

Caractérisation des singularités de type \mathfrak{J}

Félix Larose-Gervais

Été 2023

Contents

1	Introduction	2
1.1	Notations	2
1.2	Définitions	2
1.3	Rappels d'arithmétique	3
1.3.1	Algorithme d'Euclide et PGCD	3
1.3.2	Théorème des restes chinois	3
1.4	Résultats connus	4
2	Propositions	5
2.1	Existence d'un éclatement	5
2.2	Propriétés	5
2.2.1	Symétrie	5
2.2.2	Ajout de poids	6
2.2.3	Retrait de poids	6
2.3	Caractérisation stricte	7
3	Conjectures	8

1 Introduction

1.1 Notations

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ on note la relation de coprimauté \perp

$$a \perp b \iff \gcd(a, b) = 1$$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$, X un ensemble, notons

- S_m le groupe symétrique à m lettres
- \mathbb{Z}_n l'anneau des entiers modulo n ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)
- \mathbb{Z}_n^\times son groupe d'inversibles ($\{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \perp n\}$)
- X^m l'ensemble des m -uplets de X ($\underbrace{X \times \cdots \times X}_{m \text{ fois}}$)

On notera aussi S_n^m l'ensemble des m -uplets d'inversibles modulo n ($(\mathbb{Z}_n^\times)^m$)

1.2 Définitions

Définition 1. Une **singularité** est un $[a] = ([a_1], \dots, [a_m]) \in S_n^m$, on appelle

- n la **racine** de la singularité
- $[a_1], \dots, [a_m]$ les **poïds** de la singularité

Définition 2. Un **éclatement** $a \in \mathbb{Z}^m$ d'une singularité $[a] \in S_n^m$ (noté $a \in [a]$) est un choix de représentant $a = (a_1, \dots, a_m)$ tel que

$$\forall i \neq j : a_i \perp a_j$$

On note E_a l'ensemble des singularités associées à l'éclatement a comme suit:

$$\begin{aligned} E_a &= \{[a^i] \in S_{a_i}^m \mid \forall i = 1..m, a_i > 1\} \\ [a^i] &= ([a_1^i], \dots, [a_m^i]) \\ [a_j^i] &\equiv \begin{cases} -n & \text{si } i = j \\ a_j & \text{sinon} \end{cases} \pmod{a_i} \quad \forall j = 1..m \end{aligned}$$

On appelle $a = (a_1, \dots, a_m)$ l'**éclatement naturel** de $[a]$ si les a_1, \dots, a_m sont les plus petits représentant positifs de leurs classes

Définition 3. Un éclatement $a \in [a]$ est dit **lisse** si $a = (1, \dots, 1)$

Définition 4. La singularité $[a]$ est dite de **type** \mathfrak{J} (noté $[a] \in \mathfrak{J}$) ssi

$$\exists a \in [a] : \forall [a^i] \in E_a : [a^i] \in \mathfrak{J}$$

On parlera de **type** \mathfrak{J} **strict** (noté $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$) lorsque pour $a \in [a]$ l'éclatement naturel de $[a]$ on a

$$\forall [a^i] \in E_a : [a^i] \in \bar{\mathfrak{J}}$$

1.3 Rappels d'arithmétique

1.3.1 Algorithme d'Euclide et PGCD

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, on calcule le PGCD comme suit

$$\gcd(a, b) := \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $k \in \mathbb{Z}$, on a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \gcd(a, 1) &= 1 \\ \gcd(a, b) &= \gcd(b, a) \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, -b) \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, b + ka) \end{aligned}$$

De la dernière on déduit directement, pour $n \in \mathbb{N}$

$$a \equiv b \pmod{n} \implies \gcd(a, n) = \gcd(b, n)$$

1.3.2 Théorème des restes chinois

Soit $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, notons le produit $n = n_1 \cdots n_m$

Si $\forall i \neq j : n_i \perp n_j$, alors $\exists! x \in \mathbb{Z}_n$ tel que

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_m \pmod{n_m} \end{aligned}$$

1.4 Résultats connus

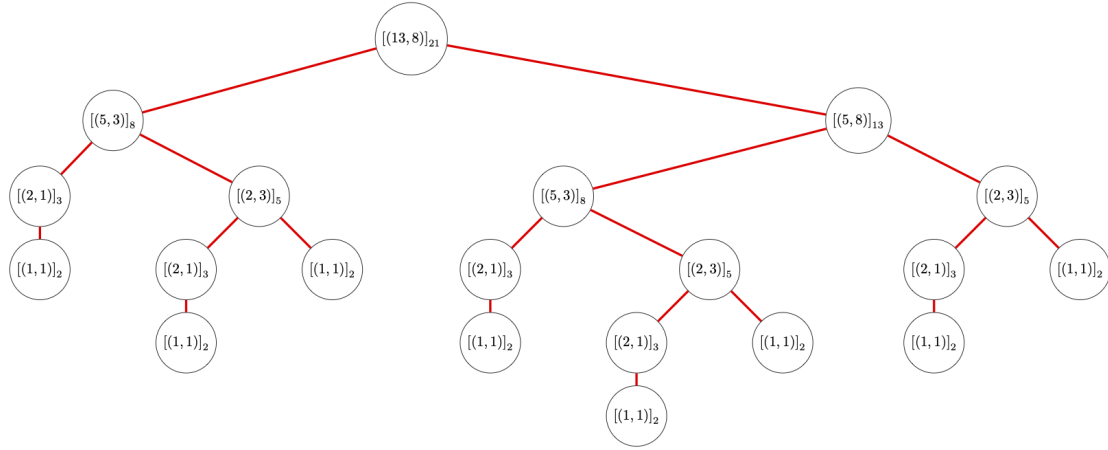
Résultats utiles, dûs à Habib Jaber.

Proposition 1. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a \perp b \implies [(a, b)]_{a+b} \in \bar{\mathfrak{F}}$$

Exemple 1. $13 \perp 8 \implies [(13, 8)]_{21} \in \bar{\mathfrak{F}}$

Figure 1: Illustration avec la suite de Fibonacci

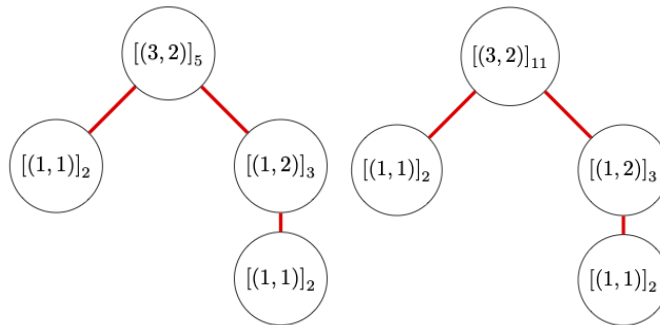


Proposition 2. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$$[(a, b)]_n \in \bar{\mathfrak{F}} \implies \forall k \in \mathbb{Z}^* : [(a, b)]_{n+kab} \in \bar{\mathfrak{F}}$$

Exemple 2. $[(3, 2)]_5 \in \bar{\mathfrak{F}} \implies [(3, 2)]_{11} \in \bar{\mathfrak{F}}$

Figure 2: $[(3, 2)]_5 \cong [(3, 2)]_{11}$



2 Propositions

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m, n \geq 2$ et une singularité $[a] = ([a_1], \dots, [a_m])_n \in S_n^m$

2.1 Existence d'un éclatement

Proposition 3. *Toute singularité isolée admet un éclatement*

Preuve. Prenons $(a_1, \dots, a_m) \in [a]$ le représentant naturel de $[a]$

On cherche $(b_1, \dots, b_m) \in [a]$ tels que $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$ et $\forall i : b_i \perp n$

Il suffit de prendre $b_1 = a_1$ et $\forall i = 2..m$, un b_i vérifiant

$$\begin{aligned} b_i &\equiv a_i \pmod{n} \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_1} \\ &\vdots \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_{i-1}} \end{aligned}$$

De tels b_i existent par le théorème des restes chinois

On vérifie les coprimalités nécessaires grâce aux propriétés de gcd

On a par la première congruence $\forall i : b_i \perp n$ (puisque $\forall i : a_i \perp n$)

Et par les suivantes $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$

On a donc $b = (b_1, \dots, b_m)$ un éclatement de $[a]$ □

2.2 Propriétés

2.2.1 Symétrie

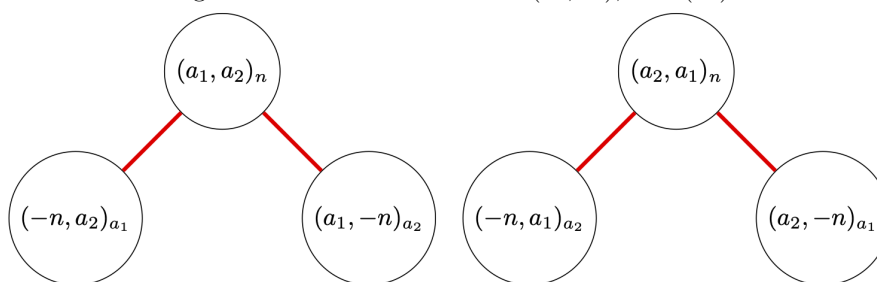
Proposition 4. *Le réarrangement des poids préserve le type \mathfrak{J} . Soit $\sigma \in S_m$, on a*

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies \sigma([a]) \in \mathfrak{J}$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$

Il suffit d'observer que $E_a \cong E_{\sigma(a)}$ □

Figure 3: Illustration avec $a = (a_1, a_2)$, $\sigma = (12)$



2.2.2 Ajout de poids

Proposition 5. *L'ajout de poids de valeur 1 préserve le type \mathfrak{J}*

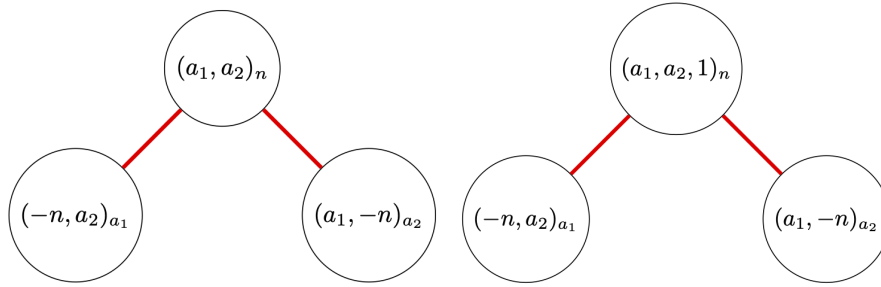
$$([a_1], \dots, [a_m])_n \in \mathfrak{J} \implies ([a_1], \dots, [a_m], [1])_n \in \mathfrak{J}$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$, $b = (a_1, \dots, a_m, 1)$

Il suffit d'observer que $E_a \cong E_b$

□

Figure 4: Illustration avec $a = (a_1, a_2)$



2.2.3 Retrait de poids

Proposition 6. *Le retrait de poids préserve le type \mathfrak{J}*

$$([a_1], \dots, [a_m])_n \in \mathfrak{J} \implies ([a_1], \dots, [a_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$

La preuve se fait par induction structurelle

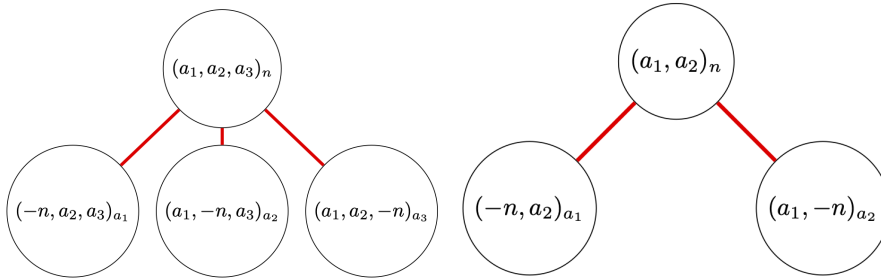
D'abord, on observe $([1], \dots, [1])_n \in \mathfrak{J}$

Puis on suppose que $\forall [b] \in E_a : [b] \in \mathfrak{J} \implies ([b_1], \dots, [b_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}$

On en conclut $([a_1], \dots, [a_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}$

□

Figure 5: Illustration pour $m = 3$



2.3 Caractérisation stricte

Proposition 7. Soit $[a] \in S_n^2$, d'éclatement naturel $a = (a_1, a_2) \in [a]$

$$[a] \in \bar{\mathfrak{J}} \implies n \geq a_1 + a_2$$

Preuve. Par contraposée, supposons $n < a_1 + a_2$ (\star)

- Si $a_1 = a_2$ ($\neq 1$ par (\star))
Alors $[a] \notin \bar{\mathfrak{J}}$
- Sinon, $a_1 \neq a_2$, supposons sans perdre de généralité que $a_1 > a_2$
Considérons a^1 l'éclatement naturel de $[a^1] \in E_a$ la singularité associée à a_1
On a $a^1 = (-n \bmod a_1, a_2 \bmod a_1)$
 - Puisque $a_1 > a_2$, on a $2a_1 > a_1 + a_2 > n$, donc $a_1 < n < 2a_1$
On en déduit $(-n \bmod a_1) = 2a_1 - n$
 - Aussi, $(a_2 \bmod a_1) = a_2$ car $a_1 > a_2$

On a donc $a^1 = (2a_1 - n, a_2)$

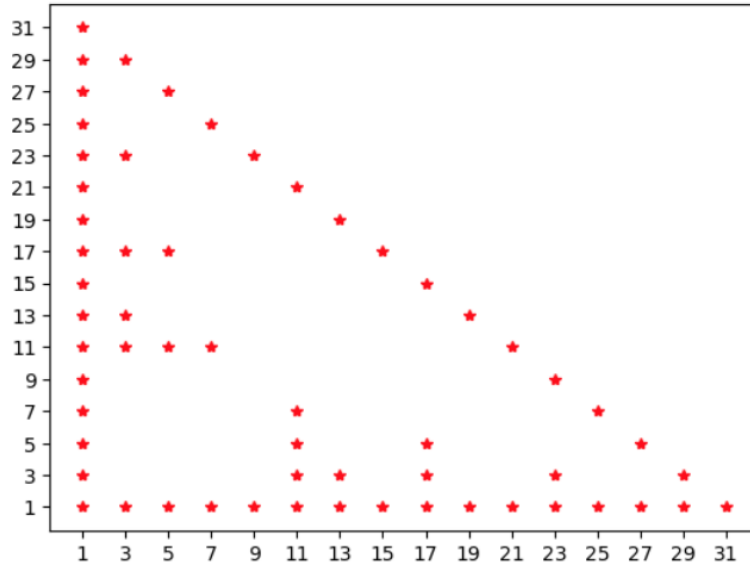
Puisque $n < a_1 + a_2$, on a $a_1 < 2a_1 - n + a_2$

Donc $[a^1] \in S_{a_1}^2$ vérifie la condition (\star), on répète le raisonnement avec $[a^1]$

□

Exemple 3. $(4, 3)_5 \notin \bar{\mathfrak{J}}$ car $5 < 4 + 3$

Figure 6: Singularités $s \in S_{32}^2$ telles que $s \in \bar{\mathfrak{J}}$



3 Conjectures

Conjecture 1. Soit $[a] \in S_n^m$ de représentant naturel $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$

$$[a] \in \bar{\mathfrak{J}} \implies |E_a| \leq 2$$

Preuve. Supposons par contraposée $|E_a| > 2$ (\star)

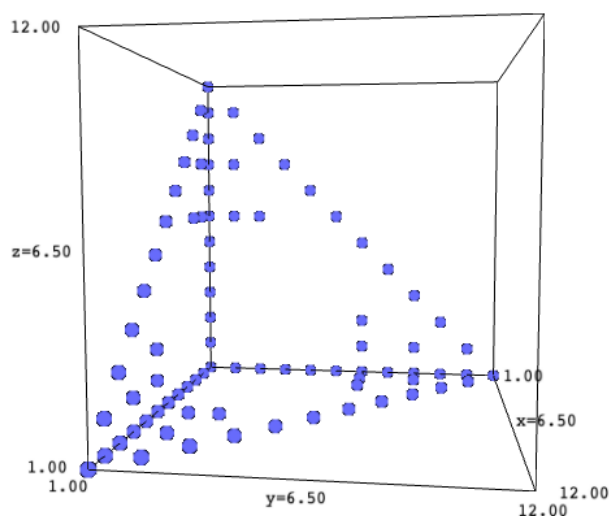
Donc, sans perdre de généralité, on a $a_1 > a_2 > a_3 > 1$

On a donc les singularités $[a^1], [a^2] \in E_a$ d'éclatements naturels a^1, a^2

\dots donc avec $a > b > c > 1$ copremiers deux-à-deux

$(b, c)_a \in \bar{\mathfrak{J}}$ et $(a_b, c)_b \in \bar{\mathfrak{J}}$ contradiction? □

Figure 7: Singularités $s \in S_{13}^3$ telles que $s \in \bar{\mathfrak{J}}$



Corollaire 1. Soit la singularite $[a] \in S_n^m$ de représentant naturel $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$
Supposons sans perdre de généralité que $a_1 > a_2 > \dots > a_m$, alors

$$[a] \in \bar{\mathfrak{J}} \iff a_3 = \dots = a_m = 1 \text{ et } [(a_1, a_2)]_n \in \bar{\mathfrak{J}}$$

Preuve. D'après les proposition précédentes

- (\Leftarrow) Si $a_3 = \dots = a_m = 1$ et $[(a_1, a_2)]_n \in \bar{\mathfrak{J}}$

Comme $[(a_1, a_2)]_n \in \bar{\mathfrak{J}}$, on a $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$ (par ajout de poids à 1)

- (\Rightarrow) Si $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$

Alors $a = (a_1, a_2, 1, \dots, 1)$ (par la conjecture)

Et $[(a_1, a_2)] \in \bar{\mathfrak{J}}$ (par retrait de poids) □

Conjecture 2. Soit $(a, b)_n \in \bar{\mathfrak{J}}$, donc $a \perp b$ et $1 = as + bt$ par Bézout
Alors

$$(nbt \mod ab) < n \wedge (nas \mod ab) < n$$

Corollaire 2. Soit $n > b > 1$, $n > a$ alors

$$(a, b)_n \in \bar{\mathfrak{J}} \implies (-a, b)_n \notin \bar{\mathfrak{J}}$$

Preuve. Supposons $(a, b)_n \in \bar{\mathfrak{J}}$

On a donc $a \neq b$

Si $a < b$, alors $n - a + b > n$, donc $(-a, b)_n \notin \bar{\mathfrak{J}}$

Sinon, puisque $a > b$, on a $n > a > b > 1$

Les éclatements à gauche successifs de $(-a, b)_n$ sont $-a, -2a, \dots, n \mod a, \dots$

Si un tel éclatement est multiple de b , alors $(-a, b)_n \notin \bar{\mathfrak{J}}$

$$x \equiv n \pmod{a}$$

$$x \equiv 0 \pmod{b}$$

Un tel $0 < x < n$ existe par la conjecture précédente

□

Corollaire 3. Soit $n > a > b > 1$, alors

$$(a, b)_n \in \bar{\mathfrak{J}} \implies (n, b)_a \notin \bar{\mathfrak{J}}$$

Preuve. Supposons $(a, b)_n \in \bar{\mathfrak{J}}$

On a donc $(-n, b)_a \in \bar{\mathfrak{J}}$ par éclatement

Par la conjecture précédente, $(n, b)_a \notin \bar{\mathfrak{J}}$

□

Corollaire 4. Soit $n > a > b > c > 1$, alors

$$(a, b, c)_n \notin \bar{\mathfrak{J}}$$

Preuve. Supposons $(a, b, c)_n \in \bar{\mathfrak{J}}$

On a donc $(-n, b, c)_a \in \bar{\mathfrak{J}}$ et $(a, -n, c)_b \in \bar{\mathfrak{J}}$ par éclatement

Et donc $(b, c)_a \in \bar{\mathfrak{J}}$ et $(a, c)_b \in \bar{\mathfrak{J}}$ par retrait de poids

Contradiction avec la conjecture précédente

□

Conjecture 3. Si $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$, alors $[a] \in \mathfrak{J}$, donc $\bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$