Caractérisation des singularités de type $\mathfrak{J}$

Stage de recherche de premier cycle sous la supervision de
Frédéric Rochon et Carlo Scarpa

Félix Larose-Gervais

Été 2023

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivation

Ce document fait suite aux travaux[1] de Vestislav Apostolov et Yann Rollin, et tente de faire lumière sur le caractère des singularités de type $\mathfrak{J}$. On y répond a une question ouverte, énonce quelques propriétés du type $\mathfrak{J}$, et commence à caractériser une version plus stricte notée $\overline{\mathfrak{J}}$.

1.2 Notations

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On note la relation de coprimalité $\perp$

$$a \perp b \iff \gcd(a, b) = 1$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, X un ensemble. Notons

- S_m le groupe symétrique à m lettres;
- $\mathbb{Z}_n$ l'anneau des entiers modulo n ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$);
- $\mathbb{Z}_n^\times$ son groupe d'inversibles ($\{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \perp n\}$);
- X^m l'ensemble des m-tuplets de X ($\underbrace{X \times \cdots \times X}_{m fois}$).

On notera aussi S_n^m l'ensemble des m-tuplets d'inversibles modulo n ($(\mathbb{Z}_n^\times)^m$).

1.3 Définitions

Définition 1. *Une* ***singularité*** *est un m-tuplets $[a] = ([a_1], \dots, [a_m]) \in S_n^m$. On appelle*

- *n la* ***racine*** *de la singularité;*
- *$[a_1], \dots, [a_m]$ les* ***poids*** *de la singularité.*

Définition 2. *Un* ***éclatement*** *$a \in \mathbb{Z}^m$ d'une singularité $[a] \in S_n^m$ (noté $a \in [a]$) est un choix de représentant $a = (a_1, \dots, a_m)$ tel que*

$$\forall i \neq j : a_i \perp a_j.$$

On note E_a l'ensemble des singularités associées à l'éclatement a comme suit:

$$\begin{aligned} E_a &= \{[a^i] \in S_{a_i}^m \mid \forall i = 1..m,\ a_i > 1\} \textit{ où} \\ [a^i] &= ([a_1^i], \dots, [a_m^i]) \in S_{a_i}^m \textit{ avec} \\ [a_j^i] &\equiv \begin{cases} -n & \textit{si } i = j \\ a_j & \textit{sinon} \end{cases} \pmod{a_i} \quad \forall j = 1..m \end{aligned}$$

On appelle $a = (a_1, \dots, a_m)$ ***l'éclatement naturel*** *de $[a]$ si les $a_1, \dots, a_m$ sont les plus petits représentants positifs de leurs classes.*

Définition 3. *Un éclatement $a \in [a]$ est dit* ***lisse*** *si $a = (1, \dots, 1)$.*

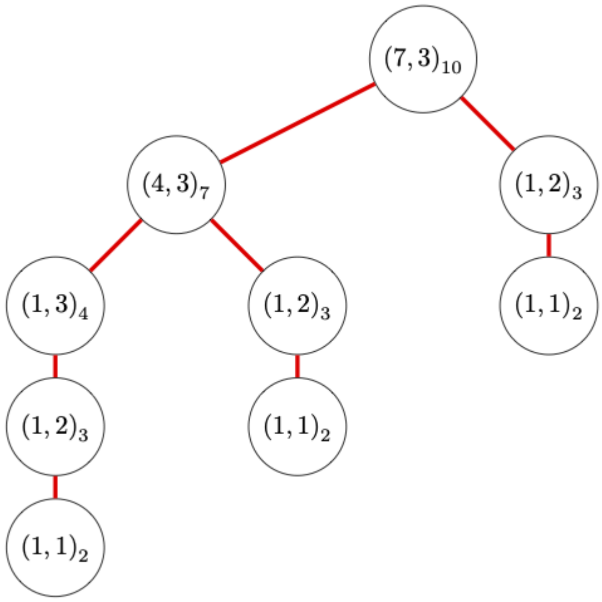
Définition 4. *En procédant récursivement, on dit qu'une singularité $[a]$ est de* ***type*** *$\mathfrak{J}$ (noté $[a] \in \mathfrak{J}$) si $[a]$ possède un éclatement lisse ou s'il existe $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$.*

De même, en procédant récursivement, on dit qu'une singularite $[a]$ est de ***type*** *$\mathfrak{J}$* ***strict*** *(noté $[a] \in \overline{\mathfrak{J}}$) lorsque pour $a \in [a]$ l'éclatement naturel de $[a]$ on a que a est lisse ou que $E_a \subset \overline{\mathfrak{J}}$.*

1.4 Arbre d'éclatements

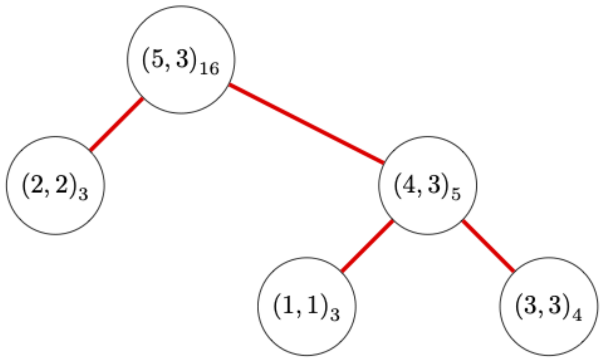
Calculer l'arbre d'éclatements d'une singularité permet de la classifier comme de type $\mathfrak{J}$ ou non. Il est obtenu en appliquant récursivement la définition 2 et en vérifiant les coprimalités nécessaires à chaque étape.

Figure 1: Arbre d'éclatement montrant $(7,3)_{10} \in \overline{\mathfrak{J}}$



On remarque dans l'example suivant que les noeuds $(2,2)_3$ et $(3,3)_4$ ne respectent pas les coprimalités nécessaires et donc ne sont pas de type $\overline{\mathfrak{J}}$. La singularité racine de l'arbre $(5,3)_{16}$ n'est donc pas de type $\overline{\mathfrak{J}}$.

Figure 2: Arbre d'éclatement montrant $(5,3)_{16} \notin \overline{\mathfrak{J}}$



1.5 Rappels d'arithmétique

1.5.1 Algorithme d'Euclide et plus grand diviseur commun (PGDC)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On peut calculer le plus grand diviseur commun $\gcd(a, b)$ de a et b en procédant récursivement comme suit (supposant $\gcd(a, b) > 0$):

$$\gcd(a,b) := \begin{cases} a & \text{si } b = 0, \\ \gcd(b, a \mod b) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec $k \in \mathbb{Z}$, on a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \gcd(a, 1) &= 1, \\ \gcd(a, b) &= \gcd(b, a), \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, -b), \\ \gcd(a, b) &= \gcd(a, b + ka). \end{aligned}$$

De la dernière on déduit directement, pour $n \in \mathbb{N}$, que

$$a \equiv b \pmod{n} \implies \gcd(a, n) = \gcd(b, n).$$

1.5.2 Théorème des restes chinois

Soient $m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$. Notons le produit $n = n_1 \cdots n_m$.

Si $\forall i \neq j : n_i \perp n_j$, alors $\exists! x \in \mathbb{Z}_n$ tel que

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_m \pmod{n_m}. \end{aligned}$$

Cette solution, pour $m = 2$,

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \end{aligned}$$

est obtenue comme suit:
Puisque $n_1 \perp n_2$, on a $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = sn_1 + tn_2$
Et donc $x = a_1 t n_2 + a_2 s n_1$ est l'unique solution $\pmod{n_1 n_2}$
Cette méthode nous laisse $m - 1$ équations dans le système
Ainsi, pour $m > 2$, il suffit d'itérer le processus jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une.

1.6 Résultats connus

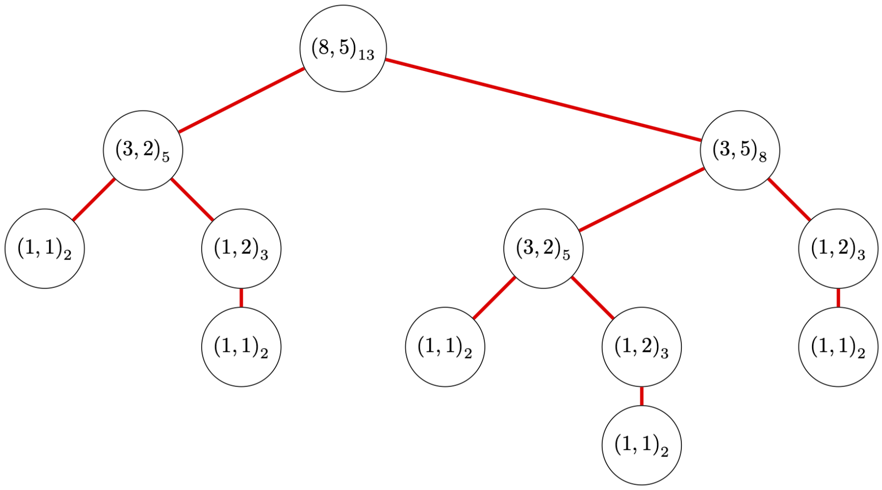
Résultats utiles, dus à Habib Jaber[2].

Proposition 1. *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$, *alors*

$$a \perp b \implies (a, b)_{a+b} \in \overline{\mathfrak{J}}.$$

Exemple 1. $8 \perp 5 \implies (8, 5)_{13} \in \overline{\mathfrak{J}}$

Figure 3: Illustration avec la suite de Fibonacci

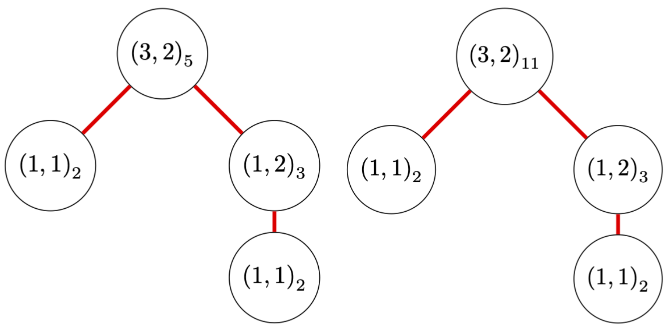


Proposition 2. *Si* $a, b \in \mathbb{Z}$, *alors*

$$(a, b)_n \in \overline{\mathfrak{J}} \implies \forall k \in \mathbb{Z}^{\times} : (a, b)_{n+kab} \in \overline{\mathfrak{J}}.$$

Exemple 2. $[(3, 2)]_5 \in \overline{\mathfrak{J}} \implies (3, 2)_{11} \in \overline{\mathfrak{J}}$

Figure 4: $(3, 2)_5 \cong (3, 2)_{11}$



2 Nouveaux résultats

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m, n \geq 2$ et $[a] = ([a_1], \ldots, [a_m])_n \in S_n^m$ une singularité.

2.1 Existence d'un éclatement

Proposition 3. *Toute singularité isolée admet un éclatement.*

Preuve. Prenons $(a_1, \ldots, a_m) \in [a]$ le représentant naturel de $[a]$

On cherche $(b_1, \ldots, b_m) \in [a]$ tels que $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$ et $\forall i : b_i \perp n$

Il suffit de prendre $b_1 = a_1$ et $\forall i = 2..m$, un b_i vérifiant

$$\begin{aligned} b_i &\equiv a_i \pmod{n} \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_1} \\ &\vdots \\ b_i &\equiv 1 \pmod{b_{i-1}} \end{aligned}$$

De tels b_i existent par le théorème des restes chinois.

On vérifie les coprimalités nécessaires grâce aux propriétés de gcd. En effet,

On a par la première congruence que $\forall i : b_i \perp n$ (puisque $\forall i : a_i \perp n$).

Et par les suivantes $\forall i \neq j : b_i \perp b_j$.

On a donc bien que $b = (b_1, \ldots, b_m)$ est un éclatement de $[a]$. □

2.2 Propriétés

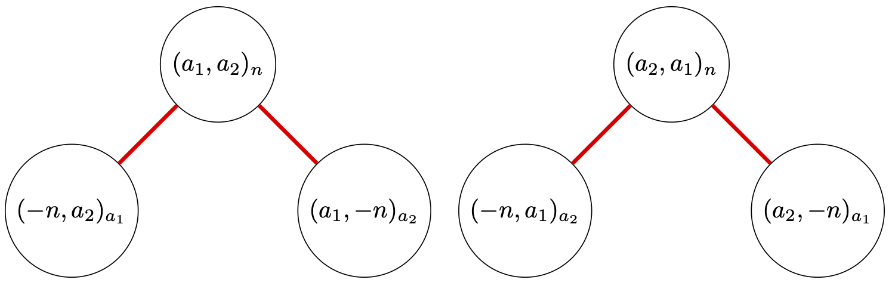
2.2.1 Symétrie

Proposition 4. *Le réarrangement des poids préserve le type $\mathfrak{J}$. Soit $\sigma \in S_m$, on a*

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies \sigma([a]) \in \mathfrak{J}.$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$. Il suffit d'observer que $E_a \cong E_{\sigma(a)}$. □

Figure 5: Illustration avec $a = (a_1, a_2)$, $\sigma = (12)$



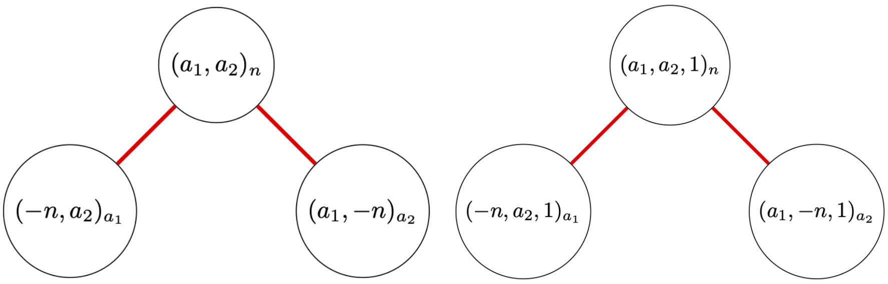
2.2.2 Ajout de poids

Proposition 5. *L'ajout de poids de valeur 1 préserve le type* $\mathfrak{J}$*:*

$$([a_1], \ldots, [a_m])_n \in \mathfrak{J} \implies ([a_1], \ldots, [a_m], [1])_n \in \mathfrak{J}.$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$, $b = (a_1, \ldots, a_m, 1)$. Il suffit d'observer que $E_a \cong E_b$ $\square$

Figure 6: Illustration avec $a = (a_1, a_2)$



2.2.3 Retrait de poids

Proposition 6. *Le retrait de poids préserve le type* $\mathfrak{J}$*:*

$$([a_1], \ldots, [a_m])_n \in \mathfrak{J} \implies ([a_1], \ldots, [a_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}.$$

Preuve. Prenons $a \in [a]$ tel que $E_a \subset \mathfrak{J}$.

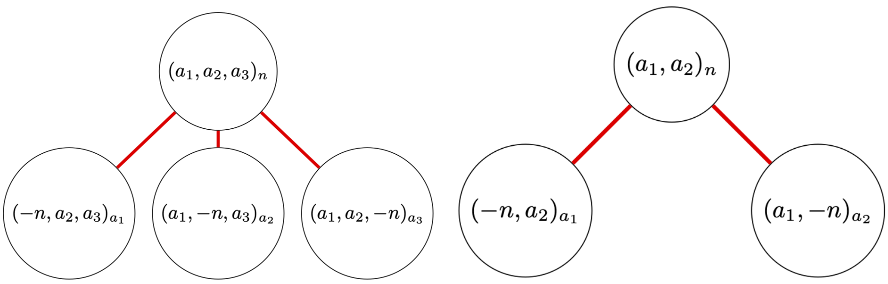
La preuve se fait par induction structurelle.

D'abord, on observe $([1], \ldots, [1])_n \in \mathfrak{J}$.

Puis on suppose que $\forall [b] \in E_a : [b] \in \mathfrak{J} \implies ([b_1], \ldots, [b_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}$.

On en conclut $([a_1], \ldots, [a_{m-1}])_n \in \mathfrak{J}$. $\square$

Figure 7: Illustration pour $m = 3$



2.3 Caractérisation stricte

2.3.1 Frontière

Proposition 7. *Soit* $[a] \in S_n^2$*, d'éclatement naturel* $a = (a_1, a_2) \in [a]$*. Alors*

$$[a] \in \overline{\mathfrak{J}} \implies n \geq a_1 + a_2.$$

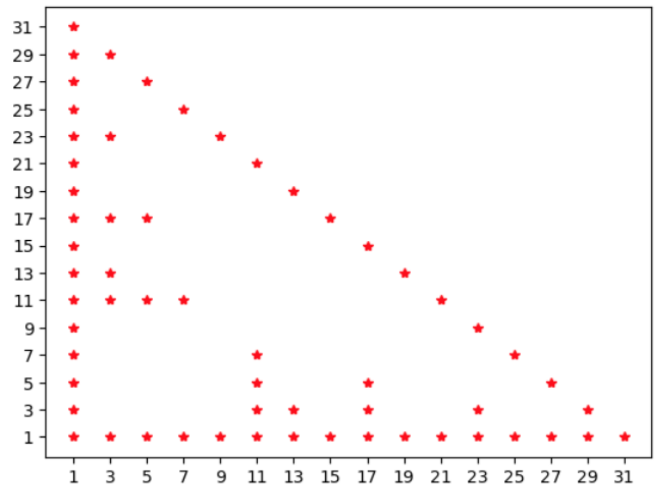
Preuve. Par contraposée, supposons $n < a_1 + a_2$ $(\star)$

- Si $a_1 = a_2$ ($\neq 1$ par $(\star)$), alors $[a] \notin \overline{\mathfrak{J}}$.
- Sinon, $a_1 \neq a_2$, et on peut supposer sans perdre de généralité que $a_1 > a_2$.
  Considérons a^1 l'éclatement naturel de $[a^1] \in E_a$ la singularité associée à a_1.
  On a que $a^1 = (-n \mod a_1,\ a_2 \mod a_1)$.
  Puisque $a_1 > a_2$, on a $2a_1 > a_1 + a_2 > n$, donc $a_1 < n < 2a_1$.
  On en déduit que $(-n \mod a_1) = 2a_1 - n$.
  Aussi, $(a_2 \mod a_1) = a_2$ car $a_1 > a_2$.
  On a donc $a^1 = (2a_1 - n,\ a_2)$.
  Puisque $n < a_1 + a_2$, on a $a_1 < 2a_1 - n + a_2$.
  Donc $[a^1] \in S_{a_1}^2$ vérifie la condition $(\star)$.
  En répétant le raisonnement avec $[a^1]$, on voit en itérant que l'arbre d'éclatements de $[n]$ contient un élément $[b] \in S_a^2$ avec représentant $(b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1 < b_1 = b_2 < k$.
  Donc $[b] \notin \overline{\mathfrak{J}}$ et, a fortiori $[a] \notin \overline{\mathfrak{J}}$.

$\square$

Exemple 3. $(4,3)_5 \notin \overline{\mathfrak{J}}$ *car* $5 < 4 + 3$

Figure 8: Singularités $s \in S_{32}^2$ telles que $s \in \overline{\mathfrak{J}}$



3 Conjectures

3.1 Combinaison linéaire

Conjecture 1. *Soit* $(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$, *alors* $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_{>0}$ *tels que*

$$\alpha a + \beta b = n$$

Argument heuristique potentiel
Puisque $a \perp b$, prenons $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = as + bt$ (par Bézout).
Considérons les systèmes modulaires suivants:

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod a \quad & y &\equiv n \pmod a, \\ x &\equiv n \pmod b \quad & y &\equiv 0 \pmod b. \end{aligned}$$

Par le Théorème des restes chinois, l'unique solution est:

$$\begin{aligned} x &\equiv nas \pmod{ab} \\ y &\equiv nbt \pmod{ab} \end{aligned}$$

On a donc (toujours modulo ab)

$$\begin{aligned} x + y &\equiv nas + nbt \\ &\equiv n(as + bt) \\ &\equiv n \end{aligned}$$

Et comme $a|x$ et $b|y$, prenons $\alpha = \frac{x}{a}$ et $\beta = \frac{y}{b}$, des entiers

$$\begin{aligned} n &\equiv x + y \\ &\equiv \frac{x}{a}a + \frac{y}{b}b \\ &\equiv \alpha a + \beta b \end{aligned}$$

Il reste à montrer que cette égalité n'est pas seulement vraie dans $\mathbb{Z}_{ab}$ mais aussi dans $\mathbb{Z}$.

Une piste de recherche explorée jusqu'ici sans succès passe par le probème des pièces de monnaie. On peut reformuler la conjecture comme suit: $(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$ implique que n est représentable par a et b (c'est-à-dire somme de multiples strictement positifs de a et b) $(\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}_{>0}, \alpha a + \beta b = n)$, même si $n < g(a,b) = ab - (a+b)$ le nombre de Frobenius[3, page 134]. Il est connu que la moitié de ces nombres $a + b < n < g(a,b)$ (ceux de la forme $n = ab - ka - qb$) sont non-représentables. Montrer que ces $(a,b)_n \notin \overline{\mathfrak{J}}$ suffirait à montrer la conjecture.

3.2 Anti-symétrie

Corollaire 1. *Soit* $[s] \in S_n^2$ *d'éclatement naturel* $(a,b) \in [s]$, *avec* $a, b > 1$. *Alors*

$$(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}} \implies (-a,b)_n \notin \overline{\mathfrak{J}}.$$

Preuve. Supposons $(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$

La chaine d'éclatements naturels à gauche successifs de $(-a,b)_n$ est, pour $i > 0$, $n - ia > 0$

$$(n - ia, b)_{n-(i-1)a}.$$

Prenons $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_{>0}$ tels que $\alpha a + \beta b = n$ comme énoncé dans la conjecture 1.
On a que, lorsque $i = \alpha$, $n - ia = n - \alpha a = \beta b$.
Donc $b|(n - ia)$.
Puisque $b > 1$, $b \not\perp (n - ia)$, ce qui montre que $(n - ia, b)_n \notin \overline{\mathfrak{J}}$ de sorte que $(-a,b)_n \notin \overline{\mathfrak{J}}$. $\square$

3.3 Échange racine-poids

Corollaire 2. *Soit* $[s] \in S^2_n$ *d'éclatement naturel* $(a,b) \in [s]$*, avec* $a,b > 1$*. Alors*

$$(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}} \implies (n,b)_a \notin \overline{\mathfrak{J}}.$$

Preuve. Supposons que $(a,b)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$.

Donc son éclatement $(-n,b)_a \in \overline{\mathfrak{J}}$, de sorte que, par anti-symétrie, $(n,b)_a \notin \overline{\mathfrak{J}}$ □

3.4 Restriction au bord

Corollaire 3. *Soit* $[s] \in S^3_n$ *d'éclatement naturel* $(a,b,c) \in [s]$*, avec* $a,b,c > 1$*. Alors*

$$(a,b,c)_n \notin \overline{\mathfrak{J}}.$$

Preuve. Si $(a,b,c)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$, alors ses éclatements $(-n,b,c)_a \in \overline{\mathfrak{J}}$ et $(a,-n,c)_b \in \overline{\mathfrak{J}}$

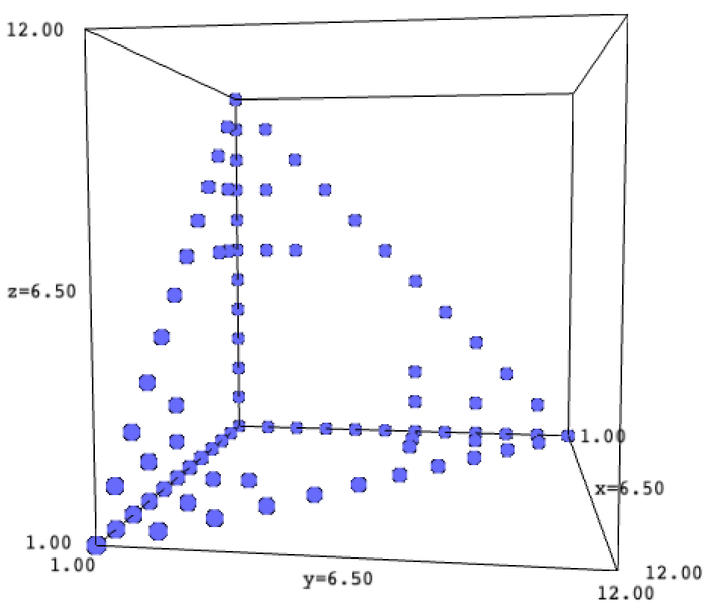
Par retrait de poids, $(b,c)_a \in \overline{\mathfrak{J}}$ et $(a,c)_b \in \overline{\mathfrak{J}}$, ce qui contredit l'échange racine-poids du corollaire précédant. □

Corollaire 4. *Pour être de type* $\overline{\mathfrak{J}}$*, une singularité ne peut avoir plus de 2 poids supérieurs à 1.*

Preuve. Si une singularité de type $\overline{\mathfrak{J}}$ contient les poids $a,b,c > 1$, alors, par retrait de poids $(a,b,c)_n \in \overline{\mathfrak{J}}$, contradiction. □

Exemple 4. *On observe que les singularités de type* $\overline{\mathfrak{J}}$ *de* S^3_n *sont sur le bord*

Figure 9: Singularités $s \in S^3_{13}$ telles que $s \in \overline{\mathfrak{J}}$



Conjecture 2. *Si* $[a] \in \overline{\mathfrak{J}}$*, alors* $[a] \in \mathfrak{J}$*, donc* $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$

References

[1] Vestislav Apostolov and Yann Rollin. Ale scalar-flat kähler metrics on non-compact weighted projective spaces, 2016.

[2] Habib Jaber. Caractérisation des singularité de type j, 2022.

[3] James Joseph Sylvester. On subinvariants, i.e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order, 1882.