Równania różniczkowe zwyczajne z laboratorium

Lista 5, 4.4.2018 r.

Zad. 1 Pokazać, że równanie $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ można zapisać w postaci $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)}$

Zad. 2 Wskazać przedział, na którym istnieje rozwiązanie równania:

- $\dot{x} = 2x^2 - t, x(1) = 1,$
- $\dot{x_1} = x_2^2, \quad \dot{x_2} = x_1^2, \quad x_1(0) = 1, x_2(0) = 2.$

Zad. 3 Udowodnij kryterium jednoznaczności rozwiązania - kryterium Osgooda.
Twierdzenie Osgooda
Niech funkcja $f(t,x)$ będzie ciągła w zbiorze $Q = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$ i dla dowolnej pary punktów (t, x_1), (t, x_2) z tego zbioru spełnia warunek

$$|f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leqslant \Phi(|x_2 - x_1|),$$

gdzie dla $0 \leqslant u \leqslant 2b$ funkcja $\Phi(u) > 0$ jest ciągła oraz

$$\int_{\varepsilon}^{2b} \frac{du}{\Phi(u)} \to \infty \quad \text{dla} \quad \varepsilon \to 0.$$

Wtedy przez każdy punkt (t_0, x_0) zbioru Q przechodzi co najwyżej jedna krzywa całkowa równania

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Zad. 4 Pokazać, że jeśli $f(t)$ jest okresowe o okresie T, to istnieje dokładnie

jedno okresowe rozwiązanie równania $y' = ay + f(t)$ o okresie T.

Zad. A Znaleźć rozwiązań zagadnienia początkowego

$$2x^2yy' + y^2 = 2, \quad y(1) = 1$$

Zad. B Scałkować równanie

$$y' = \frac{xy - 2y^2}{x^2 - xy}$$