Interpolation polynomiale

Par algèbre linéaire

- Étant donné $n + 1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ de f tels que $y_i = f(x_i)$
- Trouver $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}}^{Vandermonde(x_0, \ldots, x_n)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$Va = y \iff a = V^{-1} y$$

Interpolation polynomiale

Méthode de Lagrange

- Plutôt que d'inverser une matrice de Vandermonde
  - Méthode d'élimination de Gauss en temps $O(n^3)$
- On utilise en pratique la formule de Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Permet de calculer les coefficients en temps $O(n^2)$