Investigação operacional – Trabalho prático II

Carolina Martins – A107285

Diogo Ribeiro – A106906

Filipa Gonçalves – A107329

Lucas Robertson – A89467

30 de maio 2025

1 Dados do Problema

Como exigido pelo enunciado os dados do problema a resolver são determinados em função do número de aluno mais elevado entre os integrantes do grupo. No caso, esse é A107329, que deu origem aos seguintes dados:

x	A	B	C	D	E
1	0	7	3	2	9

$$K = 29 \bmod 7 \Leftrightarrow k = 1$$

Assim, a partir da tabela fornecida podemos concluir que o vértice de origem é o 1 e o vértice de destino é o 5. Para finalizar os dados do problema podemos verificar a capacidade de cada vértice na seguinte tabela:

Vértice	Capacidade
1	-
2	100
3	40
4	30
5	-
6	120

Tabela 1 - Capacidade de cada vértice na rede

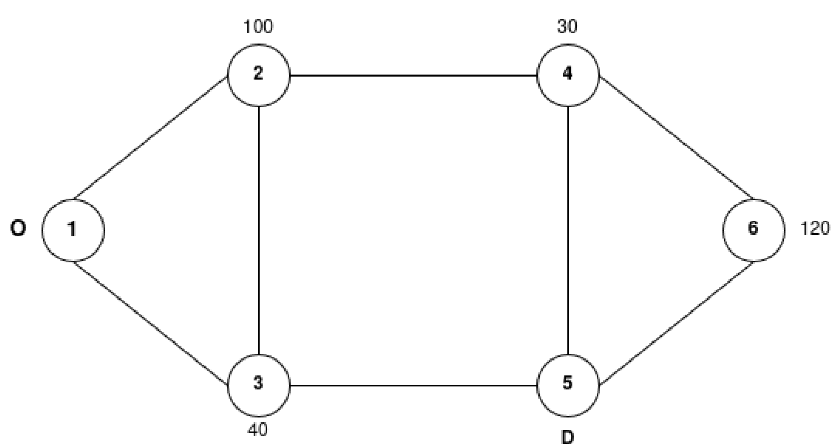

Figura 1 - Rede na qual deve ser resolvido o problema de maximização de fluxo

2 Formulação do Problema

2.1 Conceitos introdutórios

O problema a abordar baseia-se numa rede de fluxos, um sistema composto por um grafo e por informações adicionais associadas a cada arco (como capacidades e custos unitários) e/ou a cada vértice (como capacidades, ofertas ou consumos). Antes de introduzir formalmente estes elementos, é importante compreender o conceito de fluxo — isto é, algo que se transfere entre os vértices da rede por meio dos seus arcos. A natureza desse "algo" varia consoante o contexto do problema e o significado atribuído à rede.

De forma a fornecer uma melhor explicação iremos usar um exemplo que consideramos que seja ilustrativo:

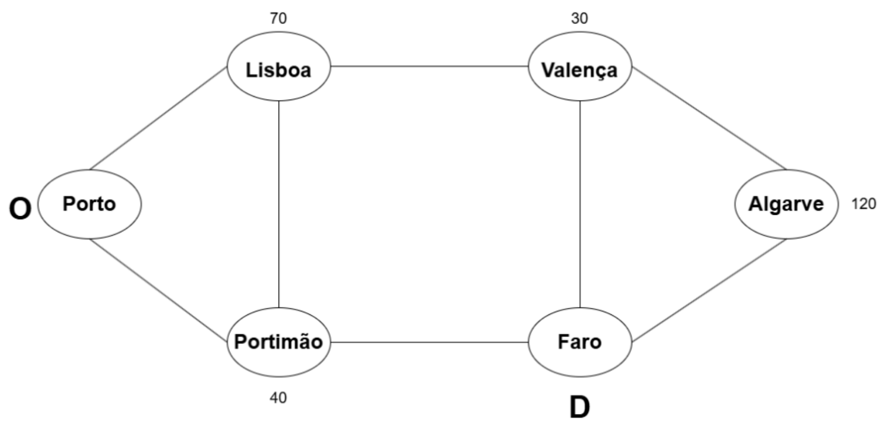

Figura 2 - Interpretação da rede dada como um sistema de portagens

A rede da Figura 2 pode ser interpretada como um sistema de portagens, onde os vértices representam cidades ou intersecções, e os arcos correspondem às estradas com portagens que ligam essas localidades. Neste contexto, o fluxo representa o número de automóveis que circulam entre os diferentes pontos da rede.

Nos problemas tratados neste documento, as decisões consistem em determinar a quantidade de automóveis (fluxo) a passar por cada estrada (arco da rede). Em vez de haver preocupações com o sentido do tráfego (fluxo), cada uma das estradas terá duas vias, isto é, são modeladas como duas estradas distintas, cada uma com um sentido e uma variável de decisão associada.

Com o conceito de fluxo estabelecido, é possível definir propriedades para os vértices e os arcos, como as capacidades. A capacidade de um vértice representa o número máximo de veículos que pode entrar numa determinada cidade ou passar por uma portagem, o que reflete por exemplo os limites da infraestrutura urbana ou do sistema de cobrança. Por exemplo, pode considerar-se que a cidade de Lisboa não consegue receber mais de 70 veículos por hora devido a restrições de tráfego.

O conceito de custo unitário é bastante direto e será fundamental para transformar o problema apresentado num formato compatível com o *solver* utilizado. No contexto de um sistema de portagens, o custo unitário de um arco representa o valor monetário associado à passagem de um único veículo por uma determinada estrada com portagem. Por exemplo, circular entre Lisboa e Valença poderá ter um custo unitário associado de 1€ por veículo.

O último conceito essencial é o de oferta/consumo. Um vértice da rede pode representar uma origem de tráfego, onde veículos entram na rede (oferta), ou um destino onde os veículos saem (consumo). No contexto apresentado, estes conceitos refletem o número de veículos que partem de uma cidade ou que têm essa cidade como destino final. Na imagem fornecida, o vértice "O" representa a origem (Porto), enquanto "D" representa o destino final dos veículos (Faro).

Qualquer problema de fluxo numa rede como esta envolve dois tipos principais de restrições. O primeiro são as restrições de capacidade: o número de veículos que atravessa qualquer estrada (arco) deve estar entre 0 e o valor máximo suportado por essa estrada. Por exemplo, a estrada entre Lisboa e Valença tem uma capacidade de 30 veículos — esse valor não pode ser ultrapassado. Importa referir que as capacidades nos vértices devem ser modeladas como capacidades adicionais em arcos.

O segundo tipo de restrição são as restrições de conservação de fluxo: em cada vértice da rede, a diferença entre o fluxo que entra e o que sai deve ser igual à sua oferta (valor positivo) ou consumo (valor negativo). No sistema de portagens, isto garante que não há criação ou desaparecimento misterioso de veículos — todos os veículos que entram na rede saem em algum ponto, conforme definido.

O problema em análise é um problema de maximização de fluxo: dados dois vértices da rede (neste caso, o ponto de origem "O" e o ponto de destino "D"), pretende-se determinar o maior número possível de veículos que podem circular da origem ao destino, respeitando todas as restrições de capacidade e conservação de fluxo. Neste cenário, o custo das portagens é irrelevante — interessa apenas fazer passar o maior número de veículos pela rede, independentemente do custo associado.

Mais à frente, este problema de fluxo máximo será reformulado como um problema de minimização de custo. Neste novo modelo, o objetivo passa a ser encontrar a forma mais barata de transportar uma determinada quantidade de veículos entre cidades com oferta e cidades com procura, sempre respeitando as mesmas restrições de capacidade e conservação de fluxo. Assim, o problema passa de maximizar o número de veículos para minimizar o custo total do transporte desses veículos pela rede de portagens.

2.2 Formulação matemática

Antes da resolução do problema apresentado é essencial a definição formal e rigorosa dos conceitos de redes de fluxos. Para tal será considerada a figura 1, sem usar o contexto de portagens, previamente utilizado para explicar o problema, este apenas voltará a ser usado na interpretação da solução final, de forma a expor como é que estes conceitos são usados no mundo real.

Uma rede de fluxos é representada por um grafo orientado $G=(V,A)$, onde V é o conjunto de vértices e $A \subseteq V^2$ representa o conjunto de arcos (ou arestas orientadas). Cada vértice $i \in V$ pode ter associado um valor b_i, correspondente a uma oferta (se positivo) ou a um consumo (se negativo) de fluxo. Por sua vez, a cada arco $(i,j) \in A$ pode estar associada uma capacidade u_{ij}, que define o fluxo máximo permitido nesse arco, e um custo unitário c_{ij} , que representa o custo de transportar uma unidade de fluxo de i para j.

Importa referir que, nesta definição, não se consideram diretamente capacidades nos vértices nem arcos não orientados. Contudo, como será explicado na secção seguinte, esses elementos podem ser transformados de forma a adaptar a rede ao seu formato padrão.

Nos problemas de redes de fluxo, as decisões a tomar consistem em escolher quanto fluxo será atribuído a cada arco. Para isso, define-se para cada arco $(i,j) \in A(i, j),$ uma variável de decisão $x_{ij} \in Z_0^+$, que representa o número de unidades de fluxo que circulam nesse arco.

Este problema inclui restrições de capacidade, que asseguram que o fluxo em cada arco seja sempre um valor não negativo e que não ultrapasse o limite máximo definido pela capacidade do arco. Em termos matemáticos, isto traduz-se por:

$$\forall_{(i,j) \in A},\ 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$$

Adicionalmente, é necessário garantir que todas restrições de conservação de fluxo são cumpridas. Em cada vértice, a diferença entre o total de fluxo que sai e o total que entra deve corresponder ao valor de oferta ou consumo associado a esse vértice. O fluxo de saída calcula-se somando os fluxos de todos os arcos que partem do vértice, enquanto o fluxo de entrada resulta da soma dos fluxos dos arcos que terminam nesse vértice. Assim, a conservação de fluxo é garantida através da seguinte equação:

$$\forall_{i \in V},\ \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} x_{ji} = b_i$$

Num problema de maximização de fluxo, introduz-se uma variável f, que representa a quantidade total de fluxo a ser transportada desde o vértice de origem O até ao vértice de destino D. O objetivo principal do modelo é, de forma simples, maximizar f.

Este modelo está sujeito às restrições de capacidade (equação 1) e às restrições de conservação de fluxo (equação 2), já discutidas anteriormente. No entanto, surge uma questão: quais devem ser os valores de oferta e procura em cada vértice?

Neste contexto, os valores de oferta e consumo não são fixos a priori, mas sim definidos em função da variável f:

- O vértice de origem O atua como fonte de fluxo, logo o seu balanço deve ser igual a f:
  - $(f_{OA} + f_{OC}) - (f_{AO} + f_{CO}) = f_{OD}$
- O vértice de destino D funciona como sorvedouro, e por isso o seu balanço é o oposto:
  - $(f_{BD} + f_{CD} + f_{ED}) - (f_{DB} + f_{DC} + f_{DE}) = f_{OD}$
- Todos os restantes vértices não devem gerar nem absorver fluxo, ou seja: Capacidade nos vértices:
  - A: fOA + fCA + fBA <= 100
  - B: fAB + fDB + fEB <= 30
  - C: fOC + fAC + fDC <= 40
  - E: fBE + fDE <= 120

Com estas condições, é possível definir um modelo de programação linear que representa o problema de maximização de fluxo entre dois vértices de uma rede e que respeite tanto os limites de capacidade dos arcos como a conservação de fluxo em cada vértice, como podemos verificar a seguir:

$$
\begin{aligned}
&\max:\ f \\
&\forall_{(i,j)\in A},\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} \\
&\forall_{i\in V},\ \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} f & \Leftarrow i = O \\ 0 & \Leftarrow i \in V \setminus \{O, D\} \\ -f & \Leftarrow i = D \end{cases} \\
&\forall_{(i,j)\in A},\ x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+
\end{aligned}
$$

O modelo para resolver um problema de minimização de custo apresenta-se de forma mais direta. O objetivo é minimizar o custo total associado ao transporte de fluxo na rede, que corresponde à soma dos custos em todos os arcos.

O custo em cada arco é calculado como o produto entre o fluxo que o atravessa e o respetivo custo unitário — ou seja, o custo de transportar uma unidade de fluxo por esse arco. Assim, o custo total é obtido ao somar esse valor para todos os arcos da rede.

Uma vez que, neste tipo de problema, os valores de oferta e consumo dos vértices já são conhecidos e fixos, não são necessárias alterações nesse sentido. Como resultado, o modelo obtido é um modelo de programação linear simples e direto.

$$
\begin{aligned}
\text{min:} \quad & \sum_{(i,j)\in V} c_{ij}x_{ij} \\
\forall_{i\in V}, \quad & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = b_i \\
\forall_{(i,j)\in A}, \quad & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \\
\forall_{(i,j)\in A}, \quad & x_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+
\end{aligned}
$$

2.3 Construção do modelo

Para que seja possível utilizar o solver RELAX-IV na resolução do problema, é necessário adaptar o modelo original para um formato compatível com o que o solver espera — nomeadamente, um problema de fluxo de custo mínimo numa rede com capacidades associadas aos arcos.

Essa conversão implica a alteração da rede original para obter uma nova rede que será fornecida como entrada ao RELAX-IV. A solução devolvida pelo solver terá, então, de ser interpretada novamente no contexto da rede inicial.

O primeiro passo dessa transformação consiste em criar um grafo orientado a partir do grafo original. Para isso, cada arco não orientado {i,j} é substituído por dois arcos orientados, (i,j) e (j,i).

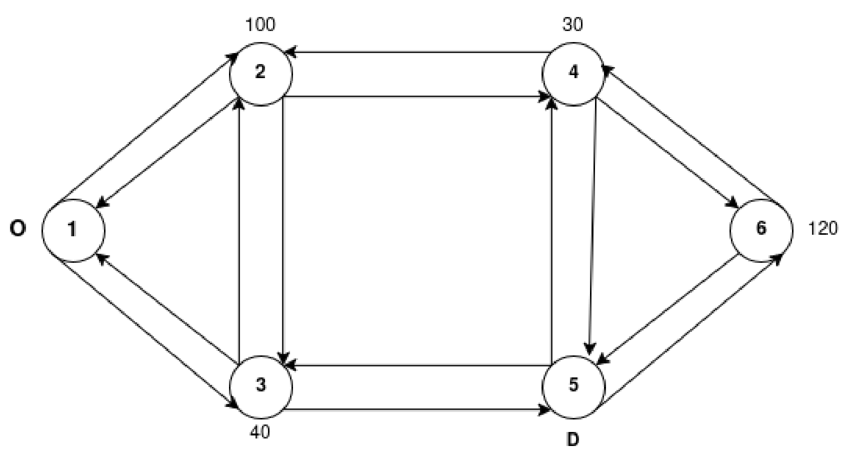

Figura 3 - Rede após o primeiro passo da transformação

De seguida, as capacidades associadas aos vértices no modelo original foram convertidas em capacidades de arcos. Para isso, todos os vértices n com capacidade finita (exceção da origem e do destino que não possuem capacidade) foram desdobrados em dois novos vértices, designados por n_e e n_s , ligados por um arco dirigido (n_e, n_s) cuja capacidade é igual à capacidade original do vértice n.

Com esta alteração:

- Todos os arcos que, na rede anterior, terminavam em n passam agora a terminar em n_e.
- Todos os arcos que partiam de n passam a ter origem em n_s.

Dessa forma, todo o fluxo que atravessava o vértice n é agora forçado a passar pelo arco (n_e, n_s), cuja capacidade representa a limitação do vértice original. Isto permite simular de forma correta a restrição de capacidade do vértice, mas usando apenas capacidades em arcos — como exigido pelo RELAX-IV.

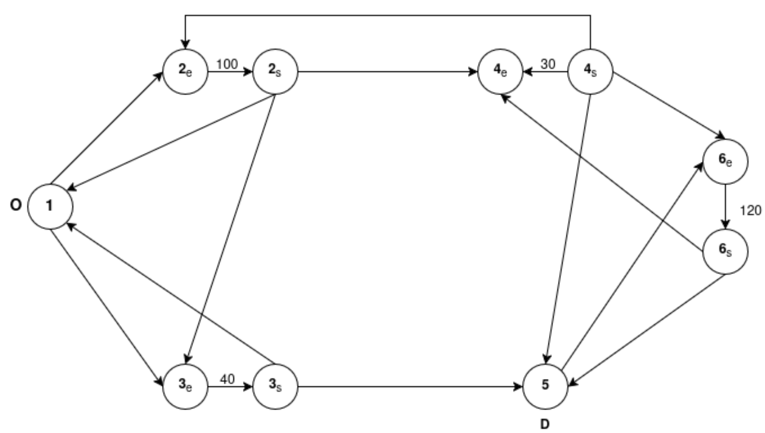

Figura 4 - Rede após a aplicação do segundo passo

Importa também referir que, como todos os arcos da rede original tinham capacidade infinita, os restantes arcos da nova rede (após a transformação) mantêm também capacidade infinita.

O passo seguinte consiste em converter o problema de fluxo máximo num problema de minimização de custo, de forma a torná-lo compatível com o RELAX-IV.

Com esse objetivo em vista, assume-se que todos os arcos da rede que resultaram da transformação anterior possuem custo unitário igual a zero. No entanto, como o nosso objetivo é maximizar o fluxo e o solver apenas sabe minimizar custos, é necessário fazer um pequeno truque: adiciona-se um arco entre o vértice de destino e o vértice de origem — neste caso, o arco (1,5) — com custo unitário igual a -1.

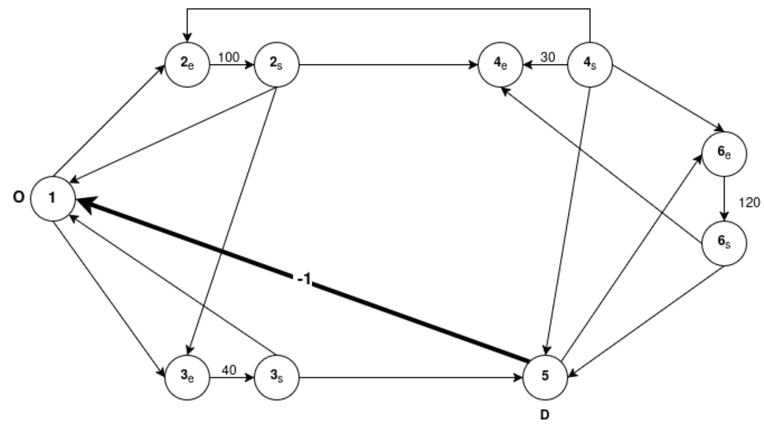

Figura 5 - Rede após a aplicação do terceiro passo da transformação

Dessa forma, ao tentar minimizar o custo total da rede, o solver vai enviar o máximo possível de fluxo através do arco com custo negativo. Como esse fluxo tem de percorrer a rede no sentido inverso (de 5 para 1), isto obriga a que haja um fluxo equivalente no sentido original (de 1 para 5). Assim, o solver calcula indiretamente o fluxo máximo entre a origem e o destino.

Adicionalmente, define-se que o balanço de todos os vértices é zero, pois pretende-se modelar um grafo cíclico, onde nenhum vértice gera ou consome fluxo externo. Assim, é possível a existência de fluxo na rede: qualquer fluxo que parte da origem retorna a ela pelo arco (5,1), o que o balanço se mantém nulo, apesar de haver fluxo a circular pela rede.

O último passo desta transformação consiste em modificar os dados de forma a garantir a compatibilidade dos mesmo com o solver RELAX-IV.

Assim, é necessário que todos os vértices sejam identificados por números inteiros não negativos, uma vez que o RELAX-IV não reconhece nomes textuais nos vértices.

Após esta conversão, a rede resultante foi transformada num ficheiro de entrada compatível com o RELAX-IV, no qual cada arco é representado por um par (c_{ij}, u_{ij}), correspondente ao custo unitário e à capacidade máxima desse arco, respetivamente.

3 Ficheiro de entrada do RELAX-IV

O ficheiro de entrada do RELAX-IV foi gerado a partir da rede transformada. A primeira linha contém o número de vértices, a segunda o número de arcos, segue-se uma linha para cada arco (com o vértice de origem, o destino, o custo unitário e a capacidade) e uma linha para cada vértice com a sua oferta / consumo.

```
10

20

1 2 0 9999

2 3 0 100

3 1 0 9999

3 4 0 9999

4 5 0 30
```

5 2 0 9999

1 6 0 9999

6 7 0 40

7 1 0 9999

7 8 0 9999

8 6 0 9999

7 2 0 9999

3 6 0 9999

5 8 0 9999

8 4 0 9999

5 9 0 9999

9 10 0 120

10 4 0 9999

8 9 0 9999

10 8 0 9999

8 1 -1 9999

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

4 Ficheiro de saída do RELAX-IV

```
s -70.
f 1 2 100
f 2 3 100
f 3 1 30
f 3 4 30
f 4 5 30
f 5 2 0
f 1 6 0
f 6 7 40
f 7 1 0
f 7 8 40
f 8 6 0
f 7 2 0
f 3 6 40
f 5 8 30
f 8 4 0
f 5 9 0
f 9 10 0
f 10 4 0
f 8 9 0
f 10 8 0
f 8 1 70
```

5 Interpretação da solução

A solução apresentada pelo RELAX-IV na secção anterior fornece tanto o valor do fluxo máximo como o fluxo associado a cada arco da rede transformada anteriormente.

A primeira linha do output, s -70, indica que o fluxo máximo entre os vértices 5 e 1 é de 70 unidades. O valor -70 representa o custo total do transporte do fluxo por toda a rede. Contudo, como todos os arcos da rede têm custo unitário igual a zero — à exceção do arco (1, 5), cujo custo é -1 —, é este arco o único que contribui para o valor da função objetivo. Dado que todo o fluxo gerado percorre este arco, o custo total (-70) dividido pelo custo do arco (-1) resulta no fluxo máximo de 70 unidades.

Apesar do RELAX-IV devolver os valores de fluxo para cada arco, é importante notar que esses arcos pertencem à rede transformada, e não à rede original. Por isso, para interpretar os resultados no contexto original do problema, é necessário reverter passo a passo as transformações aplicadas anteriormente, tendo sempre em conta os valores de fluxo.

Começamos então por apresentar a rede resultante da resolução do RELAX-IV, onde cada arco é anotado com o respetivo fluxo e de forma a tornar a figura mais limpa e a leitura mais fácil, arcos com fluxo nulo não se encontram representados. A linha f 1 2 100 indica que existe um fluxo de 100 unidades do arco com origem em 1 e cujo destino era 2.

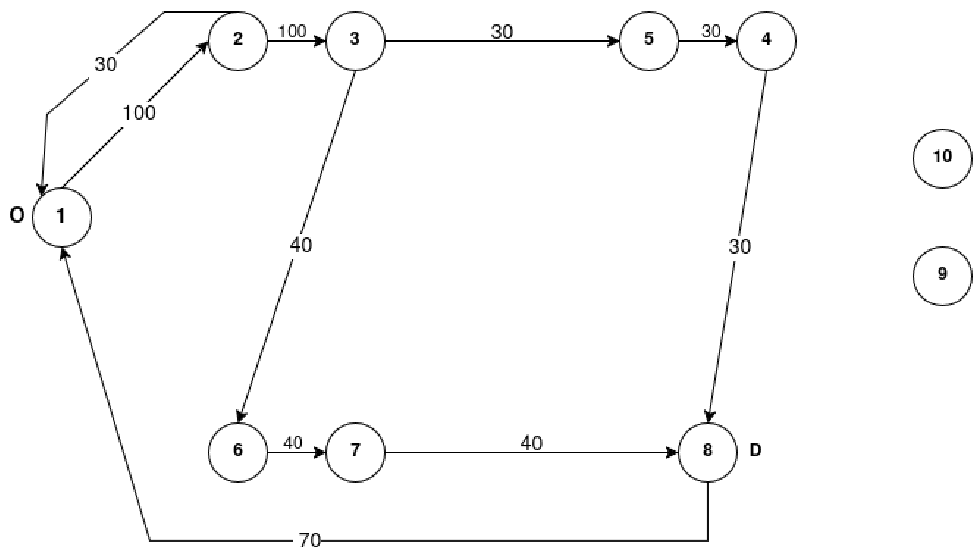

Figura 6 - Rede descrita pelo output do RELAX-IV.

O primeiro passo para reverter a transformação da rede é voltar a substituir os números dos vértices pelos seus nomes originais. O resultado desta substituição pode ser visto na figura abaixo.

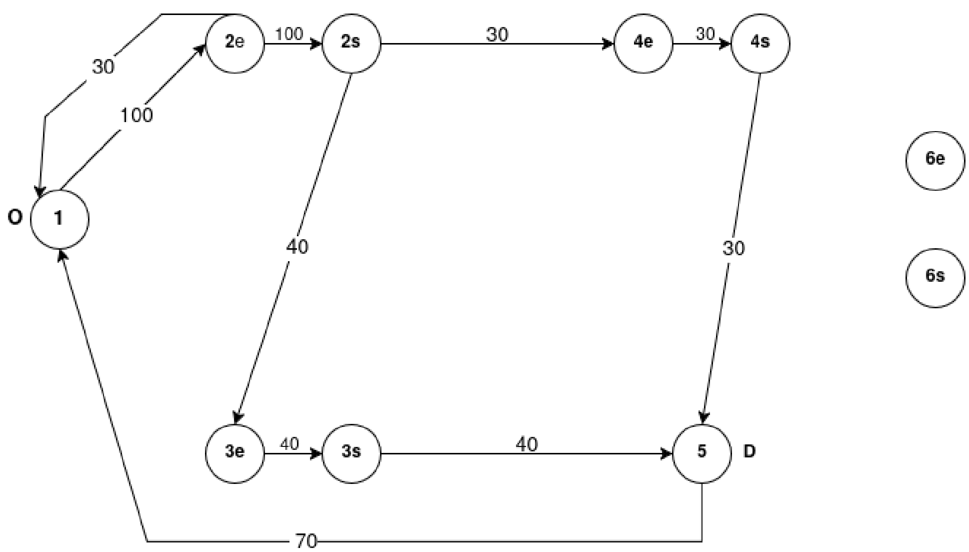

Figura 7 - Rede após a substituição

Em seguida, remove-se o arco (1,5) — o arco que tinha sido adicionado artificialmente entre o destino e a origem, apenas para permitir a resolução do problema como um ciclo. Ao remover este arco, o balanço de fluxo nos vértices 1 e 5 é automaticamente ajustado, resultando numa nova configuração da rede.

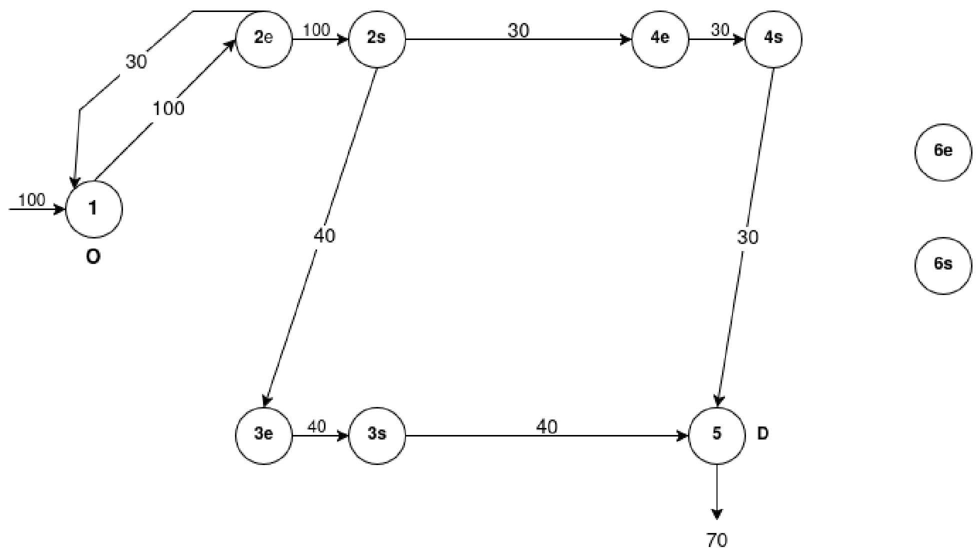

Figura 8 - Rede após o segundo passo

O passo seguinte é desfazer a transformação que simulava capacidades nos vértices com recurso a arcos internos. Ou seja, cada par de vértices ne e ns é fundido novamente num único vértice n. Na imagem correspondente a este passo, já está incluída também a quantidade de fluxo que passa por cada vértice, indicada pelo fluxo no arco (ne, ns), juntamente com a respetiva capacidade original — o que é útil para verificar se o modelo respeita os limites definidos.

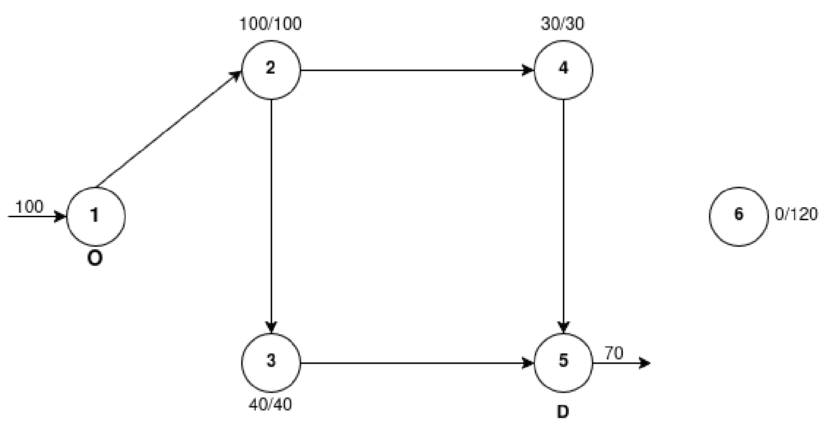

Figura 9 - Rede após o terceiro passo

Na transformação direta, os arcos não orientados foram convertidos em arcos com direção. No entanto, na transformação inversa não é necessário reverter essa parte, pois o sentido do fluxo entre dois vértices é sempre bem definido. Assim, a última figura representa já a solução final do problema na rede original.

A análise do fluxo mostra que o fluxo máximo entre os vértices 1(origem) e 5 (destino) é de 70 unidades. Não existe qualquer fluxo a passar pelo vértice 6.

Podemos observar isto com o exemplo utilizado na figura 2. Entre Porto e Lisboa podem passar no máximo 100 carros pela portagem. Desses 100 carros, apenas 30 conseguem ir para Valença e 40 para Portimão, os restantes 30 têm de voltar para o Porto. Os carros que se encontravam em Portimão e Valença seguem para Faro, assim 70 carros chegam ao destino. Podemos observar isso na figura abaixo:

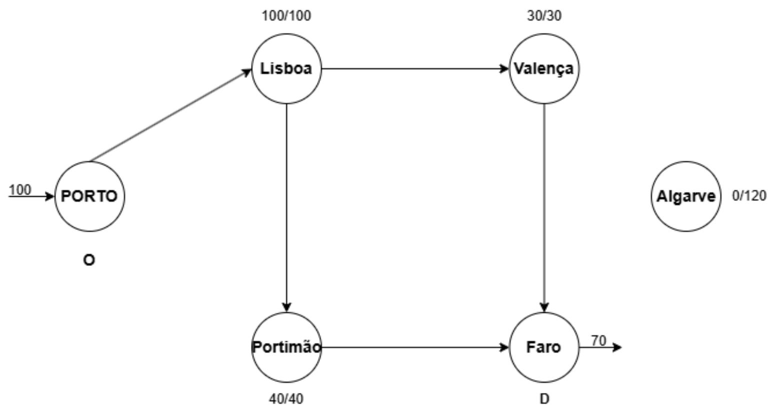

Figura 10 - Solução ótima vista na rede de exemplo

6 Validação do modelo

Depois de obter a solução ótima, é importante validar o modelo para garantir que tudo foi corretamente representado e que a solução faz sentido na prática. O primeiro passo dessa validação é confirmar se a interpretação do resultado respeita todas as restrições impostas, mesmo aquelas que poderiam ter sido mal definidas ao gerar o ficheiro de entrada para o RELAX-IV. Verifica-se o seguinte:

- O fluxo que passa por cada vértice não ultrapassa a sua capacidade máxima. Por exemplo, os vértices 3 e 4 estão exatamente no seu limite (com 30 e 40 unidades de fluxo, respetivamente), enquanto no vértice 6 não circula nenhuma das 120 unidades que este poderia suportar;
- Todos os vértices, com exceção da origem (6) e do destino (3), mantêm um balanço de fluxo nulo — ou seja, o fluxo que entra é igual ao fluxo que sai (como definido na equação 2). Por exemplo, no vértice 3, entram 30 unidades vindas do arco (1,2) e essas mesmas 30 unidades saem pelo arco (3, 5), mantendo o equilíbrio;
- A quantidade total de fluxo que entra na rede pelo vértice 5 (70 unidades) é igual à que sai no vértice 1, o que é coerente com a conservação de fluxo e com os resultados esperados.

No exemplo apresentado, isto traduz-se em não exceder a capacidade das estradas entre cidades e em garantir que não há "criação" ou "perda" de veículos ao longo do percurso do fluxo entre

Porto e Faro. Assim, conclui-se que a solução ótima obtida faz sentido no cenário real modelado, onde se pretende gerir o tráfego entre cidades com base na infraestrutura existente.

Verifica-se também, sem dificuldade, que o valor da função objetivo — 70 — é de facto ótimo. Todo o fluxo de veículos que sai do Porto (vértice 1), para chegar a Faro (vértice 5), tem de passar por vários pontos intermediários. A soma destas capacidades é 70, o que significa que não é possível que mais do que 70 veículos sigam do Porto para Faro através da rede. Isto confirma que a solução encontrada é ótima.

Caso esta conclusão não fosse evidente, seria possível determinar o fluxo máximo utilizando um modelo de programação linear (equação 3). Dado que a rede em causa é pequena, tal abordagem não apresentaria problemas de desempenho. Se o valor da função objetivo calculado por este método fosse diferente do valor 70, isso indicaria que houve algum erro na adaptação do problema ao formato exigido pelo solver RELAX-IV.

Desta forma, confirma-se a validade e a correção do modelo desenvolvido.