

Projeto – Desenho de filtro para sinal modulado de tempo discreto

Objetivo: Aplicar os conceitos estudados em sala de aula e descritos na bibliografia da disciplina para o desenho de um filtro discreto no tempo em ambiente computacional.

Atividade

A atividade consiste em remover componentes indesejados de um sinal que foi recebido por um sistema de comunicação digital. Do lado do transmissor, o sinal é *modulado* para portar símbolos de informação. No receptor, o sinal é amostrado e depois *demodulado*. O sinal demodulado resultante contém algumas componentes indesejadas, o que indica a necessidade de aplicar um filtro antes de decodificar os símbolos de informação.

Fundamentação teórica

O setor de engenharia de uma empresa de sistemas controladores de veículos autônomos é responsável pelo projeto de um **módulo controlador remoto** de um drone. Tal módulo é responsável por transmitir símbolos de informação X contendo comandos para controlar a direção do drone.

De forma simplificada, o módulo controlador é composto por sistemas específicos: i) Sistemas transmissor e receptor, ii) sistemas modulador e demodulador, e iii) sistema controlador. O sistema receptor é responsável por captar sinais, transmitidos pelo sistema transmissor, portando símbolos de informação X modulados por um sistema modulador, tendo como saída um sinal $y[n]$ amostrado no tempo. O sistema demodulador é necessário para obter a estimativa \hat{X} de cada símbolo de informação transmitido. Por fim, o sistema controlador executa ações de controle da direção e velocidade do drone em função do símbolo de informação. A Figura 1 ilustra o esquemático simplificado deste módulo.

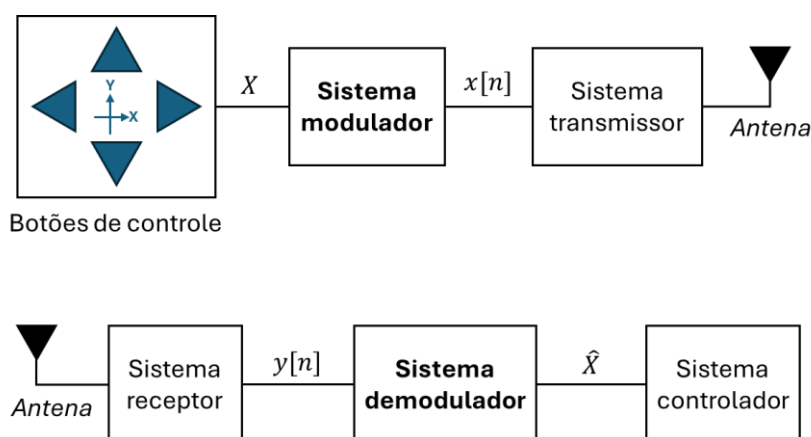


Figura 1. Esquemático simplificado do módulo controlador remoto de veículos autônomos.

O **sistema controlador** é programado para interpretar comandos de mudança de direção do drone no plano Cartesiano XY, assumindo que o drone mantém sua altura constante. A lógica por trás é simples: Em cada eixo do

plano Cartesiano o comando enviado ajusta a componente da velocidade por um fator pré-determinado α , e o sentido da mudança determinado pelo símbolo de informação recebido \hat{X} .

Desta forma, dado um símbolo recebido e demodulado $\hat{X}_n \in \mathcal{S}_{4\text{QAM}}$ no instante $n \in \mathbb{Z}$, as coordenadas $c_x[n]$ e $c_y[n]$ do drone nos eixos X e Y, respectivamente, são atualizadas seguindo as equações abaixo:

$$c_x[n+1] = c_x[n] + \tau v_x[n],$$

$$c_y[n+1] = c_y[n] + \tau v_y[n],$$

em que τ é o intervalo de atualização, em segundos, da posição do drone, $v_x[n]$ e $v_y[n]$ são as componentes da velocidade do drone, em metros por segundo, nos eixos X e Y, respectivamente. As componentes da velocidade são atualizadas seguindo as equações abaixo:

$$v_x[n+1] = v_x[n] + \alpha \text{Re}[\hat{X}_n],$$

$$v_y[n+1] = v_y[n] + \alpha \text{Im}[\hat{X}_n],$$

em que α é o fator que determina o passo de atualização da velocidade, e $\text{Re}[\cdot]$ e $\text{Im}[\cdot]$ são as partes real e imaginária de um número complexo. Assim, a parte real de \hat{X}_n contém o comando para atualizar a velocidade do drone no eixo X, enquanto sua parte imaginária atualiza a velocidade no eixo Y.

O **sistema modulador** opera de forma casada com um sistema demodulador. Tal sistema modulador é configurado para gerar símbolos de uma constelação da modulação digital 4-QAM (do Inglês *Quadrature Amplitude Modulation*), conforme figura abaixo:

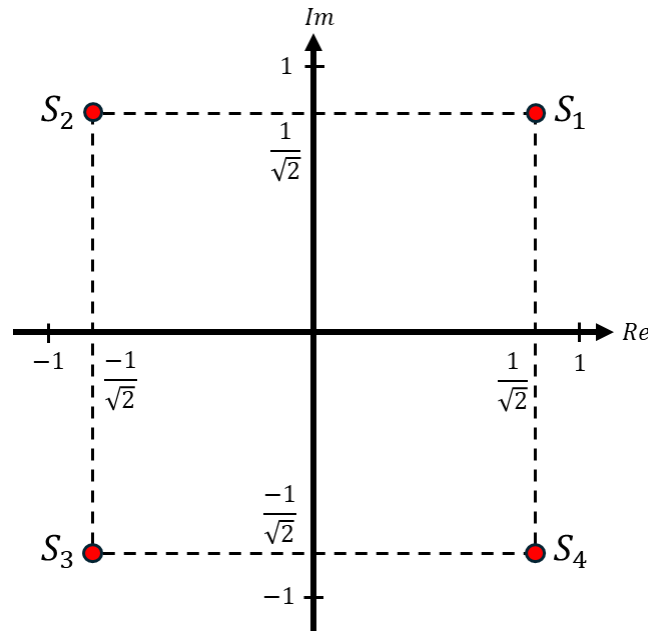


Figura 2. Ilustração da constelação de símbolos da modulação digital 4-QAM no plano complexo.

Um dado símbolo $X \in \mathcal{S}_{4\text{QAM}}$, em que $\mathcal{S}_{4\text{QAM}} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, da modulação 4-QAM porta dois bits de informação, se adequando perfeitamente à necessidade do módulo controlador remoto, que demanda dois possíveis comandos de ajuste para $v_x[n]$ e outros dois possíveis comandos de ajuste para $v_y[n]$.

Antes da transmissão, o m -ésimo símbolo gerado $X_m \in \mathcal{S}_{4\text{QAM}}$ precisa ser modulado em um sinal portador $x_m[n]$ pelo sistema modulador. Este procedimento transforma o símbolo X_m , que é um número complexo dado por

$X_m = \text{Re}[X_m] + j\text{Im}[X_m]$, em um sinal senoidal $x_m[n]$, portando as componentes real e imaginária de X_m , conforme a equação abaixo:

$$x_m[n] = \text{Re}[X_m]\sqrt{2} \cos(2\pi f_c T_s n) - \text{Im}[X_m]\sqrt{2} \sin(2\pi f_c T_s n), \quad N_0 \leq n < N_0 + N,$$

em que N é o número de amostras do intervalo do símbolo X_m , N_0 indica o instante de início do intervalo de X_m , f_c é a frequência do sinal portador, e T_s é o período de amostragem do sinal portador. O período T_s é propositalmente definido como $T_s = \frac{1}{Nf_c}$ para que o sinal tenha características periódicas. Então, efetivamente, o sinal $x_m[n]$ pode ser reescrito como:

$$x_m[n] = \text{Re}[X_m]\sqrt{2} \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - \text{Im}[X_m]\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right), \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

É importante destacar que $x_m[n]$ porta duas informações, que são usadas para indicar dois comandos no sistema controlador, um para o eixo X e outro para o eixo Y. Além disso, $x_m[n]$ tem propriedades trigonométricas importantes, por ser uma soma de duas senoides, permitindo o sistema demodulador separar as duas informações portadas.

A geração de uma sequência de N_s símbolos forma o sinal portador $x[n]$ contendo $N_s \cdot N$ amostras no tempo.

$$x[n] = \sum_{m=0}^{N_s-1} \sum_{k=0}^{N-1} x_m[k] \delta[n - (mN + k)], \quad 0 \leq n \leq N_s \cdot N - 1,$$

em que $\delta[n]$ é a função impulso de tempo discreto. A Figura 3 abaixo ilustra o sinal portador $x[n]$ formado por uma sequência de dois símbolos $X_m = S_3$ e $X_{m+1} = S_1$, cada um com $N = 21$ amostras.

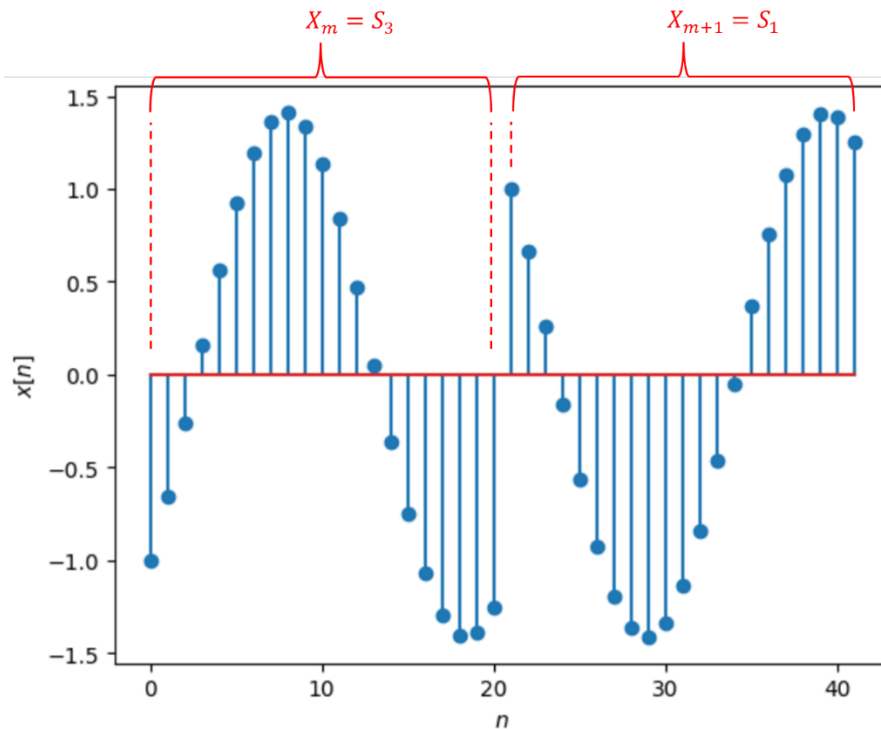


Figura 3. Exemplo ilustrativo do sinal $x[n]$ formado por dois sinais portadores $x_m[n]$ e $x_{m+1}[n]$, com $N = 21$ amostras cada, em sequência, portando dois símbolos gerados $X_m = S_3$ e $X_{m+1} = S_1$, respectivamente.

Assim, o sinal $x[n]$ portando N_s símbolos é transmitido pelo sistema transmissor através do processo de reconstrução do sinal de tempo discreto para tempo contínuo, gerando o sinal $x(t)$.

O **sistema transmissor** opera de forma casada com um sistema receptor. Seu papel é transformar o sinal $x[n]$ no sinal $x(t)$, de tempo contínuo, e transmiti-lo através do meio sem fio por uma antena operando em uma frequência

regulamentada e com potência ajustada para que o sinal $y(t)$ recebido pelo sistema receptor tenha potência adequada.

O **sistema receptor**, após a recepção do sinal $y(t)$, faz o processo de amostragem para obter $y[n]$ de tempo discreto, com período de amostragem T_s , de modo que $y[n] = y(T_s n)$, $\forall n$. O sinal $y[n]$ é, de forma simplificada, definido como:

$$y[n] = x[n] + z[n],$$

em que $z[n]$ é um processo de ruído aleatório complexo do tipo “Gaussiano branco”, com média zero e potência menor que a potência de $x[n]$. É importante destacar que o ruído aditivo é inerente ao processo de recepção de sinal, sendo uma fonte natural de erros na demodulação de símbolos.

O **sistema demodulador** tem, por fim, o papel de obter estimativas dos símbolos de informação portados pelo sinal recebido $y[n]$. Este processo é feito em três etapas.

- **Etapla 1:** Nesta etapa, as propriedades trigonométricas de $x[n]$ são exploradas de modo a decompor o sinal $y[n]$ em duas componentes: $y_R[n]$, portando majoritariamente a parte real dos símbolos; e $y_I[n]$, portando majoritariamente a parte imaginária dos símbolos. Mais especificamente,

$$y_R[n] = \sqrt{2} \cos(2\pi f_c T_s n) y[n],$$

$$y_I[n] = -\sqrt{2} \sin(2\pi f_c T_s n) y[n].$$

- **Etapla 2:** Esta etapa consiste em processar os sinais $y_R[n]$ e $y_I[n]$ de modo a obter as estimativas aproximadas \hat{Y}_m dos N_s símbolos transmitidos, assumindo o conhecimento de T_s , N_s , N e que $x[n]$ e $y[n]$ são temporalmente sincronizados.
- **Etapla 3:** Por fim, cada \hat{Y}_m é mapeado para o símbolo $S \in \mathcal{S}_{4QAM}$ mais próximo, em termos da distância Euclidiana. Matematicamente,

$$\hat{X}_m = \min_{S \in \mathcal{S}_{4QAM}} |S - \hat{Y}_m|, \quad \forall m,$$

em que $|\cdot|$ é a magnitude de um número complexo. A estimativa \hat{X}_m é então usada como entrada pelo sistema controlador para atualizar a velocidade do drone.

O comportamento esperado do sistema modulador é tal que haja uma “nuvem” de estimativas aproximadas de símbolos em torno de cada símbolo da constelação da modulação, como mostrado na Figura 4. O fenômeno da

“nuvem” é inerente ao processo de recepção devido ao ruído aditivo. Além disso, o processamento do sinal na **Etapa 2 do Sistema Demodulador** também pode inserir distorções, a depender de como o processamento é feito.

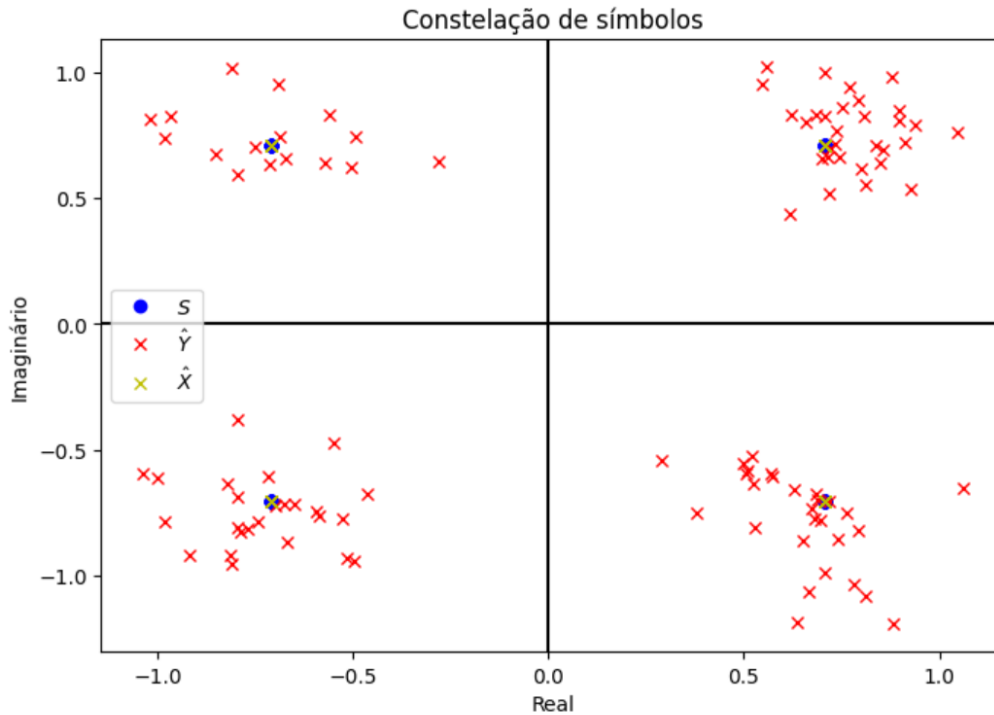


Figura 4. Exemplo do mapeamento de símbolos recebidos em símbolos da constelação da modulação 4-QAM.

Descrição do problema

Após uma série de testes em laboratório, a equipe de engenharia responsável pelo **Sistema Demodulador** identificou o seguinte problema: As estimativas \hat{X} dos símbolos de informação estão com alta taxa de erro de símbolo SER. Por definição, a SER mede quantas vezes o símbolo demodulado \hat{X} foi diferente do símbolo transmitido X em uma sequência de N_s símbolos transmitidos. Matematicamente, $SER = \frac{1}{N_s} \sum_{m=0}^{N_s-1} E_m$, em que:

$$E_m = \begin{cases} 1 & \hat{X}_m \neq X_m, \\ 0 & \hat{X}_m = X_m. \end{cases}$$

É desejável que a SER seja a mais próxima possível de zero. Afinal, um erro de símbolo pode levar o sistema controlador a executar um comando errôneo.

Uma revisão técnica da **Etapa 2 do Sistema Demodulador** indicou que o processamento dos sinais $y_R[n]$ e $y_I[n]$ está inoperante, sendo necessário então o desenho de um novo sistema linear e invariante no tempo (LIT), de tempo discreto, que processe corretamente $y_R[n]$ e $y_I[n]$ e reduza a SER.

Orientações

- A **Etapa 2** do **Sistema Demodulador** pode ser composta por múltiplos sistemas LIT interconectados com o objetivo de obter a sequência de N_s símbolos \hat{Y}_m .
- Se cabível, opte por sistemas com resposta ao impulso finita, prezando por uma solução simples, que atenda ao objetivo e esteja dentro do escopo da disciplina.
- Baseado na fundamentação teórica, identifique o que deve ser filtrado de $y_R[n]$ e $y_I[n]$, e escolha os sistemas LIT adequados para tal. Justifique todas as escolhas com a descrição matemática pertinente, o diagrama de blocos resultante, os gráficos relevantes no tempo e na frequência, etc.
- Tudo deve ser documentado em um **Relatório Técnico**.
- Para guiar o projeto dos sistemas LIT, é disponibilizado amostras de um sinal de referência $y[n]$ com a especificação dos parâmetros $N = 21$, $N_s = 100$ e $f_c = 1000$ Hz. Além disso, para validar o processamento da **Etapa 2**, considere que os símbolos portados pelo sinal de referência $y[n]$ levam à coordenada final $(87,5700, -273,7615)$ assumindo:
 - Coordenada inicial $(0, 0)$;
 - Velocidade inicial $v_x = 0$ e $v_y = 2$;
 - $\tau = 1$ e $\alpha = 0,5$.
- Mostre graficamente a trajetória do drone no plano XY em função das coordenadas calculadas a partir dos símbolos demodulados.
- É necessário implementar um **Código em linguagem Python** para:
 - Carregar o arquivo CSV contendo o sinal e referência $y[n]$ como um “Numpy Array”;
 - Executar as três etapas do Sistema Demodulador e calcular as coordenadas do drone a partir das equações de atualização das coordenadas.

Entrega: 18/01/2026 via SIGAA (arquivo compactado com o relatório e o código em Python).
