MMAD - Úkol 2

Filip Ditrich

Unicorn University, Prague, Czech Republic
27. dubna 2024

✓ Úloha 1 1
Úloha 2 5
✓ Úloha 3 6
Úloha 4 7
✓ Úloha 5 8
Úloha 6 9
✓ Úloha 7 10
✓ Úloha 8 11
Úloha 9 13
✓ Úloha 10 14
Úloha 11 15
✓ Úloha 12 16
Úloha 13 18
Úloha 14 19
✓ Úloha programovací 1 20
Úloha programovací 2 21

✓ Úloha 1 (2 body)

Pro následující grafy určete minimální stupeň $\delta(G)$, maximální stupeň $\Delta(G)$, skóre grafu a barevnost pro následující grafy:

a. Cesta P_n

b. Kružnice C_n

c. Úplný graf K_n

d. Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

e. Papův graf ukázaný níže

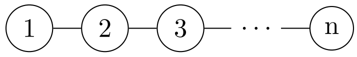
- **Minimální stupeň** $\delta(G)$ je nejmenší stupeň vrcholu v grafu G.
- **Maximální stupeň** $\Delta(G)$ je největší stupeň vrcholu v grafu G.
- **Skóre grafu** je součet stupňů všech vrcholů v grafu G.
- **Barevnost** $\chi(G)$ je minimální počet barev potřebných k obarvení vrcholů grafu G tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu.

Řešení

a) Cesta P_n
Definice: Cesta P_n je graf, který má n vrcholů a $n-1$ hran.

- První a poslední vrchol mají stupeň 1, všechny ostatní vrcholy mají stupeň 2.
- Pro obarvení cesty P_n stačí vždy 2 barvy (jedna pro liché a druhá pro sudé vrcholy).

Poznámka: Bereme v potaz cestu P_n s $n \geq 2$ vrcholy.



Obrázek (1) – Cesta P_n

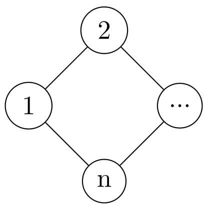
ODPOVĚĎ 1A

- $\delta(P_n) = 1$
- $\Delta(P_n) = 2$
- Skóre grafu $P_n = 2n - 2$
- Barevnost grafu $\chi(\mathrm{P}_n) = 2$

b) Kružnice C_n
Definice: Kružnice C_n má n vrcholů a každý vrchol je spojen s předchozím a následujícím vrcholem.

- Všechny vrcholy mají stupeň 2.
- Lichou kružnici C_n lze obarvit 3 barvami, sudou kružnici C_n lze pak obarvit 2 barvami střídavě.

Poznámka: Bereme v potaz kružnici C_n s $n \geq 3$ vrcholy.



Obrázek (2) – Kružnice C_n

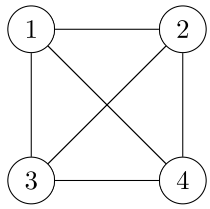
ODPOVĚĎ 1B

- $\delta(C_n) = 2$
- $\Delta(C_n) = 2$
- Skóre grafu $C_n = 2n$
- Barevnost grafu $\chi(\mathrm{C}_n) = \begin{cases} 2 & \text{pro sudé } n \\ 3 & \text{pro liché } n \end{cases}$

c) Úplný graf K_n
Definice: Úplný graf K_n má n vrcholů a každý vrchol je spojen s každým jiným vrcholem.

- Všechny vrcholy mají stupeň $n - 1$.
- Kvůli propojení všech vrcholů se všemi je nutné použít n barev.

Poznámka: Bereme v potaz úplný graf K_n s $n \geq 3$ vrcholy.



Obrázek (3) — Úplný graf K_4

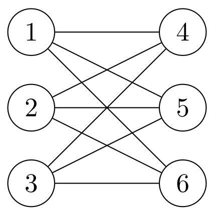
ODPOVĚĎ 1C

- $\delta(K_n) = n - 1$
- $\Delta(K_n) = n - 1$
- Skóre grafu $K_n = n(n - 1)$
- Barevnost grafu $\chi(\mathrm{K}_n) = n$

d) Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$
Definice: Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má m vrcholů v jedné partitě a n vrcholů v druhé partitě a každý vrchol z jedné partity je spojen s každým vrcholem z druhé partity.

- Všechny vrcholy z první partity mají stupeň n, všechny vrcholy z druhé partity mají stupeň m.
- Pro obarvení úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ stačí 2 barvy, jedna pro každou partitu.

Poznámka: Bereme v potaz úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ s m,$n \geq 1$ vrcholy.



Obrázek (4) — Úplný bipartitní graf $K_{3,3}$

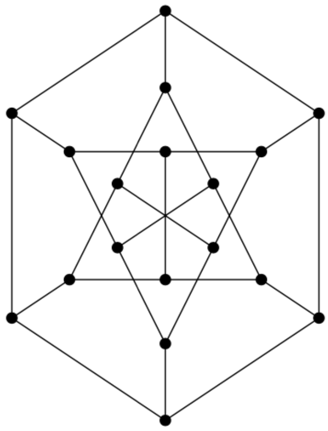
ODPOVĚĎ 1D

- $\delta(K_{m,n}) = m$
- $\Delta(K_{m,n}) = n$
- Skóre grafu $K_{m,n} = mn$
- Barevnost grafu $\chi(\mathrm{K}_{m,n}) = 2$

e) Papův graf

Definice: Na obrázku níže je zobrazen Papův graf s 18 vrcholy a 27 hranami, označme si jej jako $PG_{n,m}$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran.

- Všechny vrcholy mají stupeň 3, jedná se tedy o kubický graf.
- Skóre grafu je $\{3, 3, \ldots, 3\}$, tedy $3 \cdot 18 = 54$.
- Každý vrchol je spojen s právě 3 dalšími vrcholy, tedy je možné graf obarvit 3 barvami.



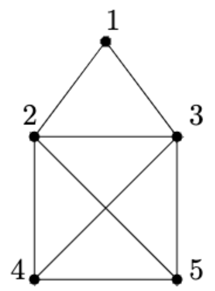
Obrázek (5) – Papův graf $PG_{18,27}$

ODPOVĚĎ 1E

- $\delta(PG_{18,27}) = 3$
- $\Delta(PG_{18,27}) = 3$
- Skóre grafu $PG_{18,27} = 54$
- Barevnost grafu $\chi(\mathrm{PG}_{18,27}) = 3$

Úloha 2 (2 body)

Máme graf $G = (V, E)$. Pro ukázku si představme následující graf H:



Obrázek (6) − Graf H

Definujme Laplacovu matici L jako:

$$L_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{pro } i = j \\ -1 & \text{pro } i \neq j \text{ a } v_i \text{ je spojen s } v_j \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Například pro ukázkový graf dostaneme Laplacovu matici:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Mějme k-regulární graf $G = (V, E)$ velikosti $|V| = n$, tj. graf pro který víme, že $\deg(v_i) = k$ pro všechny vrcholy $v_i \in V$. Navíc víme, že vlastní čísla matice sousednosti jsou reálná v pořadí $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$. Lze nějak obecně vyjádřit všechna vlastní čísla Laplacovy matice takového grafu?

Řešení

TODO

✓ Úloha 3 (2 body)

Určete minimální a maximální počet hran v grafu na n vrcholech s c komponentami.

Řešení

Cílem je nalézt rozsah (minimální a maximální) možných hran v grafu skládajícím se z n vrcholů rozdělených do c komponent. Komponentou se rozumí podgraf, ve kterém jsou všechny vrcholy spojeny cestou a který není spojen s žádnými dalšími vrcholy v hlavním grafu.

a) Postup pro nalezení minimálního počtu hran:

- Izolované komponenty: Minimální počet hran nastává, když mají komponenty co nejméně hran. Extrémním případem je mít komponenty bez hran, tedy izolované vrcholy.
- Neizolované komponenty: Pro každou komponentu, která není jediný izolovaný vrchol, je minimální struktura vlastně strom. Strom s k vrcholy má $k - 1$ hran (minimum pro udržení grafu spojeného).
- Pokud je potřeba c komponent a předpokládáme že $c - 1$ komponent jsou jednotlivé izolované vrcholy a jedna komponenta obsahuje zbytek vrcholů, $n - (c - 1)$, tato poslední komponenta jako strom by měla $n - (c - 1) - 1 = n - c$ hran.
- Minimální počet hran je tedy $0 + (n - c) = n - c$.

Příklad na grafu s $n = 10$ vrcholy a $c = 3$ komponentami:

- Izolované komponenty: 2 izolované vrcholy, 1 komponenta s 8 vrcholy.
- Minimální počet hran: $10 - 3 = 7$.

ODPOVĚĎ 3A

Minimální počet v grafu na n vrcholech s c komponentami je $n - c$.

b) Postup pro nalezení maximálního počtu hran:

- Maximální počet hran nastává, když každá komponenta je úplný graf (graf, kde jsou každé různé vrcholy spojeny jedinou hranou).
- Respektive postačí nám jedna komponenta jako úplný graf a zbytek komponent jako izolované vrcholy (tedy bez hran).
- Počet hran v úplném grafu na k vrcholech je $\binom{k}{2}$
- Náš úplný graf má $n - (c - 1)$ vrcholů, tedy počet vrcholů mínus počet ostatních izolovaných vrcholů (komponent).
- Maximální počet hran je tedy $\binom{n-(c-1)}{2}$.

Příklad na grafu s $n = 10$ vrcholy a $c = 3$ komponentami:

- Úplný graf s 8 $(10 - (3 - 1))$ vrcholy a 1 izolovaný vrchol.
- Maximální počet hran: $\binom{10-2}{2} = 28$.

ODPOVĚĎ 3B

Maximální počet v grafu na n vrcholech s c komponentami je $\binom{n-(c-1)}{2}$.

Úloha 4 (2 body)

Mějme následující funkci:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

Vypočtěte gradient $\nabla f(x)$ a Hessian $\nabla^2 f(x)$ a rozhodněte (a zdůvodněte) zda-li je v bodě $(1, 1)$ splněna 1. podmínka pro lokální minimizátor (nulovost gradientu) či zda-li je splněna i 2. podmínka pro Hessovu matici.

Řešení

TODO

✓ Úloha 5 (2 body)

Mějme množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Určete, kolik je možné na této množině najít různých kružnic délky n? (jedná se tedy o počet průchodů, ale neorientovaného grafu).

Řešení

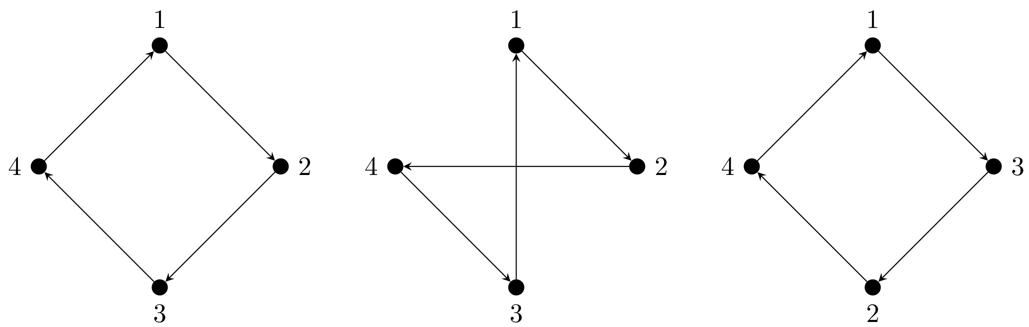
Problém můžeme řešit následovně:

- Krok 1: Seřadíme vrcholy kružnice do pořadí $1, 2, \ldots, n$. Takových sekvencí je $n!$.
- Krok 2: Zvolíme si jeden výchozí vrchol (symetrická rotace). Tím tedy získáme $(n-1)!$ unikátních sekvencí, ignorujeme-li rotace.
- Krok 3: Otočením sekvence získáme stejnou kružnici. Počet kružnic tedy musíme dělit dvěma (pro $n > 2$), protože každá sekvence a její zrcadlový obraz jsou v kružnici identické.
- Počet různých neorientovaných kružnic délky n (pro $n > 2$) je tedy: $\frac{(n-1)!}{2}$.

Ukázka: na příkladu množiny $\{1, 2, 3, 4\}$:
Dle definice výše víme, že počet různých neorientovaných kružnic délky 4 bude $\frac{(4-1)!}{2} = 3$.

A bude se jednat o tyto 3 kružnice:

1. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$
2. $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$
3. $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$



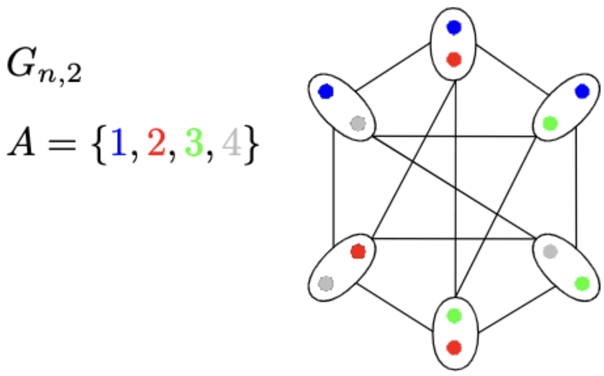
Obrázek (7) — Různé neorientované kružnice délky 4

ODPOVĚĎ

Pro množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ je možné najít $\frac{(n-1)!}{2}$ různých neorientovaných kružnic délky n.

Úloha 6 (2 body)

Mějme graf $G_{n,2} = (V, E)$ definovaný následovně. Množina vrcholů jsou všechny podmnožiny množiny $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ o velikosti 2, tedy například $v_1 = \{1, 2\}, v_2 = \{2, 3\}, \ldots$. Hrany spojují ty vrcholy $v_i = \{a, b\}, v_2 = \{c, d\}$, které sdílí právě jeden prvek, tj. $a = b \neq c = d$. Příklad takového grafu je vidět na následujícím obrázku.



Obrázek (8) — Graf $G_{n,2}$

Pro takový obecný graf $G_{n,2}$ určete jaký bude jeho minimální a maximální stupeň vrcholu vyjádřeno jako funkce n . Také určete počet hran tohoto grafu, opět jako funkci n.

Řešení

TODO

✓ Úloha 7

(2 body)

Zdůvodněte, proč každá hrana vrcholově 2-souvislého grafu musí ležet na kružnici.

Řešení

Vrcholově 2-souvislý graf je graf, který zůstane souvislý i po odebrání libovolního vrcholu, ale po odebrání alespoň dvou vrcholů se může rozpadnout na více komponent vzájemně nespojených hranami, tedy nesouvislých.

- Ve vrcholově 2-souvislém grafu musí existovat alespoň dva nezávislé průchody mezi libovolnými dvěma vrcholy.
- Uvažujme libovolnou hranu uv ve vrcholově 2-souvislém grafu.
- Dle vlastností vrcholové 2-souvislosti existuje další cesta z vrcholu u do vrcholu v, která neobsahuje hranu uv.
- Existence této alternativní cesty mezi vrcholy u a v, spolu s hranou uv, tvoří kružnici.
- Kružnice je vytvořena cestou z vrcholu u do vrcholu v přes alternativní cestu a návratem do vrcholu u pomocí hrany uv.

ODPOVĚĎ

Každá hrana ve vrcholově 2-souvislém grafu musí ležet na kružnici, protože definice vrcholové 2-souvislosti zaru čuje přítomnost alternativních cest mezi vrcholy.

✓ Úloha 8 (2 body)

Určete vrcholový a hranový stupeň grafu, neboli $\alpha(G)$ a $\kappa(G)$, pro následující grafy:

a. Cesta P_n

b. Kružnice C_n

c. Úplný graf K_n

d. Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

Řešení

Definice:

- **Vrcholový stupeň** $\alpha(G)$ je minimální počet vrcholů, které je třeba odebrat, aby se graf rozpadl na více komponent.
- **Hranový stupeň** $\kappa(G)$ je minimální počet hran, které je třeba odebrat, aby se graf rozpadl na více komponent.

Cesta P_n

- Odebráním jakéhokoliv vnitřního vrcholu se cesta rozpadne na dvě komponenty. Vrcholový stupeň je tedy $\alpha(P_n) = 1$.
- Odebráním jakékoliv hrany se cesta rozpadne na dvě komponenty. Hranový stupeň je tedy $\kappa(P_n) = 1$.

Poznámka: Bereme v potaz cestu P_n s $n \geq 2$ vrcholy.

ODPOVĚĎ 8A

Pro cestu P_n platí $\alpha(P_n) = 1$ a $\kappa(P_n) = 1$.

Kružnice C_n

- Odebráním jakéhokoliv vrcholu se z kružnice stane cesta, z tvrzení výše víme že $\alpha(P_n) = 1$. Vrcholový stupeň je tedy $\alpha(C_n) = \alpha(P_{n-1}) + 1$.
- Obdobně odebráním jakýchkoliv 2 sousedních hran se kružnice rozpadne na cestu a jeden izolovaný vrchol. Hranový stupeň je tedy $\kappa(C_n) = 2$.

Poznámka: Bereme v potaz kružnici C_n s $n \geq 3$ vrcholy.

ODPOVĚĎ 8B

Pro kružnici C_n platí $\alpha(C_n) = 2$ a $\kappa(C_n) = 2$.

Úplný graf K_n

- Postupným odebíráním vrcholů zůstává graf stále souvislý, dokud neodebereme až $n-1$ vrcholů, pak zůstává pouze izolovaný vrchol. Vrcholový stupeň je tedy $\alpha(K_n) = n - 1$.

- Odebráním všech hran jednoho vrcholu, který má stupeň $n-1$, se graf rozpadne jednu jednu souvislou komponentu a izolovaný vrchol. Hranový stupeň je tedy $\kappa(K_n) = n-1$.

Poznámka: Bereme v potaz úplný graf K_n s $n \geq 2$ vrcholy.

ODPOVĚĎ 8C

Pro úplný graf K_n platí $\alpha(K_n) = n-1$ a $\kappa(K_n) = n-1$.

Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

- Odebráním všech vrcholů jedné partity se graf rozpadne na několik izolovaných vrcholů (jelikož každý vrchol z jedné partity je spojen s každým vrcholem z druhé partity, ale nikoliv s vrcholem ze stejné partity). Lze tedy říci, že vrcholový stupeň je $\alpha(K_{m,n}) = \min(m,n)$.
- Odebráním všech hran spojujících vrcholy jedné partity se graf rozpadne na souvislou komponentu a několik izolovaných vrcholů. Pokud vybereme vrchol z větši parity, musíme odebrat pouze tolik hran, kolik vrcholů má menší parita, tedy opět hranový stupeň je tedy $\kappa(K_{m,n}) = \min(m,n)$.

ODPOVĚĎ 8D

Pro úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ platí $\alpha(K_{m,n}) = \min(m,n)$ a $\kappa(K_{m,n}) = \min(m,n)$.

Úloha 9 (2 body)

Vezměmě si grafy typu strom o fixní velikosti n. Rozhodněte a nakreslete, jaký strom o velikosti n má:

a. Největší hodnotu nezávislosti $\alpha(G)$

b. Nejmenší hodnotu nezávislosti $\alpha(G)$

c. Největší hodnotu vrcholového pokrytí $\beta(G)$

d. Nejmenší hodnotu vrcholového pokrytí $\beta(G)$

Řešení

TODO

✓ Úloha 10 (2 body)

Ukažte proč pro každý kubický graf G, t.j. takový, že všechny stupně vrcholů jsou 3, platí, že stupeň vrcholové i hranové souvislosti se rovnají, tj. $\alpha(G) = \kappa(G)$. *Hint: Pokuste se rozebrat případy pro různé vrcholové stupně souvislosti.*

Řešení

Víme, že pro každý graf $G = (V, E)$ platí *Whitneyho nerovnost*:

$$\kappa(G) \leq \alpha(G) \leq \delta(G)$$

kde $\delta(G)$ je minimální stupeň vrcholu v grafu G. Pro kubický graf tedy platí $\delta(G) = 3$.

Odebírání hran a vrcholů v kubickém grafu:

- Odebráním hrany se sníží stupeň dvou vrcholů z 3 na 2, ale graf zůstává souvislý.
- Odebráním vrcholu se sníží stupeň tří hran z 3 na 2, což může vést k rozpadu grafu.
- Zatím můžeme pozorovat, že odebrání vrcholu může být více kritické než odebrání hrany.

Případy pro různé vrcholové stupně souvislosti:

- **Případ 1:** Pokud $\alpha(G) = 1$, graf obsahuje most, který po odebrání rozdělí graf na dvě komponenty. Odebráním jednoho vrcholu se graf rozpadne, tedy $\kappa(G) = 1$ také.
- **Případ 2:** Pokud $\alpha(G) > 1$, odebrání jednoho vrcholu nevede k rozpadu grafu, což naznačuje vyšší odolnost, tedy $\kappa(G)$ může být 2 nebo 3.
  - Vzhledem k tomu, že kubické grafy mají vrcholy a hrany těsně propojeny kvůli jejich uniformnímu stupni, odebrání minimálního počtu vrcholů obvykle znamená odebrání i minimálního počtu hran.
- **Případ 3:** Pro $\alpha(G) = 2$ nebo $\alpha(G) = 3$ bude kubický graf vyžadovat podobně minimální počet odebraných vrcholů k rozdělení, což znamená, že $\kappa(G)$ bude obvykle odpovídat $\alpha(G)$.

ODPOVĚĎ

Díky stejnému stupni vrcholů v kubickém grafu G platí, že stupeň vrcholové i hranové souvislosti jsou stejné, tj. $\alpha(G) = \kappa(G)$.

Úloha 11 (2 body)

Pokuste se navrhnout Turingův stroj pro rozpoznání, že neorientovaný graf má izolovaný vrchol.
Hint: Graf uložte na pásku jako matici sousednosti (nezapomeňte na oddělovače řádků) a v ní pomocí pravidel nalezněte takový vrchol.

Řešení

TODO

✓ Úloha 12 (2 body)

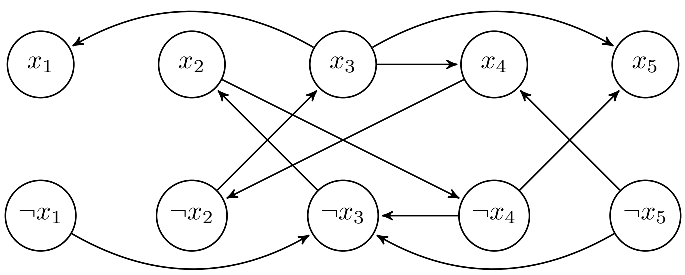
Využijte vysvětlení proč platí polynomialita 2-SAT a nakreslete graf odpovídající následující formuli a otestujte a případně ukažte, zda-li je splněna. *Pozn.: Graf na kreslete, i když budete schopni splnitelnost rozhodnout jinak.*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \wedge (x_4 \vee x_5) \wedge (\overline{x_3} \vee x_5)$$

Řešení

Nejprve sestavíme graf na literálech a klauzuích, tak že:

- Vrcholy: $V = \{x_1, \ldots, x_5, \neg x_1, \ldots, \neg x_5\}$
- Hrany: Pro $\forall$ klauzuli $(a \vee b)$ přidáme hrany mezi $(\neg a, b)$ a $(\neg b, a)$



Obrázek (9) — Graf sestaený z literálů a klauzulí

Následně nalezneme silně souvislé komponenty (kvasikomponenty) pomocí Kosarajova algoritmu (dvojitý průchod DFS). Z tohoto algoritmu jsme nalezli 4 kvasikomponenty:

1. $G_1 = \{\neg x_1\}$
2. $G_2 = \{\neg x_5, x_4, \neg x_2, x_3\}$
3. $G_3 = \{\neg x_3, x_2, \neg x_4, x_5\}$
4. $G_4 = \{x_1\}$

Nalezneme průchody mezi kvasikomponentami:

1. $G_1 \to G_3$
2. $G_2 \to G_3$ a $G_2 \to G_4$

a acyklicky je očíslujeme:

1. $c(G_1) = 1$
2. $c(G_2) = 2$
3. $c(G_4) = 3$
4. $c(G_3) = 4$

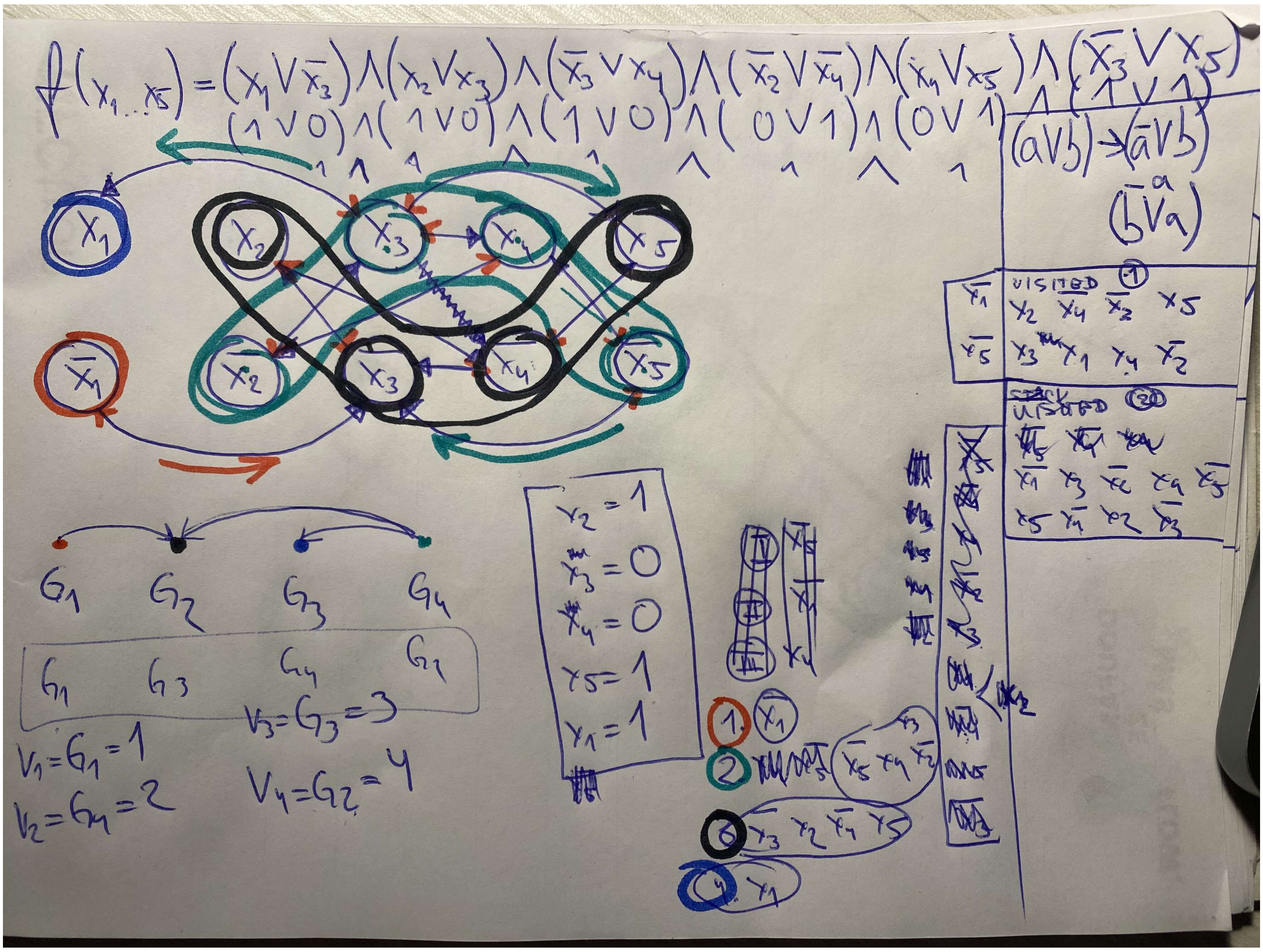
poté jdeme od nejvyšší komponenty G_2 a sbíráme informace o literálech z grafu:

- v G_3 jsou $x_2, x_5, \neg x_3, \neg x_4$ a tedy $x_2 = x_5 = 1$ a $x_3 = x_4 = 0$
- v G_4 je $x_1 = 1$ a tedy $x_1 = 1$

Pak pro tyto hodnoty ověříme formuli:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) = 1$$

Podrobnější postup je vidět na obrázku 10 níže:



Obrázek (10) — Postup nalezení silně souvislých komponent a ověření formule

ODPOVĚĎ

Formule je splněna s hodnotami $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$.

Úloha 13 (2 body)

Na základě vysvětlení převodu SAT na IND nakreslete graf odpovídající následující formuli a otestujte splnitelnost formule nalezením nezávislé množiny. *Pozn.: Graf nakreslete a zhodnoťte, i když budete schopni splnitelnost rozhodnout jinak.*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_4 \vee x_5)$$

Řešení

TODO

Úloha 14
(2 body)

Na základě vysvětlení převodu 3-SAT na 3-COL nakreslete graf odpovídající následující formuli a otestujte barevnost grafu.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Řešení

TODO

✓ Úloha programovací 1 (4 body)

Naprogramujte algoritmus pro testování isomorfismu grafů hrubou silou a otestujte to na pár příkladech grafů s využitím knihovní funkce pro testování isomorfismu.

Řešení

Isomorfismus lze testovat hrubou silou, kde se všechny možné permutace uzlů grafu G porovnají s uzly grafu H.

Vytvoříme funkci `isomorphism(G, H)`, která otestuje isomorfismus grafů G a H následovně:

- Pokud mají grafy různý počet uzlů, vrátí `False`.
- Pro všechny permutace uzlů grafu G:
  - Vytvoří mapování uzlů grafu G na uzly grafu H.
  - Pokud všechny uzly grafu G mají svůj ekvivalent v grafu H a všechny hrany zůstanou zachovány, vrátí `True`.
- Pokud žádná permutace nevyhovuje, vrátí `False`.

Implementačně je algoritmus následující:

```python
import networkx as nx
import itertools

def isomorphism(G, H):
    if len(G.nodes) != len(H.nodes):
        return False

    # získání všech permutací uzlů grafu G
    perms = itertools.permutations(list(G.nodes))
    for perm in perms:
        # vytvoření mapování uzlů grafu G na uzly grafu H
        # pokud všechny uzly grafu G mají svůj ekvivalent v grafu H a všechny hrany zůstanou zachovány, vrátí True
        mapping = dict(zip(G.nodes, perm))
        has_all_nodes = all([mapping[u] in H.nodes for u in G.nodes])
        has_all_edges = all([mapping[u] in H.nodes for u in G.nodes])
        if has_all_nodes and has_all_edges:
            return True
        return False
```

Poté již zbývá jen funkci výše otestovat na několika příkladech grafů a porovnat výsledky s knihovní funkcí pro testování isomorfismu:

```python
G = nx.generators.small.cycle_graph(5)
H = nx.complement(nx.generators.small.cycle_graph(5))

my_isom = isomorphism(G, H)
nx_isom = nx.is_isomorphic(G, nx.complement(H))
print(f"Vlastní: {my_isom}\nNetworkX: {nx_isom}\nÚspěch: {'Ano' if my_isom == nx_isom else 'Ne'}")
```

Úplný zdrojový kód je k nalezení v souboru ukol-2-k1.py.

Úloha programovací 2 (4 body)

Realizujte hrubou silou nalezení největší nezávislé množiny daného grafu a následně otestujte, že je množina nezávislá. Následně se pokuste vylepšit řešení procházení množinami použitím sousedů vrcholu.

Pokud chceme testovat procházení, nabízí se, ne nutně, řešení pomocí nějakého rekurzivního přístupu.

Řešení

TODO