Estrutura de Dados II

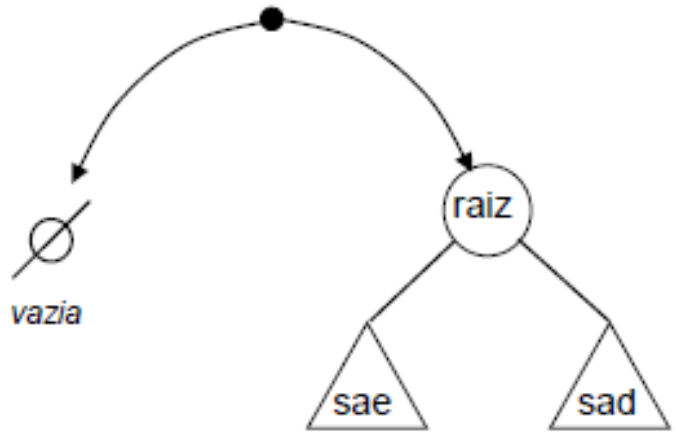
Profº Filipe Dwan Pereira

Créditos

- Esta apresentação foi baseada em Slides dos professores:
  - Waldemar Celes - PUC-RIO;
  - Rosiane de Freitas - Icomp/UFAM;
  - Acauan Ribeiro - DCC/UFRR;
  - Ornélio Hinterholz - Estácio/RR
  - Fernando Vanini – IC/UNICAMP

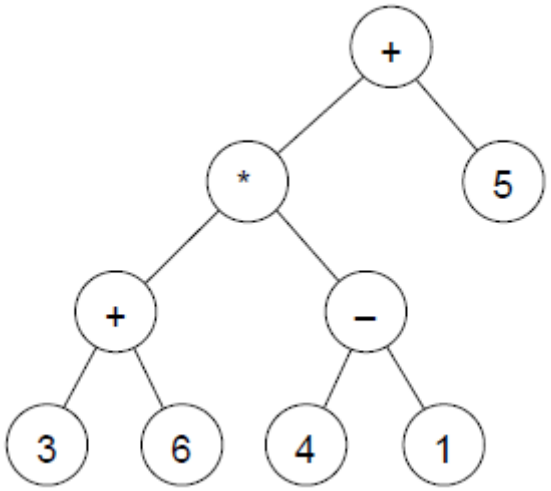
Árvore Binária

- uma árvore vazia; ou
- um nó raiz com duas sub-árvores:
  - a sub-árvore da direita (sad)
  - a sub-árvore da esquerda (sae)



Exemplo

- árvores binárias representando expressões aritméticas:
  - nós folhas representam operandos
  - nós internos operadores
  - exemplo: (3+6)*(4-1)+5

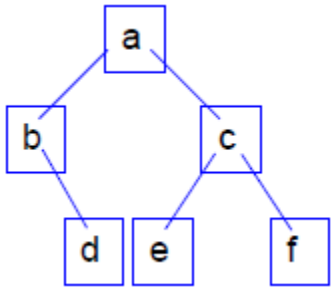


Propriedades Quantitativas

- Algumas propriedades quantitativas:
  - O número máximo de nós de uma árvore binária de altura h é 2^h-1
  - Número mínimo de nós de uma árvore de altura n: n
  - Altura máxima de uma árvore com n nós: n
  - Altura mínima de uma árvore com n nós: $\lfloor \log2(n) \rfloor$

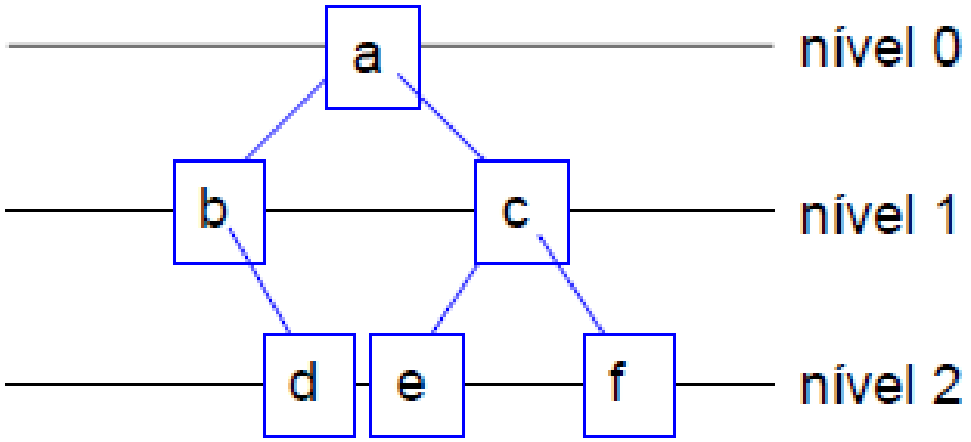
Altura de uma Árvore Binária

- Propriedade fundamental de árvores
  - só existe um caminho da raiz para qualquer nó
- Altura de uma árvore
  - a altura de uma árvore com um único nó raiz é zero
  - a altura de uma árvore vazia é -1
- exemplo:
  - h = 2



Altura de uma Árvore Binária

- Nível de um nó
  - a raiz está no nível 0, seus filhos diretos no nível 1, ...
  - o último nível da árvore é a altura da árvore



Eficiência para as operações

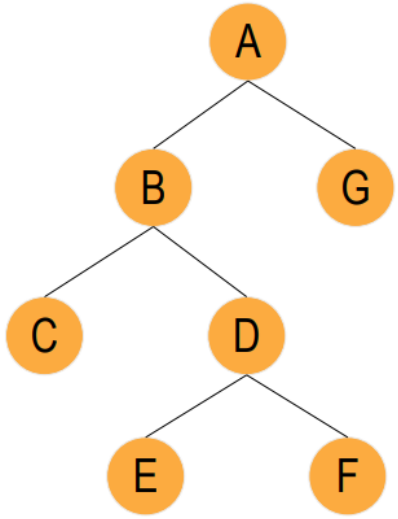
- Árvores binárias podem ser usadas para guardar e recuperar informações, com número de operações proporcional à altura da árvore, ou seja, variando, aproximadamente, entre $\log_2 n$ e n (quando se torna degenerada para uma lista).
  - Mais tarde veremos como esta manipulação
- pode ser realizada de maneira a garantir a altura da ordem de $O(\log_2 n)$

Alguns Tipos de Árvores Binárias

- Árvore Estritamente Binária
- Árvore Binária Completa
  - Há duas definições: (i) completa = cheia e (ii) completa = a definição de quase completa;
- Árvore Binária Balanceada;

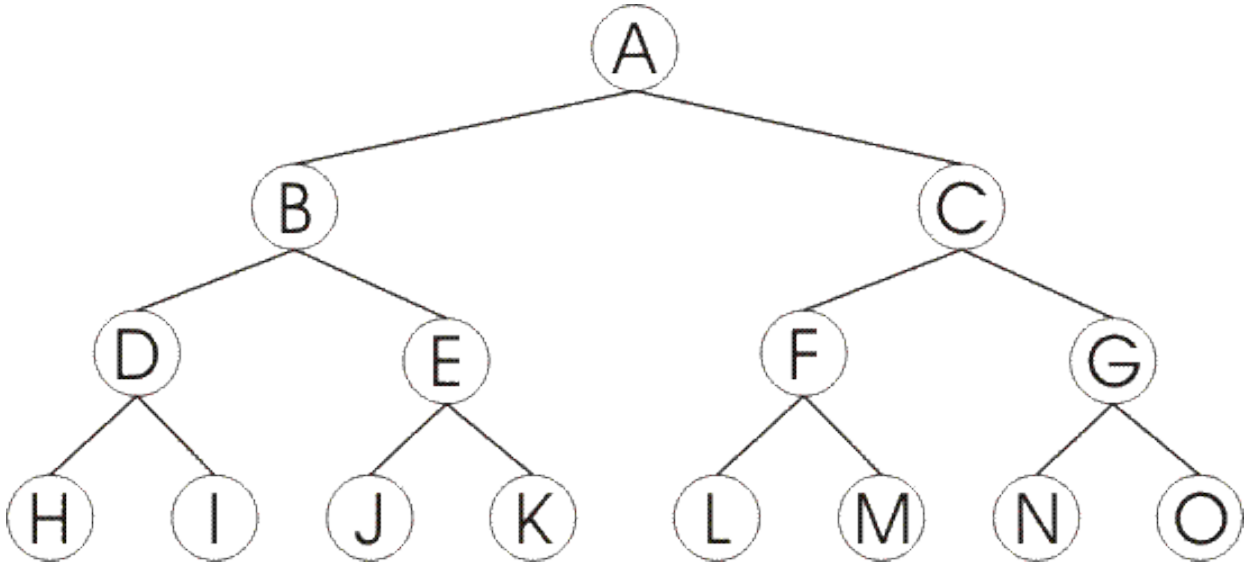
Árvore Estritamente Binária

- Uma Árvore Estritamente Binária tem nós que têm ou 0 (nenhum) ou dois filhos;
- Nós internos (não folhas) sempre têm 2 filhos:



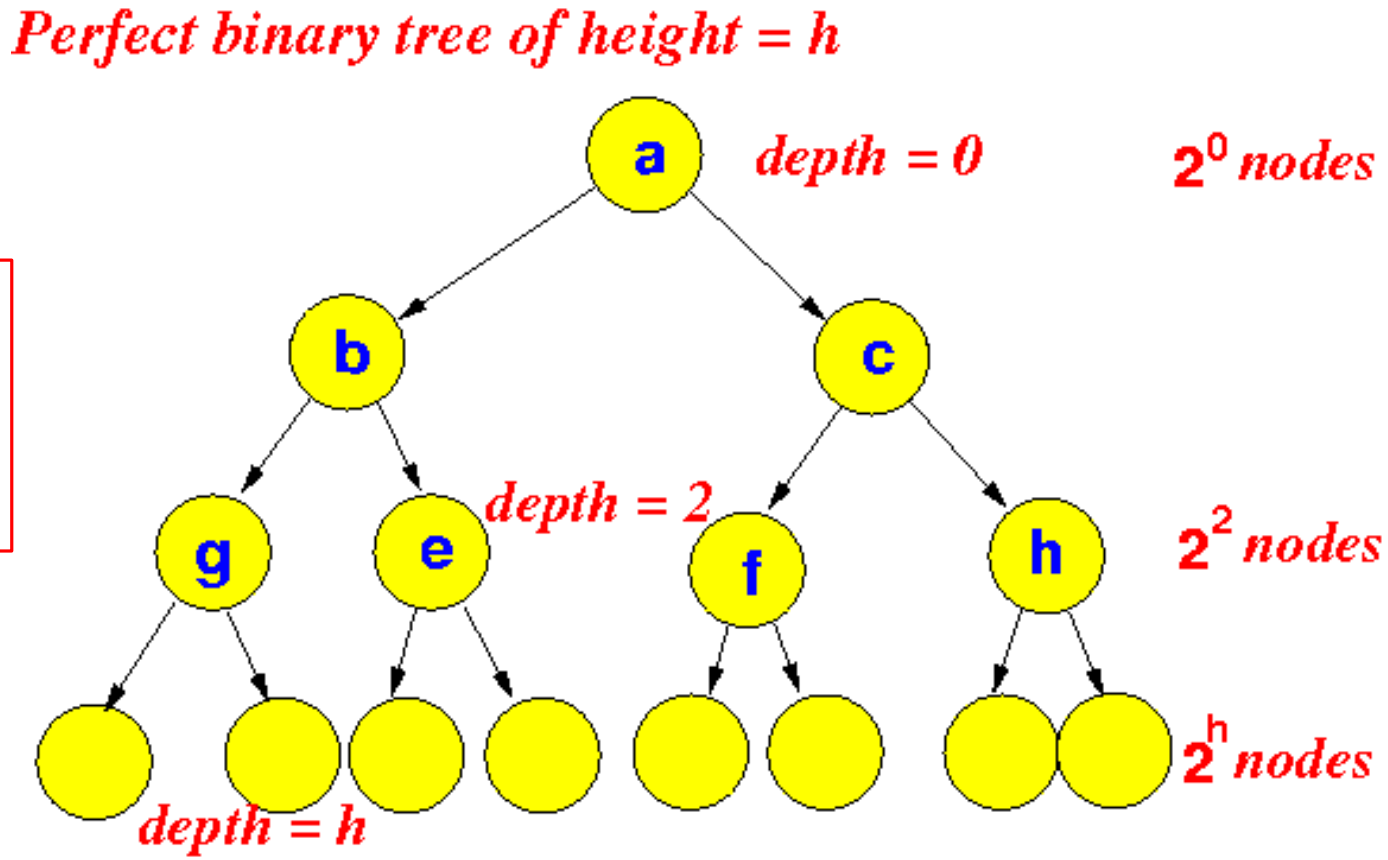
Árvore Binária Completa (Cheia)

- É estritamente binária, de nível h (altura); e todos os seus nós-folha estão no mesmo nível h:



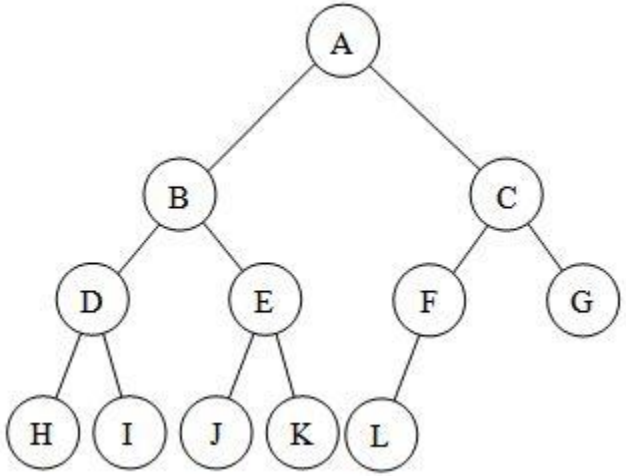
Número de Nodos de uma Árvore Binária Completa

Num de nós da árvore: $2^{h+1}-1$



Árvore Binária Quase Completa

- Se a altura da árvore é h, cada nó folha está no nível h ou no nível h-1.
- Em outras palavras, a diferença de altura entre as sub-árvores de qualquer nó é no máximo 1.



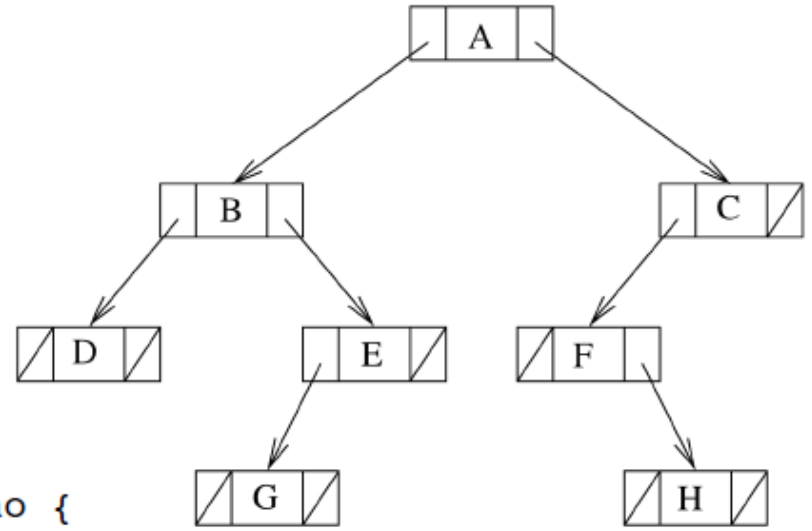
Implicações dos conceitos completa e quase completa

- Importante para:
  - sua alocação em vetores, pois quando é cheia não desperdiça espaço, e
  - na definição do método de ordenação heapsort que trabalha com o conceito de árvore completa como se fosse nossa definição de quase completa.

Perguntas

- Uma árvore binária completa é uma árvore estritamente binária?
- Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária completa?

Representação usual de Árvores Binárias

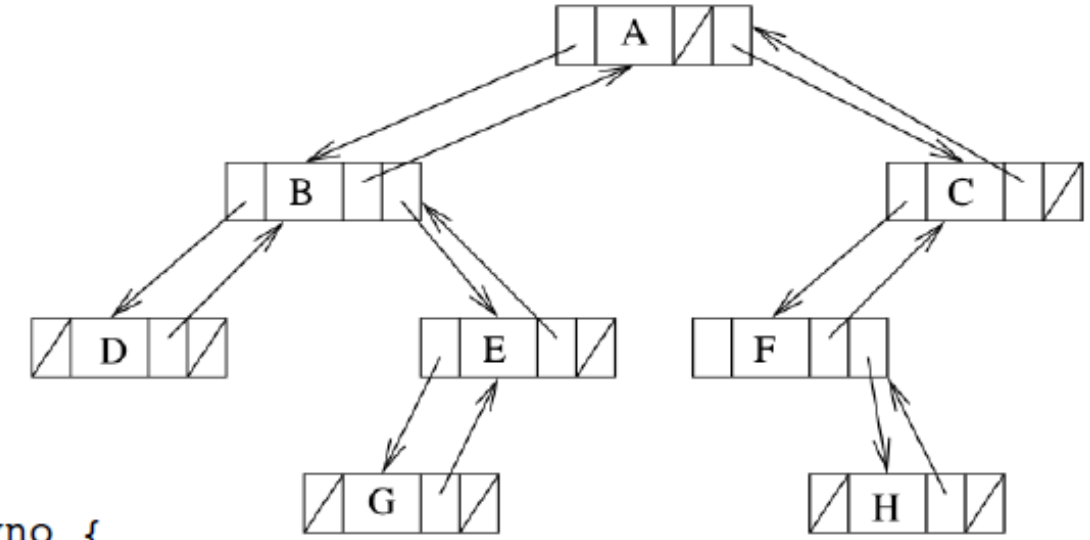



```
struct arvno {
   Tipo info;
   ArvNo* esq;
   ArvNo* dir;
};

typedef struct arv Arv;

ArvNo* raiz;
```

→ É possível acessar todos os nós a partir da raiz.

Usaremos esta representação.

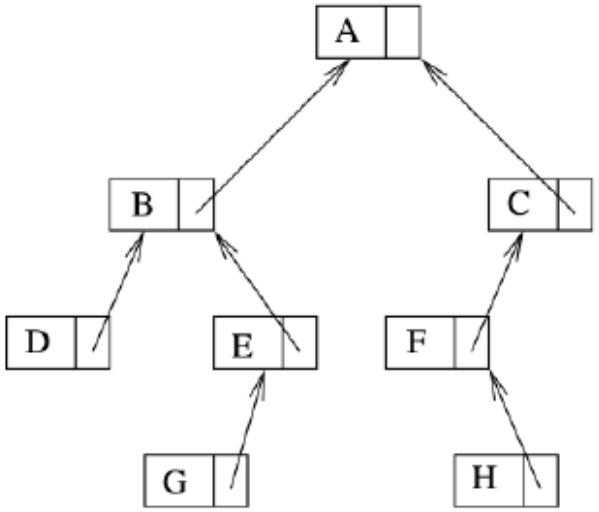
Representação com campos esq, dir e pai




```
struct arvno {
   Tipo info;
   ArvNo* esq, dir, pai;
};

typedef struct arv Arv;

ArvNo* raiz;
```

→ É possível acessar todos os nós a partir de qualquer nó.

Representação com campo pai apenas



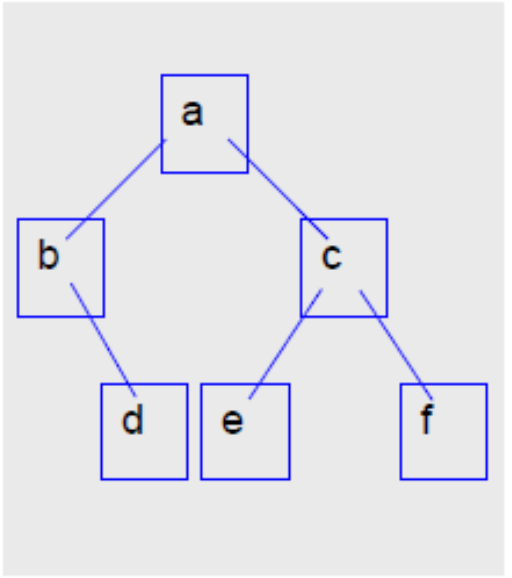

```
struct arvno {
   Tipo info;
   ArvNo* pai;
};

typedef struct arv Arv;
```

→ Precisa conhecer todas as folhas;
→ Não consegue distinguir filho esquerdo e filho direito.

Árvores binárias - Ordens de percurso

Ordens de percurso:

- *pré-ordem*:
  - trata *raiz*, percorre *sae*, percorre *sad*
  - exemplo: a b d c e f
- *ordem simétrica*:
  - percorre *sae*, trata *raiz*, percorre *sad*
  - exemplo: b d a e c f
- *pós-ordem*:
  - percorre *sae*, percorre *sad*, trata *raiz*
  - exemplo: d b e f c a



Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Estrutura para representação de um nodo
da árvore binária
*/
typedef struct no {
        char info;
        struct no *esq;
        struct no *dir;
}Nodo;
```

```
/*
Tipo Abstrato para Representação
da Árvore como um todo
*/
typedef struct arv_bin {
        Nodo * raiz;
}Arv_bin;
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Para a criação da estrutura da árvore serão criadas duas funcoes:
        *arv_cria
        *arv_cria_nodo

A funcao arv_cria cria uma representação do TAD Arv_bin.
A funcao arv_cria_nodo é responsável por criar um novo
nodo na árvore.
*/
Arv_bin* arv_cria(Nodo* raiz);
Nodo* arv_cria_no(char c, Nodo* esq, Nodo* dir);
```

Implementação – Cria Árvore Binária

```
Arv_bin* arv_cria(Nodo* raiz) {
        Arv_bin* arv = (Arv_bin*) malloc(sizeof(Arv_bin));
        arv->raiz = raiz;
        return arv;
}

Nodo* arv_cria_no(char c, Nodo* esq, Nodo* dir) {
        Nodo * nodo = (Nodo *) malloc(sizeof(Nodo));
        nodo->esq = esq;
        nodo->dir = dir;
        nodo->info = c;
        return nodo;
}
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Por fins didáticos a funcao arv_imprime_escolhendo_ordem
imprime a arvore binária em pre_ordem, ordem ou em pos ordem
dependendo da constante que for passada para o parâmetro
'ordem'. O parâmetro 'ordem' pode assumir os seguintes valores:
1 - chama a funcao arv_imprime_pre_ordem
2 - chama a funcao arv_imprime_infixa
3 - chama a funcao arv_imprime_pos_ordem
*/
void arv_imprime_escolhendo_ordem(Arv_bin* arv, int ordem);
```

```
/*
mostra raiz, percorre sae, percorre sad
*/
void arv_imprime_pre_ordem(Nodo* raiz);
/*
percorre sae, mostra raiz, percorre sad
*/
void arv_imprime_infixa(Nodo* raiz);
/*
percorre sae, percorre sad, mostra raiz
*/
void arv_imprime_pos_ordem(Nodo* raiz);
```

Implementação - Impressão

```
void arv_imprime_escolhendo_ordem(Arv_bin* arv, int ordem) {
        if (ordem==1)
                arv_imprime_pre_ordem(arv->raiz);
        else if (ordem==2)
                arv_imprime_infixa(arv->raiz);
        else if (ordem == 3)
                arv_imprime_pos_ordem(arv->raiz);
        else
                printf("Valor invalido! Escolha um valor entre [1-3]");
        printf("\n");
}
```

Implementação – Impressão (pré-ordem)

```
void arv_imprime_pre_ordem(Nodo* raiz) {
        if (raiz!=NULL) {
                printf("%c", raiz->info);
                arv_imprime_pre_ordem(raiz->esq);
                arv_imprime_pre_ordem(raiz->dir);
        }
}
```

Implementação – Impressão (in-ordem)

```
void arv_imprime_infixa(Nodo* raiz) {
        if (raiz!=NULL) {
                arv_imprime_infixa(raiz->esq);
                printf("%c", raiz->info);
                arv_imprime_infixa(raiz->dir);
        }
}
```

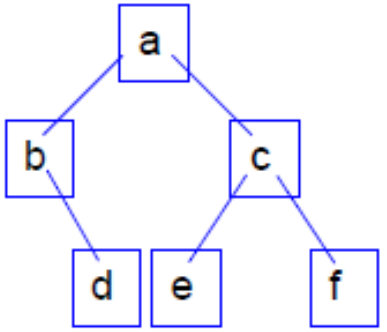
Implementação – Impressão(pós-ordem)

```
void arv_imprime_pos_ordem(Nodo* raiz) {
        if (raiz!=NULL) {
                arv_imprime_pos_ordem(raiz->esq);
                arv_imprime_pos_ordem(raiz->dir);
                printf("%c", raiz->info);
        }
}
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Imprime usando uma representação com parentização.
*/
void arv_imprime_formatado(Arv_bin* arv);
void arv_imprime_formatado_no(Nodo* raiz);
```

<a <b <> <d <><>> > <c <e <><> > <f <><> > > >



Implementação – Impressão Formatada

```
void arv_imprime_formatado(Arv_bin* arv) {
        arv_imprime_formatado_no(arv->raiz);
        printf("\n");
}

void arv_imprime_formatado_no(Nodo* raiz) {
        printf("<");
        if (raiz!=NULL) {
                printf("%c", raiz->info);
                arv_imprime_formatado_no(raiz->esq);
                arv_imprime_formatado_no(raiz->dir);
        }
        printf(">");
}
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Funçoes para liberar memória.
A funcao arv_libera deve passar como parâmetro o
nodo raiz da árvore binária.
A funcao arv_libera_no percorre a árvore até encontrar
os nodos folha para ai sim liberará-los (pós-ordem). Do contrário,
perderíamos a referência da sae e sad
*/
void arv_libera(Arv_bin* arv);
void arv_libera_no(Nodo* raiz);
```

Implementação – libera memória

- Observe que para liberar a memória você deverá usar o percurso pós-ordem, impreterivelmente. Do contrário ocorrerá vazamento de memória.

```
void arv_libera(Arv_bin* arv) {
        arv_libera_no(arv->raiz);
        free(arv);
}

void arv_libera_no(Nodo* raiz) {
        if (raiz!=NULL) {
                arv_libera_no(raiz->esq);
                arv_libera_no(raiz->dir);
                free(raiz);
        }
}
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Essa funcao deve informar se determinado nodo
pertence à árvore.
*/
int arv_pertence(Arv_bin* arv, char c);
int arv_pertence_no(Nodo* raiz, char c);
```

Implementação – pertence à árvore

```
int arv_pertence(Arv_bin* arv, char c) {
        return arv_pertence_no(arv->raiz, c);
}
```

```
int arv_pertence_no(Nodo* raiz, char c) {
        if (raiz==NULL)
                return 0;
        if (raiz->info==c)
                return 1;
        else if (arv_pertence_no(raiz->esq, c))
                return 1;
        else
                return arv_pertence_no(raiz->dir, c);
        //return arv_pertence_no(raiz->esq, c) ||
        //      arv_pertence_no(raiz->dir, c);
}
```

Implementação – pertence à árvore

```
/**
A funcao abaixo funciona porque em uma condicao OR (||)
ao ser verdaira uma proposicao simples pertencente a uma proposicao
composta, então toda a proposicao composta eh verdadeira.


int arv_pertence_no(Nodo* raiz, char c) {
        if (raiz==NULL)
                return 0;
        else
                return c==raiz->info ||
                                arv_pertence_no(raiz->esq, c) ||
                                arv_pertence_no(raiz->dir, c);
}
*/
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Similar a funcao arv_pertence. Entretanto nesse
caso ela returna o Nodo encontrado ou NULL
caso ele não seja encontrado.
Em casos práticos, não é suficiente saber se o nodo está presente
na árvore. Na verdade, geralmente é necessário ter acesso ao nodo.
*/
Nodo* arv_busca(Arv_bin* arv, char c);
Nodo* arv_busca_no(Nodo* raiz, char c);
```

Implementação – busca

```
Nodo* arv_busca(Arv_bin* arv, char c) {
        return arv_busca_no(arv->raiz, c);
}
```

```
Nodo* arv_busca_no(Nodo* raiz, char c) {
        if (raiz == NULL)
                return NULL; //arvore vazia, não encontrou
        else if (raiz->info == c)
                return raiz;
        else {
                Nodo *no = arv_busca_no(raiz->esq, c); //busca na sae
                if (no!=NULL)
                        return no;
                else
                        return arv_busca_no(raiz->dir, c); //busca na sad
        }
}
```

Tipo Abstrato de Dados

```
/*
Calcula a altura da árvore. No que uma árvore vazia tem altura = -1.
*/
int arv_altura(Arv_bin* arv);
int arv_altura_no(Nodo* raiz);
```

Implementação – altura

```
int arv_altura(Arv_bin* arv) {
        return arv_altura_no(arv->raiz);
}

int max(int alt_sae, int alt_sad) {
        return alt_sae>alt_sad ? alt_sae : alt_sad;
}
```

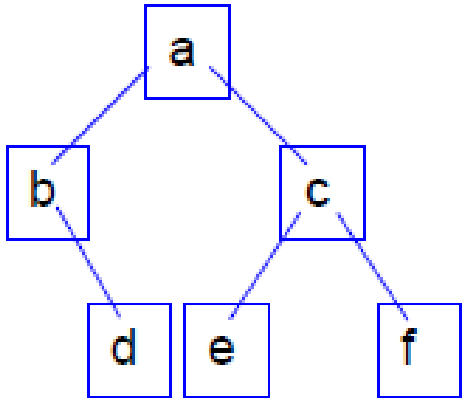
```
int arv_altura_no(Nodo* raiz) {
        if (raiz == NULL)
                return -1;
        int alt_sae = 1+arv_altura_no(raiz->esq);
        int alt_sad = 1+arv_altura_no(raiz->dir);
        return max(alt_sae, alt_sad);
}
```

Implementação – altura (outra versão)

```
/*
A funcao arv_altura_no poderia ser escrita da seguinte forma:


int arv_altura_no(Nodo* raiz) {
        if (raiz == NULL)
                return -1;
        return 1 + max(arv_altura_no(raiz->esq), arv_altura_no(raiz->dir));
}
*/
```

Exemplo de Uso do TAD

```
//Exemplo de criação de uma árvore binária:
Arv_bin *arv = arv_cria(
                arv_cria_no('a',
                                arv_cria_no('b',
                                        NULL,
                                        arv_cria_no('d', NULL, NULL)
                                        ),
                                arv_cria_no('c',
                                        arv_cria_no('e', NULL, NULL),
                                        arv_cria_no('f', NULL, NULL)
                                        )
                        )
        );
```



Exemplo de Uso do TAD (continuação)

```
arv_imprime_escolhendo_ordem(arv, 1);
arv_imprime_escolhendo_ordem(arv, 2);
arv_imprime_escolhendo_ordem(arv, 3);

arv_pertence(arv, 'f') ? printf("sim\n") : printf("nao\n");

Nodo *n = arv_busca(arv, 'f');
if(n!=NULL)
        printf("Nodo Encontrado: %c\n", n->info);

arv_imprime_formatado(arv);

printf("Altura da arvore: %d\n", arv_altura(arv));

arv_libera(arv);
```

Exercícios Avaliativos

- 1) Escreva e envie os códigos apresentados nesta aula. Os códigos devem ser enviados em três arquivos:
  - arvoriabinaria.h
  - arvorebinaria.c
  - principal.c
- Observação geral: se possível, coloque todos os seus códigos no gitHub. Eles podem ser úteis no futuro ;-)

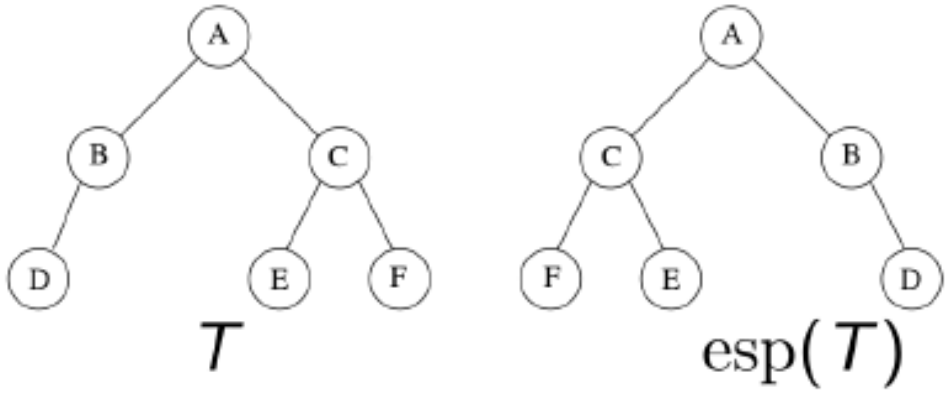
Exercícios Avaliativos

- 2) Implementar o percurso em LARGURA da árvore binária:

```
funcao largura(ArvBin a)  {
   inicializa_fila();
   ins_fila(a);
      while (!fila_vazia()) {
      p = rem_fila();
      if (a) {
         Visite(a);
         ins_fila(a->esq);
         ins_fila(a->dir);
      }
   }
   finaliza_fila();
}
```

Exercícios Avaliativos

- 3) Escreva uma função int tamanho(Arvbin arv) que recebe uma árvore binária arv e devolve o número de nós de arv.
- 4) O espelho esp(T) da árvore binária T é a árvore binária definida recursivamente da seguinte forma. Se T for vazia então esp(T) é a árvore vazia. Senão, se T tem raiz r , subárvore esquerda T_e e subávore direita T_d , então esp(T) é a árvore binária com raiz r, subávore esquerda esp(T_d) e subárvore direita esp(T_e). Escreva uma função Arvbin espelho(Arvbin p) que recebe uma árvore binária arv e devolve seu espelho. A árvore original não deve ser modificada.



Percursos Iterativos

- É possível realizar os percursos nas árvores sem o uso de Recursão?
  - SIM
- Como?
- Por meio de algoritmos iterativos, utilizando estruturas auxiliares como pilhas, filas, etc.

Pré-ordem iterativo com uma pilha

```
void PreOrdemIter(Arvbin p) {
   inicializa_pilha();
   if (!p) empilha(p);
   while (!pilha_vazia()) {
      p = desempilha();
      Visite(p);
      if (p->dir) empilha(p->dir);
      if (p->esq) empilha(p->esq);
     }
   finaliza_pilha();
}
```

Versão que empilha apenas ponteiros não nulos.

Exercícios Avaliativos

- 5) Implemente o percurso in-ordem de maneira iterativa. Ou seja sem o uso de recursão;
- 6) Escreva uma função que conta o número de folhas de uma árvore binária.
- 7) Uma árvore binária é estritamente binária se todos os nós da árvore tem 0 ou 2 filhos. Implemente uma função que verifica se uma árvore binária é estritamente binária.
- 8) Escreva uma função para verificar se uma árvore binária é completa.

Referência

- ASCENCIO, A.F.G..; ARAÚJO, G.S. **Estrutura de dados algoritmos, análise de complexidade e implementações em Java e C/C++**. 1ª. Ed. São Paulo: Pearson, 2010 .
- CELES, W.; CERQUEIRA, R.; RANGEL, J. L. **Introdução a Estruturas de Dados**. 2ª. Ed. Rio de Janeiro: Campus, 2004.
- Cormen, Thomas H., et al. "**Algoritmos: teoria e prática**." Editora Campus 2 (2002).

"Péssima ideia, a de que não se pode mudar”. Montaigne

;-)

filipedwan@gmail.com

skype filipedwan

twitter @filipedwan