

RRZlab - zadania dodatkowe

1. Napełniony, stalitrowy zbiornik zawiera 10 kg rozpuszczonej soli. Do zbiornika jedną rurką wpływa czysta woda z prędkością 5 litrów na minutę, a drugą wypływa mieszanina z tą samą prędkością. Wyznacz ilość soli w zbiorniku po upływie godziny. Przyjmij, że proces mieszania cieczy jest natychmiastowy.
2. Znajdź kształt lustra, które skupia promienie biegnące równoległe w jednym punkcie.
3. Wyznacz czas, po którym woda wypełniająca półkolisty zbiornik o średnicy 2 m wypłynie z niego przez okrągły otwór o średnicy 0,2 m, wycięty w jego dnie, jeżeli prędkość wypływu wody $v = 0,6\sqrt{2gh}$ cm/s, gdzie h jest wysokością słupa wody nad otworem, a g oznacza przyspieszenie ziemskie.
4. Niech będą dane $a, b, c \in \mathbb{R}$. Znajdź równanie krzywej $y(x)$ dla $x > 0$ takiej, że w każdym punkcie x styczna do tej krzywej przecina oś OY w punkcie $K = (0, k)$ spełniającym warunek $k = a + bx + cy(x)$.
5. Wykaż, że równanie

$$ty - (2t^2 + 1)y = t^2$$

ma tylko jedno rozwiązanie, dla którego granica przy $t \rightarrow +\infty$ jest skończona. Wyznacz tę granicę i zapisz szukane rozwiązanie w postaci całkowej.

6. Rozważmy metodę

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + \alpha f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right),$$

gdzie $\alpha \in [0, 2]$, dla równania $\dot{y} = f(t, y)$, $t \in (0, T]$ z warunkiem początkowym $y(0) = y_0$. Zbadaj zbieżność tej metody w zależności od parametru α .

7. Zbadaj rząd schematu Rungego-Kutty danego tabelką

0			
1/3	1/3		
2/3	0	2/3	
	1/4	0	3/4

8. Wykaż, że schemat jawny Eulera zastosowany do równania $x' = \frac{x}{t}$ z warunkiem początkowym $x(1) = 1$ daje dokładny wynik.
9. Zbadaj rząd schematu

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} \left[4f(t_n, x_n) + 2f(t_{n+1}, x_{n+1}) + h \left(f_t(t_n, x_n) + f(t_n, x_n)f_x(t_n, x_n) \right) \right].$$

10. Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań:

$$(a) \quad \dot{x} = \frac{x}{x-t}, \quad (b) \quad y' = \frac{1+y^2 \sin(2x)}{2y \cos^2 x}, \quad (c) \quad y = x(y' - x \cos x).$$

11. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych:

$$(a) \quad x' = \sin(t+x), \quad x(0) = 0, \quad (b) \quad x' = -\frac{t(1+4x^2)}{1+t^4}, \quad x(1) = 0.$$

12. Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $fx' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $\mu(t) = t$. Następnie rozwiąż to równanie z warunkiem początkowym $x(0) = 1$.