

Dados

Suponhamos que temos os seguintes dados:

X	Y
1	2
2	3
3	5
4	4
5	6

Passo 1: Construir a Matriz de Design

Para um polinômio de terceira ordem, a matriz de design **X** é:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

O vetor de valores observados **y** é:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Passo 2: Estimar os Coeficientes

Usamos a fórmula dos mínimos quadrados $\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$.

Primeiro, calculamos $X^T X$:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 55 & 225 \\ 15 & 55 & 225 & 979 \\ 55 & 225 & 979 & 4425 \\ 225 & 979 & 4425 & 20525 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calculamos $X^T y$:

$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 54 \\ 230 \\ 974 \end{pmatrix}$$

Agora, encontramos $(X^T X)^{-1}$:

$$(X^T X)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 2.375 & -5.5 & 3.5 & -0.625 \\ -5.5 & 15.5 & -11.5 & 2.625 \\ 3.5 & -11.5 & 9.5 & -2.125 \\ -0.625 & 2.625 & -2.125 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Finalmente, calculamos β :

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y \approx \begin{pmatrix} 2.375 & -5.5 & 3.5 & -0.625 \\ -5.5 & 15.5 & -11.5 & 2.625 \\ 3.5 & -11.5 & 9.5 & -2.125 \\ -0.625 & 2.625 & -2.125 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 54 \\ 230 \\ 974 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.6 \\ 0.3 \\ -0.05 \end{pmatrix}$$

Passo 3: Construir o Modelo

O modelo de regressão polinomial de terceira ordem ajustado aos dados é:

$$**y = 2 + 1.6x + 0.3x^2 - 0.05x^3**$$

Esse é o polinômio que melhor ajusta os dados dados os cálculos dos mínimos quadrados.