Zadanie 5

Filip Plata
RRZ

12 marca 2018

Dowód. Zaczniemy od wprowadzenia układu współrzędnych (X, Y). Kot będzie się poruszał wzdłuż osi X, zatem jego położenie w chwili t będzie:

$(x_0 + v \cdot t, 0)$

Wybierzmy dodatkowo $x_0 = 0$

Dla psa równania możemy napisać w postaci:

$$\dot{y} = -\frac{y}{r} \cdot u$$
$$\dot{x} = \frac{v \cdot t - x}{r} \cdot u$$

gdzie y, x to współrzędne psa (zależne od czasu), natomiast r to odległość psa od kota w chwili t (rysujemy na kartce trójkat kot-pies-rzut psa na oś X i stąd widać te zależności).

Zaczniemy od rozwiązania tego układu, dzielimy stronami aby pozbyć się odległości - tracimy z opisu sytuację gdy pies znajduje się na osi OX na początku - ale to jest bardzo proste:

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{v \cdot t - x}{y}$$

Teraz "skracamy dt" (czyli traktujemy x jako funkcję y i korzystamy z tożsamości $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$), zapisujemy $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x'$ i otrzymujemy:

$$x' = -\frac{v \cdot t - x}{y}$$

co przepisujemy do:

$$x' \cdot y + v \cdot t - x = 0$$

Czasu pozbywamy się pisząc $u \cdot t = \int \sqrt{1 + (x')^2} dy$ bo czas jest w prosty sposób powiązany z odległością przebytą przez psa. Wstawiamy to wyżej i różniczkujemy po y, dostajemy:

$$x''y + x' - \frac{v}{u} \cdot \sqrt{1 + (x')^2} - x' = 0$$

Czyli po podstawieniu $k = \frac{v}{u}$ mamy

$$x''y - k \cdot \sqrt{1 + (x')^2} = 0$$

Co przepisujemy po podstawiniu $z = x'$ do (ponownie dzielimy przez y, ale więcej już nie możemy w zwiazku z tym stracić)

$$\frac{z'}{k \cdot \sqrt{1 + z^2}} = \frac{1}{y}$$

Całkujemy po y stronami, internet(albo tablice) mówi że całka po lewej to odwrotność sinusa hiperbolicznego:

$$z = \sinh\left(k \cdot \ln|y| + C_1\right)$$

Napiszemy to rozpisujacy sinus hiperboliczny i pisząc $e^(C_1) = A$:

$$2z = |y|^k \cdot A - \frac{1}{|y|^k \cdot A}$$

Znowu całkujemy stronami po y, dostajemy (mamy $k < 1$ i korzystamy z tego):

$$2x + C_2 = (|y|)^{k+1} \cdot \frac{A}{k+1} - \frac{(|y|)^{1-k}}{A \cdot (1-k)}$$

Stałą C_1 wyznaczamy z początkowej wartości z ($\frac{x_0}{y_0}$) z równania na z(dostaniemy równanie kwadratowe na A), a C_2 wprost z równania na krzywą.

Natomiast czas wyznaczamy z uzytego wcześniej równania:

$$u \cdot t = \int \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

Przez T oznaczymy całkowity czas do złapania, wtedy mamy w granicach na całkę:

$$u \cdot T = \int_0^{y_0} \sqrt{1 + z^2} dy$$

Skąd otrzymujemy:

$$u \cdot T = \int_0^{y_0} \sqrt{\cosh(z)^2}$$

Czyli po podstawieniu za z:

$$u \cdot T = \int_0^{y_0} |y|^k \cdot A + \frac{1}{|y|^k \cdot A} dy$$

Ostatecznie:

$$T = \frac{1}{u} \cdot \left(\frac{|y_0|^{k+1}}{k+1} \cdot A + \frac{|y_0|^{1-k}}{A \cdot (1-k)}\right)$$

Jeśli pies ma $y_0 = 0$, wtedy porusza się po prostej a czas wynosi $\frac{|x_0|}{u \pm v}$ gdzie znak zależy od tego czy pies jest przed, czy za kotem.

$\square$