Caractérisation des singularités de type $\mathfrak{J}$

Félix Larose-Gervais

Mai 2023

Contents

1 Introduction

1.1 Définitions

Soit $r, n \in \mathbb{N}$, notons $\mathbb{Z}_r$ l'anneau $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_r^\times$ son groupe d'inversibles

Définition 1. *Une* ***singularité*** *est un* $[a] = ([a_1], \ldots, [a_n]) \in (\mathbb{Z}_r^\times)^n$*, on appelle*

- r *la* ***racine*** *de la singularité*
- $[a_1], \ldots, [a_n]$ *les* ***poids*** *de la singularité*

Définition 2. *Un* ***éclatement*** $a \in \mathbb{Z}^n$ *d'une singularité* $[a]$ *(noté* $a \in [a]$*) est un choix de représentant* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *tel que*

$$\gcd(a_i, a_j) = 1 \qquad (\forall i \neq j)$$

On note E_a *l'ensemble des singularités associées à l'éclatement* a *comme suit:*

$$E_a = \{([a_1^i], \ldots, [a_n^i]) \mid \forall i = 1..n,\ a_i > 1, [a_1^i], \ldots, [a_n^i] \in \mathbb{Z}_{a_i}^\times\}$$
$$\forall j = 1..n : [a_j^i] \equiv \begin{cases} -r & si\ i = j \\ a_j & sinon \end{cases} \pmod{a_i}$$

Définition 3. *Un éclatement* $a \in [a]$ *est dit* ***lisse*** *si* $E_a = \emptyset$

Définition 4. *La singularité* $[a]$ *est dite de* ***type*** $\mathfrak{J}$ *(noté* $[a] \in \mathfrak{J}$*) ssi*

$$\exists a \in [a] : \forall [a^i] \in E_a : [a^i] \in \mathfrak{J}$$

1.2 Résultats connus

Résultats utiles, dûs à Habib Jaber.

Proposition 1. *Soit* $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a_1, a_2) = 1$*, alors*

$$[(a_1 + a_2, a_1, a_2)] \in \mathfrak{J}$$

Exemple 1. $\gcd(2, 1) = 1 \implies [(3, 2, 1)] \in \mathfrak{J}$

Proposition 2.

$$[(a_0, a_1, a_2)] \in \mathfrak{J} \iff \forall k \in \mathbb{Z} : [(a_0 + k(a_1 a_2), a_1, a_2)] \in \mathfrak{J}$$

Exemple 2. $[(3, 2, 1)] \in \mathfrak{J} \implies [(5, 2, 1)] \in \mathfrak{J},\ [(7, 2, 1)] \in \mathfrak{J}, \ldots$

2 Propositions

Soit $\sigma \in S_n$, notons la permutation π

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Z}_r^n &\to \mathbb{Z}_r^n \\ ([a_1], \ldots, [a_n]) &\mapsto ([a_{\sigma(1)}], \ldots, [a_{\sigma(n)}]) \end{aligned}$$

Proposition 3. *L'ordre des poids d'une singularité n'affecte pas le type* $\mathfrak{J}$

Soit $[a] = ([a_1], \ldots, [a_n]) \in (\mathbb{Z}_r^\times)^n$*, alors*

$$[a] \in \mathfrak{J} \implies \pi([a]) \in \mathfrak{J}$$

Proof. Notons $[b] = \pi([a])$

On a, pour a l'éclatement trivial de $[a]$

$$\begin{aligned} E_a &= \{([a_1^i], \ldots, [a_n^i]) \mid \forall i = 1..n,\ a_i > 1,\ [a_1^i], \ldots, [a_n^i] \in \mathbb{Z}_{a_i}^\times\} \\ [a_j^i] &\equiv \begin{cases} -r & \text{si } i = j \\ a_j & \text{sinon} \end{cases} \pmod{a_i} \quad \forall j = 1..n \end{aligned}$$

Considérons, pour b l'éclatement trivial de $[b]$

$$\begin{aligned} E_b &= \{([b_1^i], \ldots, [b_n^i]) \mid \forall i = 1..n,\ b_i > 1,\ [b_1^i], \ldots, [b_n^i] \in \mathbb{Z}_{b_i}^\times\} \\ [b_j^i] &\equiv \begin{cases} -r & \text{si } i = j \\ b_j & \text{sinon} \end{cases} \pmod{b_i} \\ &\equiv \begin{cases} -r & \text{si } \sigma(i) = \sigma(j) \\ a_{\sigma(j)} & \text{sinon} \end{cases} \pmod{a_{\sigma(i)}} \quad \forall j = 1..n \end{aligned}$$

Donc $[b_j^i] = [a_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}]$

Donc $[b^i] = ([a_{\sigma(1)}^{\sigma(i)}], \ldots, [a_{\sigma(n)}^{\sigma(i)}]) = \pi([a^{\sigma(i)}])$

Ainsi $E_b = \{\pi([a^{\sigma(i)}]) \mid \forall i = 1..n,\ a_{\sigma(i)} > 1\} = \{\pi(a^i) \mid \forall i = 1..n,\ a_i > 1\}$

Donc π est une bijection entre E_a et E_b

Et elle préserve le caractère lisse

S'il existe une suite d'éclatements montrant $[a] \in \mathfrak{J}$

L'application de π à ces éléments est une suite montrant $[b] \in \mathfrak{J}$ □

Exemple 3. *Sachant* $(5, 3, 1) \in \mathfrak{J}$*, on en déduit* $(5, 1, 3) \in \mathfrak{J}$

Proposition 4. *Soit $a = (a_0, a_1, a_2)$, alors*

$$a \in \mathfrak{J} \implies a_0 \geq a_1 + a_2$$

Proof. Supposons $a_0 < a_1 + a_2$

Si $a_1 = a_2$, alors $\neg\mathfrak{J}(a)$

Sinon, $a_1 \neq a_2$, supposons sans perdre de généralité que $a_1 > a_2$

Considérons l'éclatement $a^1 = (a_1,\ -a_0 \mod a_1,\ a_2 \mod a_1) \in E_a$

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 &\implies 2a_1 > a_1 + a_2 \\ &\implies (-a_0 \mod a_1) = 2a_1 - a_0 \\ a_1 > a_2 &\implies (a_2 \mod a_1) = a_2 \end{aligned}$$

On a donc $a^1 = (a_1, 2a_1 - a_0, a_2)$

Puisque $a_0 < a_1 + a_2$, on a $a_1 < 2a_1 - a_0 + a_2$

Donc a^1 vérifie la condition initiale, on répète le raisonnement avec a^1 $\square$

Exemple 4. $(5, 4, 3) \notin \mathfrak{J}$ *car* $5 < 7$

3 Conjectures

Conjecture 1. *Soit $a = (a_0, a_1, a_2)$ un éclatement d'une singularité $[a]$*

Posons $s = a_1 + a_2 + \gcd(a_0 - a_1, a_0 - a_2)$

Supposons $a_0 < s$

Alors $[a]$ est de type $\mathfrak{J} \implies s = a_0 + 1$

On constate que la réciproque n'est pas vraie, par exemple prenons $(13, 7, 4)$, on a $s = 14$, vérifiant donc $a_0 < 14$ et $a_0 + 1 = 14$, or elle n'est pas de type $\mathfrak{J}$.

Conjecture 2. *Soit $a = (a_0, a_1, a_2)$ un éclatement d'une singularité $[a]$*

Alors $[a]$ est de type $\mathfrak{J} \implies \exists p, q : a_0 = p * a_1 + q * a_2$