

# Caractrisation des singularits de type $\mathfrak{J}$

Flix Larose-Gervais

Mai 2023

## **1 Introduction**

## 2 Propositions

Soit  $n \in \mathbb{N}, \sigma \in S_n$ , notons

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{N}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{N}^{n+1} \\ (a_0, a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_0, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)})\end{aligned}$$

**Proposition 1.** Soit  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ , alors

$$\mathfrak{J}(a) \iff \mathfrak{J}(\pi(a))$$

*Proof.* Notons  $b = \pi(a)$

On a  $E_a = \{a^i \mid i = 1..n, a_i > 1\}$ ,  $a^i = (a_i, a_1^i, \dots, a_n^i)$

Avec  $\forall j = 1..n$ ,  $a_j^i = \begin{cases} -a_0 \mod a_i & \text{si } i = j \\ a_j \mod a_i & \text{sinon} \end{cases}$

Considérons  $E_b = \{b^i \mid i = 1..n, b_i > 1\}$ ,  $b^i = (b_i, b_1^i, \dots, b_n^i)$

Avec  $\forall j = 1..n$

$$b_j^i = \begin{cases} -b_0 \mod b_i & \text{si } i = j \\ b_j \mod b_i & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} -a_0 \mod a_{\sigma(i)} & \text{si } \sigma(i) = \sigma(j) \\ a_{\sigma(j)} \mod a_{\sigma(i)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc  $b_j^i = a_{\sigma(j)}^{\sigma(i)}$

Donc  $b^i = (a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(1)}^{\sigma(i)}, \dots, a_{\sigma(n)}^{\sigma(i)}) = \pi(a^{\sigma(i)})$

Ainsi  $E_b = \{\pi(a^{\sigma(i)}) \mid i = 1..n, a_{\sigma(i)} > 1\}$

C'est-à-dire  $E_b = \{\pi(a^i) \mid i = 1..n, a_i > 1\}$

Donc  $\pi$  est une bijection entre  $E_a$  et  $E_b$

Et elle préserve le caractère lisse

S'il existe une suite d'éléments montrant  $\mathfrak{J}(a)$

L'application de  $\pi$  ces éléments est une suite montrant  $\mathfrak{J}(b)$

La réciproque est vraie car  $a = \pi^{-1}(\pi(a))$

□

**Proposition 2.** Soit  $a = (a_0, a_1, a_2)$ , alors

$$\mathfrak{J}(a) \implies a_0 \geq a_1 + a_2$$

*Proof.* Supposons  $a_0 < a_1 + a_2$

Si  $a_1 = a_2$ , alors  $\neg \mathfrak{J}(a)$

Sinon,  $a_1 \neq a_2$ , supposons sans perdre de gnralit que  $a_1 > a_2$

Considrons l'clatement  $a^1 = (a_1, -a_0 \bmod a_1, a_2 \bmod a_1) \in E_a$

$$\begin{aligned} a_1 > a_2 &\implies 2a_1 > a_1 + a_2 \\ &\implies (-a_0 \bmod a_1) = 2a_1 - a_0 \\ a_1 > a_2 &\implies (a_2 \bmod a_1) = a_2 \end{aligned}$$

On a donc  $a^1 = (a_1, 2a_1 - a_0, a_2)$

Puisque  $a_0 < a_1 + a_2$ , on a  $a_1 < 2a_1 - a_0 + a_2$

Donc  $a^1$  vrifie la condition initiale, on rpte le raisonnement avec  $a^1$  □

### 3 Conjectures

**Conjecture 1.** Soit  $a = (a_0, a_1, a_2)$  un clatement d'une singularit  $[a]$

Posons  $s = a_1 + a_2 + \gcd(a_0 - a_1, a_0 - a_2)$

Supposons  $a_0 < s$

Alors  $[a]$  est de type  $\mathfrak{J} \implies s = a_0 + 1$

On constate que la rciproque n'est pas vraie, par exemple prenons  $(13, 7, 4)$ , on a  $s = 14$ , vrifiant donc  $a_0 < 14$  et  $a_0 + 1 = 14$ , or elle n'est pas de type  $\mathfrak{J}$ .

**Conjecture 2.** Soit  $a = (a_0, a_1, a_2)$  un clatement d'une singularit  $[a]$

Alors  $[a]$  est de type  $\mathfrak{J} \implies \exists p, q : a_0 = p * a_1 + q * a_2$