$

Dove:

$$d_1 = \begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} \quad d_0 = \begin{pmatrix} a0 \\ b0 \\ c0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo sia con d_1 che con d_2 si ottengono ∞ sol, ma si vede anche a occhio che una soluzione semplice Ã¨:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_6 \end{pmatrix} \quad d_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 Orientamento inverso Polso Sferico

Per calcolare l'orientamento inverso del polso sferico non ci serve sapere null'altro all'infuori dell'orientamento stesso. Con le costanti potremo calcolare quindi l'obiettivo, ma le forumule sono note a prescindere, calcoliamo quindi subito l'orientamento inverso cosi da poter riprendere i calcoli dopo.

Nel calcolo disaccoppiato avremo che la matrice del polso sferico dovrÃ essere pari a:

$$R_{03}^T(q_a) \cdot R = R_{36}(q_b)$$

Essedo la matrice di orientamento del polso sferico(R_{36}) esattamente pari alla matrice di orientamento della terna R_{zyz} nei 5 campi semplici, trovare α, β, γ della matrice $R_{zyz}(\alpha, \beta, \gamma)$ equivale a trovare q_4, q_5, q_6

$$R_{zyz}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \mathrm{c}(\alpha)\,\mathrm{c}(\beta)\,\mathrm{c}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\,\mathrm{s}(\gamma) & -\mathrm{c}(\alpha)\,\mathrm{s}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\,\mathrm{c}(\beta)\,\mathrm{c}(\gamma) & \mathrm{s}(\beta)\,\mathrm{c}(\gamma) \\ \mathrm{c}(\alpha)\,\mathrm{c}(\beta)\,\mathrm{s}(\gamma) + \mathrm{s}(\alpha)\,\mathrm{c}(\gamma) & \mathrm{c}(\alpha)\,\mathrm{c}(\gamma) - \mathrm{s}(\alpha)\,\mathrm{c}(\beta)\,\mathrm{s}(\gamma) & \mathrm{s}(\beta)\,\mathrm{s}(\gamma) \\ -\mathrm{c}(\alpha)\,\mathrm{s}(\beta) & \mathrm{s}(\alpha)\,\mathrm{s}(\beta) & \mathrm{c}(\beta) \end{pmatrix}$$

Definito: $R_{03}^T(q_a) \cdot R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$. Avremo che q_4, q_5, q_6 sono:

- $c_{q_5} = r_{33} \Longrightarrow s_{q_5} = \pm\sqrt{1 - r_{33}^2} \qquad \longrightarrow \qquad q_5 = atan2(\pm\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}) = \begin{cases} q_5 \\ -q_5 \end{cases}$

Se $q_5 \neq 0$

- $\begin{cases} s_{q_4}s_{q_5} = r_{32} \\ -c_{q_4}s_{q_5} = r_{31} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s_{q_4} = \dfrac{r_{32}}{s_{q_5}} \\ -c_{q_4} = \dfrac{r_{31}}{s_{q_5}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s_{q_4} = \pm r_{32} \\ c_{q_4} = \mp r_{31} \end{cases} \longrightarrow$

  $q_4 = atan2(\pm r_{32}, \mp r_{31}) = \begin{cases} q_4 \\ q_4 + \pi \end{cases}$

- $\begin{cases} s_{q_5}c_{q_6} = r_{13} \\ s_{q_5}s_{q_6} = r_{23} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s_{q_6} = \dfrac{r_{13}}{s_{q_5}} \\ c_{q_6} = \dfrac{r_{23}}{s_{q_5}} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} s_{q_4} = \pm r_{13} \\ -c_{q_4} = \pm r_{23} \end{cases} \longrightarrow$

  $q_6 = atan2(\pm r_{13}, \mp r_{23}) = \begin{cases} q_6 \\ q_6 + \pi \end{cases}$

3 Stanford + Polso Sferico

3.1 Calcolo posizione disaccoppiata

Avendo noi giÃ calcolato le 2 costanti di disaccoppiamento possiamo calcolare subito che:

Dati: $d_f = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix}$ e $R_f = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$

L'equazione per ottenere le coordinate obiettivo della struttura e':

$$d_f - R_f \cdot d_1 = R_{03}(q_a) \cdot d_0 + d_{03}(q_a)$$

Ovvero sia, svolgendo il calcolo:

$$\begin{pmatrix} df_1 - L_6 r_{13} \\ df_2 - L_6 r_{23} \\ df_3 - L_6 r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_2 s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_2} q_3 \\ L_2 c_{q_1} + s_{q_1} s_{q_2} q_3 \\ L_1 + c_{q_2} q_3 \end{pmatrix}$$

Applicando la cinematica inversa dello stanford viene quindi fuori:

- $q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - L_1) - L_2^2}$
- $q_2 = atan2(\pm\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2 - L2^2}{q_3^2}}, \dfrac{z - L_1}{q_3})$
- $q_1 = atan2(q_3 s_{q_2} y - L_2 x, q_3 s_{q2} x + L_2 y)$

3.2 Calcolo Orientamento disaccoppiato

Arrivati qui basta calcolare il risultato di $R_{03}^T(q_a) \cdot R$ per ottenere la matrice da eguagliare a $R_{36}(q_b)$
Calcolato il risultato e' possibile risalire quindi anche ai valori degli ultimi 3 giunti

4 Puma (Antropomorfo + Polso Sferico)

4.1 Calcolo posizione disaccoppiata

Come prima procediamo calcolando la posizione che il braccio dovra' avere dati:

$$d_f = \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ df_3 \end{pmatrix} \text{ e } R_f = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

L'equazione per ottenere le coordinate obiettivo della struttura e':

$$d_f - R_f \cdot d_1 = R_{03}(q_a) \cdot d_0 + d_{03}(q_a)$$

Ovvero sia, svolgendo il calcolo:

$$\begin{pmatrix} df_1 - L_6 r_{13} \\ df_2 - L_6 r_{23} \\ df_3 - L_6 r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 c_{q_1} c_{q_2} + D_3 c_{q_1} c_{q_2} c_{q3} + -D_3 c_{q_1} s_{q_2} s_{q3} \\ D_2 s_{q_1} c_{q_2} + D_3 s_{q_1} c_{q_2} c_{q3} + -D_3 s_{q_1} s_{q_2} s_{q3} \\ L_1 + D_2 s_{q_2} + D_3 s_{q_2} c_{q3} + D_3 c_{q_2} s_{q_3} \end{pmatrix}$$

Applicando la cinematica inversa dell'antropomorfo viene quindi fuori:

- $q_3 = atan2(\pm\sqrt{1-a^2}, a) \leftarrow a = \dfrac{x^2 + y^2 + (z - L_1)^2 - D_3^2 - D_2^2}{2D_2D_3}$
- $q_2 = atan2(zD_3c_{q_3} + zD_2 - L_1D_3c_{q_3} - L_1D_2 \pm \sqrt{x^2+y^2}D_3s_{q_3},$
  $\mp\sqrt{x^2+y^2}D_3s_{q_3} \mp \sqrt{x^2+y^2}D_2 + zD_3s_{q_3} - L_1D_3c_{q_3})$
- $q_1 = atan2(\dfrac{y}{-a}, \dfrac{x}{-a})$

4.2 Calcolo Orientamento disaccoppiato

Arrivati qui basta calcolare il risultato di $R_{03}^T(q_a) \cdot R$ per ottenere la matrice da eguagliare a $R_{36}(q_b)$ Calcolato il risultato e' possibile risalire quindi anche ai valori degli ultimi 3 giunti