

## Pitanja i zadaci I odgovori za odbranu vežbi iz Digitalne obrade signala By White Dragon

1. Napisati *Matlab* kod koji generiše proizvoljnu matricu **A** dimenzija 3x4. Koja je naredba za transponovanje matrice? Šta se dobija transponovanjem matrice **A**?

```
A=[1 2 3 4 ; 5 6 7 8 ; 9 10 11 12]
```

2. Napisati čemu će biti jednaka matrica **A** nakon izvršavanja sledećeg *Matlab* koda:

```
A = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12];  
A (1, :) = zeros(1, 4);  
A (:, 2) = ones (1, 3);  
A (3, 3) = 7;
```

```
A={ 0 1 0 0  
    5 1 7 8  
    9 1 7 12}
```

3. Napisati čemu su jednaki vektori **B** i **C**, dobijeni sledećim *Matlab* kodom:

```
A = 1 : 9;  
B = 2 : 2 : 8;  
C = 3 : 1 : length(A);
```

```
A= 1 2 3 4 5 6 7 8 9  
B=2 4 6 8  
C=3 4 5 6 7 8 9
```

4. Napisati čemu je jednak vektor **V** nakon izvršavanja sledeće naredbe:

```
V = [3 zeros(1, 2) 1 ones(1,3) 2];
```

```
V=3 0 0 1 1 1 1 2
```

5. Objasniti pojam digitalnih i analognih signala, i navesti po jedan primer. Zašto insistiramo na digitalnoj obradi kada je većina signala u prirodi analogna?

Prema prirodi svoje neyavisno promenljive, signali se dele na kontinualne i diskretne. Kontinualni signali su neprekidna funkcija vremena i jednoynacno su definisani za svaku vrednost promenljive. Analogni signali su signali kod kojih amplitude signala mogu uzimati vrednost iz dozvoljenog opsega. Za razliku od njih, diskretni signali su definisani samo za diskretne vrednosti nezavisno promenljive vremena, a izmedju ovih vrednosti nisu definisane. Ukoliko je izvršena kvantizacija amplitude diskretnog signala, dobijeni signal je digitalni.

6. a)Definisati jedinični impuls.

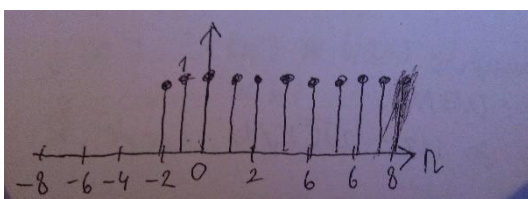
Najjednostavniji diskretni signal je jedinичni impuls. To je niz kojim ima samo jedan nenulti element, jednak jedinici. Definisani su na beskončanom intervalu izrazom:  $\delta[n] = [1, n=0, 0, n \neq 0]$

b) Napisati Matlab kod za iscrtavanje signala  $X[n] = \delta[n-2] + \delta[n+1]$  na intervalu  $n = -4:4$ . Nacrtati dati signal.

```
n = -4:4;
delta1=[zeros(1,6) 1 zeros(1,2)];
delta2=[zeros(1,3) 1 zeros(1,5)];
x=delta1 + delta2;
stem (n,x)
```

7. a) Prikazati šta će se iscrtati izvršavanjem sledećeg Matlab koda:

```
n = -7:7;
x = [zeros(1,5) ones(1,10)];
stem(n, x);
```



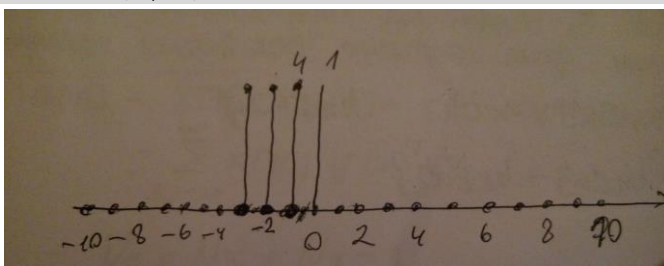
b) Kako se zove iscrtani signal? Napisati opšti izraz kojim je on opisan.

-Jedinicni signal je jedinica odskocna funkcija  $u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$

8. Prikazati šta će iscrtati sledeći *Matlab* kod:

```
n = -10 : 10;
u1 = [zeros(1,7) ones(1,14)];
u2 = [zeros(1,10) ones(1,11)];

x = 4*u1 - 4*u2;
stem(n, x);
```



9. Data je kontinualna sinusoida  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  koju treba diskretizovati. Diskretizacija se vrši sa frekvencijom odabiranja  $f_{od}$ . Napisati relaciju kojom će biti definisana diskretna sinusoida. Koliko iznosi njena diskretna frekvencija  $f_0$ ? Da li će dobijena diskretna sinusoida u svakom slučaju biti periodična.

Mora biti zadovoljena relacija:  $\sin(\omega_0 n) = \sin(\omega_0 n + \omega_0 N)$ , što će biti ispunjeno ako je  $\omega_0 = 2\pi K/N$ , gde je K ceo broj.

Da bi diskretna sinusoida bila periodični signal (normalizovana učestanost) je  $\omega_0/2\pi$  mora biti

racionalan broj. Ako normalizovana ucestanost nije racionalan broj, tada diskretna sinusoida nije periodicna i odbirci diskretne sinusoide se nikada nece ponoviti.

10. Šta je impulsni odziv? Koliki je rezultatni impulsni odziv dva sistema koja su vezana redno (kaskadna veza) / paralelno?

Pod impulsnim odzivom  $h[n]$  podrazumevamo odziv(izlaz) diskretnog sistema kada se na njegov ulaz dovede jedinичni impuls  $\delta[n]$ . Rezultatni impulsni odziv redne(kaskadne)veze:  
 $y[n] = w[n] * h_2[n] = \delta[n] * h_1[n] * h_2[n]$

Rezultatni impulsni odziv paralelne veze:

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$y[n] = x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\}$$

11. Ako su  $x[n]$  i  $h[n]$  ulazni signal i impulsni odziv sistema, kako se dobija signal na izlazu iz sistema? Ako su dati spektar ulaznog signala  $X(k)$  i funkcija prenosa sistema  $H(k)$ , kako se dobija spektar signala na izlazu iz sistema?

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y = \text{conv}(x, h);$$

12. Kako se zove sistem koji zadovoljava uslov superpozicije? Zašto je u digitalnoj obradi signala bitan princip superpozicije?

$$y_1[n] = \phi\{x_1[n]\}, y_2[n] = \phi\{x_2[n]\} \rightarrow ay_1[n] + by_2[n] = \phi\{ax_1[n] + bx_2[n]\}$$

Na superpoziciji se zasniva većina tehnika digitalne obrade signala.

13. a) Napisati izraz za računanje konvolucije dva signala  $x[n]$  i  $y[n]$ , čije su dužine  $N_x$  i  $N_y$ , respektivno. Kako se označava konvolucija? Kolika je dužina signala dobijenog konvolucijom? Koja naredba u *Matlab*-u služi za računanje konvolucije?

$$\begin{aligned}
 - a[n] &= x[n] * y[n] \quad \leftarrow \text{konvolucija} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n-k] \\
 - N_a &= N_x + N_y - 1 \\
 - \text{conv}(x, y);
 \end{aligned}$$

- b) Koja je primena konvolucije u digitalnoj obradi signala?

Ukoliko je poznat impulsni odziv Sistema može se izračunati odziv Sistema za bilo koji izlazni signal. To znači da ako poznajemo impulsni odziv znamo sve što je potrebno o sistemu.

14. Diskretni sistem ima impulsni odziv  $h = [1/2 \ 1/4 \ 1/8]$ . Na ulaz tog sistema se dovodi signal

$x = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$ . Napisati *Matlab* kod za računanje i grafičko prikazivanje izlaznog signala  $y[n]$ .

```
h = [1/2 1/4 1/8];
X = [1 2 3 4];
y = conv(x, h);
n = 0 : length(y) - 1;
stem(n, y);
```

15. Dat je sistem definisan relacijom  $y[n] = 2 * x[n] + x[n - 3]$ . Napisati *Matlab* kod za izračunavanje i prikazivanje impulsnog odziva sistema  $h[n]$  za  $n = 0: 7$ .

```
h = zeros(1, 8);
X1 = [1 zeros(1, 7)];
X2 = [zeros(1, 3) 1 zeros(1, 4)];
h = 2 * X1 + X2;
n = 0 : length(h) - 1;
stem(n, h);
```

16. Nad kakvim signalima se primenjuje *Fourier*-ov red, a nad kakvim *Fourier*-ova transformacija? Kojim spektrima je opisan signal u frekvencijskom domenu? Kod kojih signala je spektardiskretan, a kod kojih kontinualan?

Fourijeov red → kontinualni periodični signali

Fourijeova transformacija → kontinualni neperiodični signali.

Signal je u frekvencijskom domenu opisan svojim amplitudskim i faznim spektrom. Spektar je diskretan za kontinualne periodične signale. Spektar je kontinualan za aperiodične signale.

17. Fourier-ovim redom se signal predstavlja u obliku sume sinusoidalnih signala. Kolike su vrednosti njihovih ugaonih frekvencija?

$\omega = 0, 2\pi/T$  – isbibva ugaona frekvencija

18. Kako se iz *Fourier*-ovog transformata  $X(j\Omega)$  dobijaju amplitudski i fazni spektar? Koje su odgovarajuće naredbe u *Matlab*-u?

```
X(j\omega) = |X(j\Omega)| e^{j \arg\{X(j\Omega)\}}
```

$\text{abs}(X)$ ; ← amplitudski spektar

$\text{angle}(X)$ ; ← fazni spektar

19. Kojoj operaciji u frekvencijskom domenu odgovara konvolucija u vremenskom?

Množenje u frekvencijskom domenu odgovara konvoluciji u vremenskom domenu

$$Y(j\omega) = X(j\omega) * H(j\omega)$$

20. Napisati kako glasi *teorema odabiranja*. Objasniti pojavu preklapanja (*aliasing*).

Pretpostaviti da je kontinualni signal  $x(t)$  ograničenog spektra tj:  $X(e^{j2\pi f}) = 0$  za  $|f| \geq f_m$

Ukoliko se kontinualni signal odmerava frekvencijom  $f_s = \frac{1}{T_s}$  gde je  $T_s$  perioda odabiranja i ako

je zadovoljen uslov :  $f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_m$

Aliasing je preklapanje u spektru diskretizovanog signala. Iz dobijenog diskretnog signala  $x[n]$  moguće je rekonstruisati  $x(t)$ .

21. Ako je diskretni signal nastao diskretizacijom kontinualnog signala, uporediti spektar kontinualnog signala dobijenog pomoću *Fourier*-ove transformacije i spektar diskretnog signala dobijenog pomoću DTFT?

DFT nastaje diskretizacijom jedne periode. Kod spektra kontinualnog signala dobijenog pomoću *Furi*jeove transformacije, njegove komponente se mogu nalaziti na celobrojnim umnoscima osnovne frekvencije  $f$ .

22. Kakav je spektar diskretnih signala dobijen primenom DTFT, a kakav dobijen primenom DFT?

Spektar diskretnih signala dobijen DTFT-om je kontinualan i periodičan sa periodom  $2\pi$ ,

23. a) Kako se dobija diskretna *Fourier*-ova transformacija iz *Fourier*-ove transformacije?

Diskretna *furi*jeova transformacija nastaje diskretizacijom jedne periode *Furi*jeove transformacije.

b) Šta je to *frekvencijsko odabiranje*?

DFT se izračunava za diskretnu frekvenciju čiji je inkrement  $\Delta\omega = 2\pi/N$ . Dato odabiranje se vrši u frekvencijskom domenu i naziva se frekvencijsko odabiranje.

24. Ako je signal za koji računamo DFT realan, koju osobinu će imati dobijeni amplitudski spektar?

Ako je signal  $x[n]$  za koji se računa DFT realan dovoljno je posmatrati rezultate na interval od 0 do  $N/2$ , jer su vrednosti na interval od  $N/2$  do  $N-1$  simetrično preslikane.

25. Čemu je jednak broj tačaka DFT-a? Kako možemo dobiti DFT sa više tačaka? Šta se time poboljšava?

Da bi se dobio DFT sa više tačaka treba proizvesti dati diskretni signal dodavanjem nultih elemenata. Nulti elementi ne utiču na iznos zbira u izrazu za izračunavanje DFT, ali se sa većim  $N$  smanjuje razmak između tačaka na frekvencijskoj skali što poboljšava rezoluciju.

26. Šta je *curenje spektra* i kada se javlja?

Aliasing-spektralno preklapanje (curenje). Nastaje kao posledica: male brzine odmeravanja; spektar ulaznog signala nije ograničen; nije moguće realizovati idealan filter.

27. Koja naredba u Matlab-u izračunava brzu *Fourier*-ovu transformaciju? Objasniti i argumente. U kom domenu je dobijeni rezultat? Šta se dešava ukoliko želimo da računamo *Fourier*-ovu transformaciju u  $N$  tačaka, pri čemu je  $N$ :

- a) veće od broja tačaka ulaznog signala
- b) manje od broja tačaka ulaznog signala?

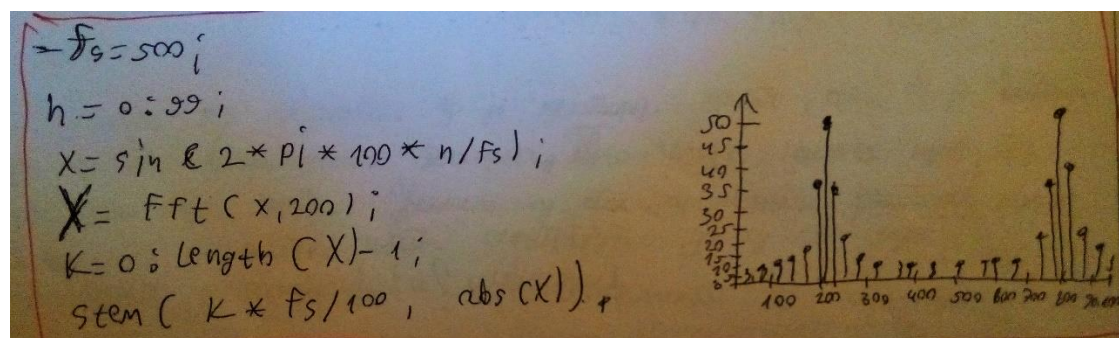
$x = \text{fft}(X, N)$ ;  $x$ -ulazni signal,  $X$ -vektor izlaznog signala,  $N$ - broj tačaka za koje se računa FFT

a) Prilikom izračunavanja FFT-a u  $N$  tačaka, pri čemu je  $N$  veće od broja tačaka signala, Matlab će automatski dopuniti dati signal nulama.

b) Prilikom izračunavanja FFT-a u  $N$  tačaka, pri čemu je  $N$  manje od broja tačaka signala, Matlab će uzeti u obzir samo prvih  $N$  tačaka a ostale će odbaciti.

28. Za zadati Fourier-ov transformat  $X$  kojom naredbom se dobija signal u vremenskom domenu?

29. Izvršiti odabiranje kontinualnog signala  $x(t) = \sin(2\pi 100t)$  sa frekvencijom odabiranja  $f_s = 500$  Hz. Generisati 100 odbiraka datog signala. Izračunati i nacrtati amplitudski spektar generisanog signala u 200 tačaka (jedan ispod drugog).



30. Napisati *Matlab* program koji generiše signal koji je jednak zbiru dve sinusoide učestanosti  $f_1 = 20$  Hz i  $f_2 = 50$  Hz, amplitude  $A_1 = 0.3$  i  $A_2 = 0.5$ , i početnih faza po  $\pi/3$ . Na istom grafiku nacrtati generisani signal i sinusoide od kojih se signal sastoji. Generisati spektar signala i nacrtati jedan ispod drugog amplitudski i fazni spektar. Učestanost odabiranja je 1 kHz.

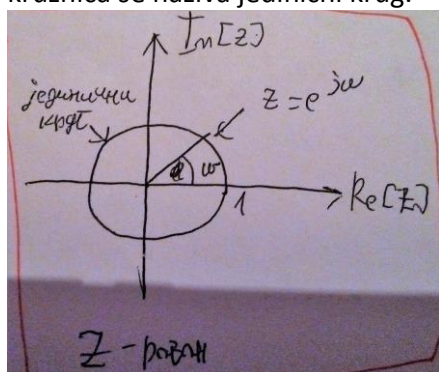
31. U *Matlab*-u napisati program koji generiše i crta sinusoidu frekvencije 2 kHz, amplitude 2, faze 0, trajanja 0.001 sec i frekvencije odabiranja 100 kHz. Nacrtati (jedan ispod drugog) dobijeni signal, amplitudski i fazni spektar.

32. Šta je Z transformacija? Koja je veza između Z i *Fourier*-ove transformacije?

Z transformacija preslikava diskretni signal u kontinuiranu funkciju promenljive Z čime se omogućava primena kompleksne analize u resavanju problema diskretnih signala i Sistema. Izračunavanjem Z transformacije na jedinичnom krugu dobija se *Fourier*-ova transformacija.

33. Šta je *z-ravan*? U čemu je značaj jedinичnog kruga? Nacrtati ga.

Z transformacija je funkcija kompleksne promenljive pa je uobičajeno da se tumači u kompleksnoj Z ravni. Skup svih Z za koje važi  $|Z|=1$ , može se predstaviti kružnicom jedinичnog prečnika, a ta kružnica se naziva jedinичni krug.



34. Šta su to nule, a šta polovi funkcije  $X(z)$ ? Koja je naredba u *Matlab*-u za crtanje položaja nula i polova? U kom slučaju su argument ove funkcije *vektori vrste*, a u kom *vektori kolone*?

$X = \frac{P(Z)}{Q(Z)}$ ; Nule polinoma  $Q(Z)$  se nazivaju nulama funkcije  $X(Z)$ ; Nule polinoma  $P(Z)$  se nazivaju polovima funkcije  $X(Z)$

`zplane(Z,P)`

Ukoliko su argumenti funkcije *vektori vrste*, ova funkcija smatra da su to koeficijenti polinoma. Prvo nadje njihove nule, pa ih tek onda crta. Ukoliko su ti argumenti *vektori kolone*, onda ih direktno crta smatrajući da su to nule polinoma u brojiocu i imeniocu.

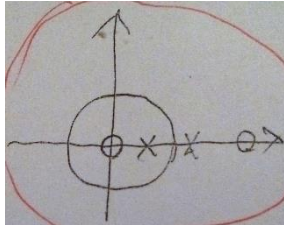
35. Posmatrajući funkciju prenosa racionalnog oblika, kako se može odrediti da li je sistem stabilan?

Potreban i dovoljan uslov da diskretni LTI system bude stabilan jeste da jedinичni krug Z ravni pripada oblasti konvergencije Funkcije diskretnog prenosa sistema



36. Šta je oblast konvergencije? Skicirati oblast konvergencije funkcije diskretnog prenosa datog kauzalnog sistema  $(z) = \frac{z(z-4)}{(z-0.7)(z-1.2)}$  konvergencije – vrednost funkcije  $X(Z)$  je definisana samo

Da li je ovaj sistem stabilan? Oblast



za one vrednosti  $Z$  za koje se red konvertira. Oblast u  $Z$  ravni u kojoj se red konvertira naziva se oblast konvergencije.

Data funkcija prenosa ima dve nule  $Z=0$  i  $Z=4$  i dva pola  $Z=0.7$  i  $Z=1.2$ . Jedan pol se ne nalazi unutar jedinичnog kruga. Sistem je nestabilan

37. Zadati su kauzalni diskretni sistemi sledećom diferencijalnom jednačinom:  
 $y[n] - 3.25y[n-1] = x[n-1] - 0.75y[n-2] + 3x[n-2]$ .

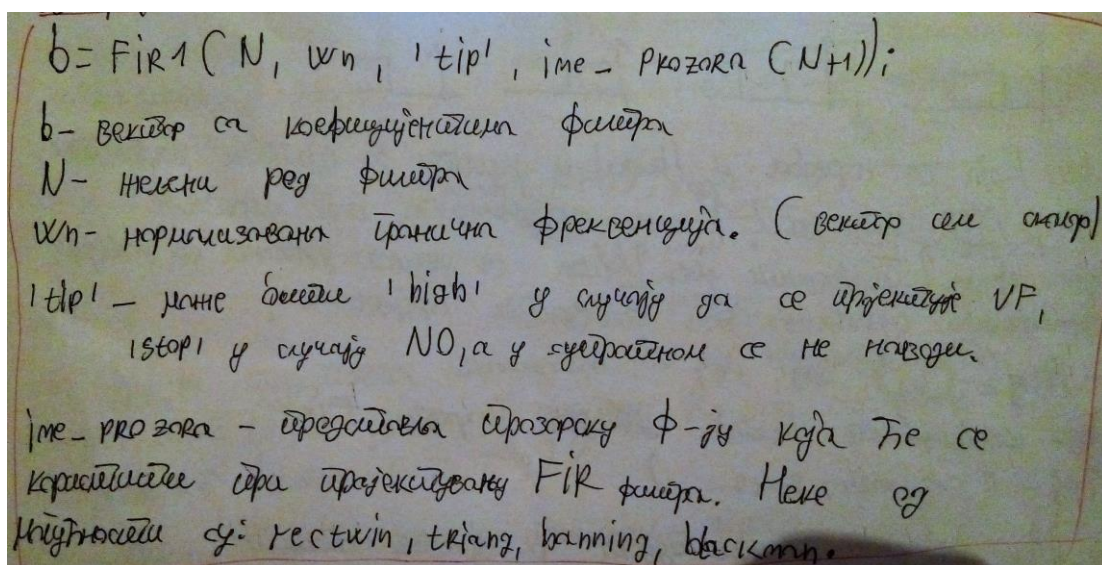
- a) Primenom Z transformacije analitički odrediti funkciju prenosa  $H(z)$  ovog sistema.
- b) Napisati program za iscrtavanje nula i polova.
- c) Ispitati stabilnost ovog sistema.

Napomena:  $z^2 - 3.25z + 0.75 = (z - 0.25)(z - 3)$ .

38. Šta su prozorske funkcije? Za projektovanje kojih filtara se one koriste? Kako izbor različitih prozora utiče na izgled amplitudske karakteristike projektovanog filtra?

Prozorska funkcija predstavlja niz konacne duzine sa vrednostima koeficijenata odabranim na neki pogodan nacin; Koriste se za projektovanje FIR filtara; Izbor razlicitih prozora utice na sirinu prelazne zone u slabljenje u nepropusnom opsegu.

39. Koja se naredba u *Matlab*-u koristi za generisanje koeficijenata FIR filtra? Pojasniti sve argumente ove funkcije.

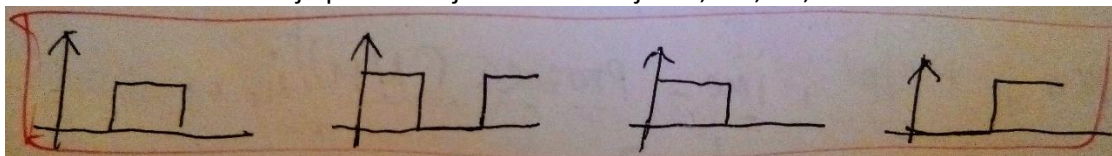


40. Šta je normalizovana frekvencija? Ukoliko je perioda odabiranja  $f_s$ , a granična učestanost  $f_g$ , kolika je normalizovana granična frekvencija?

Normalizovana granicna frekvencija ima vrednost 1 kada je granicna frekvencija jednaka polovini frekvencije odabiranja.  $fn = fg / (fs/2)$

41. Šta su filtri i kakve vrste filtara postoje (na osnovu propusnog opsega)? Skicirati funkciju prenosa svakog od njih.

Filtriranje je process izdvajanja ili potiskivanja odredjenih frekvencijskih komponenti signala. Osnovna namena filtra je potiskivanje suma. Postoje PO, NO, NF, VF



42. Koja se naredba u *Matlab*-u koristi za crtanje karakteristika FIR/IIR filtra? Koliko argumenata može imati ova funkcije? Pojasniti ih. Šta se dešava ukoliko se navede frekvencija odabiranja kao četvrti argument?

Freq(b,1,broj,fs)

b-koeficijent filtra dobijene naredbom fir1

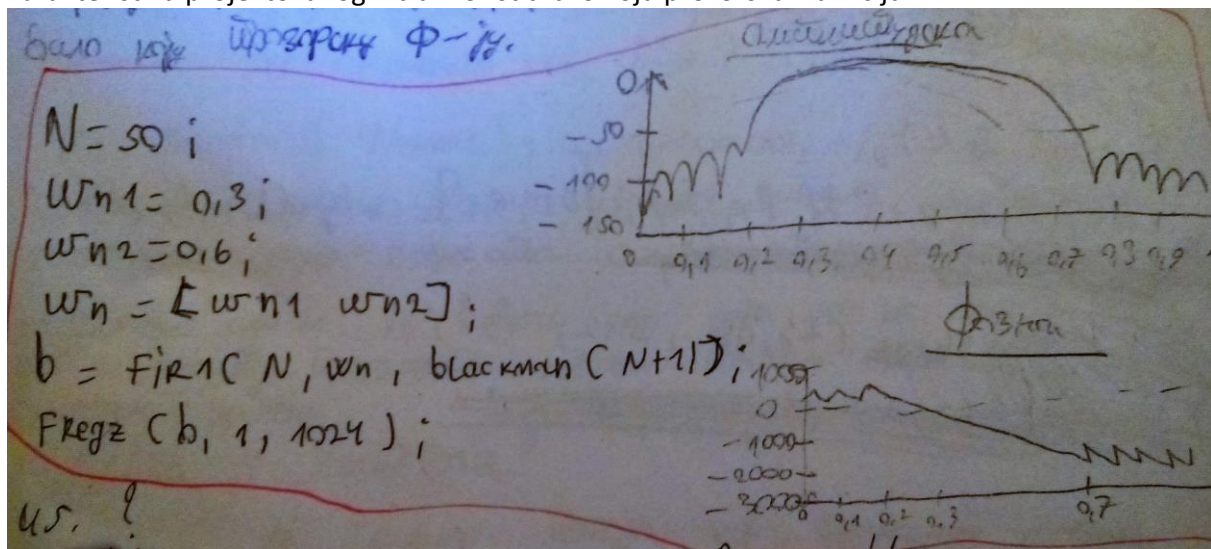
broj-(512,1024,2048...)

Na dijagramu amplitudskog i faznog spectra nece biti prikazana normalizovana vec stvarna frekvencija.

43. Ukoliko su poznati koeficijenti FIR filtra  $\mathbf{b}$  i ulazni signal  $\mathbf{x}$ , kojom naredbom se dobija izlaz iz filtra?

$y = \text{filter}(\mathbf{b}, 1, \mathbf{x})$ ; y-izlazni signal

44. Projektovati PO (propusnik opsega) FIR filter reda  $N = 50$  između normalizovanih graničnih učestanosti  $m_{n1} = 0.3$  i  $m_{n2} = 0.6$  (n rad/odbirku). Nacrtati amplitudsku i faznu karakteristiku projektovanog filtra. Koristiti bilo koju prozorsku funkciju.



45. U Matlab-u napisati program koji generiše signal koji je jednak zbiru dve sinusoide, učestanosti

$f_1 = 20$  Hz i  $f_2 = 100$  Hz, amplitude  $A_1 = 0.8$  i  $A_2 = 0.5$ , i početnih faza po  $n/4$ . Učestanost odabiranja je 500 Hz. Generisati NF FIR filter koji će propustiti samo jednu komponentu signala (red filtra je 50, a granična učestanost  $f_g = 50$  Hz). Filtrirati signal i nacrtati amplitudski spektar ulaznog signala, funkciju prenosa filtra i amplitudski spektar filtriranog signala, jedan ispod drugog.

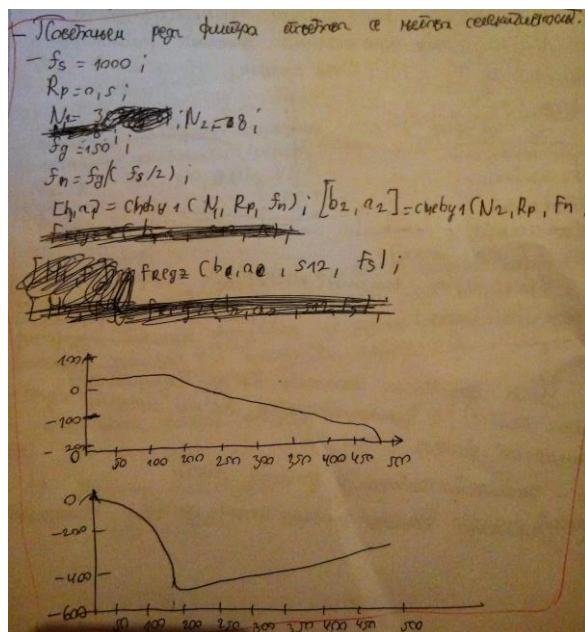
46. Šta predstavlja parameter  $R_p$  kod Čebiševljevog filtra (tip 1), a šta parameter  $R_s$  kod inverznog Čebiševljevog filtra (tip 2)?

$R_p$ - maksimalno slabljenje u propusnom opsegu

$R_s$ - minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu

47. Šta predstavlja red filtra? Projektovati VF Čebiševljev filter tip 1, i to trećeg i osmog reda. Nacrtati

njihove uporedne amplitudske karakteristike. Frekvencija odabiranja je  $f_s = 1000$  Hz, granična frekvencija  $f_g = 150$  Hz, a maksimalno slabljenje u propusnom opsegu  $R_p = 0.5$  dB.



48. Koja je razlika između FIR i IIR filtera? Prednosti i nedostaci.

Velika prednost IIR filtera u odnosu na FIR filter je mogućnost da se željeni oblik amplitudske karakteristike može bolje aproksimirati sa manjim brojem koeficijenata. Međutim, IIR filter za razliku od FIR filtera ne može imati potpuno linearnu faznu karakteristiku unutar propusnog opsega što nekad može predstavljati veliki nedostatak.

49. Šta je slučajni signal? Koja je naredba za generisanje slučajnog signala sa normalnom (*Gauss-ovom* raspodelom)? Pojasniti sve argumente ove funkcije.

```
y1=random('normal',0,1,10000,1);
```

Generise 1000 odbiraka slučajnog signala sa normalnom raspodelom srednje vrednosti 0 i standardne devijacije 0.

Slučajni signal je signal kod koga se ne može sa sigurnošću predvideti njegova tačna vrednost u narednom vremenu.

50. Šta je histogram?

Histogram je grafička metoda koja prikazuje raspodelu slučajnog signala. Ona daje grafički prikaz broja pojavljivanja određenih vrednosti signala sa zadatom rezolucijom. `hist(y,x);`

51. Šta je srednja vrednost signala i koja se naredba u *Matlab*-u koristi za njeno izračunavanje?

Srednja vrednost(`mean`) je statistička veličina koja predstavlja srednju vrednost signala. `mean(x);`

52. Šta je standardna devijacija, a šta varijansa signala? Naredbe u *Matlab*-u.

Standardna devijacija  $\delta$ -promenljiva komponenta, pokazuje promenu signala oko srednje vrednosti. Kvadrat standardne devijacije naziva se varijansa signala (variance) `std(x); var(x);`

53. Napisati *Matlab* program za generisanje 10 000 odbiraka slučajnog signala koji ima normalnu (*Gauss-ovu*) raspodelu sa:

a) srednjom vrednošću  $\mu = 0$  i standardnom devijacijom  $\sigma = 1$ ,

b) srednjom vrednošću  $\mu = 5$  i standardnom devijacijom  $\sigma = 4$ .

Napisati kod za crtanje histograma ovih signala u odnosu na vrednosti  $x = -20 : 0.01 : 20$ . Skicirati ove histograme na papiru i objasniti ih.

54. Koja je karakteristika autokorelacione funkcije periodičnih signala? Šta nam govori autokorelaciona funkcija?