Notação *o*

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:

Notação *o*

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
  - Ser assintoticamente restrito;

Notação *o*

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
  - Ser assintoticamente restrito;
  - Não ser assintoticamente restrito;

Notação *o*

- O limite assintótico superior fornecido pela notação O (ó-zão) pode:
  - Ser assintoticamente restrito;
  - Não ser assintoticamente restrito;

- Exemplos:
  - Assintoticamente restrito: $2 \cdot n^2 \in O(n^2)$

  - Não assintoticamente restrito: $2n \in O(n^2)$

$$\log(n) \in O(c^n)$$

Notação *o*

- Todas as funções de O (ó-zão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho)

Notação *o*

- **Todas as funções de O** (ó-zão) <u>que não definem</u> um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho)

$$se\ \ f(n) \in O(g(n))\, e\, f(n) \notin \Omega(g(n))\, entao$$
$$f(n) \in o(g(n))$$

Notação *o*

- **Todas as funções de O** (ó-zão) <u>que não definem</u> um limite assintoticamente restrito pertencem a "o" (ó-zinho)

$$se\ \ f(n) \in O(g(n))\, e\, f(n) \notin \Omega(g(n))\, entao$$

$$f(n) \in o(g(n))$$

$$2n \in o(n^2)$$

$$\log(n) \in o(n)$$

Notação *o*

$$o(g(n)) = \{f(n): \ \forall c > 0, \exists \, n_0 \ > 0$$

$$| \ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \quad \forall \quad n \geq n_0 \}$$

- Comparativo com a notação O;

Não é <=, é somente <

$$f(n) \in O(g(n)), \text{o limite } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ se mantém válido}$$

$$\text{para alguma constante c} > 0$$

$$f(n) \in o(g(n)), \text{o limite } 0 \leq f(n) < cg(n) \text{ é válido}$$

$$\text{para todas as constantes c} > 0$$

Notação *o*

- Facilitando o entendimento...

Se $f(n) \in o(g(n))$ então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Notação ω

- O limite assintótico inferior fornecido pela notação Ω (omega-zão) pode:
  - Ser assintoticamente restrito;
  - Não ser assintoticamente restrito;

- Exemplos:
  - Assintoticamente restrito: $2 \cdot n^3 \in \Omega(n)$

  - Não assintoticamente restrito: $2 \cdot n^2 \in \Omega(n^2)$

Notação ω

- Todas as funções de Ω (omegazão) que não definem um limite assintoticamente restrito pertencem a ω

$$se \ \ f(n) \notin O(g(n)) \, e \, f(n) \in \Omega(g(n)) \, entao$$
$$f(n) \in \omega(g(n))$$

$$2n^2 \in \omega(1)$$
$$2n \in \omega(\log(n))$$

Notação ω

$$\omega(g(n)) = \{f(n): \quad \forall c > 0, \exists\, n_0 > 0 \\ \mid 0 \le c \cdot g(n) < f(n) \quad \forall \quad n \ge n_0\}$$

Não é <=, é somente <

Notação ω

- Facilitando o entendimento...

$$\text{Se } f(n) \in \omega(g(n)) \text{ então}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

PARA SIMPLIFICAÇÃO DE ARGUMENTAÇÃO NA AVALIAÇÃO DA COMPLEXIDADE DE UM ALGORITMO. Por exemplo, suponha que você tenha um algoritmo composto de duas partes em sequência, como abaixo, e esteja determinando sua complexidade de pior caso. Suponha ainda que você saiba que a "Parte 2" tem complexidade $\Theta(n\ log(n))$, mas que a parte 1 seja difícil de avaliar. Você não tem certeza se ela é $\Theta(n)$ ou $\Theta(n\ log(n))$. Ou ainda, você pode até saber que a complexidade é $\Theta(n)$, mas isto é difícil de provar.

Algo (n)
Parte 1; // ??? $\Theta(n)$ ou $\Theta(n\ log(n))$???
Parte 2; // $\Theta(n\ log(n))$

Ora, se você pensar um pouco, neste caso tanto faz $\Theta(n)$ ou $\Theta(n\ log(n))$! Porque na hora de somar as duas partes, prevalece a complexidade maior dentre as duas partes. Na verdade, é suficiente você anotar (note a mudança da notação para O (-):

Algo (n)
Parte 1; // O (n log (n))
Parte 2; // $\Theta(n\ log(n))$

O resultado da composição é, claramente $\Theta(n\ log(n))$.

Exercícios – V ou F

(a) $se\ f(n) \in \omega(g(n))\ entao\ f(n) \in \Omega(g(n))$

(b) $se\ f(n) \in \Omega(g(n))\ entao\ f(n) \in \omega(g(n))$

(c) $se\ f(n) \in o(g(n))\ entao\ f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$

(d) $se\ f(n) \in O(g(n))\ entao\ f(n) \in o(g(n))$

(e) $se\ f(n) \in \Theta(g(n))\ entao\ f(n) \in \mathrm{O}(g(n))$

(f) $se\ f(n) \in \Theta(g(n))\ entao\ f(n) \in \Omega(g(n))$

(g) $se\ f(n) \in \Theta(g(n))\ entao\ f(n) \in o(g(n))$

(h) $se\ f(n) \in \Theta(g(n))\ entao\ f(n) \in \omega(g(n))$

(i) $f(n) \in \omega(g(n))\ sse\ g(n) \in o(f(n))$

Limites para Comparar Ordens de Grandeza

O limite da razão das funções em questão pode levar a três casos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} := \begin{cases} 0, & f(n) \text{ tem ordem de grandeza menor que } g(n) \\ c > 0, & f(n) \text{ tem mesma ordem de grandeza que } g(n) \\ \infty, & f(n) \text{ tem ordem de grandeza maior que } g(n) \end{cases}$$

Caso tenhamos uma indeterminação da forma $\frac{\infty}{\infty}$, usamos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} := \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

Exemplo

Compare as ordens de grandeza de $\frac{1}{2}n(n-1)$ e n^2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como o limite é igual a uma constante positiva,

$$\frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$$

Comparação de funções

Muitas das propriedades relacionais de números reais também se aplicam a comparações assintóticas. No caso das propriedades seguintes, suponha que $f(n)$ e $g(n)$ sejam assintoticamente positivas.

Transitividade:

$$
\begin{array}{lclcl}
f(n) = \Theta(g(n)) & \text{e} & g(n) = \Theta(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \Theta(h(n)), \\
f(n) = O(g(n)) & \text{e} & g(n) = O(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = O(h(n)), \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \text{e} & g(n) = \Omega(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \Omega(h(n)), \\
f(n) = o(g(n)) & \text{e} & g(n) = o(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = o(h(n)), \\
f(n) = \omega(g(n)) & \text{e} & g(n) = \omega(h(n)) & \text{implicam} & f(n) = \omega(h(n)).
\end{array}
$$

Reflexividade:

$$f(n) = \Theta(f(n))$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$f(n) = \Omega(f(n))$$

Simetria:

$f(n) = \Theta(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Theta(f(n))$

Simetria de transposição:

$f(n) = O(g(n))$ se e somente se $g(n) = \Omega(f(n))$
$f(n) = o(g(n))$ se e somente se $g(n) = \omega(f(n))$

Pelo fato dessas propriedades se manterem válidas para notações assintóticas, é possível traçar uma analogia entre a comparação assintótica de duas funções f e g e a comparação de dois números reais a e b:

$$
\begin{array}{lcl}
f(n) = O(g(n)) & \approx & a \leq b, \\
f(n) = \Omega(g(n)) & \approx & a \geq b, \\
f(n) = \Theta(g(n)) & \approx & a = b, \\
f(n) = o(g(n)) & \approx & a < b, \\
f(n) = \omega(g(n)) & \approx & a > b.
\end{array}
$$

Dizemos que $f(n)$ é ***assintoticamente menor*** que $g(n)$ se $f(n) = o(g(n))$, e que $f(n)$ é ***assintoticamente maior*** que $g(n)$ se $f(n) = \omega(g(n))$.

Contudo, uma propriedade de números reais não é transportada para a notação assintótica:

Tricotomia: Para dois números reais quaisquer a e b, exatamente uma das propriedades a seguir deve ser válida: $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.

Atividades:

1) Considere as seguintes funções de complexidade:

$$n^3 + n^2\ log(n),\quad 2^n,\quad n!,\quad 3^n,\quad log(n) + n^3,\quad n^2,\quad 10 + n\ log(n),\quad 20 + log(n),\quad 6n\ log(n) + 6$$

Ordene-as em ordem de complexidade, separando-as por $<$ quando a da esquerda for de uma classe estritamente menor do que a da direita e por $=$ quando forem da mesma classe.
Por exemplo: $f1 < f2 = f3 < f4 = f5$ significa que: $f1 = O(f2)$ mas $f1 \neq \Theta(f2)$; $f2 = \Theta(f3)$; $f3 = O(f4)$ mas $f3 \neq \Theta(f4)$; $f4 = \Theta(f5)$

2) Avalie assintoticamente as expressões abaixo usando as notações pertinentes dentre as seguintes: Θ, O e Ω. Caracterize completamente cada caso, usando o menor número de notações possível em cada item. Quer dizer, alguns itens requerem o uso de apenas uma expressão de complexidade, enquanto que outros podem precisar do uso de mais de uma notação. Use o mínimo possível.

(a) $O(n) + \Theta(n\ log(n))$

(b) $O(n\ log(n)) + \Theta(n)$

(c) $\Omega(n) + \Theta(n^2) + O(n^3)$

(d) $\Omega(n) + O(n^2) + \Theta(n^3)$