Rapport de stage (été 2022)

Caractérisation des singularités de type J

Sous la supervision du

Professeur

Frédéric Rochon

et de Mehrdad Najafpour

Par Habib Jaber

Soit a = $(a_0,a_1,\ldots,a_m)$ et b = $(b_0,b_1,\ldots,b_m)$ deux éléments de $\mathbb{N}^{m+1}$.On dit que a et b sont congruents si $a_0=b_0$ et $a_i \equiv b_i \bmod(a_0)$ $\forall$ i > 1.On dénote par [a] la classe d'equivalence de a $\in \mathbb{N}^{m+1}$ .Une singularité (isolée) est une classe d'equivalence [a] telle que PGCD$(a_0,a_i) = 1$ $\forall$ i $\in$ {1,...,m}.

Définition 1.1:

Un éclatement d'une singularité [a] est un choix de représentant b=$(b_0,\ldots.,b_m) \in [a]$ tel que PGCD$(b_i ,b_j) = 1$ $\forall$ i,j $\in$ {0,…,m}.

Si $(a_0,\ldots.,a_m)$ est un éclatement de [b], alors pour chaque i > 0 tel que $a_i >1$, on a une nouvelle singularité $[a^i]=[(a_0^i,\ldots,a_m^i)]$ definie par $a_j^i:=a_j$ si $j \notin \{0,i\}$,$a_0^i=a_i$ et a_i^i choisi de sorte que $a_i^i \equiv -a_0 \bmod(a_i)$.

On dénote par E_a l'ensemble des singularités associées à l'éclatement a.Si $E_a=\phi$,on dit que l'éclatement est lisse.

Définition 1.2:

Un élément $(a_0,\ldots.,a_n) \in (\mathbb{N}^{m+1})^{n+1}$ est une suite d'éclatements d'une singularité [b] si a_0 est un éclatement de [b] et $\forall$ j > 0 a_j est un éclatement de$[b_j]$,où $[b_{j+1}] \in \left(\bigcup_{i=0}^{j} Ea_i\right) \setminus \{[b_1],\ldots[b_j]\}$ $\forall\ j \in \{0,\ldots,n\text{-}1\}$.
Dans ce cas,$([b_1],\ldots,[b_n])$ est la suite de singularités associée a la suite d'éclatements.

Définition 1.3:

Une singularité $[a] \in \mathbb{N}^{m+1}$ est de type J si elle admet un éclatement lisse ou s'il existe une suite d'éclatements $(a_0,\ldots.,a_n)$,telle que $\left(\bigcup_{i=0}^{n} Ea_i\right)=\{[b_1],\ldots,[b_n]\}$ pour la suite de singularités associeés $([b_1],\ldots,[b_n])$.

Exemple 1.1:

Soit [b] la singularité spécifiée par b = (5,3,2,1), alors a_0:= b est un éclatement de [b] avec Ea_0 = {[(2,1,1,1)],[(3,1,2,1)]}.

La singularité [(2,1,1,1)] admet l'éclatement lisse a_1= (2,1,1,1).

La singularité [(3,1,2,1)] admet l'éclatement a_2 = (3,1,2,1) telle que Ea_2={[(2,1,1,1)]}.

La singularité [(2,1,1,1)] admet l'éclatement lisse a_3:= (2,1,1,1).

Ainsi,(a_0,a_1,a_2,a_3) est une suite d'éclatements montrant que [b] est une singularité de type J.

Dans ce qui suit,on se restreint au cas où m=2.

On désigne par a mod(b) l'unique entier appartenant à {0,…,b-1}. Par exemple, 27 mod(13)=1 et (-27)mod(13)=12.

Lemme 1.1:

Soit a et b $\in \mathbb{N}^*$ tels que b ne divise pas a, alors (-a) mod(b) = b-(a mod(b)).

Preuve:

- Si a < b ,alors (-a)mod(b)=b-a=b-(a mod(b))

- Si a > b,la preuve se fait par récurrence forte sur a ;
  - pour a = 1,
    (-1) mod (b)= b-1 = b-(1 mod(b)) .

  - supposons que (-x) mod(b) = b- (x mod(b)) $\forall\ 2 \leq x < a$, $x \in \mathbb{N}$.

    Considérons la division euclidienne de a par b,

    a=k.b+r ,0 ≤ r < b ≤ a avec k , r $\in \mathbb{N}$.

    Si r =1 ,la peuve est similaire au cas où a =1.

    Pour 2 ≤ r < b ≤ a ; on a :

    b-(a mod(b))= b-(r mod(b)) = (-r) mod(b) = (kb-a)mod(b) = (-a)mod(b).

Lemme 1.2:

Soit a et b $\in \mathbb{N}^*$, alors PGCD(a,b) = PGCD(a+kb,b) $\forall\ k \in \mathbb{Z}$.

Preuve:

Soit d=PGCD(a,b) et d'=PGCD(a+kb,b).On montre que d=d'.

d divise a et d divise b, alors d divise toute combinaison linéaire de a et b.En particulier,d divise 1.a+k.b.Ce qui implique que d divise d'.

D'autre part,d' divise a+kb et d' divise b,alors d' divise 1.(a+kb)+(-k)b = a.Ce qui implique que d' divise d.Ainsi d=d'.

Proposition 1.1:

soit a_1 et a_2 deux entiers premiers entre eux tels que $a_1 \geq a_2$,alors $b=[(a_1+a_2,a_1,a_2)]$ est une singularité de type J.

preuve:

la preuve se fait par récurrence forte sur a_1 et a_2,

- pour $a_1=a_2=1$, $[(2,1,1)]$ est une singularité de type J puisqu'elle admet l'éclatement lisse (2,1,1).
- supposons que $[(a'+b',a',b')]$ est une singularité de type J pour tout a' et b' tels que $1 < a' < a_1$ et $1 < b' < b_1$,alors

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {[(a_1,(-(a_1+a_2))\mathrm{mod}(a_1),a_2)] = [(a_1,(-a_2)\mathrm{mod}(a_1),a_2)] = [(a_1, a_1-a_2, a_2)]} \quad ❶ \\
{[(a_1+a_2,a_1,a_2)]} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & {[(a_2, a_1 \mathrm{mod}(a_2), (-a_1)\mathrm{mod}(a_2)] = [(a_2,a_1 \mathrm{mod}(a_2),a_2- (a_1 \mathrm{mod}(a_2)))]} \quad ❷ .
\end{tikzcd}
$$

On montre d'abord que $(a_1,(-a_2)\mathrm{mod}(a_1),a_2)$ et $(a_2,a_1 \mathrm{mod}(a_2),(-a_1)\mathrm{mod}(a_2))$ sont des éclatements.

Par le lemme 1.2,on a $\mathrm{PGCD}(a_1-a_2,a_1) = \mathrm{PGCD}(a_1-a_2,a_2) = \mathrm{PGCD}(a_1,a_2) = 1$, alors ❶ est un éclatement.D'autre part,Si on montre que $\mathrm{PGCD}(a_1 \mathrm{mod}(a_2),a_2) = 1$, alors le lemme 1.2 impliquera que ❷ est aussi un éclatement . Or, si $a_1 \mathrm{mod}(a_2) = r \in \{0,\ldots,a_2-1\}$, alors $a_1 = k.a_2+r$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, $\mathrm{PGCD}(r,a_2) = \mathrm{PGCD}(a_1-k.a_2,a_2) = \mathrm{PGCD}(a_1,a_2) = 1$.

Maintenant ,on voit que :

$(a_1-a_2)+a_2 = a_1$ et $a_1 \mathrm{mod}(a_2) + (a_2-(a_1 \mathrm{mod}(a_2))) = a_2$;

ainsi ❶ et ❷ satisfont à l'hypothèse de récurrence, donc ❶ et ❷ sont des singularités de type J,ce qui implique que $[(a_1+a_2,a_1,a_2)]$ l'est aussi.

Exemple 1.2:

$[(60,31,29)]$ est une singularité de type J.

Proposition 1.2:

soit (a_0,a_1,a_2) un éclatement d'une singularité $[a]$ tel que $a_1 > a_2$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.Alors $[a]$ est une singularité de type J si et seulement si $[b]=[(a_0+k(a_1a_2),a_1,a_2)]$ l'est aussi.

Preuve:

Le fait que $(a_0+k(a_1a_2),a_1,a_2)$ est un éclatement de $[b]$ découle du lemme 1.2.Il suffit de voir que les deux éclatements génèrent les mêmes singularités ;

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & {[a_1,(-a_0) \bmod(a_1),a_2)]} \\
(a_0+k(a_1a_2),a_1,a_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & {[(a_2,a_1 \bmod(a_2),(-a_0)\bmod(a_2)]}
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & {[(a_1,(-a_0)\bmod(a_1),a_2)]} \\
(a_0,a_1,a_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & {[(a_2,a_1 \bmod(a_2),(-a_0)\bmod(a_2)]}
\end{tikzcd}$$
.

Exemple 1.3:

On vérifie que $[(13,10,3)]$ est une singularité de type J.On obtient une infinité de singularités de type J en ajoutant à 13 les multiples de 30.

Je termine avec une conjecture,un petit corollaire qui en découle et quelques remarques.

Conjecture:

Soit $a=(a_0,a_1,a_2)$ un éclatement d'une singularité [a] tel que $a_0 < a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1 , a_0-a_2)$,alors [a] est une singularité de type J si et seulement si $a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1,a_0-a_2)=a_0+1$.

Exemple 1.4:

Considérons a=(19,13,8).on a que $a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1 , a_0-a_2)=13+8+PGCD(6,11)=22$ et $a_0+1=20$, donc [(19,13,8)] n'est pas une singularité de type J.

Corollaire 1.1:

Étant donné deux entiers a_1 et a_2 premiers entre eux, alors $a_0:=a_1+a_2$ est le plus petit entier qui fait en sorte que $[(a_0,a_1,a_2)]$ est une singularité de type J.

Preuve:

Si $a_0 < a_1+a_2$ alors $a_0 < a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1 , a_0-a_2)$.D'autre part, $a_0 < a_1+a_2$ implique $a_0+1 < a_1 +a_2 +1\leq a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1 , a_0-a_2)$.d' après la conjecture précédente,$[(a_0,a_1,a_2)]$ n'est pas une singularité de type J.

Exemple 1.4:

[(59,31,29)] n'est pas une singularité de type J puisque 59 < 60.

Remarques:

1) Quelqu'un peut essayer de prouver la conjecture par récurrence sur a_1 et a_2.On voit déjà,dans un sens,que lorsque $a_1=a_2=1$,la condition est satisfaite($a_0 < a_0 +1$) et $a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1 , a_0-a_2)=1+1+a_0 - 1=a_0+1$!

2) la condition $a_0 < a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1,a_0-a_2)$ est nécessaire.Par exemple,on vérifie que [(23,10,3)] est une singularité de type J, mais 3+10+PGCD(13,20) ≠ 24

3) lorsque $a_0=a_1+a_2$,on sait déjà que $[(a_0,a_1,a_2)]$ est une singularité de type J.Mais quelqu'un peut s'assurer en utilisant la conjecture précédente.En effet,si $a_0 = a_1+a_2$,alors $a_1+a_2+PGCD(a_0-a_1,a_0-a_2) = a_1+a_2+PGCD(a_2,a_1) = a_1+a_2+1 = a_0+1$!

Références :

1. Vestislav Apostolov and Yann Rollin. ALE scalar-flat Kähler metrics on non-compact weighted projective spaces. Math. Ann., 367(3-4) :1685–1726, 2017.