

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT**  
**BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**FILIPPE RAMOS**

**ESPECIFICAÇÃO E PROVA DE PROPRIEDADE ACERCA DE**  
**AUTÔMATOS FINITOS DETERMINÍSTICOS ASSISTIDAS POR COQ**

**JOINVILLE - SC**

**2019**

**FILIPPE RAMOS**

**ESPECIFICAÇÃO E PROVA DE PROPRIEDADE ACERCA DE  
AUTÔMATOS FINITOS DETERMINÍSTICOS ASSISTIDAS POR COQ**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao curso de Bacharelado  
em Ciência da Computação como requisito  
parcial para a obtenção do título de  
Bacharel em Ciência da Computação.

Orientadora: Dra. Karina Girardi Roggia  
Coorientador: Me. Rafael Castro Gonçalves Silva

**JOINVILLE - SC**

**2019**

Filipe Ramos

Especificação e prova de propriedade acerca de autômatos finitos determinísticos assistidas por Coq/ Filipe Ramos. – Joinville - SC, 2019-  
28 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Dra. Karina Girardi Roggia

– Universidade do Estado de Santa Catarina - Udesc, 2019.

1. Tópico 01. 2. Tópico 02. I. Prof. Dr. xxxxx. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. III. Centro de Educação do Planalto Norte. IV. identificação xxxx

CDU 02:121:005.7

**Filipe Ramos**

**Especificação e prova de propriedade acerca de autômatos finitos  
determinísticos assistidas por Coq**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciência da Computação como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação

**Banca examinadora:**

---

**Dra. Karina Girardi Roggia**  
Instituto Superior Técnico de Lisboa

---

**Dr. Cristiano Damiani Vasconcellos**  
Universidade Federal de Minas Gerais

---

**Dr. Roberto Silvio Ubertino Rosso  
Junior**  
Loughborough University

Dedico este trabalho a...

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer...

Aqui devem ser colocadas os agradecimentos às pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização do trabalho.

“frase”

autor

## RESUMO

O resumo deve ressaltar o objetivo, o método, os resultados e as conclusões do documento. A ordem e a extensão destes itens dependem do tipo de resumo (informativo ou indicativo) e do tratamento que cada item recebe no documento original. O resumo deve ser precedido da referência do documento, com exceção do resumo inserido no próprio documento. (...) As palavras-chave devem figurar logo abaixo do resumo, antecedidas da expressão Palavras-chave:, separadas entre si por ponto e finalizadas também por ponto.

**Palavras-chaves:** latex, abntex e editoração de texto.



## ABSTRACT

Resumo em inglês

**Key-words:** latex, abntex e text editoration.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Protocolo para um canal de redes de computadores com erros de bits: lado remetente e (abaixo) destinatário . . . . .	16
Figura 2 – Transição de um AFD . . . . .	18
Figura 3 – Representação da transição de estados em um diagrama . . . . .	19
Figura 4 – Representação de estados inicial (à esquerda) e final (à direita) em um diagrama . . . . .	20
Figura 5 – Diagrama de estados do AFD que reconhece números naturais pares	21
Figura 6 – Um AFD simples (à esquerda) e seu correspondente com função de transição total (à direita) . . . . .	22
Figura 7 – Um sistema de filas simples . . . . .	24

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE QUADROS

## **LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS**

**AFD** Autômato finito determinístico

**SED** Sistema a eventos discretos

**VANT** Veículo aéreo não tripulado

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>ASSISTENTES DE PROVAS</b>	<b>15</b>
2.1	TEORIA DOS TIPOS	15
2.2	TEORIA DOS TIPOS INTUICIONISTA	15
2.3	COQ	15
<b>3</b>	<b>SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS</b>	<b>16</b>
3.1	AUTÔMATOS FINITOS DETERMINÍSTICOS	17
3.1.1	Definição formal	18
3.1.2	Diagrama de estados	19
3.1.3	Linguagem marcada	20
3.1.4	Linguagem gerada e bloqueios	21
3.1.5	Função de transição total	21
<b>4</b>	<b>PROBLEMAS DE FILAS</b>	<b>24</b>
4.1	PROBLEMA DO PRODUTOR E CONSUMIDOR	25
4.2	PROPRIEDADES DESEJADAS	25
4.2.1	Aplicações	25
<b>5</b>	<b>GARANTIA DE PROPRIEDADES EM SISTEMAS DE FILAS</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES PARCIAIS</b>	<b>27</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>28</b>

## 1 INTRODUÇÃO

## 2 ASSISTENTES DE PROVAS

Um assistente de provas interativo é um artifício de software que auxilia no processo de provas matemáticas ...

### 2.1 TEORIA DOS TIPOS

A teoria dos tipos fornece o encontro da ciência da computação com a matemática e a lógica. Ela é simultaneamente um sistema formal e linguagem de programação que permite raciocinar enquanto se programa. Sua relevância se explica por possuir simplicidade, ser robusta, apresentar a propriedade da decidibilidade, ser uma linguagem funcional, entre outros (LUO, 1994).

[EXPLICAR O PARADOXO DE RUSSEL]

$$X = \{A \mid A \notin A\}$$

Seria  $X$  pertencente a si mesmo? Essa pergunta incorre no paradoxo de Russel ...

[OQ É UM TIPO?]

### 2.2 TEORIA DOS TIPOS INTUICIONISTA

A teoria dos tipos intuicionista foi estabelecida por Per Martin-Löf em ...

### 2.3 COQ

(CHLIPALA, 2013)



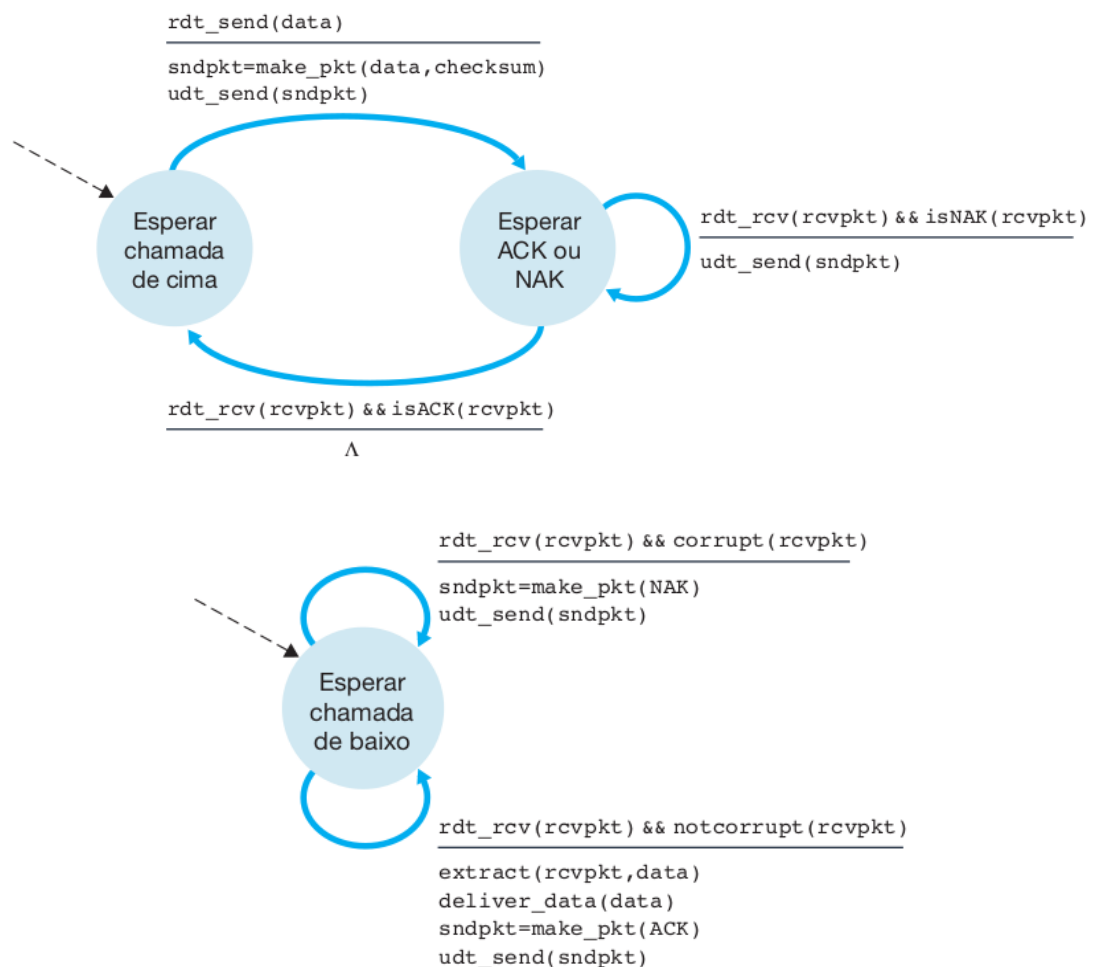
### 3 SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS

Segundo Lafortune (2019, p. 142, tradução do autor)

Sistemas a eventos discretos (SEDs) são sistemas dinâmicos com duas características definidoras: seus espaços de estados são discretos e potencialmente infinitos, e sua dinâmica é orientada a eventos, em vez de tempo. (...) Eventos que ocorrem de forma assíncrona (em geral) causam um salto no espaço de estados, de um estado para outro.

A exemplo disso, protocolos de comunicação em redes de computadores são frequentemente modelados por SEDs, como indica a Figura 1.

Figura 1 – Protocolo para um canal de redes de computadores com erros de bits: lado remetente e (abaixo) destinatário



Na Figura 1, tem-se representado um protocolo de redes em que há estados de espera e transições que dependem de eventos discretos – neste caso, procedimentos computacionais. A representação supracitada é uma evidência do caráter de SED do protocolo, e a figura é um diagrama de estados, que será introduzido mais adiante.

...

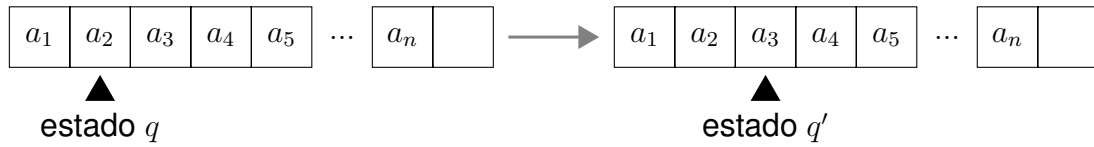
SEDs são comumente representados por redes de Petri e autômatos determinísticos. **falar um pouco sobre redes de Petri**. Este trabalho de conclusão de curso, todavia, enfoca a representação por autômatos determinísticos, que podem ser finitos ou infinitos. A diferença entre eles é que naqueles os conjuntos de estados e eventos são finitos e nestes, infinitos. A seção que segue introduz os principais conceitos de autômatos finitos determinísticos usados para este trabalho.

### 3.1 AUTÔMATOS FINITOS DETERMINÍSTICOS

Autômato – palavra derivada do termo em latim *automatu* – é “maquinismo que se move por meios mecânicos” e “(...) imita os movimentos humanos” (FERREIRA, 2010, p. 81). Esse termo tem sido usado na Ciência da Computação desde a década de 1930 para descrever importantes modelos da Teoria dos Autômatos, que aborda máquinas de Turing, por exemplo. Nesse contexto, um autômato é uma máquina abstrata descrita matematicamente e idealizada em termos de limitações físicas (HOPCROFT; MOTWANI; ULLMAN, 2007).

Um autômato finito determinístico (AFD), ou máquina de estados finitos determinística, é uma máquina dotada de fita, unidade de controle e função de transição. A fita de um autômato é um espaço ilimitado utilizado para armazenar uma sequência de símbolos que serão lidos e computados. Já a unidade de controle contém as variáveis do estado atual da máquina, que servem de parâmetro para a computação da função de transição. Para determinar o estado de um autômato, há uma cabeça de leitura sobre a fita e um conjunto de elementos abstratos que norteiam a evolução do funcionamento da máquina: os estados (HOPCROFT; MOTWANI; ULLMAN, 2007). A Figura 2 esquematiza a transição de estado de um AFD com a cabeça de leitura inicialmente posicionada sobre a segunda célula da fita.

Figura 2 – Transição de um AFD



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Durante a computação de uma cadeia de entrada, o AFD lê o símbolo da célula atual da fita, apontada pela cabeça de leitura, e avança o cabeçote em uma posição para a direita. Inicialmente, ao receber uma entrada, a cabeça de leitura estará posicionada na extremidade esquerda da fita e, por conseguinte, da cadeia de símbolos. Se a computação de um símbolo lido não acarretar um estado definido ou a cabeça de leitura estiver posicionada sobre uma célula vazia, o funcionamento do autômato será interrompido.

Na Ciência da Computação, os AFDs formam a base de alguns componentes de software e partes de compiladores. Um artifício muito empregado no desenvolvimento de software são as expressões regulares, que podem ser convertidas em AFDs e permitem encontrar padrões em textos (HOPCROFT; MOTWANI; ULLMAN, 2007). Já no contexto dos SEDs, os AFDs são modelos matemáticos que descrevem sistemas com base nos eventos que podem ocorrer. Dessa maneira, as cadeias de símbolos que são enviadas à entrada dos AFDs constituem sequências de eventos cuja computação resulta em uma descrição do sistema baseada nas variáveis de controle da máquina de estados (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 1999).

### 3.1.1 Definição formal

A definição de AFD que segue foi inspirada e adaptada de Hopcroft, Motwani e Ullman (2007) e Cassandras e Lafortune (1999).

Um AFD  $G$  é uma quintupla

$$\langle Q, E, \delta, q_0, Q_m \rangle$$

em que

$Q$  é o conjunto finito de estados

$E$  é o conjunto finito de eventos

$\delta : Q \times E \rightarrow Q$  é a função de transição

$q_0$  é o estado inicial

$Q_m \subseteq Q$  é o conjunto de estados marcados

A função de eventos ativos de  $G$ , que será denotada por  $\Gamma_G : Q \rightarrow 2^E$ , relaciona cada estado com os eventos possíveis a partir dele. Formalmente

$$(\forall q \in Q)(\forall e \in E), e \in \Gamma_G(q) \Leftrightarrow \delta(q, e) \in Q$$

isto é,  $e \in \Gamma_G(q)$  se e somente se  $\delta(q, e)$  é definido.

Ao fecho de Kleene sobre um conjunto de eventos  $E$ , denotado por  $E^*$ , pertencem todas as possíveis cadeias de eventos pertencentes a  $E$ . Uma cadeia de eventos é uma sequência finita  $e_1e_2\dots e_{|w|}$  em que  $e_i \in E$  ( $\forall i = 1..|w|$ ). Quando  $|w| = 0$ , a cadeia é dita vazia e será simbolizada por  $\varepsilon$ .

A função de transição estendida  $\hat{\delta} : Q \times E^* \rightarrow Q$  é definida recursivamente destarte:

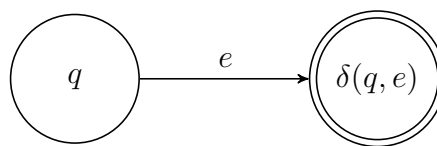
$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & \text{se } w = \varepsilon \\ \hat{\delta}(\delta(q, e), w') & \text{se } w = ew' \end{cases}$$

e terá valor indefinido quando  $\delta(q, e)$  assim for.

### 3.1.2 Diagrama de estados

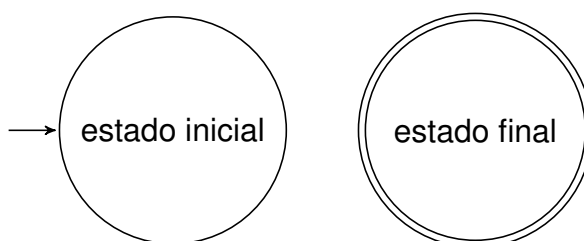
Para auxiliar na visualização das transições entre os estados dos autômatos, os AFDs são comumente representados por diagramas de estados. Nessa representação, os estados são nós de uma estrutura semelhante a de grafos, e as transições, arestas que interligam dois nós, conforme a Figura 3. Representam-se as transições cuja origem e destino são o mesmo estado por *loops*: arestas que partem de um nó e terminam no mesmo.

Figura 3 – Representação da transição de estados em um diagrama



Nesta classe de diagramas, os estados inicial e final podem ser destacados de alguma forma. Para este trabalho, uma seta sem origem aponta sempre para o nó do estado inicial, e uma circunferência dupla enfatiza o de um estado final, como demonstra a Figura 4.

Figura 4 – Representação de estados inicial (à esquerda) e final (à direita) em um diagrama



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Pode-se citar outros aspectos desta representação de autômatos: a possibilidade de adicionar rótulos aos nós, a opção de omitir os nomes dos estados nos nós quando não forem necessários e a aglutinação de transições que partem e terminam no mesmo estado em uma mesma aresta, com os símbolos neste trabalho separados por vírgula.

### 3.1.3 Linguagem marcada

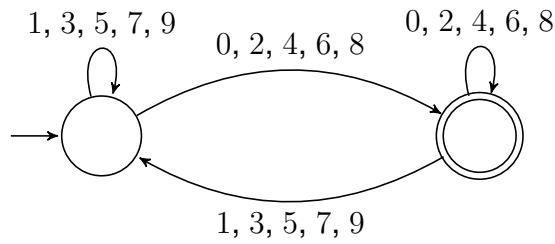
A linguagem marcada por um AFD  $G$  é o conjunto

$$L_m(G) = \{w \in E^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q_m\}$$

Sendo assim, a linguagem marcada pelo autômato são todas as cadeias de eventos que o fazem transicionar do estado inicial a um estado marcado. Isso significa que, quando uma cadeia  $w \in L_m(G)$  for posicionada na fita do autômato, a computação de cada evento, da esquerda para a direita da sequência, sempre resultará em um estado definido e terminará em um estado marcado.

Denomina-se linguagem regular a linguagem marcada por qualquer AFD (HOPCROFT; MOTWANI; ULLMAN, 2007). Desse modo, este trabalho de conclusão de curso versará sobre linguagens exclusivamente regulares, a exemplo das quais é possível citar o conjunto dos números naturais pares. Sabendo que um número par é aquele cujo último algarismo – da esquerda para a direita – pertence a  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ , pode-se construir o AFD da Figura 5, demonstrando a validade da afirmação.

Figura 5 – Diagrama de estados do AFD que reconhece números naturais pares



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Quando um autômato se destina a verificar padrões em cadeias de eventos, ou palavras, diz-se que ele é um formalismo reconhecedor (MENEZES, 2005) e, portanto, o autômato da Figura 5 reconhece todos os números naturais pares. No que tange aos SEDs, Cassandras e Lafortune (1999) ...

### 3.1.4 Linguagem gerada e bloqueios

A linguagem gerada por um AFD  $G$  é o conjunto

$$L(G) = \{w \in E^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q\}$$

Neste caso, a linguagem são todas as cadeias de eventos que fazem o autômato transicionar do estado inicial a um estado definido.

Caso o autômato  $G$  chegue a um estado  $q \notin Q_m$  tal que  $\Gamma_G(q) = \emptyset$ , diz-se que há um *deadlock*. Um *livelock* se configura quando não é possível alcançar, a partir de um estado a que se chegou, um estado marcado. Se qualquer bloqueio acontece, tem-se que

$$\overline{L_m(G)} \subset L(G)$$

em que  $\overline{L_m(G)}$  é o conjunto de todos os prefixos de todas as cadeias pertencentes a  $L_m(G)$ , ou

$$\overline{L_m(G)} = \{w \in E^* \mid \exists w' \in E^*, ww' \in L_m(G)\}$$

Isso é devido a ... (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 1999).

### 3.1.5 Função de transição total

Haja vista que não é possível formular funções parciais no assistente de provas Coq, algumas mudanças na definição de AFD supracitada são necessárias a fim de representar AFDs nessa ferramenta. A começar, é impreterível alterar a função de

transição de um AFD  $G$  para torná-la total. Seja  $\delta' : Q \cup \{\otimes\} \times E \rightarrow Q \cup \{\otimes\}$  a seguinte função total:

$$\delta'(q, e) = \begin{cases} \delta(q, e) & \text{se } q \in Q \wedge \delta(q, e) \in Q \\ \otimes & \text{se } q \notin Q \vee \delta(q, e) \notin Q \end{cases}$$

em que  $\otimes$  é um estado novo, não pertencente a  $Q$ : o estado de ralo.

O autômato  $G$  é muito semelhante ao

$$G' = \langle Q \cup \{\otimes\}, E, \delta', q_0, Q_m \rangle$$

uma vez que a única diferença entre eles é que, em  $G'$ , ao realizar-se uma transição que seria indefinida em  $G$ , alcança-se um estado do qual não se pode sair.

Como a função  $\delta'$  é total, tem-se que

$$L(G') = E^*$$

em termos do que se estabeleceu como linguagem gerada anteriormente. Pode-se, não obstante, modificar a definição dela de forma que  $G$  e  $G'$  sejam equivalentes em se tratando de linguagens:

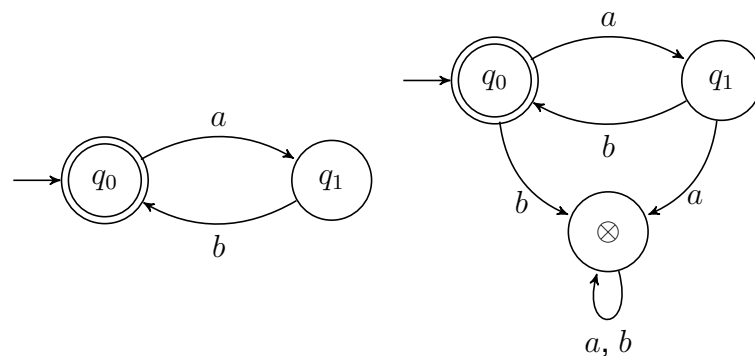
$$L'(G') = \{w \in E^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \neq \otimes\}$$

é a linguagem gerada pelo autômato  $G'$ . Então

$$L'(G') = L'(G) = L(G)$$

É possível visualizar as formulações de um AFD usando função de transição parcial e total na Figura 6, que a exemplifica para um AFD de alfabeto  $\{a, b\}$ .

Figura 6 – Um AFD simples (à esquerda) e seu correspondente com função de transição total (à direita)



### E OS BLOQUEIOS?

É evidente que um AFD cuja função de transição não é total pode ser modelado matematicamente utilizando funções totais. Isso é importante para que se possa representá-lo na linguagem do Coq.



## 4 PROBLEMAS DE FILAS

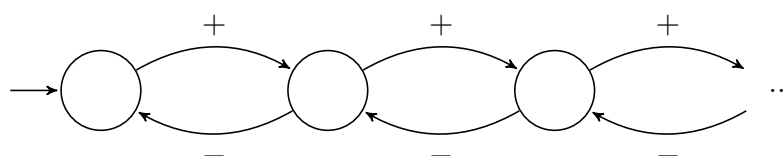
Os sistemas de filas constituem importante classe de sistemas a eventos discretos (SEDs) em que entidades ou objetos devem esperar para obter um determinado recurso. Há três elementos básicos que compõem esses sistemas:

- consumidor: entidade que espera por um recurso;
- servidor: o recurso que é aguardado;
- fila: o espaço em que os consumidores esperam.

Os recursos são genericamente denominados servidores por geralmente proverem serviço (CASSANDRAS; LAFORTUNE, 1999). O presente trabalho aborda uma ótica abstrata dos sistemas de filas, já que há a possibilidade de reduzir problemas a esses sistemas.

Para ser atendido por um servidor de banco, uma pessoa deve esperar em uma fila até que as pessoas a sua frente sejam atendidas. Esse sistema de filas pode ser modelado pelo autômato infinito determinístico ilustrado pela Figura ??, em que + e – são os respectivos eventos de chegada e partida de pessoa da fila.

Figura 7 – Um sistema de filas simples



Fonte: Elaborada pelo autor, 2019.

Na Figura 7 é assumido que a fila de pessoas pode crescer indefinidamente, o que não é possível na realidade. Assumindo que as filas têm um tamanho máximo, faz-se possível modelar vários sistemas de filas por meio de autômatos finitos determinísticos (AFDs).

Um exemplo de sistema de filas é apresentado por Ferreira (2019) e consiste em uma planta de fila de demandas para veículos aéreos não tripulados (VANTs). Nele as demandas são os consumidores, e os VANTs, os servidores.

#### 4.1 PROBLEMA DO PRODUTOR E CONSUMIDOR

#### 4.2 PROPRIEDADES DESEJADAS

##### **4.2.1 Aplicações**

## **5 GARANTIA DE PROPRIEDADES EM SISTEMAS DE FILAS**

## **6 CONSIDERAÇÕES PARCIAIS**

## REFERÊNCIAS

CASSANDRAS, C. G.; LAFORTUNE, S. **Introduction to discrete event systems**. Boston: Kluwer Academic, 1999.

CHLIPALA, A. **Certified programming with dependent types: a pragmatic introduction to the Coq proof assistant**. Cambridge, MA: The MIT Press, 2013.

FERREIRA, A. B. d. H. **Míni Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. Curitiba: Editora Positivo, 2010.

FERREIRA, V. L.

**Coordenação de múltiplas aeronaves não tripuladas baseada na alocação dinâmica de tarefas associadas à logística de entregas** — Universidade do Estado de Santa Catarina, 2019. Disponível em: <<http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000071/0000714c.pdf>>. Acesso em: 16 out. 2019.

HOPCROFT, J. E.; MOTWANI, R.; ULLMAN, J. D. **Introduction to automata theory, languages, and computation**. Boston: Pearson/Addison Wesley, 2007.

LAFORTUNE, S. Discrete event systems: Modeling, observation, and control. **Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems**, Annual Reviews, v. 2, p. 141–159, 2019. Disponível em: <<https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-control-053018-023659>>. Acesso em: 18 out. 2019.

LUO, Z. **Computation and reasoning: a type theory for computer science**. Oxford New York: Clarendon Press Oxford University Press, 1994.

MENEZES, P. F. B. **Linguagens formais e autômatos**. Porto Alegre: Sagra-Luzzatto, 2005.