

# Caractérisation des singularités de type $\mathfrak{J}$

Félix Larose-Gervais

Mai 2023

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Notations . . . . .	2
1.2	Définitions . . . . .	2
1.3	Rappels d'arithmétique . . . . .	3
1.3.1	Algorithme d'Euclide et PGCD . . . . .	3
1.3.2	Théorème des restes chinois . . . . .	3
1.4	Résultats connus . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Propositions</b>	<b>4</b>
2.1	Existence d'un éclatement . . . . .	4
2.2	Invariants . . . . .	5
2.2.1	Ordre des poids . . . . .	5
2.2.2	Ajout de poids . . . . .	5
2.2.3	Retrait de poids . . . . .	6
2.3	Caractérisation stricte . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Conjectures</b>	<b>8</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Notations

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$  on note la relation de coprimauté  $\perp$

$$a \perp b \iff \gcd(a, b) = 1$$

Soit  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  un ensemble, notons

- $Sym(X)$  le groupe de bijections de  $X$  dans lui-même
- $Sym(m)$  le groupe de bijections  $Sym(\{1, \dots, m\})$
- $\mathbb{Z}_n$  l'anneau des entiers modulo  $n$  ( $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ )
- $\mathbb{Z}_n^\times$  son groupe d'inversibles ( $\{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \perp n\}$ )
- $X^m$  l'ensemble des m-uplets de  $X$  ( $\underbrace{X \times \dots \times X}_{m \text{ fois}}$ )

On notera aussi  $S_n^m$  l'ensemble des m-uplets d'inversibles modulo  $n$  ( $(\mathbb{Z}_n^\times)^m$ )

## 1.2 Définitions

**Définition 1.** Une **singularité** est un  $[a] = ([a_1], \dots, [a_m]) \in S_n^m$ , on appelle

- $n$  la **racine** de la singularité
- $[a_1], \dots, [a_m]$  les **poinds** de la singularité

**Définition 2.** Un **éclatement**  $a \in \mathbb{Z}^m$  d'une singularité  $[a] \in S_n^m$  (noté  $a \in [a]$ ) est un choix de représentant  $a = (a_1, \dots, a_m)$  tel que

$$\forall i \neq j : a_i \perp a_j$$

On note  $E_a$  l'ensemble des singularités associées à l'éclatement  $a$  comme suit:

$$\begin{aligned} E_a &= \{[a^i] \in S_{a_i}^m \mid \forall i = 1..m, a_i > 1\} \\ [a^i] &= ([a_1^i], \dots, [a_m^i]) \\ [a_j^i] &\equiv \begin{cases} -n & \text{si } i = j \\ a_j & \text{sinon} \end{cases} \pmod{a_i} \quad \forall j = 1..m \end{aligned}$$

On appelle  $a = (a_1, \dots, a_m)$  l'**éclatement naturel** de  $[a]$  si les  $a_1, \dots, a_m$  sont les plus petits représentant positifs de leurs classes

**Définition 3.** Un éclatement  $a \in [a]$  est dit **lisse** si  $a = (1, \dots, 1)$

**Définition 4.** La singularité  $[a]$  est dite de **type**  $\mathfrak{J}$  (noté  $[a] \in \mathfrak{J}$ ) ssi

$$\exists a \in [a] : \forall [a^i] \in E_a : [a^i] \in \mathfrak{J}$$

On parlera de **type**  $\mathfrak{J}$  **strict** (noté  $[a] \in \overline{\mathfrak{J}}$ ) lorsque pour  $a \in [a]$  l'éclatement naturel de  $[a]$  on a

$$\forall [a^i] \in E_a : [a^i] \in \mathfrak{J}$$

### 1.3 Rappels d'arithmétique

#### 1.3.1 Algorithme d'Euclide et PGCD

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on calcule le PGCD comme suit

$$\gcd(a, b) := \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ \gcd(b, a \bmod b) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec  $k \in \mathbb{Z}$ , on a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \gcd(a, 1) &= 1 \\ \gcd(a, b) &= \gcd(b, a) \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, -b) \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, b + ka) \end{aligned}$$

De la dernière on déduit directement, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$a \equiv b \pmod{n} \implies \gcd(a, n) = \gcd(b, n)$$

#### 1.3.2 Théorème des restes chinois

Soit  $m, n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$  et  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ , notons le produit  $n = n_1 \cdots n_m$

Si  $\forall i \neq j : n_i \perp n_j$ , alors  $\exists! x \in \mathbb{Z}_n$  tel que

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_m \pmod{n_m} \end{aligned}$$

### 1.4 Résultats connus

Résultats utiles, dûs à Habib Jaber.

**Proposition 1.** Soit  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $\gcd(a_1, a_2) = 1$ , alors

$$[(a_1, a_2)]_{a_1+a_2} \in \mathfrak{J}$$

**Exemple 1.**  $\gcd(2, 1) = 1 \implies [(2, 1)]_3 \in \mathfrak{J}$

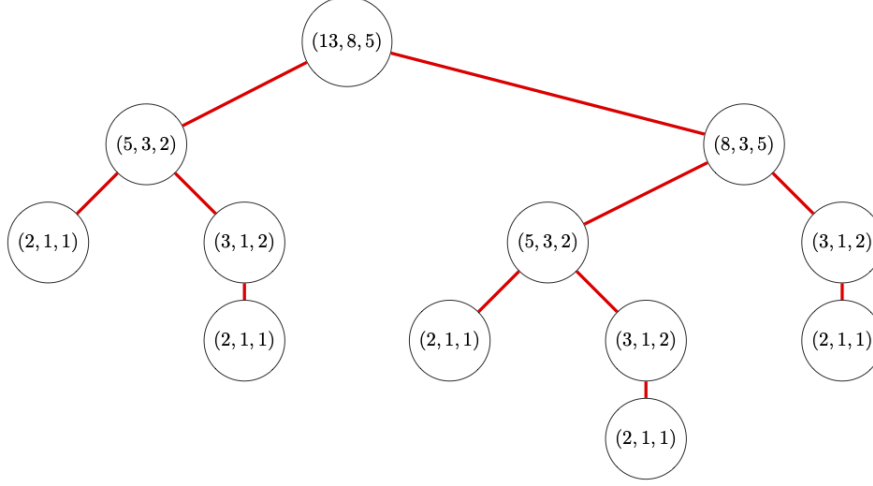
**Proposition 2.**

$$[(a_1, a_2)]_n \in \mathfrak{J} \iff \forall k \in \mathbb{Z} : [(a_1, a_2)]_{n+ka_1a_2} \in \mathfrak{J}$$

**Exemple 2.**  $[(2, 1)]_3 \in \mathfrak{J} \implies [(2, 1)]_5 \in \mathfrak{J}, [(2, 1)]_7 \in \mathfrak{J}, \dots$

Illustration de la proposition 1 avec 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci

Figure 1:  $[(8, 5)]_{13} \in \mathfrak{J}$



## 2 Propositions

Soit  $m, n \in \mathbb{N}$  tels que  $m > 2$ , et une singularité  $[a] = ([a_1], \dots, [a_m]) \in S_n^m$

### 2.1 Existence d'un éclatement

**Proposition 3.** *Toute singularité isolée admet un éclatement*

*Preuve.* Soit  $[a] = ([a_1], \dots, [a_m]) \in S_n^m$

Prenons  $(a_1, \dots, a_m) \in [a]$  son représentant naturel

On cherche  $(b_1, \dots, b_m) \in [a]$  tels que  $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$  et  $\forall i : b_i \perp n$

Il suffit de prendre  $b_1 = a_1$  et  $\forall i = 2..m$ , un  $b_i$  vérifiant

$$\begin{aligned} b_i &\equiv a_i \pmod{n} \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_1} \\ &\vdots \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_{i-1}} \end{aligned}$$

De tels  $b_i$  existent par le théorème des restes chinois

On vérifie les coprimalités nécessaires grâce aux propriétés de gcd

On a par la première congruence  $\forall i : b_i \perp n$  (puisque  $\forall i : a_i \perp n$ )

Et par les suivantes  $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$

On a donc  $b = (b_1, \dots, b_m)$  un éclatement de  $[a]$

□

## 2.2 Invariants

### 2.2.1 Ordre des poids

Soit  $\sigma \in \text{Sym}(m)$ ,  $\pi_\sigma \in \text{Sym}(S_n^m)$ ,

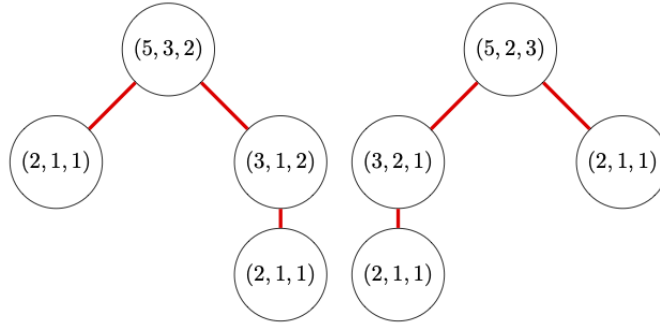
**Proposition 4.** *Le réarrangement des poids préserve le type  $\mathfrak{J}$*

Notons  $[b] = \pi_\sigma([a])$

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies [b] \in \mathfrak{J}$$

*Preuve.* Il suffit d'observer que  $E_a \cong E_b$  □

Figure 2:  $[(3, 2)]_5 \cong [(2, 3)]_5$



### 2.2.2 Ajout de poids

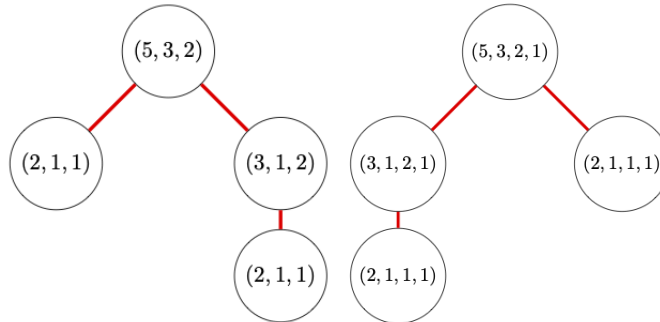
**Proposition 5.** *L'ajout de poids congrus à 1 modulo  $n$  préserve le type  $\mathfrak{J}$*

Notons  $[b] = ([a_1], \dots, [a_m], [1]) \in S_n^{m+1}$

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies [b] \in \mathfrak{J}$$

*Preuve.* Il suffit d'observer que  $E_a \cong E_b$  □

Figure 3:  $[(3, 2)]_5 \cong [(3, 2, 1)]_5$



### 2.2.3 Retrait de poids

**Proposition 6.** *Le retrait de poids préserve le type  $\mathfrak{J}$*

*Notons  $[b] = ([a_1], \dots, [a_{m-1}]) \in S_n^{m-1}$*

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies [b] \in \mathfrak{J}$$

*Preuve.* TODO

□

### 2.3 Caractérisation stricte

**Proposition 7.** Soit  $[a] \in S_n^2$ , d'éclatement naturel  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$[a] \in \bar{\mathfrak{J}} \implies n \geq a_1 + a_2$$

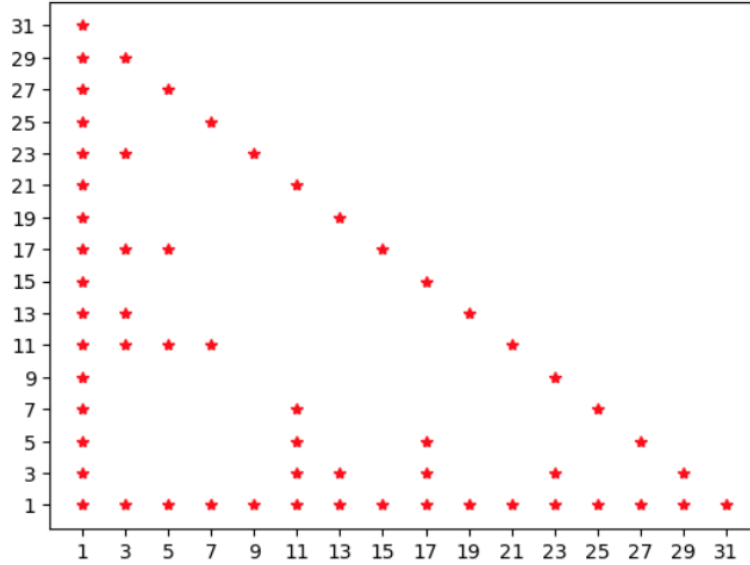
*Preuve.* Par contraposée, supposons  $n < a_1 + a_2$  ( $\star$ )

- Si  $a_1 = a_2$  ( $\neq 1$  par ( $\star$ ))  
Alors  $[a] \notin \bar{\mathfrak{J}}$
- Sinon,  $a_1 \neq a_2$ , supposons sans perdre de généralité que  $a_1 > a_2$   
Considérons  $a^1$  l'éclatement naturel de  $[a^1] \in E_a$  la singularité associée à  $a_1$   
On a  $a^1 = (-n \bmod a_1, a_2 \bmod a_1)$   
Puisque  $a_1 > a_2$ , on a  $2a_1 > a_1 + a_2 > n$ , donc  $a_1 < n < 2a_1$   
On en déduit  $(-n \bmod a_1) = 2a_1 - n$   
Aussi,  $(a_2 \bmod a_1) = a_2$  car  $a_1 > a_2$   
On a donc  $a^1 = (2a_1 - n, a_2)$   
Puisque  $n < a_1 + a_2$ , on a  $a_1 < 2a_1 - n + a_2$   
Donc  $[a^1] \in S_{a_1}^2$  vérifie la condition ( $\star$ ), on répète le raisonnement avec  $[a^1]$

□

**Exemple 3.**  $[4, 3]_5 \notin \bar{\mathfrak{J}}$  car  $5 < 4 + 3$

Figure 4: Singularités  $s \in S_{32}^2$  telles que  $s \in \bar{\mathfrak{J}}$



### 3 Conjectures

**Conjecture 1.** Soit  $[a] \in S_n^m$  de représentant naturel  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$

$$[a] \in \tilde{\mathfrak{J}} \implies |\{a_i \in a \mid a_i > 1\}| \leq 2$$

*Preuve.* Par contraposée, supposons  $1 < a_1, a_2, a_3$  ( $\star$ )

- Si  $\exists i \neq j : a_i = a_j \neq 1$

Alors  $[a] \notin \tilde{\mathfrak{J}}$

- Sinon ( $\forall i \neq j, a_i \neq 1 : a_i \neq a_j$ )

Supposons sans perdre de généralité  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots \geq a_m$  (Donc  $a_1 \geq 4$ )

Considérons  $a^1$  l'éclatement naturel de  $[a^1] \in E_a$  la singularité associée à  $a_1$

On a  $a^1 = (-n \bmod a_1, a_2 \bmod a_1, \dots, a_m \bmod a_1) = (-n \bmod a_1, a_2, \dots, a_m)$

On sait que  $(-n \bmod a_1) \neq 0$  car  $a_1 \perp n$

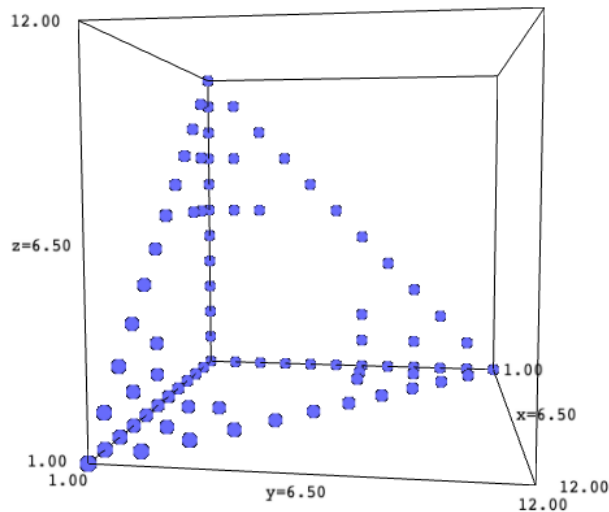
Il suffit de montrer que  $(-n \bmod a_1) \neq 1$  pour que  $[a^1]$  vérifie ( $\star$ )

Impossible (contre-exemple:  $(5, 3, 2) \bmod 29$ )

Tous ces éclatements ont  $m=2$ , or pas j strict

□

Figure 5: Singularités  $s \in S_{13}^3$  telles que  $s \in \tilde{\mathfrak{J}}$



**Corollaire 1.** Soit la singularité  $[a] \in S_n^m$  de représentant naturel  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$

Supposons sans perdre de généralité que  $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ , alors

$$[a] \in \tilde{\mathfrak{J}} \iff a_3 = \dots = a_m = 1 \text{ et } [(a_1, a_2)]_n \in \tilde{\mathfrak{J}}$$



*Preuve.* D'après les proposition précédentes

- (  $\Leftarrow$  ) Si  $a_3 = \dots = a_m = 1$  et  $[(a_1, a_2)]_n \in \bar{\mathfrak{J}}$   
 Comme  $[(a_1, a_2)]_n \in \bar{\mathfrak{J}}$ , on a  $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$  (par ajout de poids à 1)
- (  $\Rightarrow$  ) Si  $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$   
 Alors  $a = (a_1, a_2, 1, \dots, 1)$  (par la conjecture)  
 Et  $[(a_1, a_2)] \in \bar{\mathfrak{J}}$  (par retrait de poids)

□

**Conjecture 2.** Si  $[a] \in \bar{\mathfrak{J}}$ , alors  $[a] \in \mathfrak{J}$ , donc  $\mathfrak{J} = \bar{\mathfrak{J}}$