MMAD - Úkol 1

Filip Ditrich

Unicorn University, Prague, Czech Republic
21. dubna 2024

Úloha 1 (3 body)

Dokažte, že každá ortogonální matice má determinant ±1.

Řešení

Ortogonální matice je čtvercová reálná matice Q, která splňuje podmínku:

$$Q^{TQ} = QQ^T = I$$

kde I je jednotková matice.

Dále platí, že determinant součinu dvou matic je roven součinu determinantů těchto matic, tedy:

$$det(Q^{TQ}) = det(Q) \cdot det(Q^T)$$

Determinant jednotkové matice je vždy 1:

$$det(I) = 1$$

Z předchozích vztahů plyne, že:

$$det(Q^{TQ}) = det(I) = 1$$

Dá se také zapsat jako:

$$det(Q) \cdot det(Q) = det(Q)^2 = 1$$

Odtud již plyne, že determinant ortogonální matice je roven ±1, jelikož:

$$\sqrt{det(Q)^2} = \sqrt{1} = \pm 1$$

ODPOVĚĎ

Ano, každá ortogonální matice má determinant ±1.

Úloha 2

(3 body)

Pokud mají matice A i B stejná vlastní čísla, platí i, že $A \times B$ mají ty samá vlastní čísla?

Řešení

Neplatí. Uvažme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obě matice mají stejná vlastní čísla:

$$det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$
$$det(B - \lambda I) = 0 \Rightarrow (2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

ale jejich součin:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

již vlastní čísla stejná nemají:

$$det(A \times B - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

Kdyby však matice A a B byly navzájem komutativní, tedy $A \times B = B \times A$, pak by platilo, že $A \times B$ mají stejná vlastní čísla jako $B \times A$, protože vlastní čísla matice jsou nezávislá na pořadí násobení:

$$det(A \times B - \lambda I) = det(B \times A - \lambda I)$$

ODPOVĚĎ

Ne, pokud matice A a B nemají stejná vlastní čísla, pak ani jejich součin $A \times B$ nemusí mít stejná vlastní čísla.

Úloha 3

(3 body)

Rozhodněte, zda je následující matice diagonalizovatelná

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Řešení

Diagonalizovatelná matice je taková reálná čtvercová matice o rozměrech $n \times n$, která má n navzájem různých vlastních čísel.

Vlastní čísla matice A jsou řešením rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & 4 \\ -5 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Po úpravě dostaneme charakteristický polynom:

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 = 0$$

Tuto rovnici následovně upravíme:

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10 &= 0 \\ &\dots \\ (\lambda - 1) \times (\lambda - 2) \times (\lambda - 5) &= 0 \end{aligned}$$

A tím získáme kořeny charakteristické rovnice a tedy vlastní čísla matice A:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= 5 \end{aligned}$$

Jelikož $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, matice A má 3 různá vlastní čísla a tedy je diagonalizovatelná.

ODPOVĚĎ

Ano, matice A je diagonalizovatelná.

Úloha 4

(3 body)

Nalezněte vlastní vektor příslušný k nejmenšímu a největšímu vlastnímu číslu matice A z předchozího příkladu.

Řešení

Vlastní vektory matice A jsou řešením soustavy rovnic $(A - \lambda I)x = 0$, kde λ je vlastní číslo matice A.

Nejmenší a největší vlastní čísla matice A jsou $\lambda_{\text{min}} = 1$ a $\lambda_{\text{max}} = 5$.

Pro $\lambda_{\text{min}} = 1$:

$$(A - 1I)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po úpravě dostaneme:

$$x_1 - x_3 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je vlastní vektor p:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pro $\lambda_{\text{max}} = 5$:

$$(A - 5I)x = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po úpravě dostaneme:

$$x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0$$
$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je vlastní vektor s:

$$s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ODPOVĚĎ

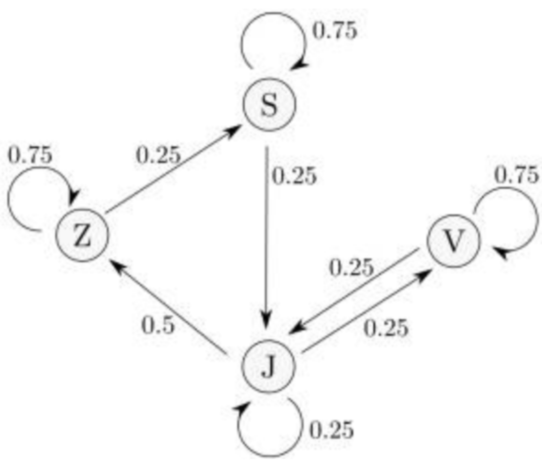
Vlastní vektor příslušný nejmenšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\text{min}} = 1$ je $p = (1, -1, 1)^T$ a vlastní vektor příslušný největšímu vlastnímu číslu $\lambda_{\text{max}} = 5$ je $s = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^T$.

Úloha 5 (3 body)

Mějme stálý migrační proces obyvatel mezi Severem, Jihem, Východem a Západem, jehož průběh za 1 rok lze znázornit diagramem níže (desetinná čísla udávají, jaký zlomek populace se za rok přemístí po šipce do jiné oblasti). Na počátku je počet obyvatel ve všech oblastech 10 milionů.

- 5a) Jak bude situace rozložení populace vypadat za 10 let od počátku?
- 5b) Na kterých hodnotách se populace v jednotlivých oblastech ustálí, pokud ji budeme dostatečně dlouho sledovat?

Využijte libovolný počítačový nástroj a své argumenty podpořte výstupy tohoto nástroje.



Obrázek (1) — Diagram stálého migračního procesu obyvatel mezi Severem, Jihem, Východem a Západem.

Řešení

Pro řešení této úlohy využijeme jazyk Python a knihovnu `numpy` pro práci s maticemi a vektory.

5a) Jak bude situace rozložení populace vypadat za 10 let od počátku?

Nejprve si vytvoříme matici přechodů P a vektor počátečního rozložení populace x_0:

```
import numpy as np

# matice přechodů
P = np.array([
    # Sever -> S, J, V, Z
    [0.75, 0.25, 0, 0],
    # Jih -> S, J, V, Z
    [0, 0.25, 0.25, 0.5],
    # Východ -> S, J, V, Z
    [0, 0.25, 0.75, 0],
    # Západ -> S, J, V, Z
    [0.25, 0, 0, 0.75]
]).T

# počáteční rozložení populace
x0 = np.array([10, 10, 10, 10])
```

Následně provedeme výpočet rozložení populace za 10 let:

```
# výpočet rozložení populace za 10 let
x = x0
for _ in range(10):
    x = np.dot(P, x) # P * x
print(x)
# [13.05176735  6.66666985  6.94823265 13.33333015]
```

ODPOVĚĎ 5A

Výsledné rozložení populace po 10 letech bude:

$$S \approx 13.05 \text{ mil.}; J \approx 6.67 \text{ mil.}; V \approx 6.95 \text{ mil.}; Z \approx 13.33 \text{ mil.}$$

5b) Na kterých hodnotách se populace v jednotlivých oblastech ustálí, pokud ji budeme dostatečně dlouho sledovat?

Pro řešení této otázky můžeme využít vlastních vektorů a vlastních čísel matice přechodů P. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 nám řekne, na kterých hodnotách se populace ustálí po dostatečně dlouh é době (tj. po nekonečně mnoho letech).

```
# vlastní čísla a vektory matice P
w, v = np.linalg.eig(P)
# vlastní čísla: [0.25 0.5 1. 0.75]
# vlastní vektory: [
#   [ 3.16227766e-01 -6.32455532e-01 -6.32455532e-01  7.07106781e-01]
#   [ 6.32455532e-01 -3.16227766e-01 -3.16227766e-01  4.44605073e-17]
#   [-3.16227766e-01  3.16227766e-01 -3.16227766e-01 -7.07106781e-01]
#   [-6.32455532e-01  6.32455532e-01 -6.32455532e-01  2.03628341e-15]
# ]
print(w)
print(v)

# vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1
v1 = v[:, np.isclose(w, 1)]
# [[-0.63245553], [-0.31622777], [-0.31622777], [-0.63245553]]

# normalizace vlastního vektoru
v1 = v1 / np.sum(v1)
# [[0.33333333] [0.16666667], [0.16666667], [0.33333333]]
```

ODPOVĚĎ 5B

Pokud budeme populaci dostatečně dlouho sledovat, ustálí se na hodnotách:

$$S \approx 33.33\%; J \approx 16.67\%; V \approx 16.67\%; Z \approx 33.33\%$$

Úplný zdrojový kód je k nalezení v souboru ukol-1-5.py.

Úloha 6 (3 body)

Na adrese `https://openmv.net/file/room-temperature.csv` naleznete soubor s daty. Jedná se o simulovaná data měření teploty v místnosti. Data jsou v .csv formátu. Obsahují hlavičku a pět sloupců. V prvním sloupci je datum, v následujících čtyřech sloupcích jsou teploty měření v jednotlivých čtyřech rozích místnosti.

Celkem je v souboru 144 záznamů měření. Pokud bychom chtěli s takovými daty dále pracovat, kolik hlavních komponent (a jaké) je vhodné zvolit a proč? Využijte SVD rozkladu a libovolného počítačového nástroje a své argumenty podpořte výstupy těchto nástrojů. Nezapomeňte na úvodní transformaci dat.

Řešení

Pro vyřešení této úlohy využijeme jazyk Python a knihovny `pandas` a `numpy` pro práci s maticemi a vektory. Nejprve načteme data z CSV souboru a provedeme úvodní transformaci dat.

```python
import pandas as pd
import numpy as np

# načtení dat
data = pd.read_csv('room-temperature.csv')
# zahození sloupce s datem (nepotřebné pro analýzu)
data = data.drop(columns=['Date'])
# normalizace dat (odstranění průměru)
data = data - data.mean()
```

Následně provedeme SVD rozklad matice dat a zjistíme, kolik hlavních komponent je vhodné zvolit.

```python
# SVD rozklad
U, s, V = np.linalg.svd(data, full_matrices=False)
# s = [34.54408633 16.15976563  7.69262365  6.51293724]

# výpočet vysvětlené variance
explained_variance = np.square(s) / np.sum(np.square(s))
# explained_variance = [0.76688522 0.16782361 0.03803049 0.02726068]

# zjištění počtu komponent pro 95% vysvětlené variance
components = np.argmax(np.cumsum(explained_variance) > 0.95) + 1
# components = 3
```

ODPOVĚĎ

Z výsledků SVD rozkladu zjistíme, že pro dosažení 95% vysvětlené variance je vhodné zvolit 3 hlavní komponenty.

Úplný zdrojový kód je k nalezení v souboru ukol-1-6.py.