

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko

# **r-regularni grafi brez trikotnikov**

Avtorja:  
Luka Hodnik  
Filip Cerkovnik

Februar 2026

**Kazalo**

# 1 Uvod

Naj bo  $r$  liho število. V projektu obravnavamo problem karakterizacije povezanih, trikotnikov prostih in  $r$ -regularnih grafov, ki zadoščajo naslednjim pogojem:

1. Za vsako vozlišče  $v$  je množica  $N(v)$  maksimalna močna liha neodvisna množica.
2. Obstaja vsaj eno vozlišče  $v$ , za katero je množica  $N(v)$  maksimalna močna liha neodvisna množica.
3. Velja  $\alpha_{od}(G) = r$ .

Gre za tri različne probleme, pri čemer velja zaporedje implikacij

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii).$$

Znana sta dva primera grafov, ki zadoščata pogoju (i), in sicer Petersenov graf ter polni dvodelni graf  $K_{r,r}$ , kjer je  $r$  liho. Pomagali si bomo tudi z 2 znanima dejstvoma iz literature:

1. Nujen pogoj za izpolnjevanje pogojev (i) in (ii) je, da ima graf premer največ 3.
2. Kar zadeva pogoj (iii), pri katerem  $r \geq 3$  ni nujno liho število, zaradi odsotnosti pogojev na sosedstva  $N(v)$  velja zgornja meja za red grafa

$$|V(G)| \leq r(r^2 - 1).$$

## 2 Cilji naloge

Cilji naloge so trije:

1. Poiskati grafe, ki ustrezajo pogojem (i), (ii) in (iii) za različne vrednosti  $n$  in  $r$ .
2. Uporabiti naključne sprehode med večjimi grafi s premerom največ 3.
3. Preveriti pogoje na močno regularnih grafih  $\text{srg}(n, r, \lambda = 0, \mu)$ .

### 3 Iskanje grafov, ki zadoščajo pogojem (i), (ii) in (iii)

#### 3.1 (i) del

V tem delu obravnavamo grafe, za katere velja, da ima vsako vozlišče maksimalno močno liho neodvisno množico enake velikosti.

##### Opis pristopa

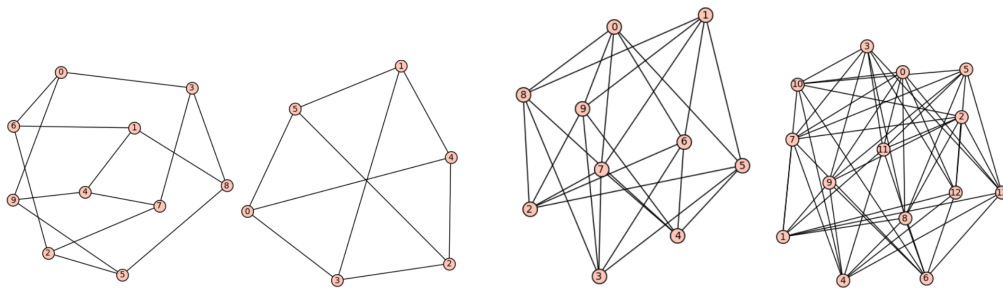
Ker gre za zelo restriktiven pogoj, smo se omejili na sistematično iskanje grafov majhnega reda. Pri tem smo upoštevali znano dejstvo, da je nujen pogoj za izpolnitev tega pogoja, da ima graf premer največ 3. S tem smo bistveno zmanjšali iskalni prostor.

Preverjanje lastnosti smo izvedli z računalniškim programom, ki za vsak kandidatni graf izračuna velikost maksimalne močne lihe neodvisne množice glede na posamezno vozlišče.

##### Ugotovitve

Rezultati kažejo, da je pogoj izjemno močan in ga izpolnjuje zelo malo grafov. Pri majhnih redih se pojavi le nekaj izjem, ki so večinoma dobro znani in imajo visoko stopnjo simetrije.

Med najbolj značilnimi primeri se pojavita Petersenov graf in družina grafov  $K_{r,r}$ , kjer je  $r$  liho število. Gre za grafe z majhnim premerom in enakomerno razporejeno strukturo. To nakazuje, da je visoka simetrija grafa ključnega pomena za izpolnjevanje pogoja iz tega dela naloge.



Slika 1: Grafi, ki ustrezajo i). Po vrsti: Petersenov graf,  $K_{3,3}$ ,  $K_{5,5}$ ,  $K_{7,7}$ .

### 3.2 (ii) del

V tem delu obravnavamo grafe, za katere obstaja vsaj eno vozlišče  $v$ , tako da je njegova sosednost  $N(v)$  maksimalna močno liha neodvisna množica (strong odd independent set).

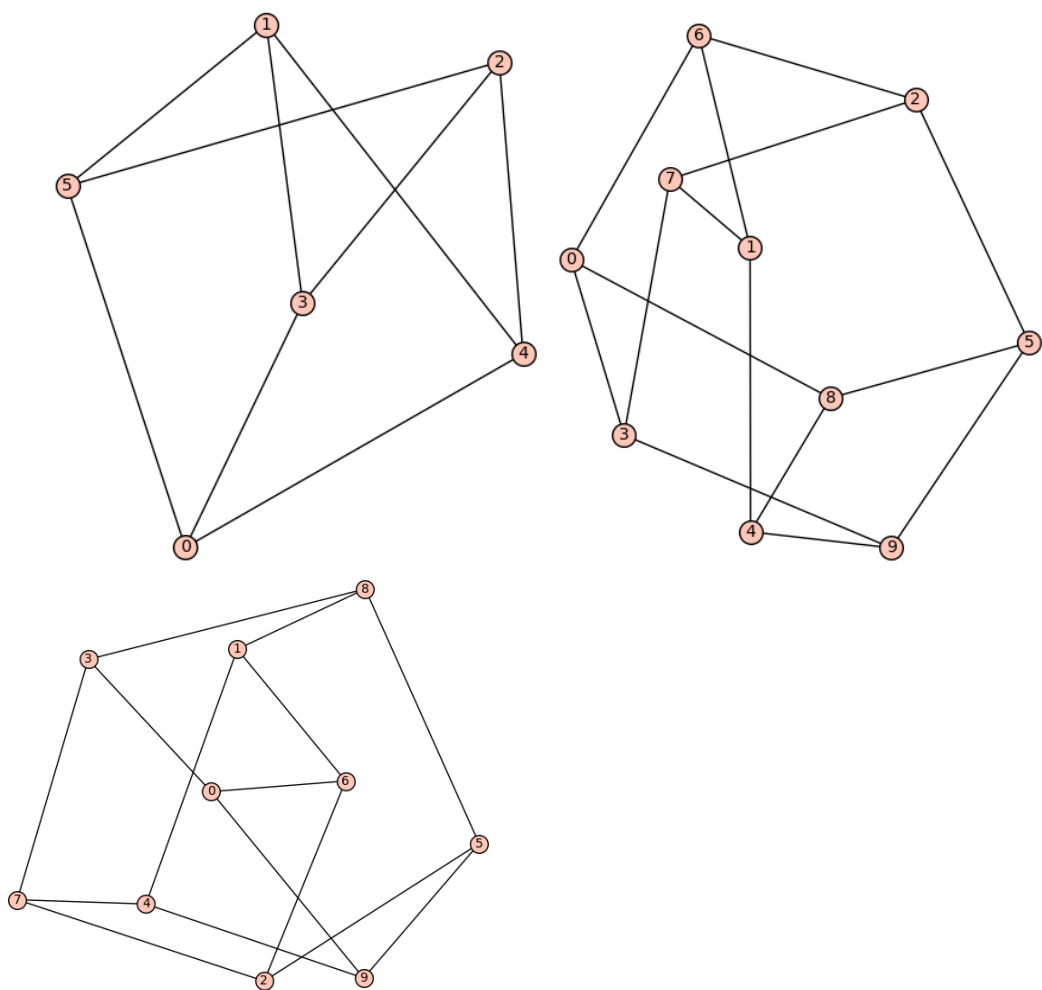
#### Opis pristopa

Pogoj (ii) je strukturno manj zahteven kot pogoj (i), saj ne zahteva, da so vse sosednosti vseh vozlišč maksimalne po velikosti, temveč le, da za vsaj eno vozlišče obstaja  $N(v)$ , ki doseže globalno maksimalno velikost  $\alpha_{od}(G)$ .

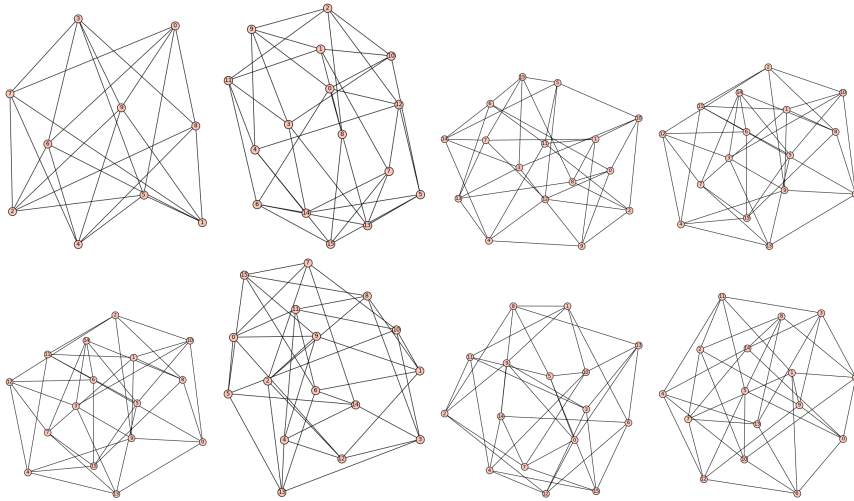
Pristop temelji na generiranju in analizi grafov majhnega reda. Za vsak graf preverimo, ali obstaja vozlišče  $v$ , za katerega  $N(v)$  zadostuje pogojem močne lihe neodvisnosti in hkrati dosega največjo možno velikost  $\alpha_{od}(G)$ .

#### Ugotovitve

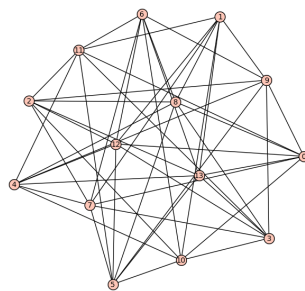
Rezultati kažejo, da je ta pogoj precej pogostejši kot pogoj (i). Poleg visoko simetričnih grafov, kot sta Petersenov graf in popolni dvodelni graf  $K_{r,r}$  z lihimi  $r$ , obstajajo tudi drugi grafi, ki zadostijo temu pogoju. Pogoj (ii) je zato veliko bolj vključujoč in se pojavlja v raznolikih strukturah, ki omogočajo, da se z vidika vsaj enega vozlišča identificira maksimalna močno liha neodvisna množica.



Slika 2: Graf, ki ustreza ii) za  $n = 14$ ,  $r = 7$



Slika 3: Grafi, ki ustrezajo ii) za  $r = 5$  pri različnih  $n$



Slika 4: Graf, ki ustreza ii) za  $n = 14$ ,  $r = 7$

### 3.3 (iii) del

V tem delu obravnavamo najšibkejši pogoj, in sicer da velja

$$\alpha_{od}(G) = r.$$

Pri tem ne zahtevamo posebnih pogojev glede posameznih vozlišč. Ker je pogoj bistveno šibkejši kot v prejšnjih delih sva dobila veliko več grafov, ki ustreza temu pogoju. Izkazalo se je, da ta pogoj dopušča bistveno večjo raznolikost grafov. Čeprav mora graf še vedno izpolnjevati osnovne strukturne omejitve, kot je majhen premer, se pojavijo številni primeri z zelo različno lokalno strukturo. Rezultati potrjujejo, da pogoj  $\alpha_{od}(G) = r$  sam po sebi ne vsiljuje visoke simetrije grafa, temveč predvsem omejuje paritetne lastnosti sosedstev. Spodaj lahko vidimo tabele koliko grafov ustreza temu pogoju pri

različnem parametru  $n$  in parametru  $r$ . Rezultati niso napisani za vse možne vrednosti  $n$ , saj pri prevelikih vrednostih program predolgo deluje in nama zmanjka RAMA. Podrobnejši primeri so zbrani v prilogi.

$r = 3$	
$n$	Število grafov z $\alpha_{\text{od}}(G) = r$
4	0
6	1
8	0
10	2
12	11
14	23
16	13
18	0
20	0

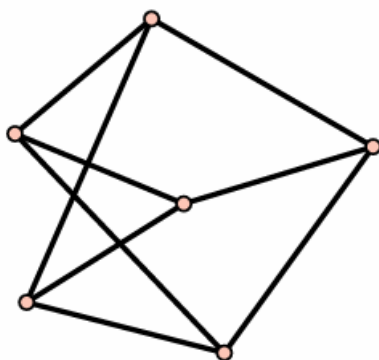
Tabela 1: Število grafov z  $\alpha_{\text{od}}(G) = r$ , pri različnih  $n$  za  $r = 3$

$r = 5$	
$n$	Število grafov z $\alpha_{\text{od}}(G) = r$
6	0
8	0
10	1
12	0
14	0
16	32
18	>30.000

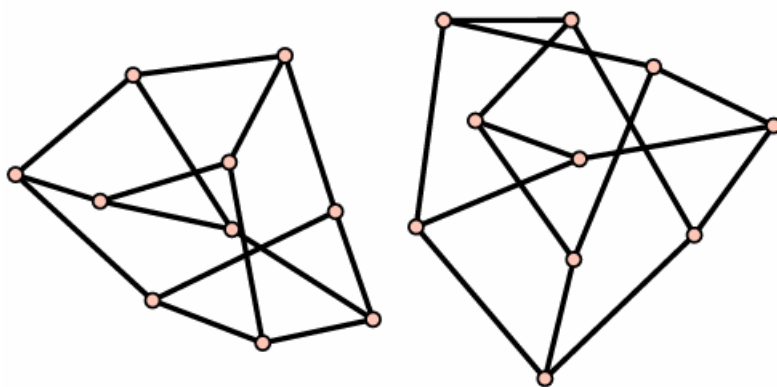
Tabela 2: Število grafov z  $\alpha_{\text{od}}(G) = r$ , pri različnih  $n$  za  $r = 5$

$r = 7$	
$n$	Število grafov z $\alpha_{\text{od}}(G) = r$
8	0
10	0
12	0
14	1
16	0
18	0

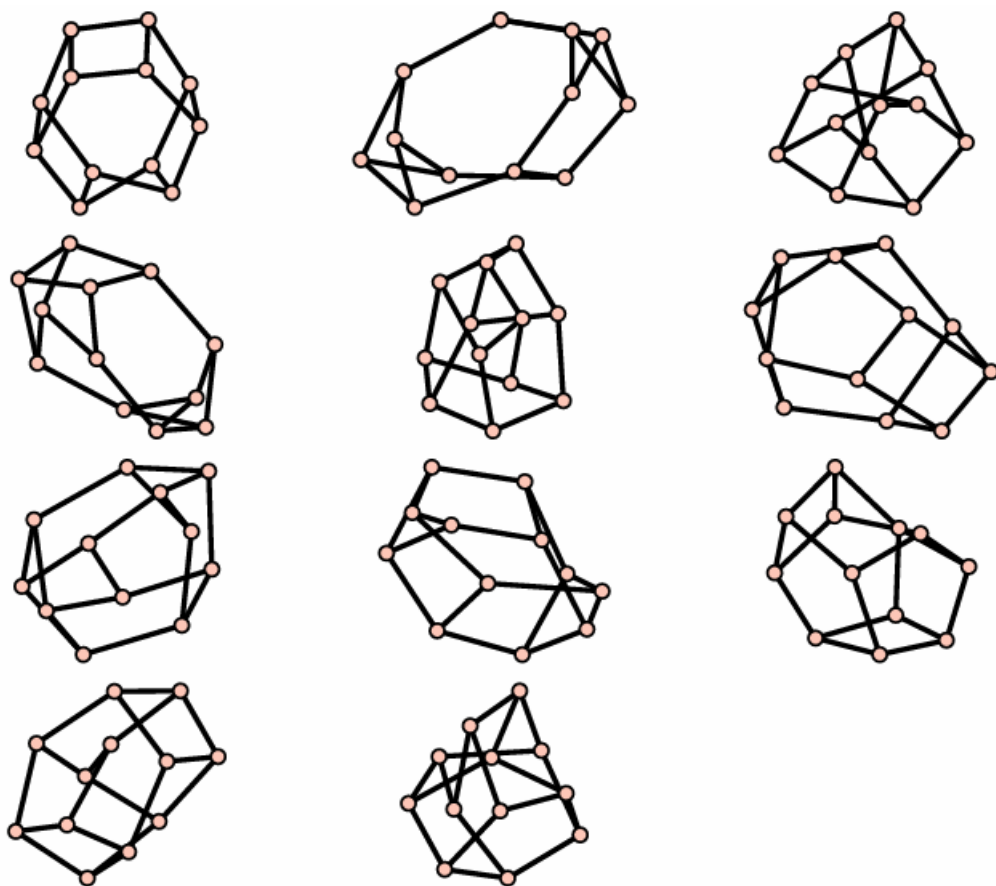
Tabela 3: Število grafov z  $\alpha_{\text{od}}(G) = r$ , pri različnih  $n$  za  $r = 7$



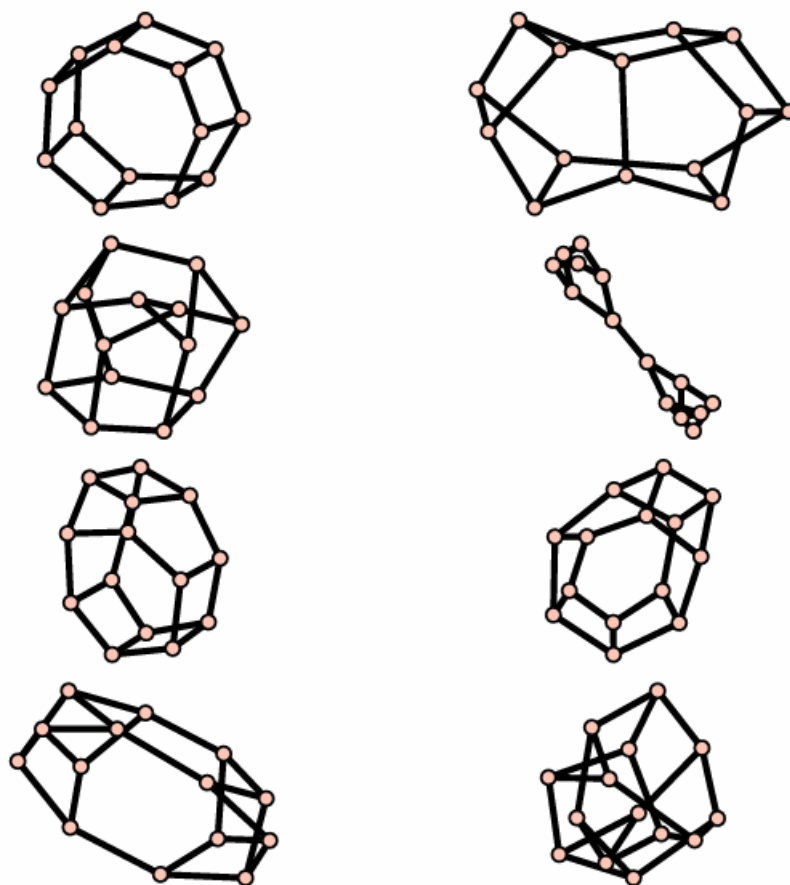
Slika 5: Graf, ki ustreza iii) za  $n = 6$ ,  $r = 3$



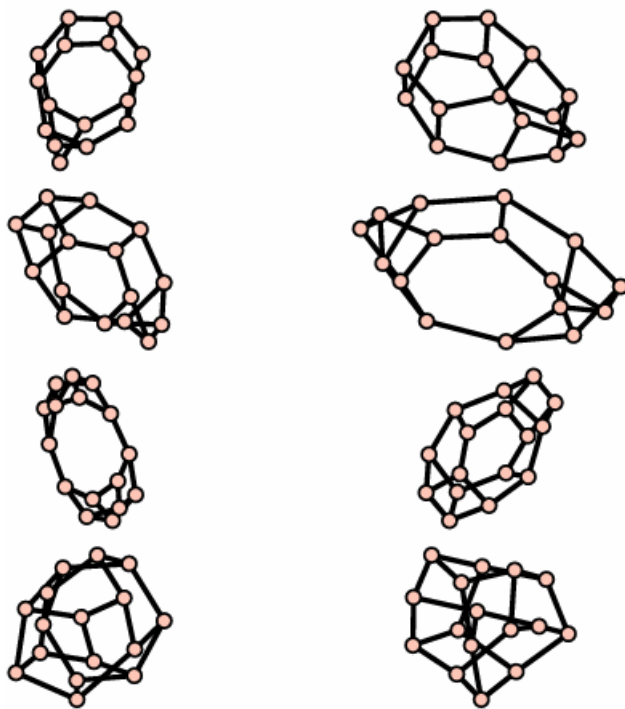
Slika 6: Grafa, ki ustrezata iii) za  $n = 10$ ,  $r = 3$



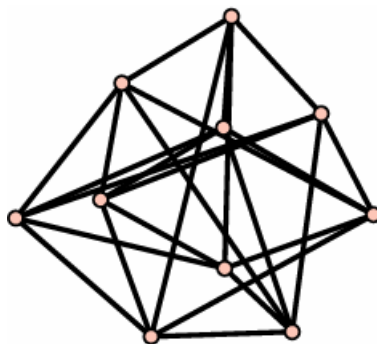
Slika 7: Grafi, ki ustrezajo iii) za  $n = 12$ ,  $r = 3$



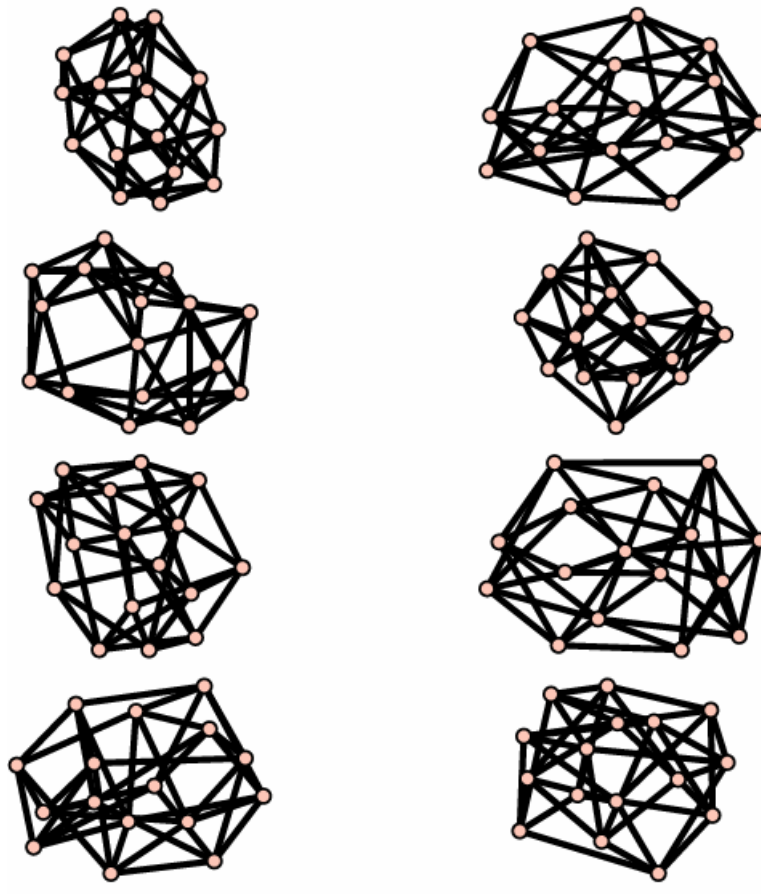
Slika 8: Grafi, ki ustrezajo iii) za  $n = 12$ ,  $r = 3$  (8 od 23)



Slika 9: Grafi, ki ustrezajo iii) za  $n = 16$ ,  $r = 3$  (8 od 13)



Slika 10: Graf, ki ustreza iii) za  $n = 10$ ,  $r = 5$



Slika 11: Grafi, ki ustrezajo iii) za  $n = 16$ ,  $r = 5$  (8 od 32)

## 4 Naključni prehodi po prostoru $r$ -regularnih grafov s premerom največ 3

Za eksperimentalno analizo lastnosti (i) smo izvedli naključne prehode po prostoru povezanih  $r$ -regularnih grafov brez trikotnikov. Prehode med grafi smo generirali z operacijo *random 2-switch*, ki ohranja regularnost in število vozlišč.

Vsak graf  $G$  smo vrednotili glede na:

- njegov premer,
- število vozlišč  $v$ , za katera soseska  $N(v)$  tvori *strong odd independent set* (SOIS),
- ter vrednost parametra  $\alpha_{od}(G)$ .

Iskanje je potekalo s simuliranim ohlajanjem, kjer smo preferirali grafe z manjšim premerom in večjim številom sosesk, ki zadoščajo pogoju SOIS. Začetni graf je bil izbran med znanimi primeri (npr. Petersenov graf ali  $K_{r,r}$  za lihe  $r$ ), sicer pa smo uporabili naključni  $r$ -regularen graf brez trikotnikov.

Izvedli smo 700 neodvisnih ponovitev (restartov) algoritma, pri čemer je vsak sprehod obsegal več tisoč korakov. V nobeni izmed ponovitev nismo našli grafa, ki bi zadoščal pogoju (i).

Eksperimentalni rezultati kažejo, da so grafi s premerom  $\leq 3$ , pri katerih je vsaj ena soseska maksimalen SOIS, izjemno redki. Z večanjem števila vozlišč hitro opazimo, da:

1. premer grafa tipično naraste nad 3,
2. soseske skoraj nikoli ne tvorijo maksimalnega SOIS,
3. vrednost  $\alpha_{od}(G)$  odstopa od stopnje  $r$ .

Empirični rezultati tako podpirajo hipotezo, da so grafi, ki zadoščajo pogoju (i), zelo redke in strukturno močno omejene konfiguracije. Negativni rezultat po 700 ponovitvah dodatno nakazuje, da morebitni primeri — če obstajajo — verjetno zahtevajo posebno, visoko simetrično konstrukcijo.

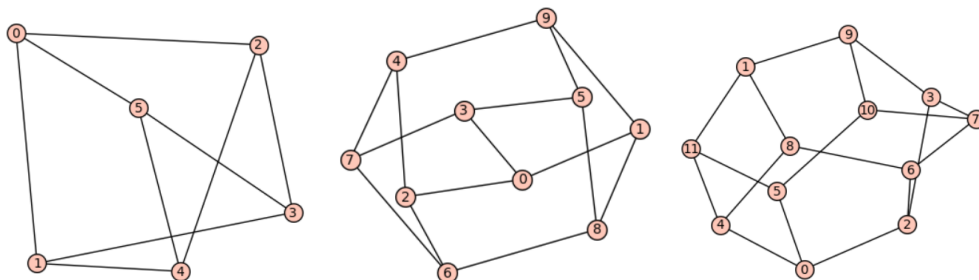
## 5 Preizkušanje močno regularnih grafov tipa $\text{srg}(n, r, \lambda = 0, \mu)$

Opazimo, da znana primera grafov (Petersenov graf in graf  $K_{r,r}$ ), ki zadoščata pogoju iz dela (i), spadata v razred močno regularnih grafov. To naju je spodbudilo, da sva preverjanje pogojev (i)-(iii) preizkusila tudi na drugih močno regularnih grafih tipa  $\text{srg}(n, r, \lambda = 0, \mu)$ .

Preverjanje sva najprej preizkusila na Petersenovem grafu, ki ima vrednosti  $(10, 3, 0, 1)$ , in Clebschovem grafu, ki je še en znan primer strogo regularnega grafa z vrednostmi  $(16, 5, 0, 2)$ . Rezultat je zelo pričakovan: Petersenov graf zadošča vsem pogojem (i)-(iii), Clebschov graf pa nobenemu.

Preverjanje sva nato še preizkusila na grafih  $K_{r,r}$  za  $r = 3, 5, 7$  in pričakovano vsi zadoščajo vsem pogojem (i)-(iii).

Nato sva iskanje preizkusila še na naključnih strogo regularnih grafih. Za ilustracijo razlik med posameznimi pogoji sva izbrali po en reprezentativen primer grafa za vsako izmed kombinacij (i), (ii), (iii) = (True, True, True), (False, True, True) in (False, False, True). Primeri so bili izbrani iz nabora naključno generiranih grafov.

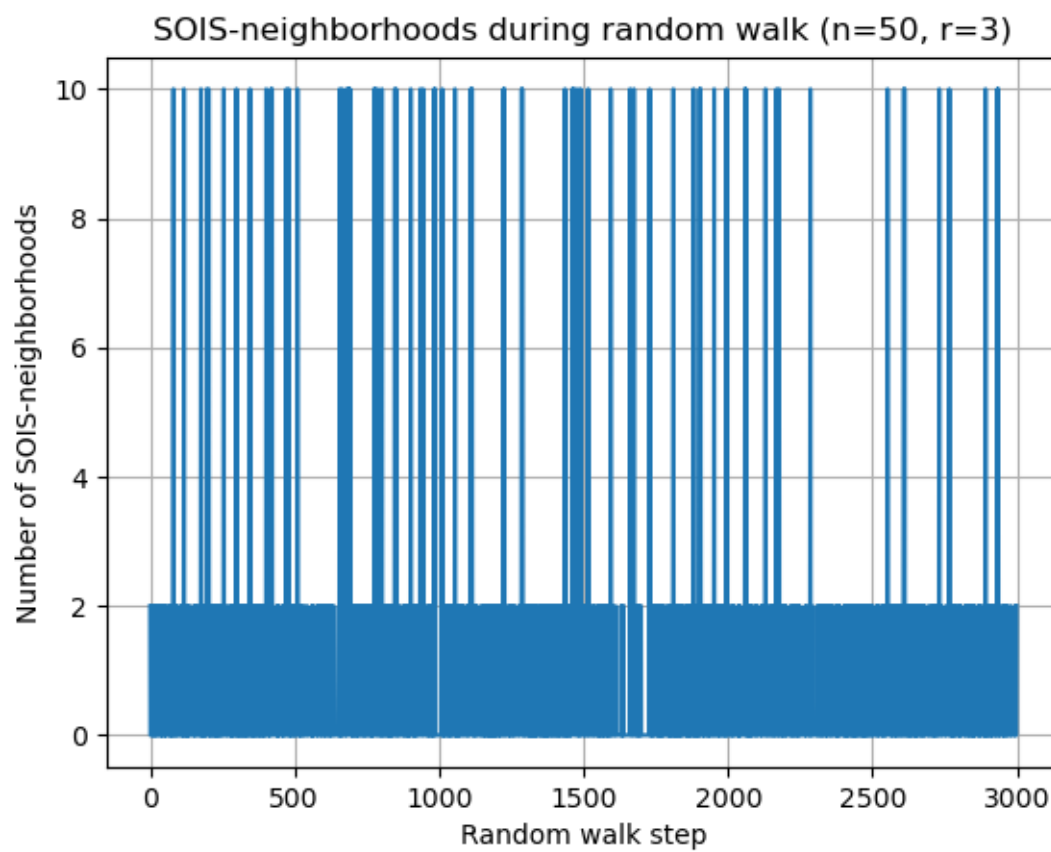


Slika 12: Primeri grafov z  $(i), (ii), (iii) = (\text{True}, \text{True}, \text{True}), (\text{False}, \text{True}, \text{True})$  in  $(\text{False}, \text{False}, \text{True})$ .

## 6 Zaključek

V nalogi smo preučili nekaj strukturnih lastnosti grafov. Izkazalo se je da pogoja  $(i)$  in  $(ii)$  ustreza zelo malo grafov, saj sta pogoja zelo stroga, za pogoj  $(iii)$  je takšnih grafov več. Petersenov graf in grafi  $Kr, r$  za  $r$  je liho število so posebni zaradi svoje strukture in ustrezajo vsem pogojem, hkrati pa spadajo v skupino močno regularnih grafov  $\text{srg}(n, r, \lambda = 0, \mu)$ . Te grafe je zanimivo preučevati, saj jih veliko ustreza navedenim pogojem, predvsem pogoju  $(iii)$ .

## 7 Priloga



Slika 13: Časovni graf števila “SOIS-neighborhoods” med random walk