Cálculo de Programas Trabalho Prático LCC+LEI — Ano Lectivo de 2014/15

Departamento de Informática Universidade do Minho

Maio de 2015

Conteúdo

1	Preâmbulo	2
2	Documentação	2
3	Como realizar o trabalho	3
4	Parte A 4.1 Biblioteca LTree	3 4 4
5	Parte B5.1 Criação de Triângulos de Sierpinski5.2 Trabalho a realizar	5 5
6	O 3 1	7 7 9 10 11
A	Programa principal	12
В	8	12 12
C	Soluções propostas	13

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usa-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, compondo programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método ao desenvolvimento de programas funcionais na linguagem Haskell.

O presente trabalho tem por objectivo concretizar na prática os objectivos da disciplina, colocando os alunos perante problemas de programação que deverão ser abordados composicionalmente e implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada e simples os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita literária [?], cujo princípio base é o seguinte:

Um programa e a sua documentação devem coincidir.

Por outras palavras, o código fonte e a sua documentação deverão constar do mesmo documento (ficheiro).

O ficheiro cp1415t.pdf que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte cp1415t.lhs¹ que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro cp1415t.zip e executando

```
lhs2TeX cp1415t.lhs > cp1415t.tex
pdflatex cp1415t
```

em que lhs2tex é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LATEX e que deve desde já instalar a partir do endereço

```
https://hackage.haskell.org/package/lhs2tex.
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro cp1415t.lhs é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
ghci cp1415t.lhs
```

para ver que assim é:

O facto de o interpretador carregar as bibliotecas do material pedagógico da disciplina, entre outras, deve-se ao facto de, neste mesmo sítio do texto fonte, se ter inserido o seguinte código Haskell:

¹O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
import Data.List

import System.Process

import Cp

import List

import Nat

import Exp

import BTree

import LTree

import X3d

import Control.Parallel.Strategies

import Probability\ hiding\ (\cdot \to \cdot, \cdot)

import System.Environment\ (getArgs)
```

Abra o ficheiro cp1415t . 1hs no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem equilibrada e participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na defesa oral do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, na folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com makeindex)

```
bibtex cp1415t.aux
makeindex cp1415t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou.

4 Parte A

Nesta primeira parte do trabalho pretende-se averiguar a capacidade de utilização por parte dos alunos das bibliotecas fornecidas no material pedagógico da disciplina. Algumas respostas são validadas por testes unitários. Sempre que o resultado de um teste unitário for *False*, a solução proposta falha a validação e deve ser revista.

4.1 Biblioteca LTree

1. A seguinte função

```
balanced (Leaf _) = True
balanced (Fork (t, t')) = balanced t \wedge balanced \ t' \wedge abs \ (depth \ t - depth \ t') \leq 1
```

testa se uma árvore binária está equilibrada ou não. Defina como catamorfismo em LTree a função auxiliar depth.

2. Seja dada:

```
t = Fork \; (Fork \; (Leaf \; 10, Fork \; (Leaf \; 2, Fork \; (Leaf \; 5, Leaf \; 3))), Leaf \; 23)
```

Testes unitários 1 Verifique que árvore t está desequilibrada:

```
test01 = balanced \ t \equiv False
```

3. Recorrendo a funções da biblioteca LTree, escreva numa única linha de Haskell a função

```
balance :: LTree \ a \rightarrow LTree \ a
```

que equilibra uma qualquer árvore binária.

<u>Testes unitários</u> 2 *Verifique que balance t é uma árvore equilibrada:*

```
test02 = balanced (balance t) \equiv True
```

4.2 Biblioteca BTree

Pretende-se construir um anamorfismo que produza uma árvore binária de procura *equilibrada* que contenha o intervalo definido por dois inteiros (n, m):

```
abpe(n, m) = anaBTree\ qsplit(n, m)
```

Comece por definir o gene qsplit e depois construa a árvore

```
t1 = abpe(20, 30)
```

que será precisa na secção 6.4.

Testes unitários 3 Faça os testes seguintes:

```
test03a = qsplit \ (4,30) \equiv i_2 \ (17, ((4,16), (18,30)))

test03b = qsplit \ (4,3) \equiv i_1 \ ()

test03c = qsplit \ (0,0) \equiv i_1 \ ()

test03d = qsplit \ (1,1) \equiv i_2 \ (1, ((1,0), (2,1)))

test03e = balBTree \ t1 \equiv True

test03f = inordt \ t1 \equiv [20...30]
```

4.3 Biblioteca para listas com sentinelas

Considere o tipo de dados que representa listas finitas com uma sentinela no fim:

```
data SList\ a\ b = Sent\ b\mid Cons\ (a, SList\ a\ b) deriving (Show, Eq)
```

1. Derive os isomorfismos *inSList* e *outSList*, adicione-os a este ficheiro e passe aos testes que se seguem.

Testes unitários 4 Faça os testes seguintes:

```
test04a = \mathbf{let} \ x = Cons \ (1, Sent "end") \ \mathbf{in} \ inSList \ (outSList \ x) \equiv x test04b = \mathbf{let} \ x = i_2 \ ("ola", Sent "2") \ \mathbf{in} \ outSList \ (inSList \ x) \equiv x
```

2. Derive os combinadores *cataSList*, *anaSList* e *hyloSList*, e mostre que a função *merge* da biblioteca LTree se pode escrever da forma seguinte,

```
merge' :: Ord \ a \Rightarrow ([a], [a]) \rightarrow [a]

merge' = hyloSList \ [id, cons] \ mgen
```

para um dado gene mgen que deverá definir.

Testes unitários 5 *Faça os seguintes testes:*

```
test05a = mgen ([0,2,5],[0,6]) \equiv i_2 (0,([2,5],[0,6]))

test05b = mgen ([0,2,5],[]) \equiv i_1 [0,2,5]

test05c = merge' ([],[0,6]) \equiv [0,6]
```

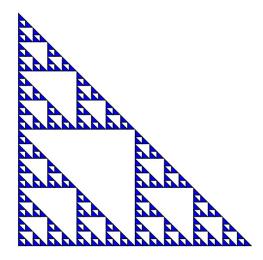


Figura 1: Um triângulo de Sierpinski

5 Parte B

O triângulo de Sierpinski é uma figura fractal que tem o aspecto da figura 1 e que se obtém da seguinte forma: considere-se um triângulo rectângulo e isósceles A cujos catetos têm comprimento s. A estrutura fractal é criada desenhando-se três triângulos no interior de A, todos eles rectângulos e isósceles e com catetos de comprimento s/2. Este passo é depois repetido para cada um dos triângulos desenhados, e assim sucessivamente. O resultado dos cinco primeiros passos é dado na Fig. 1.

Um triângulo de Sierpinski é gerado repetindo-se infinitamente o processo acima descrito. No entanto, para efeitos de visualização num monitor, cuja resolução é forçosamente finita, faz sentido escolher uma representação adequada do triângulo, parando o processo recursivo a um determinado nível. A figura a desenhar é constituída por um conjunto finito de triângulos todos da mesma dimensão (por exemplo, na figura 1 há 243 triângulos).

5.1 Criação de Triângulos de Sierpinski

Seja cada triângulo geometricamente descrito pelas coordenadas do seu vértice inferior esquerdo e o comprimento dos seus catetos:

```
\begin{aligned} \mathbf{type} \ \mathit{Tri} &= (\mathit{Point}, \mathit{Side}) \\ \text{onde} \\ \\ \mathbf{type} \ \mathit{Side} &= \mathit{Int} \\ \\ \mathbf{type} \ \mathit{Point} &= (\mathit{Int}, \mathit{Int}) \end{aligned}
```

A estrutura recursiva de (uma representação finita de) um triângulo de Sierpinski é captada por uma árvore ternária, em que cada nó é um triângulo com os respectivos três sub-triângulos:

```
\mathbf{data} \; \mathsf{TLTree} = \mathit{Tri} \; \mathit{Tri} \; | \; \mathit{Nodo} \; \mathsf{TLTree} \; \mathsf{TLTree} \; \mathsf{TLTree}
```

Nas folhas dessa árvore encontram-se os triângulos mais pequenos, todos da mesma dimensão, que deverão ser desenhados. Apenas estes conterão informação de carácter geométrico, tendo os nós da árvore um papel exclusivamente estrutural. Portanto, a informação geométrica guardada em cada folha consiste nas coordenadas do vértice inferior esquerdo e no lado dos catetos do respectivo triângulo. A função

```
sierpinski :: Tri \rightarrow Int \rightarrow [Tri]
sierpinski t = apresentaSierp \cdot (geraSierp t)
```

recebe a informação do triângulo exterior e o número de níveis pretendido, que funciona como critério de paragem do processo de construção do fractal. O seu resultado é a lista de triângulos a desenhar. Esta função é um hilomorfismo do tipo TLTree, i.e. a composição de duas funções: uma que gera TLTrees,

```
\begin{array}{l} \textit{geraSierp} :: Tri \rightarrow Int \rightarrow \mathsf{TLTree} \\ \textit{geraSierp} \ t \ 0 = Tri \ t \\ \textit{geraSierp} \ ((x,y),s) \ n = \\ \mathbf{let} \ s' = s \div 2 \\ \mathbf{in} \ \textit{Nodo} \\ \textit{(geraSierp} \ ((x,y),s') \ (n-1)) \\ \textit{(geraSierp} \ ((x+s',y),s') \ (n-1)) \\ \textit{(geraSierp} \ ((x,y+s'),s') \ (n-1)) \end{array}
```

e outra que as consome:

```
apresentaSierp :: TLTree \rightarrow [Tri]

apresentaSierp (Tri \ t) = [t]

apresentaSierp (Nodo \ a \ b \ c) = (apresentaSierp \ a) + (apresentaSierp \ b) + (apresentaSierp \ c)
```

5.2 Trabalho a realizar

Preparação:

- 1. Desenvolva a biblioteca "pointfree" TLTree. hs de forma análoga a outras bibliotecas que conhece (eg. BTree, LTree, etc) e que estão disponíveis no material pedagógico.
- 2. Defina como catamorfismos de TLTree as funções

```
\begin{array}{l} tipsTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to [\,b\,] \\ countTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to Int \\ depthTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to Int \\ invTLTree :: \mathsf{TLTree}\ b \to \mathsf{TLTree}\ b \end{array}
```

respectivamente semelhantes a tips, countLTree, depth e inv ("mirror") de LTree.

- 3. Exprima as funções *geraSierp* e *apresentaSierp* recorrendo a anamorfismos e catamorfismos, respectivamente, do tipo TLTree.
- 4. Defina a árvore

```
ts = geraSierp tri 5  where tri = ((0,0), 256)
```

e faça os testes seguintes:

<u>Testes unitários</u> 6 *Verifique a profundidade da árvore gerada e o respectivo número de triângulos:*

```
test06a = depthTLTree \ ts \equiv 6

test06b = countTLTree \ ts \equiv 243

test06c = countTLTree \ ts \equiv length \ (tipsTLTree \ ts)

test06d = countTLTree \ ts \equiv countTLTree \ (invTLTree \ ts)
```

Visualização: Para visualizarmos triângulos de Sierpinski vamos usar X3DOM, uma biblioteca "opensource" para construção e visualização de gráficos 3D no Web.² No pacote disponibilizado para a realização deste trabalho encontra a biblioteca X3d, que inclui a função drawTriangle para geração de triângulos em 3D, usando X3DOM. Nesta abordagem, um ficheiro x3dom é construído em dois passos:

• Desenham-se os triângulos, utilizando:

```
drawTriangle :: ((Int, Int), Int) \rightarrow String
```

²Ver http://examples.x3dom.org para mais informação. Em http://examples.x3dom.org/IG/buddha-anim/x3dom_imageGeometry.html, por exemplo, pode ser visualizado um objecto gráfico com mais de um milhão de triângulos. Mais documentação em: http://doc.x3dom.org/tutorials/index.html.

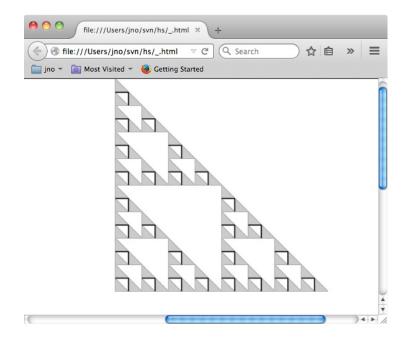


Figura 2: Um triângulo de Sierpinski em x3dom

• Finaliza-se o ficheiro com as tags de início e final:

```
finalize :: String \rightarrow String
```

1. Usando estas funções e as que definiu anteriormente, faça a geração do HTML que representa graficamente o triângulo de Sierpinski definido por

```
dados = (((0,0),32),4)
```

isto é, centrado na origem, com lado 32 e 4 níveis de recursividade. No anexo C sugere-se o recurso à função,

```
render\ html = \mathbf{do}\ \{\ writeFile\ \verb"\_.html"\ html; system\ \verb"open \_.html"\ \}
```

(adapte-a, se necessário) para visualizar o triângulo gerado num "browser". Espera-se que o resultado final seja como o que se mostra na Figura 2.

Valorização

Se tiver tempo, investigue como é que a sua resolução desta parte do trabalho evolui para o desenho, não de *triângulos* de Sierpinski, mas sim de *pirâmides* de Sierpinski — ver a imagem da figura 3. Pode recorrer, se desejar, às funções disponibilizadas no anexo B.1.

6 Parte C

6.1 Mónades

Os mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca <u>Probability</u> oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

```
newtype Dist\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\}
```

em que *ProbRep* é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

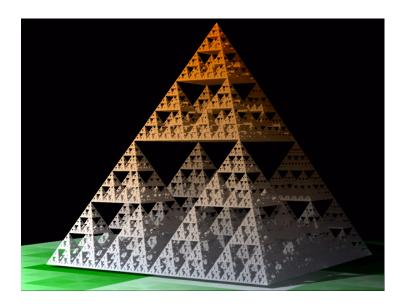


Figura 3: Uma pirâmide de Sierpinski

Cada par (a,p) numa distribuição $d::Dist\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,

$$A = 2\%$$
 $B = 12\%$
 $C = 29\%$
 $D = 35\%$
 $E = 22\%$

será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist\ Char
d1 = D\left[('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)\right]
```

que o GHCi mostrará assim:

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições uniformes,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição normais, eg.

$$d\mathcal{J} = normal~[10 \mathinner{.\,.} 20]$$

etc.3

³Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PHP ("Probabilistic Functional Programming"). A quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a=D\ [(a,1)]$ e cuja multiplicação é dada por (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) \ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g \ a, (y, q) \leftarrow f \ x]$$

em que $g:A\to Dist\ B$ e $f:B\to Dist\ C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica. Vejamos um exemplo:

Problema: qual é a soma de faces mais provável quando lançamos dois dados num tabuleiro?

Assumindo que os dados não estão viciados, cada um oferece uma distribuição uniforme das suas faces (1 a 6). Basta correr a expressão monádica

```
\mathbf{do} \left\{ x \leftarrow uniform \ [1 ... 6]; y \leftarrow uniform \ [1 ... 6]; return \ (x+y) \right\}
```

e obter-se-á:

```
*Main> do { x \leftarrow uniform [1..6] ; y \leftarrow uniform [1..6] ; return(x+y) }
7 16.7%
6 13.9%
8
   13.9%
5
   11.1%
9
   11.1%
4
    8.3%
10
    8.3%
3
    5.6%
11
    5.6%
     2.8%
2
12
     2.8%
```

A soma mais provável é 7, com 16.7%.

6.2 Trabalho a realizar

É possível pensarmos em catamorfismos, anamorfismos etc probabilísticos, quer dizer, programas recursivos que dão distribuições como resultados. Por exemplo, neste enunciado é dado o combinador

$$pcataList :: (Either () (a, b) \rightarrow Dist b) \rightarrow [a] \rightarrow Dist b$$

que é muito parecido com

$$cataList :: (Either () (a, b) \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow b$$

da biblioteca List. A única diferença é que o gene de pcataList é uma função probabilística.

Exemplo de utilização: recorde-se que $cataList\ [zero, add]$ soma todos os elementos da lista argumento, por exemplo:

```
cataList [zero, add] [20, 10, 5] = 35.
```

Considere agora a função padd (adição probabilística) que, com probabilidade 90% soma dois números e com probabilidade 10% os subtrai:

$$padd(a, b) = D[(a + b, 0.9), (a - b, 0.1)]$$

Se se correr

d4 = pcataList [pzero, padd] [20, 10, 5] where $pzero = return \cdot zero$

obter-se-á:

- 35 81.0%
- 25 9.0%
- 5 9.0%
- 15 1.0%

Com base nestes exemplos, resolva o seguinte

Problema: Uma unidade militar pretende enviar uma mensagem urgente a outra, mas tem o aparelho de telegrafia meio avariado. Por experiência, o telegrafista sabe que a probabilidade de uma palavra se perder (não ser transmitida) é 5%; no final de cada mensagem, o aparelho envia o código "stop", mas (por estar meio avariado), falha 10% das vezes.

Qual a probabilidade de a palavra "atacar" da mensagem words "Vamos atacar hoje" se perder, isto é, o resultado da transmissão ser ["Vamos", "hoje", "stop"]? e a de seguirem todas as palavras, mas faltar o "stop" no fim? E a da transmissão ser perfeita?

Responda a todas estas perguntas encontrando g tal que

```
transmitir = pcataList \ gene
```

descreve o comportamento do aparelho.

Testes unitários 7 *Faça o seguinte teste unitário da sua versão para gene:*

```
test07 = gene \ (i_2 \ ("a", ["b"])) \equiv D \ [(["a", "b"], 0.95), (["b"], 0.05)]
```

Responda então às perguntas do problema acima correndo a expressão:

```
transmitir (words "Vamos atacar hoje")
```

6.3 Programação funcional paralela

Uma outra aplicação do conceito de mónade é a programação funcional paralela. A biblioteca Control.Parallel.Strategies, já carregada no início deste texto, implementa esse tipo de programação, que hoje está na ordem do dia. O mónade respectivo chama-se *Eval* e disponibiliza duas funções,

```
rpar :: a \rightarrow Eval \ a

rseq :: a \rightarrow Eval \ a
```

conforme se deseja que uma dada computação seja efectuada em paralelo ou sequencialmente.⁴ Por exemplo,

```
\begin{array}{l} parmap :: (a \rightarrow b) \rightarrow [a] \rightarrow Eval \ [b] \\ parmap \ f \ [] = return \ [] \\ parmap \ f \ (a : lt) = \mathbf{do} \\ a' \leftarrow rpar \ (f \ a) \\ lt' \leftarrow parmap \ f \ lt \\ return \ (a' : lt') \end{array}
```

é um map monádico que usa rpar para aplicar f a todos os elementos de uma lista em paralelo. Se corrermos o map habitual em

```
map\ fib\ [20..30] = [10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269]
```

(cálculo dos números de Fibonacci do vigésimo ao trigésimo), o tempo que o cálculo vai demorar numa máquina com 2 cores^5 será da ordem de 1.1s. Já no caso de usar parmap em vez de map, fará o mesmo cálculo em cerca de 60% desse tempo.

Para verificar esta diferença siga as instruções seguintes:⁶

1. Compile o presente enunciado correndo:

```
ghc -02 cp1415t -rtsopts -threaded
```

2. De seguida execute numa "shell" o seguinte comando,

⁴Esta explicação é bastante simplista, mas serve de momento. Para uma abordagem completa e elucidativa ver a referência [?]. ⁵Intel Core 2 Duo a 2.53 GHz.

⁶Ver detalhes em [?].

```
./cp1415t exemplo seq +RTS -s -N2
```

onde o 2 em N2 indica 2 cores (se a máquina em questão tiver mais cores, este número deverá ser actualizado). Como pode ver inspecionando o código da função main na secção A, o que vai ser executado é

```
putStrLn \cdot show \cdot (map\ fib) \ \ [20..30]
```

Das estatísticas que lhe aparecem no écran retenha esta:

```
Total time 1.41s ( 1.11s elapsed)
```

Em particular, o campo *elapsed* apresenta o tempo decorrido desde o início da execução do programa até ao respectivo fim.

3. De seguida execute

```
./cp1415t exemplo par +RTS -s -N2
```

que irá chamar, desta vez

```
putStrLn \cdot show \cdot runEval \cdot (parmap\ fib) \ \ [20...30]
```

A estatística correspondente à de cima será, desta vez, da ordem seguinte:

```
Total time 1.13s ( 0.69s elapsed)
```

Em suma, a versão paralela é cerca de 1.61x mais rápida $(\frac{1.11}{0.69})$ que a sequencial.

6.4 Trabalho a realizar

Com base na definição de parmap acima, defina a função

```
parBTreeMap :: (a \rightarrow b) \rightarrow (BTree\ a) \rightarrow Eval\ (BTree\ b)
```

que implemente o "map paralelo" sobre BTree's.

De seguida, corra testes semelhantes aos apresentados acima para apurar o ganho em *performance* da aplicação da função *fib* a todos os números da árvore *t1* da secção 4.2, em duas versões:

- 1. fmap fib (sem paralelismo, usando a função definida em BTree), ou
- 2. usando parBTreeMap fib.

Em máquinas mais rápidas e/ou com mais "cores" deve usar números maiores para obter uma melhor distinção entre as duas versões.

Referências

- [1] M. Erwig and S. Kollmansberger. Functional pearls: Probabilistic functional programming in Haskell. *J. Funct. Program.*, 16:21–34, January 2006.
- [2] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.
- [3] S. Marlow. Parallel and Concurrent Programming in Haskell. O'Reilly, 2013.

Anexos

A Programa principal

```
\begin{array}{l} \textit{main} :: IO \; () \\ \textit{main} = \textit{getArgs} \ggg (\neg \cdot \textit{null}) \rightarrow \textit{exemp\_or\_exer}, \textit{errInvArgs} \\ \textbf{where} \\ \textit{exemp\_or\_exer} = (((\equiv) \texttt{"exemplo"}) \cdot \textit{head}) \rightarrow \textit{exemp}, \textit{exer} \\ \textit{exemp} = (((\equiv) 2) \cdot \textit{length}) \rightarrow \textit{execExemp}, \textit{errInvArgs} \\ \textit{execExemp} = \textit{isPar} \rightarrow \textit{execExempPar}, \textit{execExempSeq} \\ \textit{exer} = (((\equiv) 3) \cdot \textit{length}) \rightarrow \textit{execExer}, \textit{errInvArgs} \\ \textit{execExer} = \textit{isPar} \rightarrow \textit{execExerPar}, \textit{execExerSeq} \\ \textit{execExempSeq} = (\textit{putStrLn} \cdot \textit{show} \cdot (\textit{map fib}) \; \$ \; [20 \ldots 30]) \\ \textit{execExempPar} = (\textit{putStrLn} \cdot \textit{show} \cdot \textit{runEval} \cdot (\textit{parmap fib}) \; \$ \; [20 \ldots 30]) \end{array}
```

B Bibliotecas e código auxiliar

```
\begin{array}{l} errInvArgs :: a \rightarrow IO \; () \\ errInvArgs = : \$ \; putStrLn \; msgInvArgs \\ \textbf{where} \\ msgInvArgs = "Invalid arguments" \\ execExerPar :: [String] \rightarrow IO \; () \\ execExerPar = \bot \\ execExerSeq :: [String] \rightarrow IO \; () \\ execExerSeq = \bot \\ isPar :: [String] \rightarrow Bool \\ isPar = (((\equiv) "par") \cdot head \cdot tail) \rightarrow \underline{True}, \underline{False} \\ pcataList \; g = mfoldr \; (curry \; (g \cdot i_2)) \; ((g \cdot i_1) \; ()) \; \textbf{where} \\ mfoldr \; f \; d \; [] = d \\ mfoldr \; f \; d \; (a : x) = \textbf{do} \; \{ y \leftarrow mfoldr \; f \; d \; x; f \; a \; y \} \end{array}
```

B.1 "Easy X3DOM access"

Defina-se a seguinte composição de funções

```
x3dom = html \cdot preamble \cdot body \cdot x3d \cdot scene \cdot items
```

para gerar um texto HTML que represente um objecto gráfico em X3DOM. Esta função usa as seguintes funções auxiliares:

```
html = tag "html" []
preamble = headx 'with' [title "CP/X3DOM generation", links, script]
body = tag "body" []
x3d = tag "x3d" [("width","\"500px\""), ("height", "\"400px\"")]
scene = tag "scene" []
items = concat
links = ctag "link" [
    ("rel", quote "stylesheet"), ("type", quote "text/css"),
    ("href", quote "http://www.x3dom.org/x3dom/release/x3dom.css")]
script = ctag "script" [
    ("type", quote "text/javascript"),
```

De seguida dão-se mais algumas funções auxiliares facilitadoras:

C Soluções propostas

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Podem ser adicionadas outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Secção 4.1

```
\begin{array}{l} \textit{depth} :: \textit{LTree } a \rightarrow \textit{Integer} \\ \textit{depth Leaf} = 1 \\ \textit{depth Fork } (t1, t2) = \textit{abs } (\textit{succ (depth } t1) - \textit{succ (depth } t2)) \\ \textit{balance} :: \textit{LTree } a \rightarrow \textit{LTree } a \\ \textit{balance} = \bot \end{array}
```

Secção 4.2

```
qsplit :: Integral \ a \Rightarrow (a, a) \rightarrow Either \ () \ (a, ((a, a), (a, a))) \ qsplit = \bot
```

Secção 4.3

```
inSList :: Either\ a\ (a1, SList\ a1\ a) \rightarrow SList\ a1\ a inSList = \bot outSList :: SList\ b\ a \rightarrow Either\ a\ (b, SList\ b\ a) outSList = \bot
```

```
\begin{array}{l} anaSList:: (c \rightarrow Either\ a\ (b,c)) \rightarrow c \rightarrow SList\ b\ a \\ anaSList = \bot \\ cataSList:: (Either\ b\ (a,d) \rightarrow d) \rightarrow SList\ a\ b \rightarrow d \\ cataSList = \bot \\ hyloSList:: (Either\ b\ (d,c) \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow Either\ b\ (d,a)) \rightarrow a \rightarrow c \\ hyloSList = \bot \\ mgen:: Ord\ a \Rightarrow ([a],[a]) \rightarrow Either\ [a]\ (a,([a],[a])) \\ mgen = \bot \end{array}
```

Secção 5.2

```
inTLTree = \bot
outTLTree = \bot
baseTLTree = \bot
recTLTree = \bot
cataTLTree = \bot
anaTLTree\ f = \bot
hyloTLTree\ a\ c = \bot
\mathit{tipsTLTree} = \bot
invTLTree = \bot
\mathit{depthTLTree} = \bot
\mathit{geraSierp} :: \mathit{Tri} \to \mathit{Int} \to \mathsf{TLTree} \ \mathit{Tri}
geraSierp = \bot
countTLTree :: TLTree b \rightarrow Int
countTLTree = \bot
draw = render \ html \ \mathbf{where}
   html = rep\ dados
rep = \bot
```

Secção 6.2

Defina

 $gene = \bot$

e responda ao problema do enunciado aqui.

Secção 6.4

Defina

 $parBTreeMap = \bot$

e apresente aqui os resultados das suas experiências com essa função.

Índice

```
Cálculo de Programas, 3
     Material Pedagógico, 2, 3, 6
       BTree.hs, 4, 6, 11
       List.hs, 9
       LTree.hs, 3, 4, 6
Combinador "pointfree" either, 4, 9
Fractal, 5
    Pirâmide de Sierpinski, 8
    Triângulo de Sierpinski, 5, 7
Haskell, 2
     "Literate Haskell", 2
      lhs2TeX, 2
     Biblioteca
       PFP, 8
       Probability, 7, 8
     Control
       Parallel.Strategies, 10
    interpretador
       GHCi, 3, 8
Programação literária, 2
U.Minho
     Departamento de Informática, 1
Utilitário
    LaTeX
       bibtex,3
      makeindex, 3
    X3DOM, 6, 12
```