Caractérisation des singularités de type $\mathfrak{J}$

Félix Larose-Gervais

Mai 2023

1 Introduction

2 Propositions

Soit $n \in \mathbb{N}, \sigma \in S_n$, notons

$$\pi : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}^{n+1}$$
$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$$

Proposition 1. *Soit* $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, *alors*

$$\mathfrak{I}(a) \iff \mathfrak{I}(\pi(a))$$

Proof. Notons $b = \pi(a)$

On a $E_a = \{a^i \mid i = 1..n,\ a_i > 1\},\ a^i = (a_i, a_1^i, \ldots, a_n^i)$

Avec $\forall j = 1..n,\ a_j^i = \begin{cases} -a_0 \mod a_i & \text{si } i = j \\ a_j \mod a_i & \text{sinon} \end{cases}$

Considérons $E_b = \{b^i \mid i = 1..n,\ b_i > 1\},\ b^i = (b_i, b_1^i, \ldots, b_n^i)$

Avec $\forall j = 1..n$

$$b_j^i = \begin{cases} -b_0 \mod b_i & \text{si } i = j \\ b_j \mod b_i & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} -a_0 \mod a_{\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) = \sigma(j) \\ a_{\sigma(j)} \mod a_{\sigma(i)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc $b_j^i = a_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}$

Donc $b^i = (a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(1)}^{\sigma(i)}, \ldots, a_{\sigma(n)}^{\sigma(i)}) = \pi(a^{\sigma(i)})$

Ainsi $E_b = \{\pi(a^{\sigma(i)}) \mid i = 1..n,\ a_{\sigma(i)} > 1\}$

C'est-à-dire $E_b = \{\pi(a^i) \mid i = 1..n,\ a_i > 1\}$

Donc π est une bijection entre E_a et E_b

Et elle préserve le caractère lisse

S'il existe une suite d'éclatements montrant $\mathfrak{I}(a)$

L'application de π à ces éléments est une suite montrant $\mathfrak{I}(b)$

La réciproque est vraie car $a = \pi^{-1}(\pi(a))$ $\square$

Proposition 2. *Soit* $a = (a_0, a_1, a_2)$*, alors*

$$\mathfrak{J}(a) \implies a_0 \geq a_1 + a_2$$

Proof. Supposons $a_0 < a_1 + a_2$

Si $a_1 = a_2$, alors $\neg\mathfrak{J}(a)$

Sinon, $a_1 \neq a_2$, supposons sans perdre de généralité que $a_1 > a_2$

Considérons l'éclatement $a^1 = (a_1,\ -a_0 \mod a_1,\ a_2 \mod a_1) \in E_a$

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 &\implies 2a_1 > a_1 + a_2 \\ &\implies (-a_0 \mod a_1) = 2a_1 - a_0 \\ a_1 > a_2 &\implies (a_2 \mod a_1) = a_2 \end{aligned}$$

On a donc $a^1 = (a_1, 2a_1 - a_0, a_2)$

Puisque $a_0 < a_1 + a_2$, on a $a_1 < 2a_1 - a_0 + a_2$

Donc a^1 vérifie la condition initiale, on répète le raisonnement avec a^1 □

3 Conjectures

Conjecture 1. *Soit* $a = (a_0, a_1, a_2)$ *un éclatement d'une singularité* $[a]$

Posons $s = a_1 + a_2 + \gcd(a_0 - a_1, a_0 - a_2)$

Supposons $a_0 < s$

Alors $[a]$ *est de type* $\mathfrak{J} \implies s = a_0 + 1$

On constate que la réciproque n'est pas vraie, par exemple prenons $(13, 7, 4)$, on a $s = 14$, vérifiant donc $a_0 < 14$ et $a_0 + 1 = 14$, or elle n'est pas de type $\mathfrak{J}$.

Conjecture 2. *Soit* $a = (a_0, a_1, a_2)$ *un éclatement d'une singularité* $[a]$

Alors $[a]$ *est de type* $\mathfrak{J} \implies \exists p, q : a_0 = p * a_1 + q * a_2$