

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Filip Plata

Nr albumu: 371335

Funkcje Dehna grup hiperbolicznych

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Sławomir Nowak

Kwiecień 2019

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Streszczenie

Zebranie i prezentacja klasycznych wyników z dziedziny problemu słów i geometrii hiperbolicznej. Zawiera przetłumaczony i uzupełniony dowód twierdzenia o istnieniu przerwy isoperymetrycznej, na podstawie pracy [1].

Słowa kluczowe

Prezentacja Dehna, problem słów, zbiór isoperymetryczny, grupa hiperboliczna

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

20F06

Spis treści

Wstęp	5
1. Problem słów a teoria grup	7
1.1. Definicje	7
2. Problem słów a przestrzenie hiperboliczne	9
2.1. Wstęp	9
2.2. Definicje	9
2.3. Podstawowe twierdzenia geometrii hiperbolicznej	10
3. Diagramy van Kampena i grafy Cayley	15
4. Funkcje Dehan grup hiperbolicznych	17
4.1. Grupy hiperboliczne posiadają prezentację Dehna	17
4.2. Grupy z podkwadratową funkcją Dehna są hiperboliczne	18
5. Zbiór izoperymetryczny	21
Bibliografia	23

Wstęp

Problem słów naturalnie pojawia się w informatyce teoretycznej. Mając dane dwa słowa oraz zbiór słów zwanych relatorami, chcemy uzyskać z pierwszego słowa drugie poprzez wstawianie relatorów w dowolne miejsce oraz skracanie podśłów postaci uu^{-1} .

Przyjrzymy się, jak podstawowe narzędzia teorii grup oraz geometrii hiperbolicznej Gromova prowadzą do charakteryzacji grup, w których problem słów jest możliwy do rozwiązania w efektywny sposób. Pokażemy, jak można uzyskać charakteryzację grup hiperbolicznych jako jedynych grup z podkwadratową funkcją Dehna.

Rozdział 1

Problem słów a teoria grup

1.1. Definicje

Zacznijmy od wprowadzenia pojęć z teorii grup.

Definicja 1.1.1. Niech A oznacza alfabet, tzn. zbiór liter. Wtedy zbiór F_A wszystkich słów nad alfabetem $A \cup A^{-1}$, które nie zawierają podśłów postaci uu^{-1} , razem z konkatenacją jako działaniem i słowem pustym jako jedynką nazywamy grupą wolną. Grupę tą będziemy oznaczać przez F_A . Wtedy elementy A to generatory F_A .

Przykład 1.1.1. Podstawowym przykładem grupy wolnej jest grupa generowana przez jedną literę: $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Widać, że ta grupa jest homeomorficzna z \mathbb{Z} .

Nie wszystkie grupy są wolne. Można jednak rozszerzyć ten pomysł na prezentacje grup — bierzemy grupę wolną i zbiór słów, zwanych relatorami. Następnie rozważamy relację równoważności, w której dwa słowa są równoważne, jeśli możemy otrzymać jedno z drugiego poprzez wstawienie dowolnej liczby relatorów i skracanie napisów postaci uu^{-1} . Można pokazać, że każda grupa ma prezentację — tj. jest homomorficzna z pewną prezentacją.

Definicja 1.1.2. Niech G będzie grupą, A alfabetem, F_A grupą wolną a R zbiorem słów nad A . Mówimy, że G ma prezentację $\langle A \mid R \rangle$, gdy $G = F_A/N$, gdzie $N := \{xr x^{-1} : x \in F_A, r \in R\}$. Elementy R nazywamy relatorami. Mówimy, że słowo w jest równoważne v , jeśli $vw^{-1} \in N$, co oznaczamy przez $v \equiv w$. Mówimy, że G jest skończenie prezentowana, jeśli istnieje prezentacja ze skończoną liczbą liter i relatorów.

Definicja 1.1.3. Niech $P = \langle A \mid R \rangle$ będzie prezentacją pewnej grupy, a słowo w równoważne słowu pustemu. Definiujemy algebraiczne pole w jako:

$$A(w) := \min\{N : w = \prod_{i=1}^N x_i^{-1} r_i x_i, x_i \in F_A, r_i \in R^{\pm 1}\}$$

Możemy teraz zdefiniować funkcję Dehna prezentacji grupy.

Definicja 1.1.4. Niech $P = \langle A \mid R \rangle$ będzie prezentacją grupy G , definiujemy funkcję Dehna P jako:

$$D_P(n) := \max\{A(w) : w \in G, |w| \leq n\}$$

Taka definicja prowadzi do pytania, czy funkcja Dehna grupy zależy od prezentacji. Okazuje się to być prawdą. Można jednak rozważać funkcje Dehna z dokładnością do pewnej relacji równoważności. Okazuje się, że dla dowolnej skończonej prezentacji grupy tak otrzymane funkcje

Dehna są równoważne. Będziemy w związku z tym nieformalnie pisać o funkcji Dehna grupy — należy pamiętać, że mamy na myśli relację równoważności.

Definicja 1.1.5. *Mając funkcje $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mówimy, że $f \leq g$, jeśli istnieje $C \geq 0$, że*

$$\forall x \in [0, \infty) \quad f(x) \leq Cg(Cx + C) + Cx + C$$

Należy wspomnieć, że funkcje Dehna prowadzą z liczb naturalnych w naturalne. Aby skorzystać ze zdefiniowanej relacji, należy przedłużyć te funkcje, np. poprzez wybranie wartości $D_P(n)$ na przedziale postaci $(n, n + 1)$.

Definicja 1.1.6. *Mając funkcje $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mówimy że $f \simeq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \leq g$ oraz $g \leq f$*

Ponieważ wszystkie funkcje Dehna grupy są równoważne w powyższej relacji, ma sens mówienie o asymptotycznym zachowaniu funkcji Dehna grupy względem wielomianów — mimo iż oczywiście jest to klasa równoważności funkcji.

Teraz pokażemy, jako możemy rozwiązać problem słów. Opiszemy algorytm Dehna. Przypuśćmy, że mamy skończoną prezentację grupy $P = \langle A \mid R \rangle$, skończony podzbiór liczb naturalnych T , oraz że mamy zbiór $\{(u_n, v_n) : n \in T\}$, że:

$$v_n u_n^{-1} \equiv \epsilon \quad \text{oraz} \quad |u_n| < |v_n|$$

oraz dla każdego słowa $\epsilon \equiv w \in F_A$ mamy jedno ze słów $\{v_n : n \in T\}$ jako podśłowo. Wtedy możemy łatwo rozwiązać problem słów. Zaczynamy od słowa w , jeśli nie jest puste, próbujemy znaleźć podśłowo v_n . Jeśli jest takie, możemy zastąpić je przez u_n nie zmieniając klasy równoważności słowa. W ten sposób zredukowaliśmy problem do krótszego słowa. Jeśli nie ma takiego podśłowa v_n , na mocy definicji tego zbioru wiemy, że w nie jest równoważne ϵ .

Tak określony zbiór będzie służył jako podstawa szczególnego rodzaju skończonych prezentacji grup, prezentacji Dehna.

Definicja 1.1.7. *Powiemy, że $\langle F(A) \mid \{u_n v_n^{-1}, n \in T\} \rangle$ jest prezentacją Dehna, jeśli $\forall n \in T \quad |u_n| < |v_n|$, a zbiory T i A skończone.*

Możemy teraz pokazać podstawową własność grup posiadających prezentację Dehna.

Twierdzenie 1.1.1. *Grupy posiadające prezentacją Dehna mają liniową funkcję Dehna.*

Dowód 1.1.1. Niech $\langle A \mid R \rangle$ będzie prezentacją Dehna grupy G . Pokażemy ograniczenia górne funkcji Dehna. Niech w oznacza słowo, iż $w \equiv \epsilon$.

Korzystając z algorytmu Dehna, możemy rozłożyć słowo w na iloczyn co najwyżej $|w|$ relatorów. Zatem $D_P(n) \leq n$. Zatem $D_P(n) \leq 0$, gdzie mamy na myśli funkcję $\forall n \in \mathbb{N}, 0(n) = 0$. Więc z dokładnością do relacji równoważności, grupa Dehna prezentacji jest liniowa.

Uwaga. Nie oznacza to, że dla każdej prezentacji funkcja Dehna musi rosnąć liniowo, ani nawet że istnieje prezentacja grupy, że $\limsup_{n \rightarrow \infty} D_P(n)/n \geq 0$.

□

Rozdział 2

Problem słów a przestrzenie hiperboliczne

2.1. Wstęp

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia z teorii hiperboliczności Gromova. Mogą one nie wydawać się powiązane z teorią grup, ale można je z nią połączyć za pomocą grafów Cayley'a. Zakończymy ten rozdział przytoczeniem lematu, który będzie kluczowy w dowodzie istnienia prezentacji Dehna dla grup hiperbolicznych.

2.2. Definicje

W tej części przez (X, d) będziemy oznaczali przestrzeń metryczną wraz z metryką, a przez δ dodatnią liczbę rzeczywistą.

Definicja 2.2.1. *Produktem Gromova dwóch punktów $y, z \in X$ w stosunku do trzeciego $x \in X$ nazywamy:*

$$(y, z)_x := \frac{1}{2}(d(y, x) + d(x, z) - d(y, z))$$

Definicja 2.2.2. *Mówimy, że X jest δ -hiperboliczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x, y, z, w \in X$*

$$(x, z)_w \geq \min((x, y)_w, (y, z)_w) - \delta$$

Będziemy też mówić, że X jest hiperboliczna, jeśli istnieje stała spełniająca powyższą definicję.

Zajmując się przestrzeniami hiperbolicznymi, nie będziemy badać izometrii na nich, lecz *quasi-izometrie*. Jest to powiązane w pewien sposób z faktem, iż dokładna wartość stałej δ nie ma znaczenia dla tej teorii. Zdefiniujemy również *quasi-geodezyjne*.

Definicja 2.2.3. *Nazywamy $f(A, B)$ quasi-izometrią z (X_1, d_1) do (X_2, d_2) jeśli istnieją stałe $A \geq 1, B \geq 0, C \geq 0$, że:*

- *Dla każdych $x, y \in X_1$ mamy*

$$\frac{1}{A}d_1(x, y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq A \cdot d_1(x, y) + B$$

- Dla każdego $x_2 \in X_2$ istnieje punkt $x_1 \in X_1$, że

$$d_2(f(x_1), x_2) \leq C$$

Zauważmy, że to jedyne warunki nałożone na quasi-izometrie. Nie muszą być ciągłe.

Definicja 2.2.4. Quasi-geodezyjna to quasi-izometryczne włożenie \mathbb{R} w przestrzeń hiperboliczną (X, d) .

Ograniczymy się teraz do przestrzeni geodezyjnych. Możemy zdefiniować K -lokalną geodezyjną.

Definicja 2.2.5. Niech $I := [0, 1]$. nazywamy $c : I \rightarrow X$ K -lokalną geodezyjną, jeśli

$$\forall s, t \in I \mid s - t \mid \leq K \implies d(c(s), c(t)) = \mid s - t \mid$$

Możemy też rozważać wielokąty w dowolnej przestrzeni geodezyjnej. Zdefiniowane są w standardowy sposób, boki są geodezyjnymi w X . Poniższe definicje są powiązane z dowodem głównego twierdzenia zawartego w opracowaniu, w przeciwieństwie do poprzednich które należą już do ugruntowanej teorii. W szczególności tłumaczenia z angielskiego nazw pojęć zostało dokonane przez autora.

Definicja 2.2.6. Dla trójkąta $T = ABC$, mamy na boku AB punkt O , że odległość z O do AC jest równa odległości do BC . Taki punkt to dwudzielnik, zdefiniujemy jego wielkość jako $b(O)$. Taki punkt istnieje z ciągłości różnicy odległości.

Dwójrozmiarem trójkąta $T = ABC$ nazwiemy maximum $b(O)$ dla wszystkich dwudzielników O .

Globalna ograniczoność dwójrozmiarów przez uniwersalną stałą okazuje się jedną z wielu alternatywnych definicji hiperboliczności w sensie Gromova. Z tego równoważnego warunku będziemy korzystać w reszcie tej pracy.

Definicja 2.2.7. Szerokością trójkąta T nazwiemy każdą liczbę d , że dla pewnego prznazwania wierzchołków ABC , istnieje $O \in BC$, że $d(O, AC) \geq d$ oraz $d(A, B) \leq \frac{1}{2}d(O, AC)$.

Stwierdzenie 2.2.1. Jeśli dwójrozmiary trójkątów są ograniczone, to przestrzeń jest hiperboliczna.

Definicja 2.2.8. Grubością wielokąta nazwiemy infimum po wartościach t spełniających:

Dla każdego boku p i każdego punktu $O \in p$ istnieje inny bok $r \neq p$, że $d(O, r) \leq t$.

2.3. Podstawowe twierdzenia geometrii hiperbolicznej

Będziemy używać następującego twierdzenia [4][6.1]:

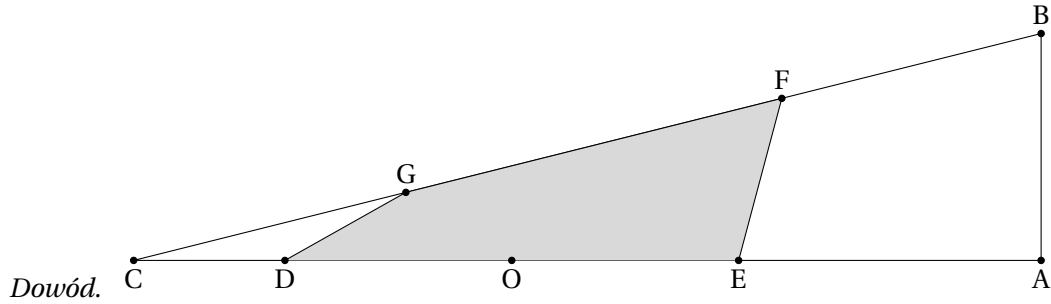
Twierdzenie 2.3.1. Jeśli X jest δ -hiperboliczna, wtedy każda k -lokalna geodezyjna dla $k > 8\delta$ jest (λ, η) quasi-geodezyjna, gdzie λ i η zależą tylko od δ .

Będziemy korzystać również z innej własności charakteryzującej przestrzenie hiperboliczne. Każdy trójkąt a także wielokąt o ustalonej liczbie wierzchołków ma ograniczoną z góry przez stałą grubość. Będziemy chcieli pokazać, że jeśli przestrzeń nie jest hiperboliczna, to możemy znaleźć w niej grube wielokąty o niedużym obwodzie. Będzie to podstawowe narzędzie w dowodzie charakteryzacji przestrzeni hiperbolicznych przez liniową funkcję Dehna.

Czytelnik może sam spróbować zmierzyć się z zadaniem uzyskania w przestrzeni geodezyjnej, która nie jest hiperboliczna, wielokąta o niedużym obwodzie w stosunku do grubości. Narzucające

się metody wprost uzyskania grubego wielokąta prowadzą do problemów z odległością wybranego punktu do ostatniego z boków definiowanego wielokąta, gdyż szacowanie jego długości poprzez ścieżkę przez inne punkty nie może dać pozytywnego rezultatu. Wydaje się, że oprócz braku hiperboliczności, przydać się może też inne założenie, które pozwoli uzyskać lepsze oszacowanie długości ostatniego boku. Jednym z takich założeń jest ograniczenie szerokości trójkątów. Dla uzyskania pełnego obrazu, trzeba wtedy tylko wykazać, że jeśli mamy szerokie trójkąty, to mamy też grube wielokąty. Tym zajmuje się pierwszy z lematów.

Lemat 2.3.1. *Przypuśćmy, że mamy trójkąt o szerokości d w X . Wtedy istnieje czworokąt P w X , że jego grubość t jest $\geq d/2$, a obwód $\leq 20t$.*



Wybermy O z definicji szerokości. Możemy założyć, że O jest takim punktem, że możliwe d w definicji szerokości jest maksymalne. Wybiermy punkty D i E na boku BC odpowiednio w stronę C i B od punktu O , aby $|OD| = \frac{3}{2}d$ oraz $|OB| = \frac{3}{2}d$. Jeśli bok BC jest zbyt krótki, obieramy C lub B odpowiednio. Ponieważ punkt O maksymalizuje szerokość, mamy dwa punkty G i F , że $|DG| \leq d$ oraz $|EF| \leq d$ (jeśli bok BC był zbyt krótki, obieramy C i A odpowiednio). Pokażemy, że punkt O daje dobrą szerokość w wielokącie $DEFG$. Mamy:

$$d(O, AB) \geq d(O, A) - d(A, B) = d/2$$

$$d(O, GF) = d(O, AC) = d$$

Jeśli $B \neq E$:

$$d(O, EF) \geq d(O, E) - d(E, F) = d/2$$

Jeśli $C \neq D$:

$$d(O, DG) \geq d(O, D) - d(D, G) = d/2$$

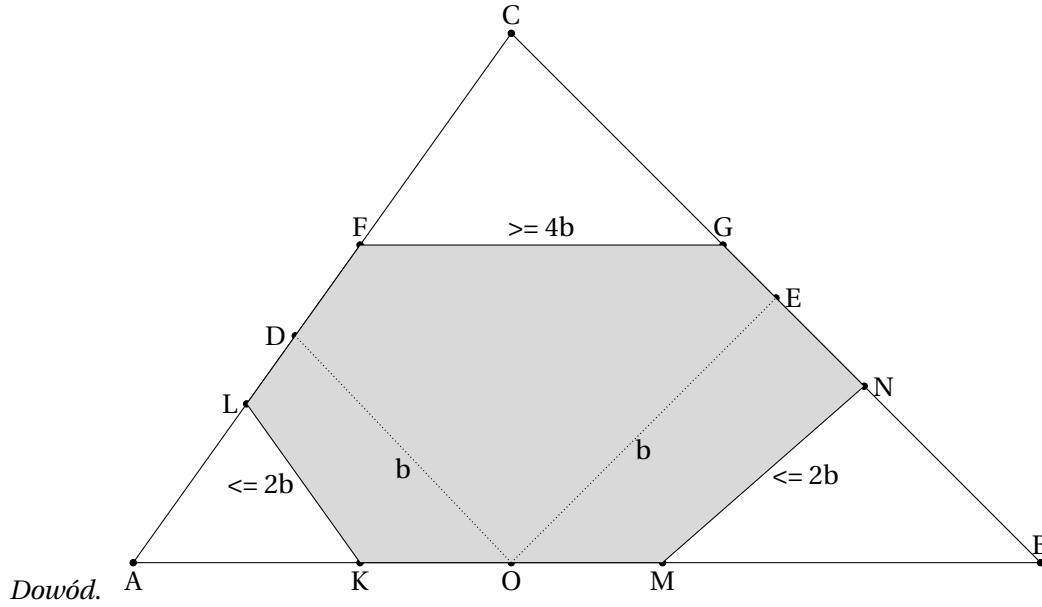
Jeśli $C = D$, to $d(O, DG) = d(O, C) \geq d$, natomiast przy $E = A$ używamy odległości O od AB i B jako punktu F . Niezależnie od przypadku otrzymujemy, że O jest odległy od innych boków o przynajmniej $d/2$. Szacujemy obwód:

$$|DE| + |EF| + |DG| + |FG| \leq 3d + d + d + (3d + d + d) = 10d$$

gdzie $|FG|$ szacujemy poprzez długość ścieżki F, E, D, G . Po przejściu z oznaczenia d na t , otrzymujemy tezę. Zauważmy, iż formalnie grubość może być większa od $d/2$, ale może to tylko poprawić oszacowanie obwodu względem t .

□

Lemat 2.3.2. *Przypuśćmy, że w przestrzeni geodezyjnej X mamy trójkąt T o dwójrozmiarze b , ale w X nie ma trójkąta o grubości $2b$. Wtedy dla pewnego $t \geq b$ w X jest sześciokąt P , że grubość P jest $\geq t$, a obwód $\leq 42t + \delta$, gdzie δ dowolne rzeczywiste dodatnie.*



Dowód. Zgodnie z definicją dwójrozmiaru, wybieramy punkt O leżący na boku AB (bez straty ogólności rozważań). Niech D i E to będą punktu z definicji dwójrozmiaru, tj. mamy:

$$D \in AC, E \in BC, |DO| = b, |EO| = b$$

Wyberzmy punkty K, M , że:

$$K, M \in |AB|, |KO| = 3b, |MO| = 3b$$

oraz K i M są po różnych stronach O na AB . Jeśli bok AB jest zby krótki, wybieramy A lub B odpowiednio. Zauważmy, że $d(AD, K) \leq 2b$, gdyż inaczej trójkąt AOD byłby $2b$ -szeroki. Wybierzmy $L \in AD$, że $d(L, K) \leq 2b$. Zauważmy, że $d(O, LK) \geq d(O, K) - d(K, L) \geq b$.

Punkty M, N są analogiczne dla K, L , lecz konstruujemy je po drugiej stronie punktu O , a $N \in BC$.

Wyberzmy teraz punkt F , że $|DF| = 6b + \epsilon$, F leży na boku AC . Ponieważ $d(D, E) \leq d(D, O) + d(E, O) = 2b$, zatem na mocy założenia o szerokości trójkątów, CDE nie może być $4b$ -szeroki, więc istnieje G na boku CE , że $d(F, G) \leq 4b$. Zauważmy, że:

$$d(FG, O) \geq d(F, D) - d(D, O) - d(E, G) \geq b + \epsilon$$

Zatem sześciokąt $MKLFGN$ ma grubość przynajmniej b . Oszacujemy jego obwód. Zaczniemy od pomocniczych długości:

$$d(L, F) \leq d(L, K) + d(K, O) + d(O, D) + d(D, F) \leq 12b + \epsilon$$

$$d(G, N) \leq d(N, M) + d(M, O) + d(O, D) + d(D, F) + d(F, G) \leq 16b + \epsilon$$

$$|MK| + |KL| + |LF| + |FG| + |GN| + |NM| \leq 6b + 2b + (12b + \epsilon) + 4b + (16b + \epsilon) + 2b = 42b + 2 * \epsilon$$

□

Lemat 2.3.3. *Przypuśćmy, że dwójrozmiary trójkątów w przestrzeni geodezyjnej X są nieograniczone. Wtedy dla dowolnego $t_0 > T$ istnieje w X sześciokąt P o grubości $t > t_0$ i obwodzie $\leq 42t + \delta$, gdzie T jest ustaloną stałą.*

Dowód. Jeśli X zawiera trójkąty o szerokości d dla dowolnego d , to z 2.3.1 dostajemy tezę, bo możemy przyjąć dwa boki o długości zero i z czworokąta dostać sześciokąt. Jeśli natomiast szerokości trójkątów są ograniczone, to 2.3.2 daje nam tezę.

□

Rozdział 3

Diagramy van Kampena i grafy Cayley

Teraz możemy przejść do łącznika pomiędzy grupami, ich prezentacjami a przestrzeniami hiperbolicznymi. Będziemy dla prezentacji grupy rozważać grafy Cayley oraz diagramy van Kampena.

Dobrym opisem diagramów van Kampena jest [5][Rozdział 4], natomiast dla grafów Cayley [2][Część III, rozdział 1]. Przytoczymy definicję grafu Cayley.

Definicja 3.0.1. Niech S będzie zbiorem generatorów dla grupy G . Grafem Cayley G względem S nazwiemy graf, że jego wierzchołkami są elementy grupy, natomiast dla $g_1, g_2 \in G$ mamy skierowaną krawędź z g_1 do g_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $g_2 = g_1 s$ dla pewnego $s \in S$. Każdej krawędzi przypisujemy długość jeden, jako odległość między dwoma punktami przyjmujemy długość najkrótszej ścieżki.

Definicja 3.0.2. Mówimy, że skończenie generowana grupa G jest hiperboliczna, jeśli jej graf Cayley Γ jest przestrzenią hiperboliczną. Okazuje się to niezależne od wyboru zbioru generatorów.

Definicja 3.0.3. Niech R będzie zbiorem słów, natomiast R^C to zbiór wszystkich cyklicznych przesunięć słów z R .

Diagramem van Kampena dla słowa w nazwiemy skierowany graf planary Δ , że każdej krawędzi odpowiada litera, na brzegu słowa znajduje się słowo w , natomiast na brzegu każdej ściany (ograniczonej spójnej składowej) na jej brzegu znajduje się słowo z R^C .

Brzegiem diagramu nazwiemy brzeg nieograniczonej spójnej składowej.

Możemy na wierzchołkach diagramu zdefiniować metrykę, jako długość najkrótszej ścieżki w grafie. Grubość diagramu van Kampena definiuje się analogicznie do grubości wielokąta w przestrzeni metrycznej, ograniczamy tylko zbiór interesujących nas punktów do wierzchołków grafu.

Najważniejszy dla nas będzie lemat van Kampena, dzięki któremu na podstawie lematu 2.3.3 dostaniemy odpowiednio grubo diagram.

Lemat 3.0.1 (van Kampena). Słowo w spełnia $w = \epsilon$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje diagram Δ , że w jest jego brzegiem.

Lemat 3.0.2. Przypuśćmy, że dwójrozmiary trójkątów w grafie Cayley'a Γ grupy G są nieograniczone. Wtedy dla każdego $t_0 > 0$ istnieje diagram van Kampena Δ o grubości $t \geq t_0$, a jego średnica jest $\leq 43t$.

Dowód. Na podstawie lemat 2.3.3 otrzymujemy w grafie Cayley sześciokąt P o stosownych własnościach (np. $\delta = \frac{1}{2}$).

Z sześciokąta możemy uzyskać wielokąt Q poprzez przesunięcie wierzchołków P do najbliższych wierzchołków grafu Cayley'a. W ten sposób być może zmniejszymy liczbę wierzchołków, gdyż niektóre wierzchołki pokryją się. Możemy oszacować grubość P za pomocą grubości Q :

$$t(Q) + \frac{1}{2} \geq t(P)$$

gdyż dla punktu z P w odległości $t(Q)$ mamy inny bok Q, więc przesuwając się o co najwyżej $\frac{1}{2}$ jeśli trafiliśmy w ten sam bok P, trafimy w inny bok P. Taka transformacja nie zwiększyła też obwodu otrzymanego wielokąta Q.

Z lematu van Kampena, otrzymujemy diagram Δ o minimalnej liczbie ścian, na którego brzegu mamy słowo z brzegu sześciokąta P. Ponieważ możemy w naturalny sposób zanurzyć diagram van Kampena w graf Cayley — przyporządkowujemy wierzchołkom diagramu słowa odpowiadające tym słowom wierzchołki w grafie, co jest dobrze zdefiniowane ponieważ nie zależy od ścieżki — możemy przenieść własności sześciokąta P na diagram Q. W szczególności, boki diagramu również są geodezyjnymi, gdyż inaczej boki P nie byłby geodezyjnymi. Możemy oszacować grubość wielokąta za pomocą grubości diagramu:

$$t(\Delta) \geq t(Q) - \frac{1}{2}$$

gdyż z każdego punktu Q do pewnego wierzchołka Δ mamy odległość co najwyżej $\frac{1}{2}$, a od tego punktu w odległości $t(\Delta)$ punkt z innego boku — szacuje to $t(Q)$ z góry.

Zatem dla $t_0 \geq 42.5$:

$$|\partial\Delta| = \sum q_i \leq \sum p_i \leq 42.5t(P) \leq 42.5(t(\Delta) + 1) \leq 43t(\Delta)$$

□

Ten lemat kończy serię technicznych lematów. Ich główną treścią jest stwierdzenie, że jeśli przestrzeń nie jest hiperboliczna, to wielokąty w niej zawarte mogą być grube. Diagramy Van Kampena służą nam jako wygodne narzędzie do pracowania z przestrzeniami metrycznymi otrzymywanymi z grup.

Co bardzo istotne, wspomniane boki diagramu nie są bokami pojedynczych ścianek. Intuicyjnie, otrzymany diagram posiada na brzegu długie fragmenty geodezyjnych.

Rozdział 4

Funkcje Dehan grup hiperbolicznych

Posiadamy już wszystkie narzędzia do wykazania, że grupa jest hiperboliczna tylko wtedy gdy ma liniową funkcję Dehna. Zaprezentujemy dowód w dwie strony. Zaczniemy od prostszej implikacji.

4.1. Grupy hiperboliczne posiadają prezentację Dehna

Twierdzenie 4.1.1. *Każda grupa hiperboliczna posiada prezentację Dehna.*

Dowód 4.1.1. Przypomnijmy 1.1.1, iż posiadanie prezentacji Dehna implikuje liniowość funkcji Dehna. Będziemy więc dowodzić istnienia prezentacji Dehna dla grup hiperbolicznych. Skorzystamy z Twierdzenia 2.3.1. Popatrzmy na graf Cayley'a $G - \Gamma$ jako na przestrzeń hiperboliczną.

Wybieramy λ z tego twierdzenia oraz zbiór skończony:

$$P = \{u \in F(A) : |u| \leq 8\delta \cdot \max\{1, \lambda\}, \quad \exists v. (|v| < |u| \wedge u =_{\Gamma} v)\}$$

Pokażemy, że jest to prezentacja grupy G — dokładniej wszystkie słowa postaci vu^{-1} dla u i v jak powyżej. Weźmy słowo w , $w =_{\Gamma} \epsilon$. Określa ono pewną pętlę γ w grafie Cayley'a. Jeśli nie jest to 8δ -lokalnie geodezyjna, to możemy pewną część ścieżki zastąpić krótszą, tworząc krótsze słowo odpowiadające ścieżce, a znajduje się ono w zbiorze P . Jeśli nie możemy tak zrobić, to na mocy twierdzenia 2.3.1, γ jest quasi-geodezyjną. Zatem możemy napisać:

$$\frac{|w|}{\lambda} - \eta \leq d_{\Gamma}(\gamma(0), \gamma(1))$$

co po podstawieniu $\gamma(1) = \gamma(0)$, ponieważ mamy pętlę, daje:

$$|w| \leq \lambda\eta < 8\lambda\delta$$

co w szczególności oznacza, że w jest równoważne ϵ tylko gdy jest w P .

Zatem dowolne słowo równoważne słowu pustemu można przedstawić za pomocą zbioru

$$\{uv^{-1} : u \in P, |v| \leq |u|, uv^{-1} \equiv \epsilon\}$$

czyli jest to zbiór relatorów prezentacji grupy G .

□

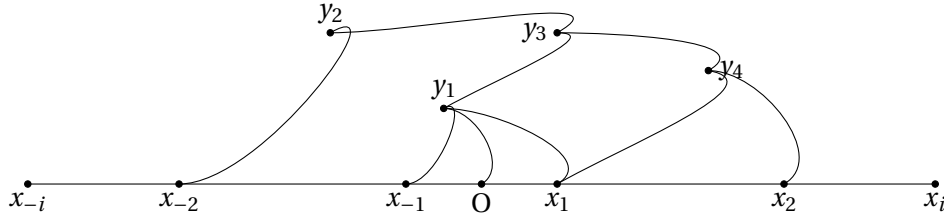
4.2. Grupy z podkwadratową funkcją Dehna są hiperboliczne

Teraz pokażemy, że gdy funkcja Dehna grupy G jest $o(n^2)$, to G jest hiperboliczna.

Twierdzenie 4.2.1. *Jeśli funkcja Dehna grupy G jest $o(n^2)$, to G jest hiperboliczna, a jej funkcja Dehna liniowa.*

Warto przed dowodem zawrzeć pewne intuicje.

Kluczowym pomysłem jest zawarty w lemacie poniżej. Wybierzmy punkt z brzegu diagramu van Kampena. Popatrzmy na ścianki zawierające ten punkt i przylegające do długiego fragmentu boku diagramu. Następnie na ścianki stykające się z tymi ściankami. Potem na kolejny poziom. Zewnętrzny brzeg doklejonych ścianek będzie się systematycznie wydłużał, a z nim ilość ścianek, tj. relatorów w słowie. Ponieważ długość krawędzi zbioru ścianek będzie przyrastała liniowo, to całkowita ilość ścianek powinna rosnąć z kwadratem długości. Ten heurystyczny sposób myślenia załamuje się, gdy trafimy na zewnętrzny brzeg diagramu. Dlatego tym rozumowaniem możemy uzyskać kwadratową ilość ścianek względem odległości centralnego punktu od reszty brzegu. Potrzebujemy więc wielokąta, którego grubość zależy liniowo od obwodu. Uzyskaniem takiego wielokąta zajmuje się lemat 3.0.2.



Dowód 4.2.1.

Lemat 4.2.1. *Ustalmy prezentację grupy G z relatorami $\{r_i\}$, przez M oznaczmy $\max(|r_1|, \dots, |r_n|)$. Niech $t > 1$ będzie grubością diagramu Δ z brzegiem $q = q_1 \dots q_n$. Wtedy ilość ścian m jest taka, że*

$$m \geq (2t/M - 1)^2$$

Dowód. Będziemy wielokrotnie korzystać z prostego faktu, iż geodezyjne nie zawierają pętli.

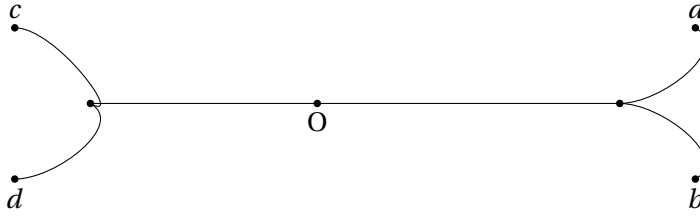
Z definicji grubości, możemy wybrać punkt O leżący na boku p brzegu diagramu Δ , że dla każdego wierzchołka A , $A \in \partial\Delta$, $A \notin p$, $d(A, O) \geq t$.

Będziemy definiować kolejne zbiory ścian. Przez F_0 oznaczmy zbiór ścian diagramu zawierające O . Przez F_i będziemy oznaczać zbiór tych ścian, które posiadają punkt wspólny ze ścianą należącą do rodziny F_j dla $j < i$ oraz nie należą do żadnej z rodzin F_j dla $j < i$.

Można o wybieranych ścianach myśleć jak o poziomach ścian otaczających centralny punkt O . Zdefiniujmy $S_i := \cup_{k \leq i} F_k$. Zbiory S_i są spójne i ograniczone. Popatrzmy na ich brzeg, z_i . Ponieważ punkt O leży na brzegu diagramu Δ , leży także na brzegu każdego ze zbiorów S_i . W związku z tym możemy przedstawić

$$z_i := x_i y_i$$

gdzie x_i jest najdłuższą ścieżką, że $O \in x_i$, a $y_i \cap p = \emptyset$. y_i nie jest puste, gdyż gdyby przypuszczając przeciwnie było puste, to mielibyśmy sytuację, w której w otoczeniu O diagram Δ byłby geodezyjny:



gdzie O i wszystkie ścianki zawierające O leżałyby na p . Zaczniemy od obserwacji, że usunięcie O rozspójniłoby diagram. Gdyby tak nie było, to mielibyśmy w diagramie pętlę zawierającą O (dwóch sąsiadów O na boku p można by połączyć ścieżką nie przechodzącą przez O), która musiałaby być zawarta w p (jeśli ścianka objęta pętlą nie zawiera O , to usuwamy ją bez szkody dla istnienia pętli), co jest sprzeczne z geodezyjnością.

Zatem ponieważ O leży tylko na boku p , podczas przechodzenia po brzegu wzdłuż p musielibyśmy dwa razy przejść przez O , gdyż nie ma innej drogi pomiędzy dwiema składowymi. Daje to znowu pętlę zawartą w p , sprzeczność.

Zauważmy, że dzięki grubości diagramu, do żadnego ze zbiorów S_i dla $i + 1 \leq 2t/(M)$ nie należą punkty z $\partial\Delta$ oprócz punktów z boku p . Istotnie, dla każdego punktu ze zbioru F_i mamy w odległości co najwyżej $M/2$ wierzchołek ze zbioru F_{i-1} - szacujemy z góry połowę obwodu. Zatem dla dowolnego wierzchołka $A \in F_i$ mamy $d(A, O) \leq (i + 1)M/2$.

Ograniczymy się do takich niedużych i , tj. $i + 1 \leq \lfloor 2t/M \rfloor$.

Zauważmy, że dwa skrajne wierzchołki x_i leżą na boku p . Gdyby nie leżały, a pomiędzy nimi na tej stronie z_i na której O nie leży był punkt z p , to y_i zawierałoby punkt z p . Gdyby pomiędzy nimi nie było żadnego punktu z p , ponownie w tej części w której nie ma O , to y_i można by wydłużyć, wbrew jego definicji. Oznaczmy je przez p_{-i} oraz p_i . Przy tych oznaczeniach, dla $t > 1$, $p_{-0} \neq p_0$.

Udowodnimy trzy proste stwierdzenia:

- $|p_{-i}p_i| \geq 2(i + 1)$
- $y_i \cap y_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
- $|y_i| \geq 2(i + 1)$

Dla pierwszego z nich zauważmy, iż $|p_{-0}p_0| \geq 2$. Pozostaje teraz spostrzec, że dzięki grubości diagramu, skrajne wierzchołki $p_{\pm i}$ należą do pewnych ścianek, które posiadają bok zawarty w p i nie należą do S_i . Zatem w kolejne warstwie dostajemy dwa punkty. Punkty te są różne, gdyż inaczej p zawierałoby pętlę, a jest geodezyjną. Zatem x_i zawiera przynajmniej $2(i + 1) + 1$ różnych punktów z geodezyjnej p (razem z O), w odległości przynajmniej jeden od siebie każdy, więc $|p_{-i}p_i| \geq 2(i + 1)$.

Przechodząc do drugiego stwierdzenia, gdyby $y_i \cap y_j \neq \emptyset$, to w szczególności (przypuśćmy $i > j$) oznaczałoby to, że krawędź diagramu v należąca do $y_j \cap y_i$ należy do $\partial\Delta$. Uzasadnimy to, przypuśćmy przeciwnie.

Ponieważ $v \in S_j$, więc w S_j jest jedna ścianka, do której v należy. Istnieją co najwyżej dwie ścianki, do których v należy, więc już w S_{j+1} v byłoby krawędzią wewnętrzną. S_i tylko się powiększają, więc v nigdy już nie będzie należało do z_i ani do y_i , sprzeczność.

Jeśli krawędź należy do brzegu diagramu, to na mocy założenia o grubość diagramu i liczbie warstw, do których się ograniczyliśmy, oznaczałoby to, że $v \in p$. Nie jest to możliwe, gdyż $v \in y_j$, a $y_j \cap p = \emptyset$, sprzeczność. Zatem zbiory y_i są rozłączne.

Dla trzeciego zauważmy, że y_i łączy dwa punkty p_{-i}, p_i leżące na geodezyjnej, więc $|y_i| \geq |p_{-i}p_i| \geq 2(i + 1)$.

Z tych stwierdzeń możemy wyciągnąć końcowe wnioski. Ponieważ kolejne brzegi y_i zbiorów S_i są rozłączne, do każdego z nich możemy przyporządkować przynajmniej $|y_i|/M$ ścian i żadna

przypisana ściana się nie powtórzy — każda taka ściana należy do zbioru F_i . W związku z tym możemy oszacować z dołu liczbę ścian diagramu:

$$m \geq \sum_{1 \leq i \leq \lfloor 2t/M \rfloor} 2i/M \geq \frac{1}{M} (2t/M - 1)^2$$

□

Teraz możemy zakończyć dowód twierdzenia. Przypuśćmy, że grupa G nie jest hiperboliczna, a jej funkcja Dehna, $D(n)$ jest $o(n^2)$. Na mocy 3.0.2 możemy wybrać ciąg słów w_n , że grubość diagramu w_{n+1} jest większe o przynajmniej jeden od grubości diagramu w_n . Oznaczmy grubość w_n przez t_n , wtedy również na podstawie lematu $|w_n| \leq 43|t_n|$ oraz:

$$D(|w_n|) \geq m(w_n) \geq (2t/M - 1)^2 \geq \left(\frac{2|\partial\Delta|}{43M} - 1\right)^2 = \left(\frac{2|w_n|}{43M} - 1\right)^2$$

gdzie $m(w_n)$ oznacza ilość ścian w diagramie słowa w_n . Po podzieleniu stronami przez $|w_n|^2$ i przejściu do granicy dostajemy sprzeczność z założeniem, że $D(n)$ jest $o(n^2)$, gdyż $|w_n| \geq t_n$, więc długości słów również rozbiegają do $+\infty$.

Zatem G jest hiperboliczna.

□

Rozdział 5

Zbiór izoperymetryczny

Przedstawione twierdzenia to nieduży fragment większej teorii. Wspomnimy pokrótce o pewnym ciekawym wyniku.

Naturalne wydaje się pytanie, jakie liczby mogą być wykładnikami funkcji Dehna skończenie prezentowanych grup.

Definicja 5.0.1. *Definiujemy zbiór izoperymetryczny jako:*

$$IP := \{\alpha : n^\alpha \text{ jest } \simeq \text{ do pewnej funkcji Dehna}\}$$

Pokazaliśmy, że $IP \cap (1, 2) = \emptyset$. Z definicji zbioru IP wynika, że jest on podzbiorem $[1, \infty)$. Za-uważmy, iż ten zbiór może być co najwyżej przeliczalny, gdyż mamy przeliczalnie wiele skończo-nych prezentacji grup. Powstaje pytanie, czy zbiór IP ma też inne dziury — okazuje się, że nie, gdyż

$$\overline{IP} = 1 \cup [2, \infty)$$

Dowód tego faktu można znaleźć na przykład tu [2].

Zbiór izoperymetryczny ma również wiele innych ciekawych własności. Przytaczanie ich do-wodu jest poza zakresem tej pracy, ale warto o nich wspomnieć [3]:

- Jeśli $\alpha > 4$, $C \geq 1$ i istnieje maszyna Turinga, która oblicza pierwszych m cyfr α w czasie $\leq C2^{2^{Cm}}$, to $\alpha \in IP$
- Jeśli $\alpha \in IP$, to istnieje maszyna Turinga, która oblicza pierwszych m cyfr α w czasie $\leq C2^{2^{Cm}}$

Bibliografia

- [1] A. Yu. Ol'Shanskii. *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality*. International Journal of Algebra and Computation, volume 1, issue 3 (1991), DOI: 10.1142/s0218196791000183.
- [2] Noel Brady, Tim Riley, Hamish Short. *The geometry of the Word Problem for Finitely Generated Groups*. ISBN 978-3-7643-7949-0, Birkhäuser Verlag (2000).
- [3] M. Sapir, J-C. Birget, E. Rips. *Isoperimetric and isodiametric functions of groups*. Annals of Mathematics (2), vol 156 (2002), no. 2, pp. 345–466.
- [4] George Hyun. *Hyperbolicity and the word problem*.
<https://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Hyun.pdf>
- [5] Martin R. Bridson. *The geometry of the word problem*.
<https://people.maths.ox.ac.uk/bridson/papers/bfs/bfs.pdf>