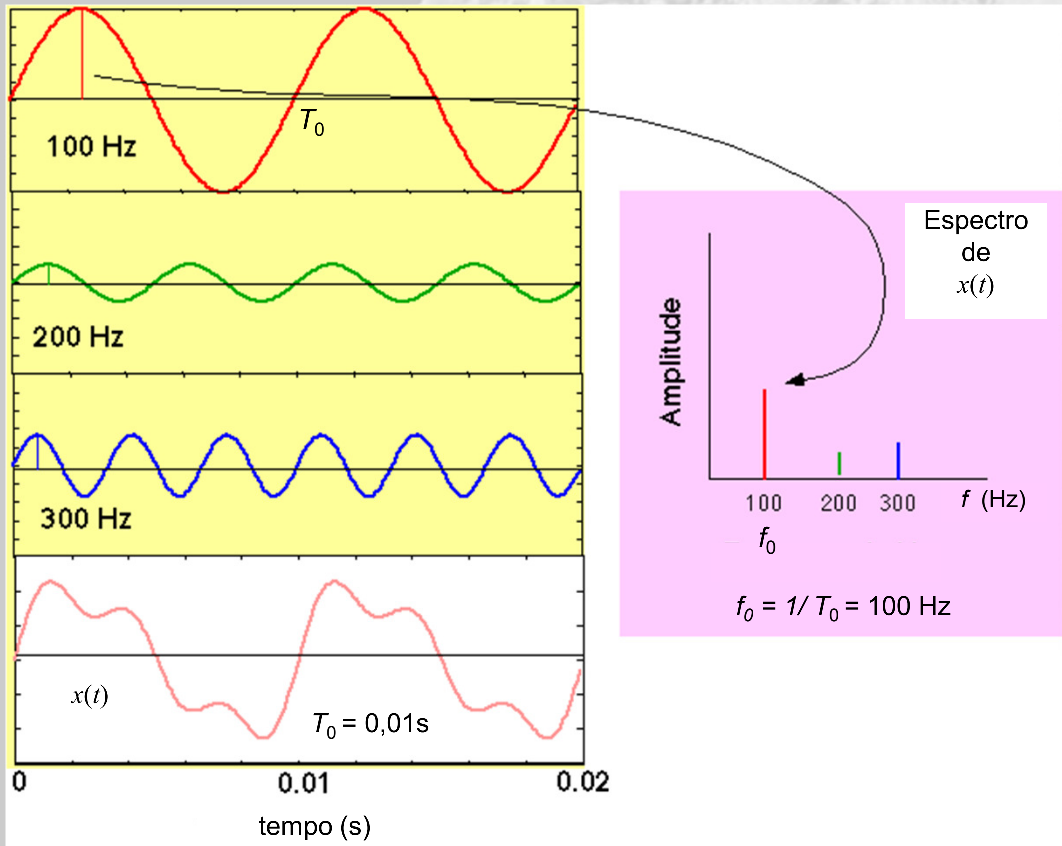
Análise de Fourier



Prof. Cláudio A. Fleury

Conteúdo

1. Introdução
2. **Série de Fourier**
3. Representação de Sinais Periódicos
4. **Transformada de Fourier**
5. Propriedades da Transformada de Fourier
6. Transformada de Fourier Inversa
7. **Resposta em Frequência** de Sistemas LITC

1. Introdução

- Transformações para o Domínio da Frequência (espectro) são representações alternativas para se conhecer outras características de sinais e SLITC's, além da causalidade e estabilidade
- Como a Transformada de Laplace, a de Fourier também é um operador linear muito útil à análise de SLITC's
- Análise de Fourier: abordagens quanto ao Tipo do Sinal no tempo
  - Periódico: Série de Fourier
  - Não Periódico: Transformada de Fourier

2. Série de Fourier Trigonométrica

Definição

em senos e cossenos

- Representação de um Sinal Periódico $x(t)$ com período fundamental T_0 em Série de Fourier Trigonométrica

Coeficientes Trigonométricos da Série de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \operatorname{sen} k\omega_0 t), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Eq. de Síntese

onde:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \operatorname{sen}(k\omega_0 t)\, dt$$

Eq.s de Análise

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\, dt$$

Valor Médio

- Efeito da simetria temporal:

Se $x(t)$ é ímpar → $a_k = 0$

Se $x(t)$ é par → $b_k = 0$

Exemplo 1

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<\pi\\ -1 & \pi\le t<2\pi\end{cases}$$

Sinal periódico com
$T_0 = 2\pi$ s, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$ rad/s

Como $x(t)$ é um sinal ímpar, então:

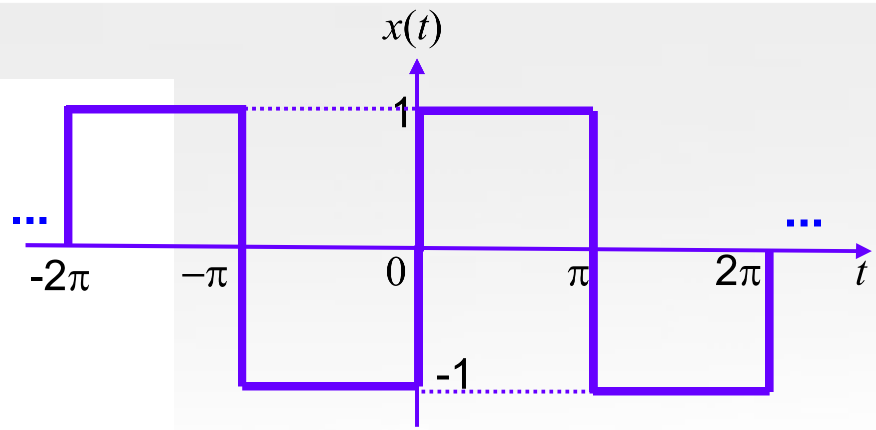
$$a_k = 0, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(kt)dt - \int_{\pi}^{2\pi}\operatorname{sen}(kt)dt\right]$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[-\cos(kt)\Big|_0^{\pi} + \cos(kt)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[-\cos(k\pi)+\cos(k.0)+\cos(k2\pi)-\cos(k\pi)\right]$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases}\dfrac{4}{k\pi}, & k \text{ ímpar}\\ 0, & k \text{ par}\end{cases}$$



Eq. de Síntese

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\operatorname{sen}(k\omega_0 t)$$

Eq.s de Análise

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\operatorname{sen}(k\omega_0 t)dt$$

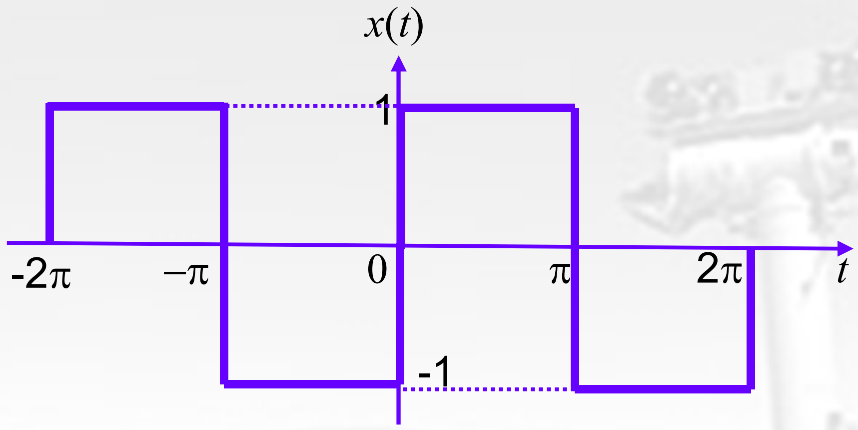
$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

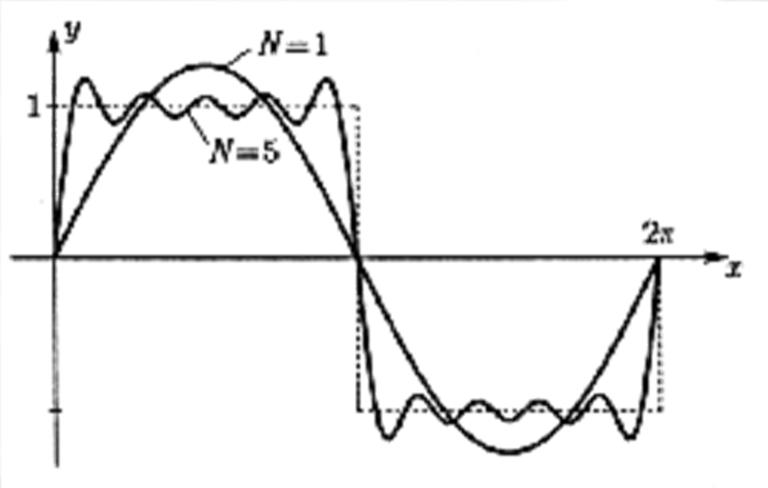
Como o sinal $x(t)$ tem média nula, então: $a_0 = 0$

Logo: $$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{1} + \frac{\operatorname{sen}(3t)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5t)}{5} + \cdots\right)$$

Exemplo 1

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

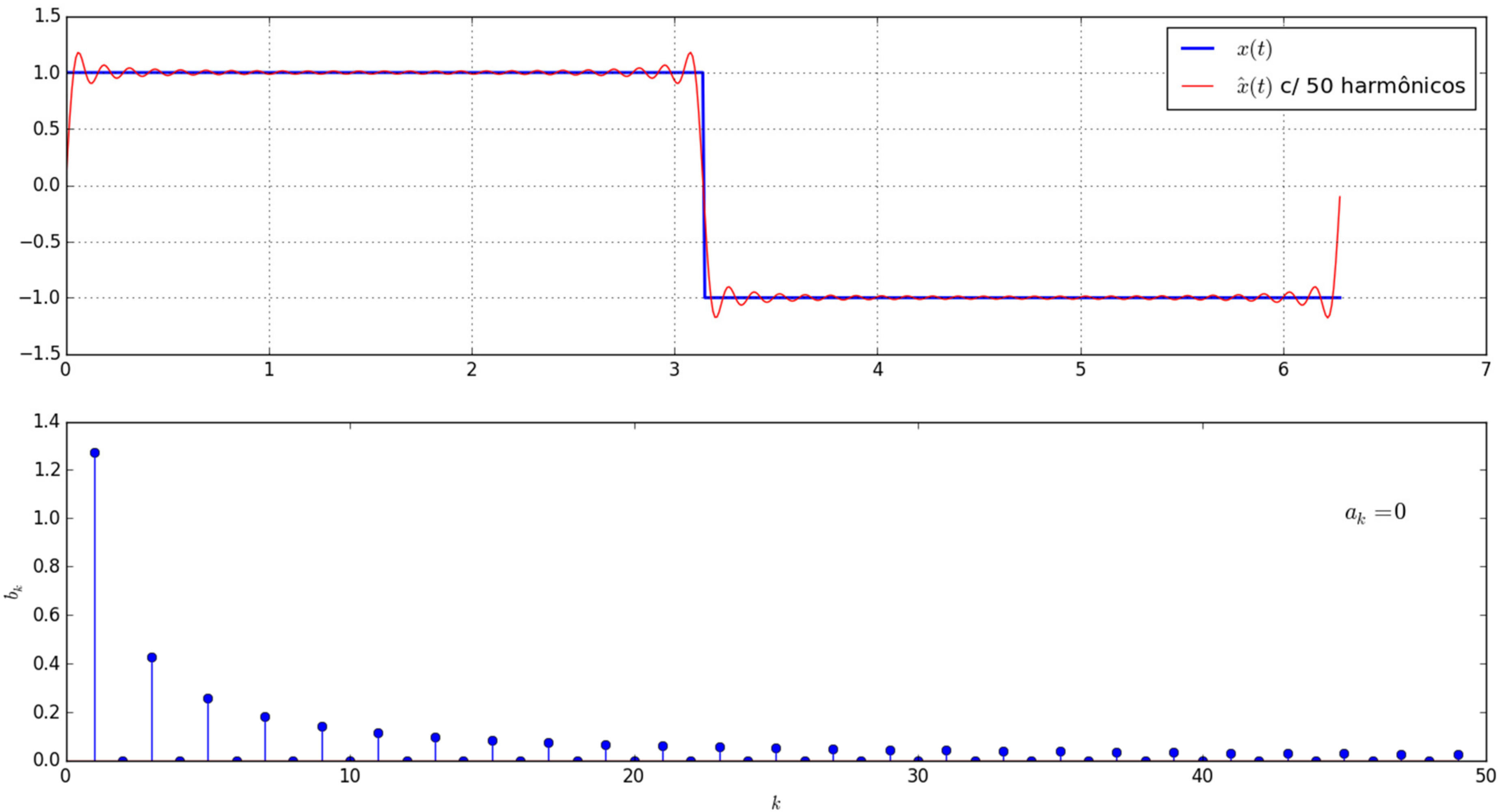





```
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Espectro de frequências - Exemplo 1 (slide 7)
@author: kaw, Out/2015 """
from numpy import arange, pi, zeros, nan, sin
from matplotlib.pylab import (subplot, plot, stem,
           ylim, text, grid, legend, xlabel, ylabel)

omega0 = 1 # rad/s
t = arange(0,2*pi,0.01)
x = (t<pi) + (t>pi)*(-1.)
subplot(211); plot(t,x,lw=2); grid(True);ylim(-1.5,1.5)

a = zeros(50)
b = a[:]; b[0] = nan
for k in arange(1,50,2):
    b[k] = 4./k/pi

subplot(212); stem(arange(50),b,'b');
text(45,1.,r'$a_k = 0$', fontsize=16)
ylabel(r'$b_k$'); xlabel('$k$')

x_hat = zeros(x.size)
for k in arange(1,50):
    x_hat += b[k]*sin(k*omega0*t)
subplot(211); plot(t,x_hat,'r')
legend((r'$x(t)$',u'$\^x(t)$ c/ 50 harmônicos'))
```

Exemplo 1

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

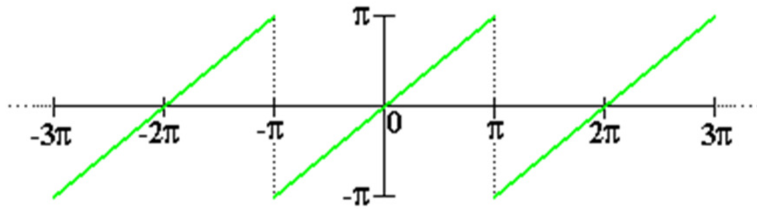


- Sinal Dente de Serra: $x(t) = t, \quad [-\pi,\pi]$

Exemplo 2

Sinal periódico com $T_0 = 2\pi$ s, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1$ rad/s

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \,\mathrm{sen}(k\omega_0 t)$$

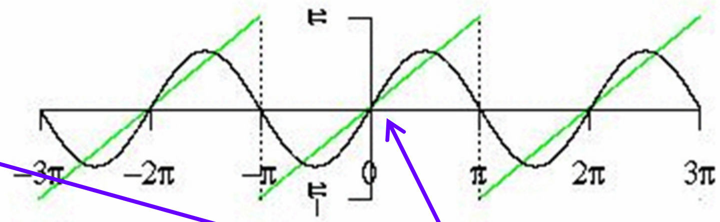


$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\mathrm{sen}(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\,\mathrm{sen}(kt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\mathrm{sen}(kt)}{k^2} - \frac{t.\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(\left[\frac{0-0}{k} - (\pi.\cos(k\pi) - 0)\right]_0^{\pi}\right) = 2\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$



Simetria ímpar

$$\boxed{x(t) = 2\left(\mathrm{sen}(t) - \frac{\mathrm{sen}(2t)}{2} + \frac{\mathrm{sen}(3t)}{3} - \frac{\mathrm{sen}(4t)}{4} + \frac{\mathrm{sen}(5t)}{5} - \cdots\right)}$$

2. Série de Fourier Exponencial Complexa

Definição em exponenciais complexas

- Representação em Série de Fourier Exponencial Complexa de um Sinal Periódico $x(t)$ com período fundamental $T_0 = 2\pi / \omega_0$

Coeficientes Complexos da Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$$

Eq. de Síntese

$$\text{onde}: \; D_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Eq. de Análise

$$\text{para}: \; -\infty < k < \infty$$

- Valor médio de $x(t)$ em um período:

$$\text{fazendo } k = 0: \quad D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) dt$$

Valor Médio

- Para $x(t)$ real: $D_{-k} = D_k^*$ → conjugado complexo

Exemplo 3

Coeficientes da Série de Fourier Exponencial do sinal $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

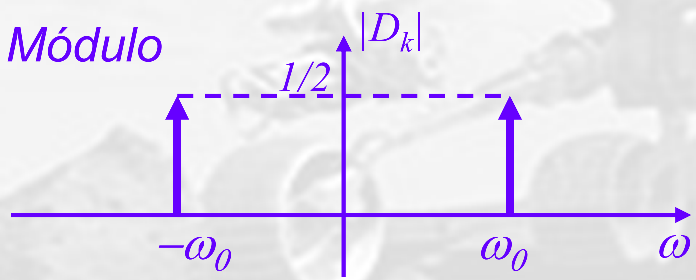
$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

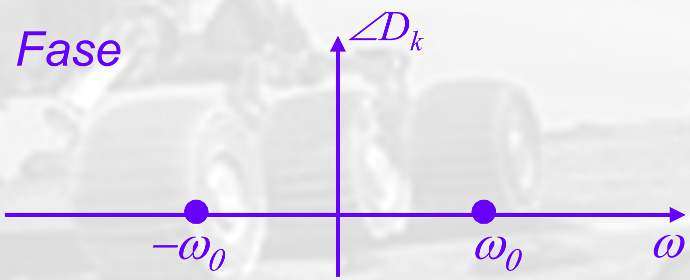
Vamos usar a Fórmula de Euler, ao invés da definição :

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$$

Assim, por inspeção vemos que os coeficientes da Série de Fourier Exponencial Complexa são :

$$D_1 = \frac{1}{2} \qquad D_{-1} = \frac{1}{2} \qquad D_k = 0,\ |k| \neq 1$$





Exemplo 4

Coeficientes da Série de Fourier Exponencial do sinal $x(t) = \mathbf{sen}(\boldsymbol{\omega_0} \, \boldsymbol{t})$

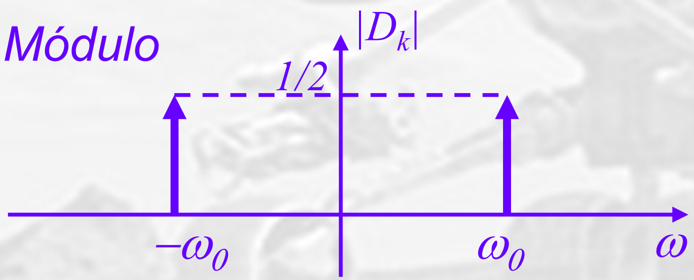
$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t)$$

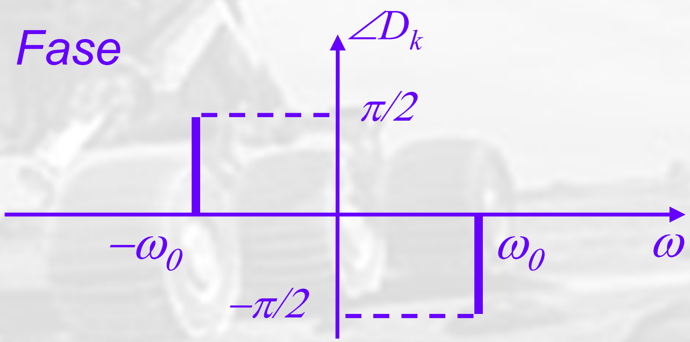
Ao invés de usarmos a definição, vamos usar a Fórmula de Euler :

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}$$

Assim, os coeficientes da Série de Fourier Exponencial Complexa são :

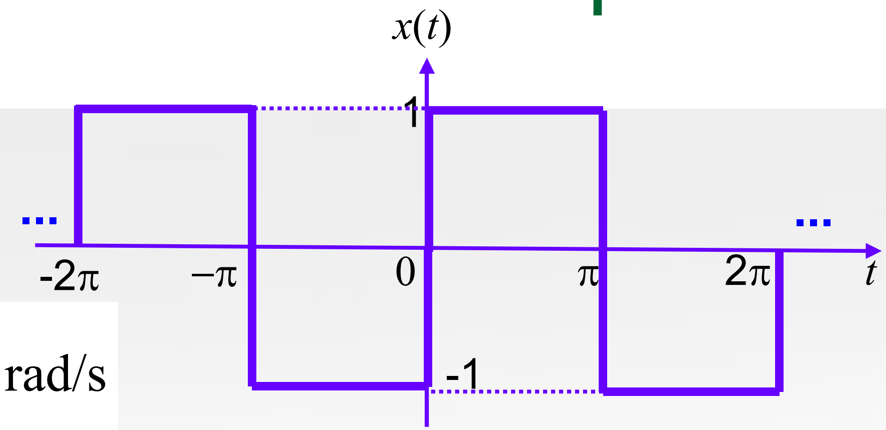
$$D_1 = \frac{1}{2j} \qquad D_{-1} = -\frac{1}{2j} \qquad D_k = 0, \; |k| \neq 1$$





Exemplo 6

Sinal periódico com $T_0=2\pi$



Ver Exempo 1 (slide 7)

$$\boxed{x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<\pi\\ -1 & \pi\le t<2\pi\end{cases}}$$

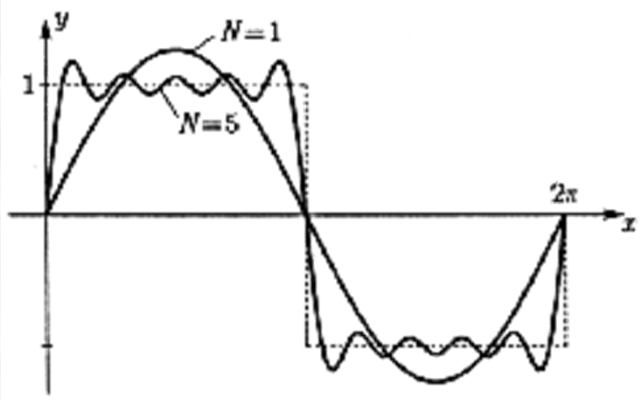
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}D_k e^{jk\omega_0 t},\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}=\frac{2\pi}{2\pi}=1\ \text{rad/s}$$

$$D_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2\pi}\left[2\int_0^{\pi}1.e^{-jkt}dt\right]$$

$$D_k=\frac{2}{-jk2\pi}\left[\left(e^{-jk\pi}-1\right)\right]=\frac{1}{jk\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$

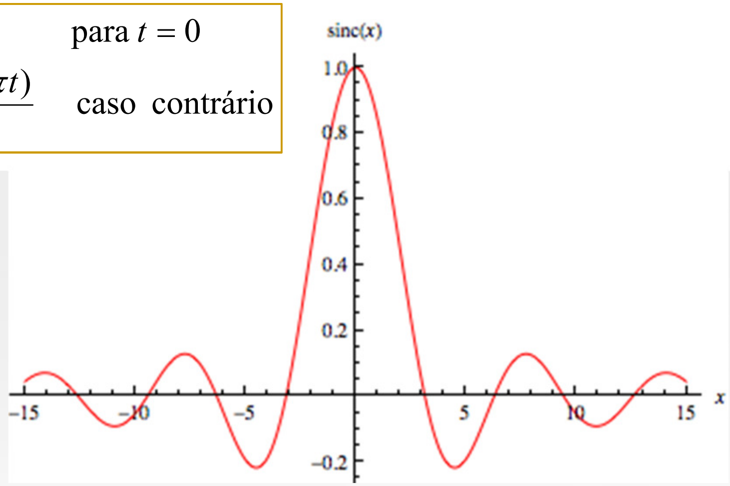
$$D_k=\begin{cases}\dfrac{2}{jk\pi}, & \text{para } k \text{ ímpar}\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{2}{j\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}e^{jkt},\qquad \text{para } k \text{ ímpar}$$

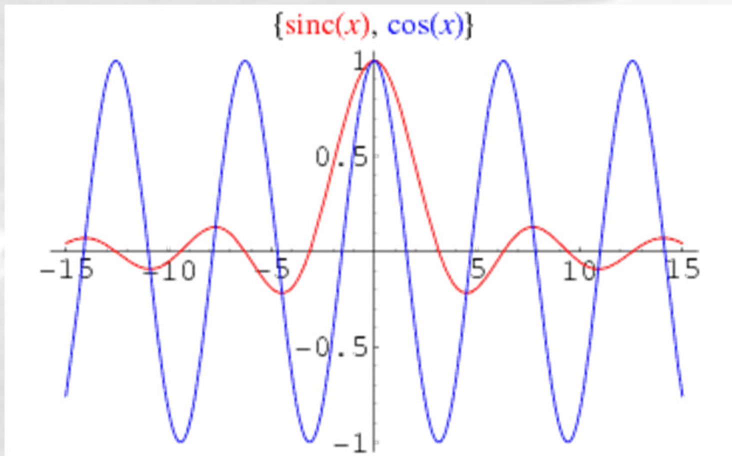


Sinal sinc(t)

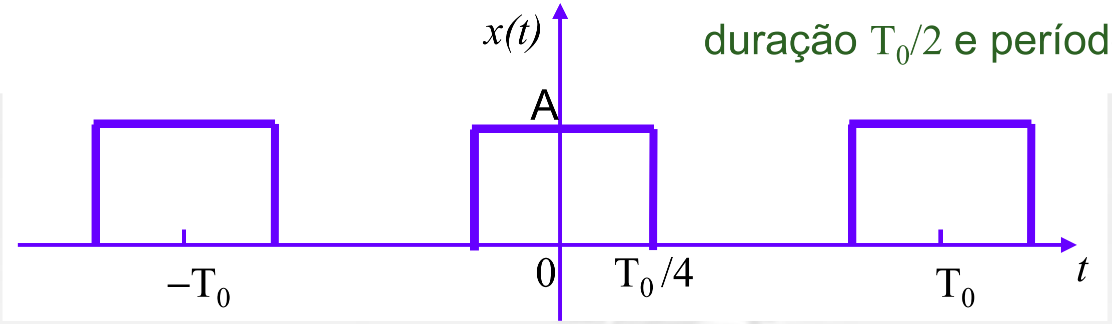
$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t = 0 \\ \dfrac{sen(\pi t)}{\pi t} & \text{caso contrário} \end{cases}$$



- Função Amostragem ou Seno Amortecido
- Etimologia: ***sin**e **c**ardinal* (seno principal)
- Normalização: $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)dt = \pi$
- Propriedades
  - Um conjunto de **máximos absolutos** locais correspondem às interseções com a função cosseno
  - Derivada: $\dfrac{d}{dt}\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\cos(\pi t)}{\pi t} - \dfrac{\mathrm{sen}(\pi t)}{(\pi t)^2}$



Sinal Trem de Pulsos Retangulares Exemplo 7



duração $T_0/2$ e período T_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/4}^{T_0/4} Ae^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$D_k = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{jk\omega_0 T_0/4}\right) = \frac{A}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}\right)$$

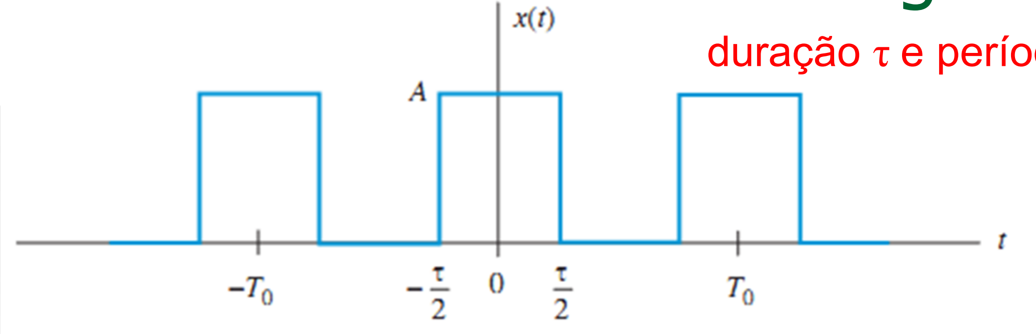
$$D_k = \frac{A}{k\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{A}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$D_k = \begin{cases} 0 & \text{para } k = 2m \neq 0 \\ (-1)^m \dfrac{A}{k\pi} & \text{para } k = 2m+1 \\ \dfrac{A}{2} & \text{para } k = 0 \end{cases}$$

A função **sinc(t) = sen(πt)/(πt)** é chamada de seno amortecido (do latim: *sinus cardinalis*) e é conhecida também por função Interpolação ou função Filtragem

Sinal Trem de Pulsos Retangulares   Exemplo 7

duração τ e período T_0



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$D_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$D_k = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}\left(e^{-jk\omega_0 \tau/2} - e^{jk\omega_0 \tau/2}\right) = \frac{A}{k\pi f_0 T_0}\left(\frac{e^{jk\pi f_0 \tau} - e^{-jk\pi f_0 \tau}}{j2}\right)$$

$$D_k = \frac{A}{k\pi f_0 T_0}\operatorname{sen}(k\pi f_0 \tau) = \frac{A\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(k\pi f_0 \tau)$$

Os valores de D_k são obtidos pela avaliação da função $(A\tau/T_0).\mathrm{sen}(\varphi)/\varphi$ em pontos equidistantes $\varphi = k(\pi f_0 \tau)$.

Como: $\lim \varphi \to 0\ [\mathrm{sen}(\varphi)/\varphi] = 1$, temos $c_0 = A\tau/T_0$.
A função $\mathrm{sen}(\varphi)/\varphi$ tem **zeros** (cruzamentos no eixo horizontal) em múltiplos de π, ou seja, em $\varphi = m.\pi$, $m = 0, \pm1, \pm2, ...$
Os **zeros** ocorrem em $\varphi = \pi F\tau = m.\pi$ ou $F = m/\tau$.

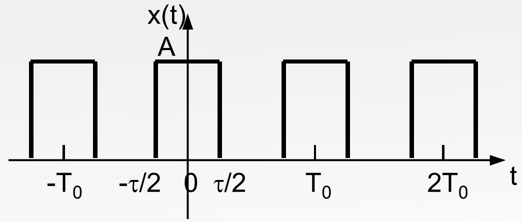
O espaçamento $F = 1/\tau$ entre os **zeros** da função é determinado pela largura τ do pulso, enquanto o espaçamento $f_0 = 1/T_0$ entre as linhas espectrais é determinada pelo período fundamental T_0 do sinal de trem de pulsos retangulares.

Exemplo 8

$$D_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T_0}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$D_k = \frac{A\tau}{T_0}\left[\frac{\text{sen}(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}\right] = \frac{A\tau}{T_0}\text{sinc}(k\omega_0\tau/2)$$

- Sinal Trem de Pulsos



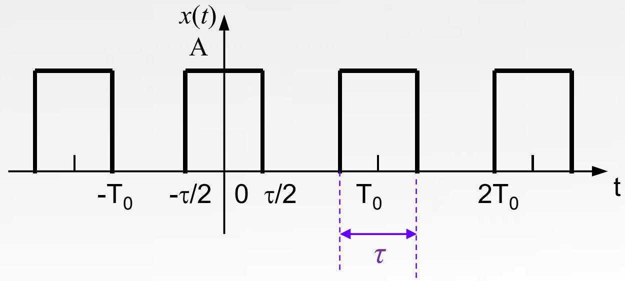

```
% Espectro de linha de um TREM DE PULSOS RETANGULARES de amplitude A
% Por ser um sinal de simetria par, os coeficientes de Fourier são reais
A = 1;                                      % amplitude dos pulsos
T0 = 0.25                                   % período do sinal
taus = [5 10 20].* (T0/100)                 % duty cicle
k = -20:20;                                 % harmonicos considerados
w0=2*pi/T0;                                 % freq. angular
for i=1:3
    c = sinc(k*(w0*taus(i)/2)).*(taus(i)/T0); % coefic.s da Série de Fourier
    subplot(1,3,i), stem(k,c)
    xlabel(sprintf('taus = %3.1f ms',taus(i)*1000));
end
set(gcf, 'Name', 'Espectro de Frequencia do sinal TREM DE PULSOS',...
        'NumberTitle','off','MenuBar','none');
```

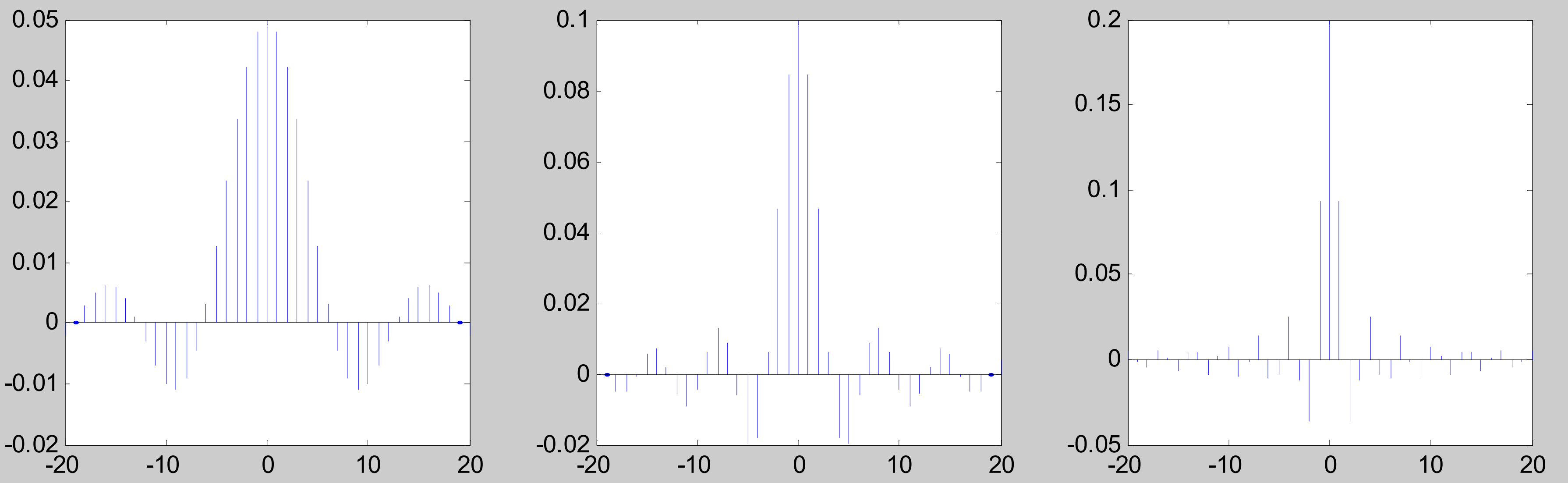
Exemplo 8

$$D_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$D_k = \frac{A\tau}{T_0}\left[\frac{\operatorname{sen}(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0\tau/2}\right] = \frac{A\tau}{T_0}\operatorname{sinc}(k\omega_0\tau/2)$$

- Sinal Trem de Pulsos

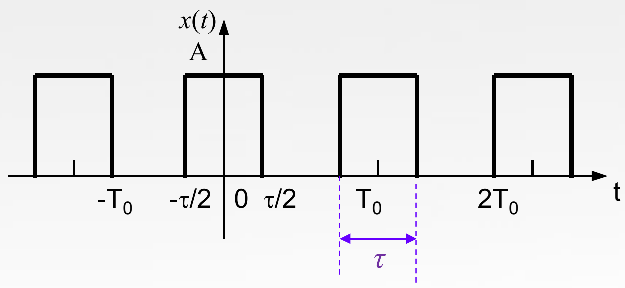




Coeficientes D_k para: $A=1$ e $T_0=0{,}25s$ → $\omega_0=8\pi$ rad/s e: $\tau_1=5\%T_0$, $\tau_2=10\%T_0$, $\tau_3=20\%T_0$

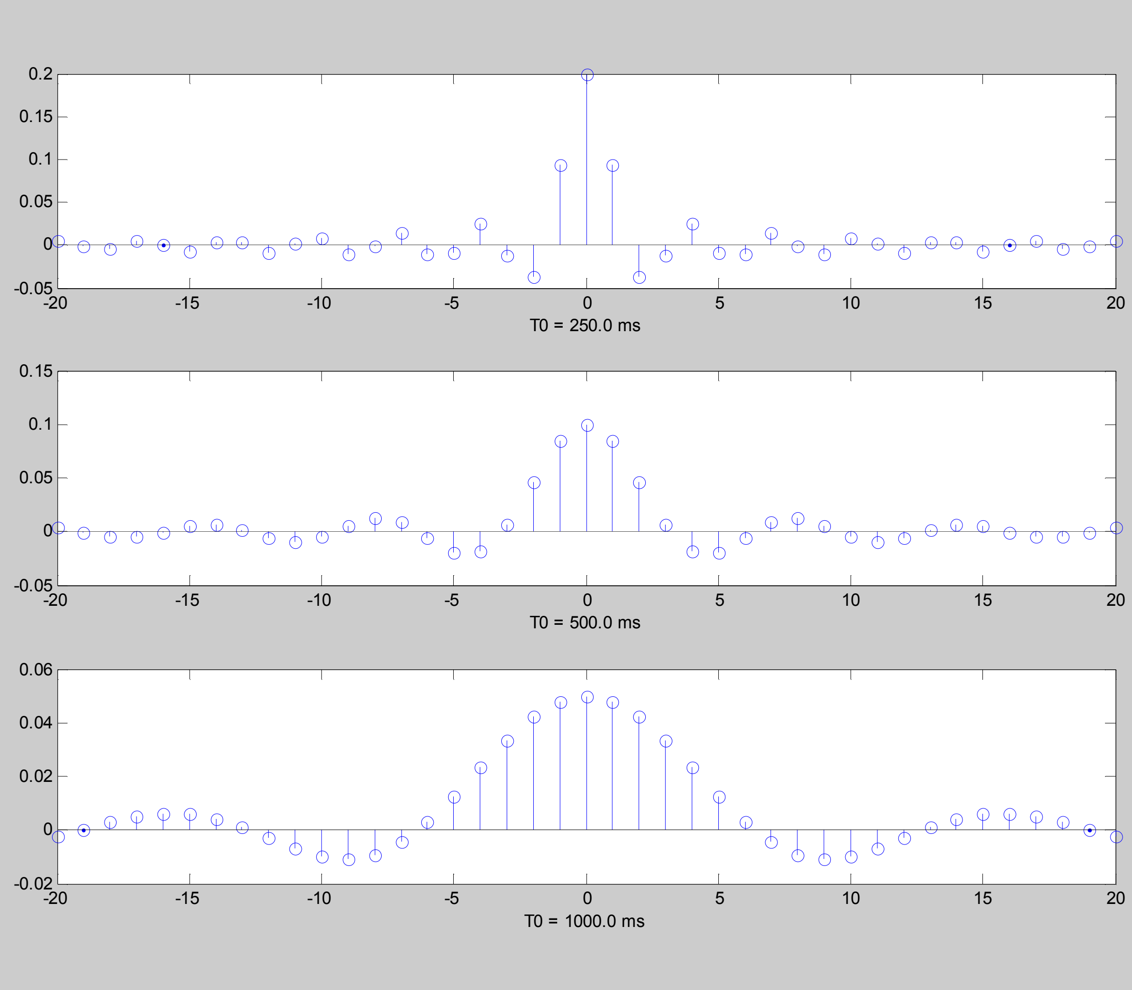
Exemplo 8

- Sinal Trem de Pulsos

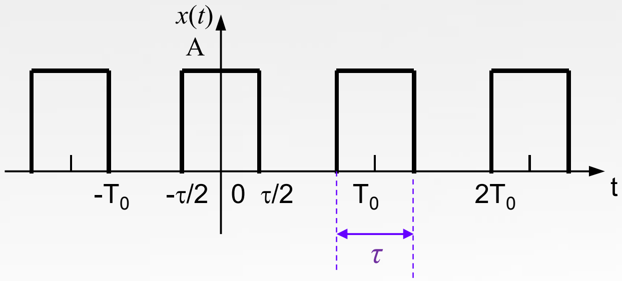



```
% Espectro de linha de um TREM DE PULSOS RETANGULARES de amplitude A
% Por ser um sinal de simetria par, os coeficientes de Fourier são reais
A = 1;                                  % amplitude dos pulsos
taus = 50e-3;                           % duty cicle
T0 = [5 10 20]*taus;                    % período do sinal
k = -20:20;                             % harmonicos considerados
w0=2*pi./T0;                            % freq. angular
for i=1:3
    c = sinc(k*(w0(i)*taus/2)).*(taus/T0(i)); % coefic.s da Série de Fourier
    subplot(3,1,i), stem(k,c)
    xlabel(sprintf('T0 = %3.1f ms',T0(i)*1000));
end
set(gcf, 'Name', 'Espectro de Frequencia do sinal TREM DE PULSOS',...
         'NumberTitle','off','MenuBar','none');
```

Exemplo 8



- Sinal Trem de Pulsos



O espaçamento entre as linhas espectrais decresce quando T_0 aumenta, mantendo fixo τ

3. Convergência da Série de Fourier

- Condições de ***Dirichlet***

  A série de Fourier existirá se:

  - $x(t)$ for absolutamente integrável no intervalo de um período
  - $x(t)$ tiver um número finito de máximos e mínimos dentro de um intervalo de tempo
  - $x(t)$ tem um número finito de descontinuidades dentro de qualquer intervalo de tempo

- Essas condições são **suficientes** para a convergência[1] da série de Fourier, mas não são **necessárias**!!!

[1] Convergência em termos do erro quadrático médio: se $x_m(t) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{jk\Omega_0 t}$ então $\lim_{m\to\infty} \int_{T_0} |x(t) - x_m(t)|^2 dt = 0.$

Potência Média

- Potência média de um sinal periódico ***x(t)***

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt$$

- **Teorema de Parseval** (sinal de potência, periódico)
  - Potência no Tempo X Potência na Frequência

$$\mathrm{P} = \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 \, dt}_{\text{Domínio do Tempo}} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |D_k|^2}_{\text{Domínio da Frequência}}$$

Transformada de Fourier

- A **Série de Fourier** nos permite representar um **sinal periódico** como uma soma de exponenciais complexas (senóides) e a obter o espectro de frequências a partir da série

- A **Transformada de Fourier** nos permite estender o conceito do espectro de frequências para **sinais não periódicos**

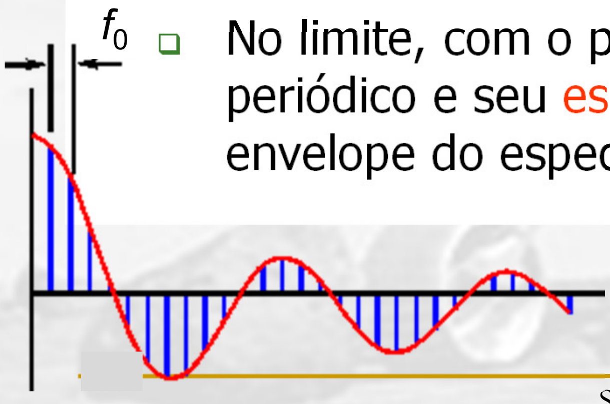
- A transformada assume que qualquer sinal não periódico pode ser visto como um sinal periódico com período infinito

- Portanto, a **Transformada de Fourier** é uma representação integral de um **sinal não periódico** que é análoga à representação em Série de Fourier de um sinal periódico

4. Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

Para sinais $x(t)$ não periódicos e de duração finita

- De Série de Fourier à Transformada de Fourier
  - Série de Fourier representa um sinal periódico como uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas
  - Sinais periódicos possuem espectro de linhas equidistantes. O espaçamento entre as linhas é a frequência fundamental f_0, que determina a quantidade de linhas do espectro por unidade de frequência
  - Se o período fundamental cresce de modo ilimitado (tende ao infinito), então o espaçamento entre as linhas tende a zero
  - No limite, com o período tendendo ao infinito, o sinal torna-se não periódico e seu espectro de linhas torna-se contínuo, resultando num envelope do espectro de linha do sinal periódico correspondente



Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

- Par de Transformadas de Fourier: $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$

$$X(\omega) = \Im\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t} dt$$

Eq. de Análise

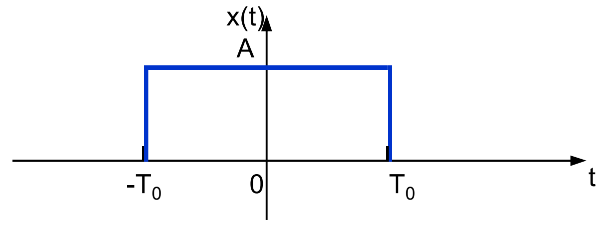
$$x(t) = \Im^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{j\omega t} d\omega$$

Eq. de Síntese

- Assim como nas **Séries**, também nas **Transformadas** de Fourier, se o sinal $x(t)$ satisfaz às **condições de Dirichlet** então a integral converge (existe a transformada)

Exemplo 9

- Sinal Janela Retangular
  (*boxcar, gate, window, ...*)



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).e^{-j\omega t}dt = \int_{-T_0}^{T_0} Ae^{-j\omega t}dt =$$

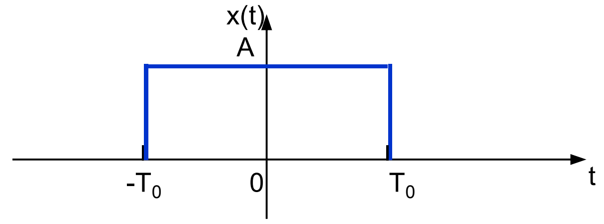
$$X(\omega) = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T_0}^{T_0} = \frac{-2A}{\omega}\left[\frac{e^{-j\omega T_0} - e^{j\omega T_0}}{j2}\right]$$

$$X(\omega) = A.2T_0\frac{\operatorname{sen}(\omega T_0)}{\omega.T_0} = \boxed{A.2T_0.\operatorname{sinc}(\omega T_0)}$$

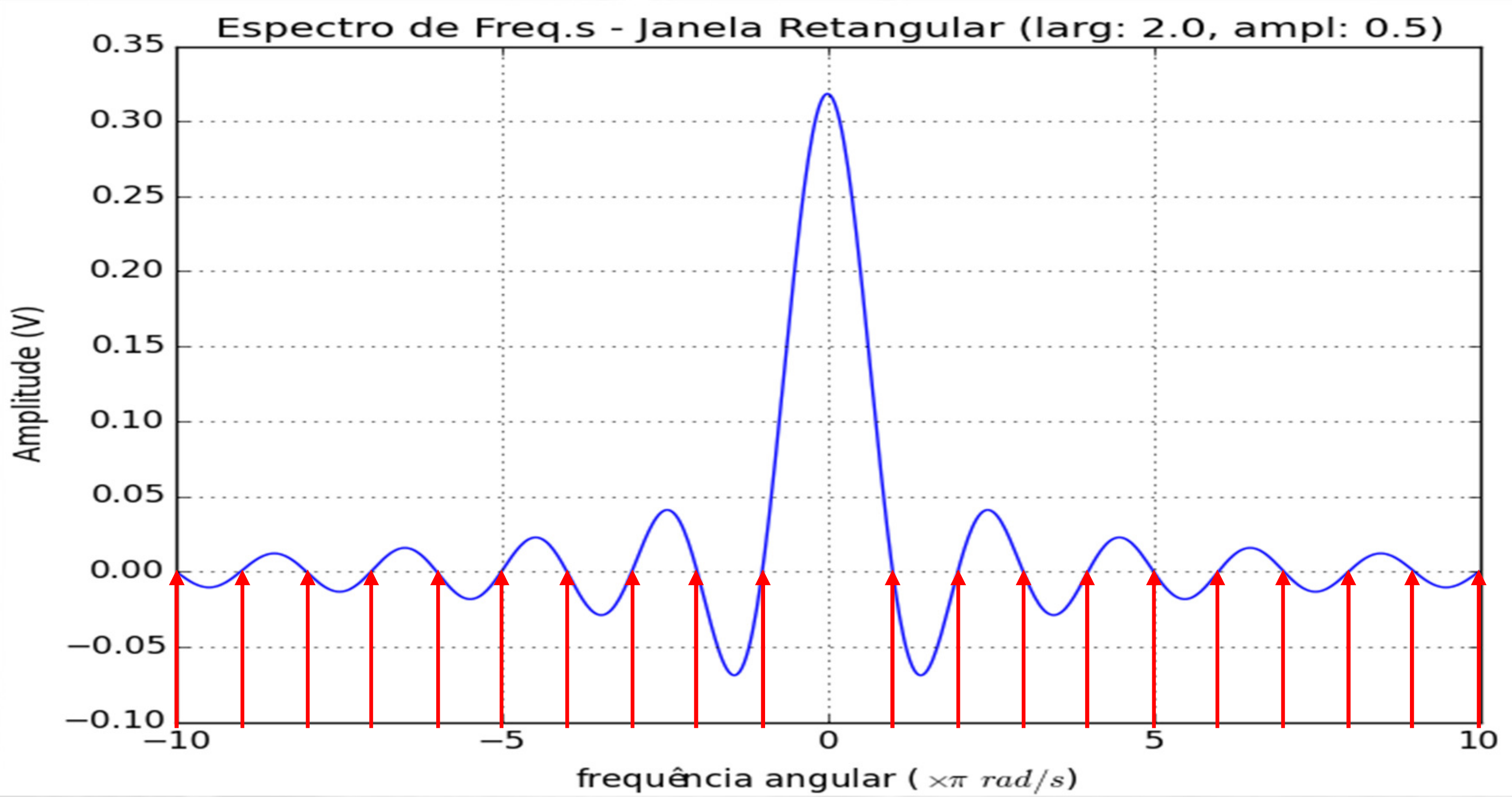
http://www.thefouriertransform.com/pairs/box.php

Exemplo 9

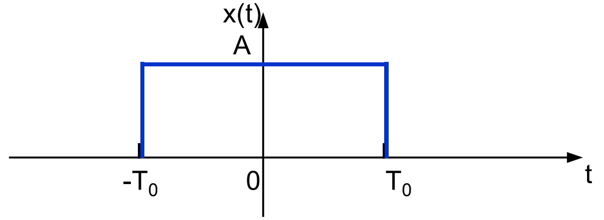
- Sinal Janela Retangular
  (*boxcar, gate, window*, ...)



- Espectro de Frequências



Exemplo 9

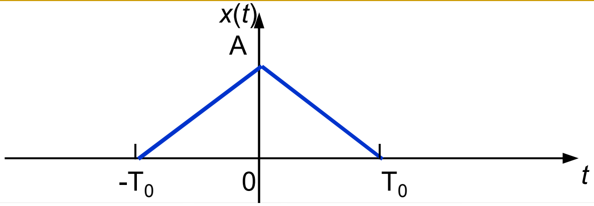


- Sinal Janela Retangular (*boxcar, gate, window*, ...)
- Espectro de Frequências

Script Python 2.7

```
# -*- coding: utf-8 -*-
""" Espectro de Freq.s de um sinal de tempo contínuo, Janela Retangular,
de largura 2.T0 (s) e amplitude A (V).
X(w) = A.2.T0.sinc(w.T0) (espectro real: gráfico de amplitude do espectro)
@author: Prof. Cláudio, 25/10/2016 """

from numpy import arange, pi, sinc   # sinc(x) = sen(pi.x)/(pi.x)
from pylab import plot, xlabel, ylabel, grid, title

A = .5                               # janela retangular de 0.5V de amplitude
T0 = .5                              # janela retangular de 1s de largura
w = arange(-10*pi,10*pi,0.1)         # faixa de frequência angular: -10pi a 10pi
X = A*2*T0*sinc(w*T0/pi)/pi          # espectro de frequências da janela retangular

plot(w/pi,X)
xlabel(u'frequência angular (' + r'$\times\pi\, rad/s$)')
ylabel('Amplitude (V)'); grid('on')
title('Espectro de Freq.s - Janela Retangular (larg: %3.1f, ampl:%3.1f)'%(2*T0,A))
```

Sinal Triangular



Exemplo 10

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t).e^{-j\omega t}dt=\int_{-T_0}^{0}\frac{A}{T_0}(t+T_0)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{T_0}\frac{A}{T_0}(-t+T_0)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega)=\frac{A}{T_0}\left[\int_{-T_0}^{0}te^{-j\omega t}dt+\int_{-T_0}^{0}T_0e^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{T_0}te^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{T_0}T_0e^{-j\omega t}dt\right]$$

Da Tabela de Integrais: $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}$ e $\int x.e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

Assim: $X(\omega)=\frac{A}{T_0}\left[\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}(-j\omega t-1)\Big|_{-T_0}^{0}+T_0\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-T_0}^{0}-\frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)^2}(-j\omega t-1)\Big|_{0}^{T_0}+T_0\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{0}^{T_0}\right]$

$$X(\omega)=\frac{A}{T_0}\left[\frac{-1-e^{j\omega T_0}(j\omega T_0-1)+e^{-j\omega T_0}(j\omega T_0+1)-1}{\omega^2}-\frac{T_0}{j\omega}(1-e^{j\omega T_0}+e^{-j\omega T_0}-1)\right]$$

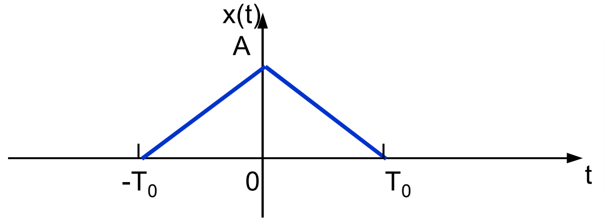
$$X(\omega)=\frac{A}{\omega T_0}\left[\frac{-2+j\omega T_0(e^{-j\omega T_0}-e^{j\omega T_0})+e^{j\omega T_0}+e^{-j\omega T_0}}{\omega}+2T_0sen(\omega T_0)\right]$$

$$X(\omega)=\frac{2A}{\omega^2T_0}\left[-1+\cos(\omega T_0)+3\omega T_0sen(\omega T_0)\right]$$

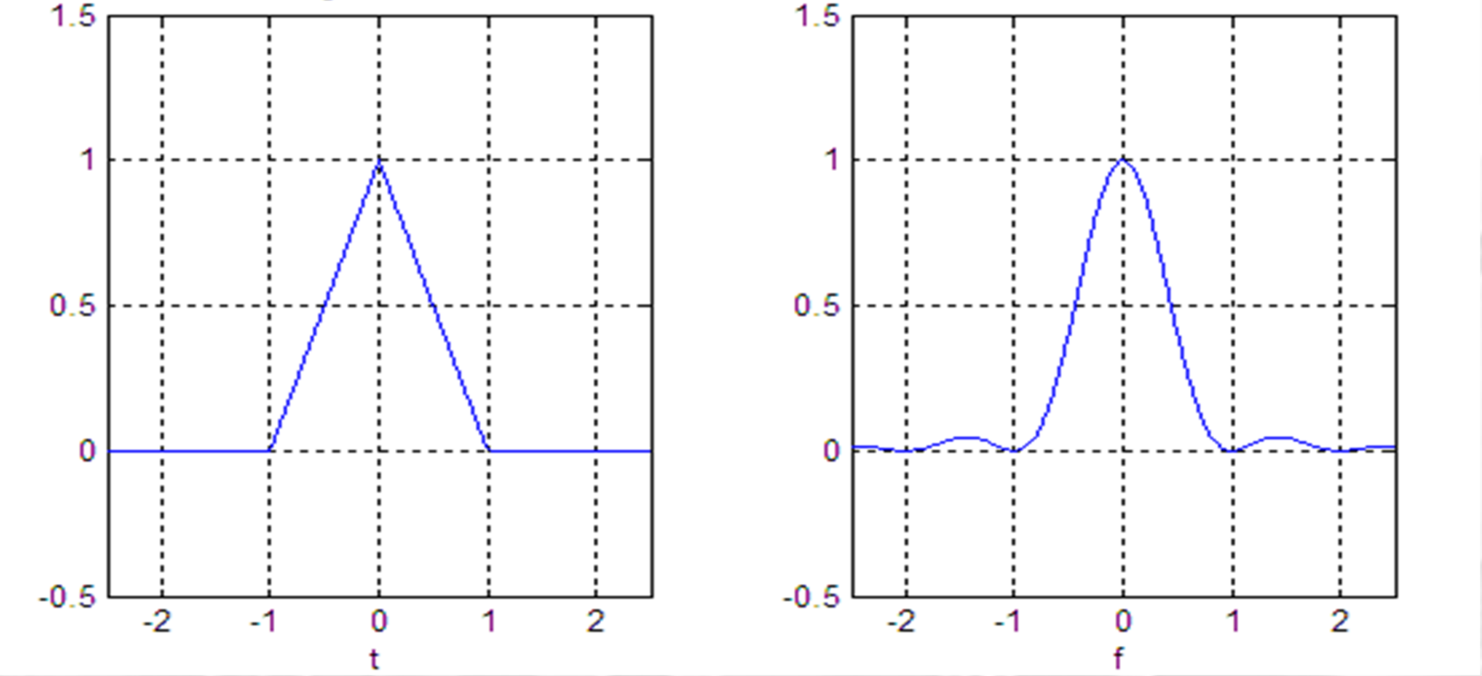
$$X(\omega)=A.2T_0\frac{\text{sen}^2(\omega T_0)}{\omega^2.T_0^2}=A.2T_0\left(\frac{\text{sen}(\omega T_0)}{\omega.T_0}\right)^2=\boxed{A.2T_0.\text{sinc}^2(\omega T_0)}$$

Exemplo 10

- Sinal Triangular



- Espectro de Frequências



http://www.thefouriertransform.com/pairs/triangle.php

Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

Propriedades

- Linearidade $\rightarrow$ $ax(t)+by(t) \leftrightarrow aX(\omega)+bY(\omega)$
- Inversão no Tempo e na Frequência $\rightarrow$ $x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$
- Diferenciação no Tempo $\rightarrow$ $\dfrac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega.X(\omega)$
- Diferenciação na Frequência $\rightarrow$ $-jt.x(t) \Leftrightarrow \dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$
- Deslocamento no Tempo $\rightarrow$ $x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-jt_0\omega}X(\omega)$
- Mudança de escala no Tempo $\rightarrow$ $x(at) \Leftrightarrow X(\omega/a)/|a|$
- Deslocamento na frequência $\rightarrow$ $e^{jt\omega_0}x(t) \Leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$
- Convolução $\rightarrow$

$$x_1(t).x_2(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

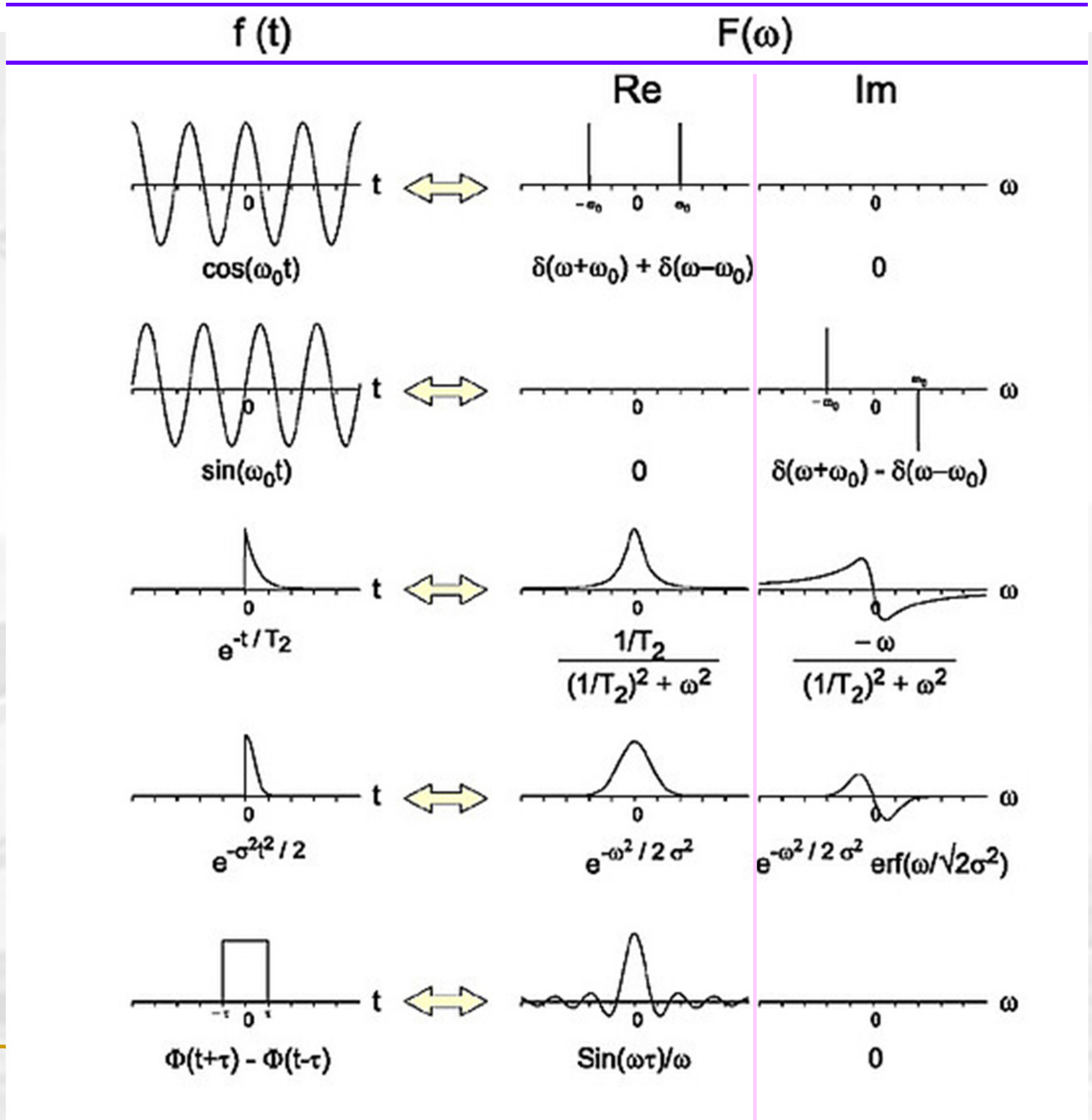
$$x_1(t) * x_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(\omega).X_2(\omega)$$

- Teorema de Parseval $\rightarrow$
  (sinal de energia, não periódico)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

- Tabela 1

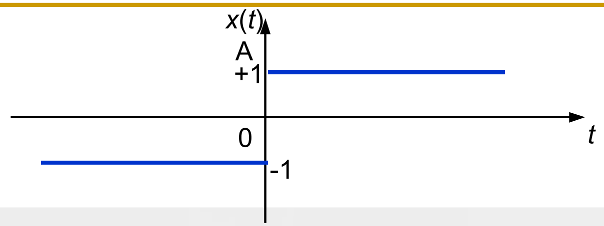


Transformada de Fourier de Tempo Contínuo

- Tabela 2

Pair Number	$x(t)$	$X(f)$	Comments on Derivation
1.	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc} \tau f$	Direct evaluation
2.	$2W \operatorname{sinc} 2Wt$	$\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$	Duality with pair 1, Example 4-7
3.	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}^2 \tau f$	Convolution using pair 1
4.	$\exp(-\alpha t)u(t),\ \alpha > 0$	$\dfrac{1}{\alpha + j2\pi f}$	Direct evaluation
5.	$t\exp(-\alpha t)u(t),\ \alpha > 0$	$\dfrac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$	Differentiation of pair 4 with respect to α
6.	$\exp(-\alpha\lvert t\rvert),\ \alpha > 0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$	Direct evaluation
7.	$e^{-\pi(t/\tau)^2}$	$\tau e^{-\pi(f\tau)^2}$	Direct evaluation
8.	$\delta(t)$	1	Example 4-9
9.	1	$\delta(f)$	Duality with pair 7
10.	$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	Shift and pair 7
11.	$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$	Duality with pair 9
12.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$	Exponential representation of cos and sin and pair 10
13.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\dfrac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \dfrac{1}{2j}\delta(f + f_0)$	
14.	$u(t)$	$(j2\pi f)^{-1} + \frac{1}{2}\delta(f)$	Integration and pair 7
15.	$\operatorname{sgn} t$	$(j\pi f)^{-1}$	Pair 8 and pair 13 with superposition
16.	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-j\operatorname{sgn}(f)$	Duality with pair 14
17.	$\hat{x}(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda}\, d\lambda$	$-j\operatorname{sgn}(f)X(f)$	Convolution and pair 15
18.	$\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s)$	$f_s \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s),$ $f_s = T_s^{-1}$	Example 4-10

Sinal "Sinal"



Exemplo 11

Pela definição : $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t).e^{-j\omega t}dt=-\int_{-\infty}^{0}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-j\omega t}dt$

$$X(\omega)=-\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{j\omega}\left[\left(1-\lim_{t\to-\infty}e^{-j\omega t}\right)-\left(\lim_{t\to\infty}e^{-j\omega t}-1\right)\right]$$

$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[1-\lim_{t\to-\infty}e^{-j\omega t}+1-\lim_{t\to\infty}e^{-j\omega t}\right],\ \text{mas}: \lim_{t\to-\infty}e^{-j\omega t}=\lim_{t\to-\infty}\left[\cos(\omega t)-jsen(\omega t)\right]$$

Assim :

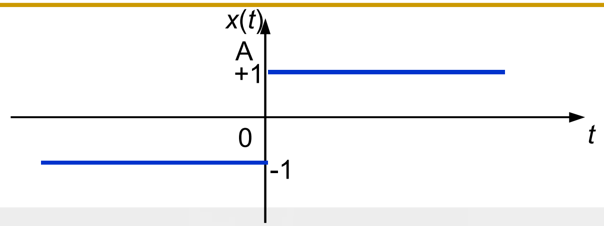
$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[1-\lim_{t\to-\infty}\cos(\omega t)+\lim_{t\to-\infty}jsen(\omega t)+1-\lim_{t\to\infty}\cos(\omega t)+\lim_{t\to\infty}jsen(\omega t)\right]$$

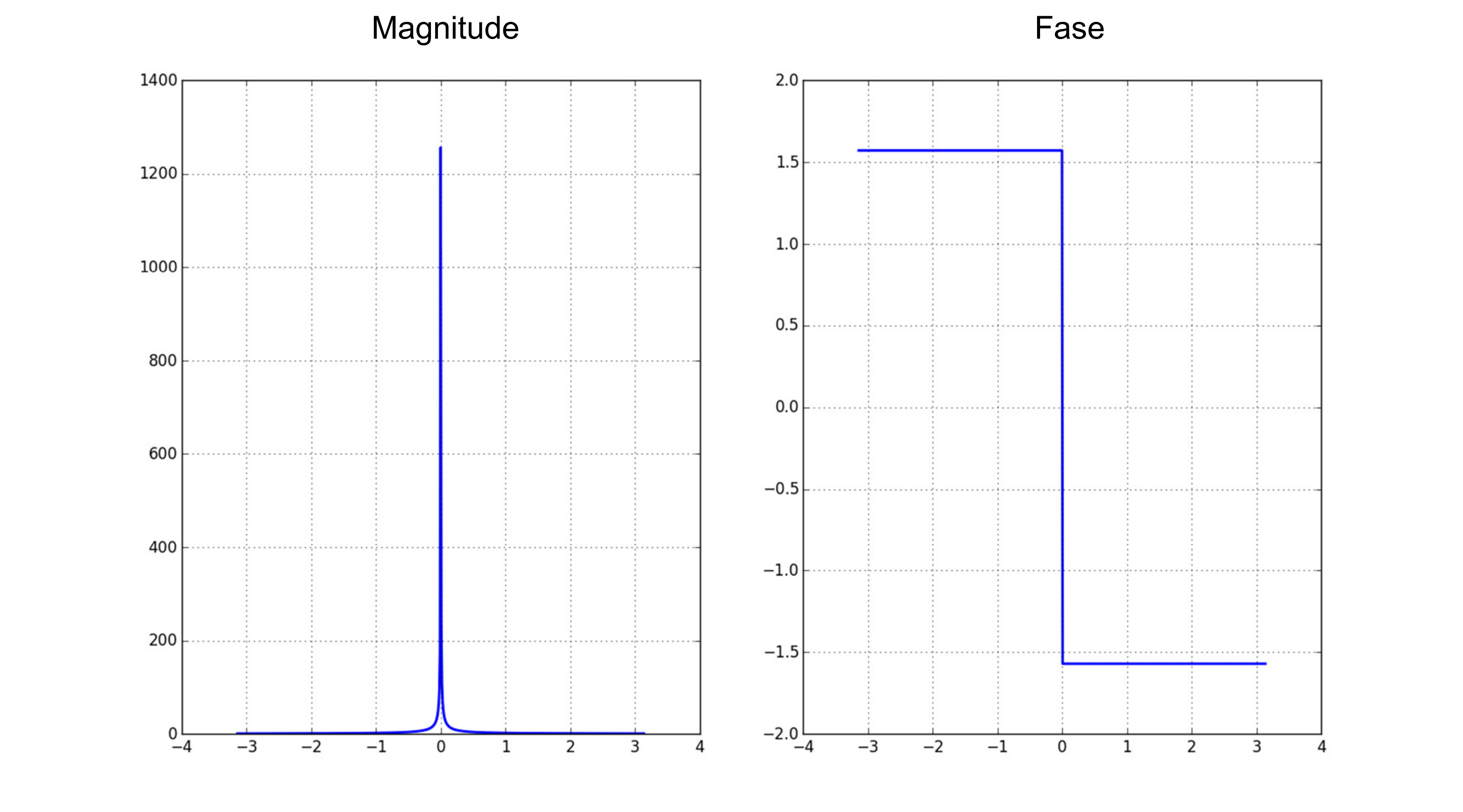
$$X(\omega)=\frac{1}{j\omega}\left[2+\lim_{t\to\infty}\cos(\omega t)-\lim_{t\to\infty}\cos(\omega t)-\lim_{t\to\infty}jsen(\omega t)+\lim_{t\to\infty}jsen(\omega t)\right]$$

$$X(\omega)=\frac{2}{j\omega}$$

Exemplo 11

- Sinal "Sinal"





Resposta em Frequência de um SLITC

- Para SLITCs, no tempo: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Na frequência, usando a propr. da convolução:

$$Y(\omega) = X(\omega)\,.\,H(\omega)$$

ou: $$H(\omega) = Y(\omega) / X(\omega)$$

- $H(\omega)$ é a Resposta em Frequência do SLITC
- $H(\omega) = |H(\omega)|\,e^{j\theta(\omega)}$

Fase da resposta em frequência

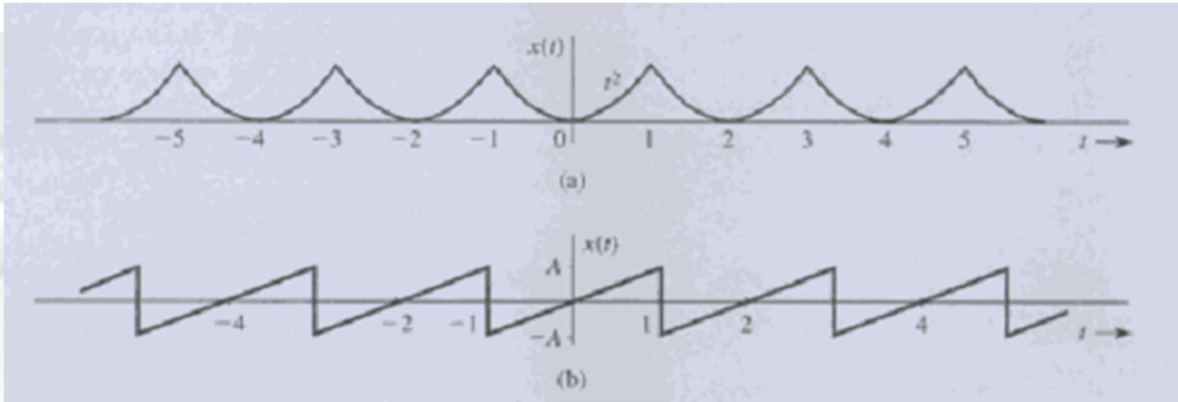
Magnitude da resposta em frequência

- Se $X(\omega) = |X(\omega)|\,e^{j\alpha(\omega)}$ então $Y(\omega) = |Y(\omega)|\,e^{j\phi(\omega)}$

  e $|Y(\omega)| = |X(\omega)|.\,|H(\omega)|$ e $\phi(\omega) = \alpha(\omega) + \theta(\omega)$

Exercícios

- Livro-texto
  - Cap. 6
    - Exercícios
      - E6.1 (p.542)



        - a) $x(t) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi t$
        - b) $x(t) = \dfrac{2A}{\pi} \left[\cos(\pi t - 90^\circ) + \dfrac{1}{2}\cos(2\pi t + 90^\circ) + \dfrac{1}{3}\cos(3\pi t - 90^\circ) + \dfrac{1}{4}\cos(4\pi t + 90^\circ) + \ldots \right]$
      - E6.2 (p.543)
    - Problemas
      - 6.1-1, 6.1-2, 6.1-3, 6.3-1, 6.3-2, 6.3-8

Exercícios

- Cap.7
  - a)

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} \quad \text{and} \quad H(\omega) = \frac{-1}{j\omega - 2}$$

$$Y(\omega) = \frac{-1}{(j\omega - 2)(j\omega + 1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{j\omega - 2}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\left[e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)\right]$$

  - b)

$$X(\omega) = \frac{-1}{j\omega - 1} \quad \text{and} \quad H(\omega) = \frac{-1}{j\omega - 2}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{(j\omega - 1)(j\omega - 2)} = \frac{-1}{j\omega - 1} - \frac{-1}{j\omega - 2}$$

$$y(t) = [e^{t} - e^{2t}]u(-t)$$

7.4-2 Um sistema LCIT é especificado pela resposta em freqüência

$$H(\omega) = \frac{-1}{j\omega - 2}$$

Obtenha a resposta ao impulso desse sistema e mostre que ele é um sistema não causal. Obtenha a resposta (estado nulo) desses sistema se a entrada $x(t)$ for

(a) $e^{-t}u(t)$

(b) $e^{t}u(-t)$

Exercícios

- Cap.7

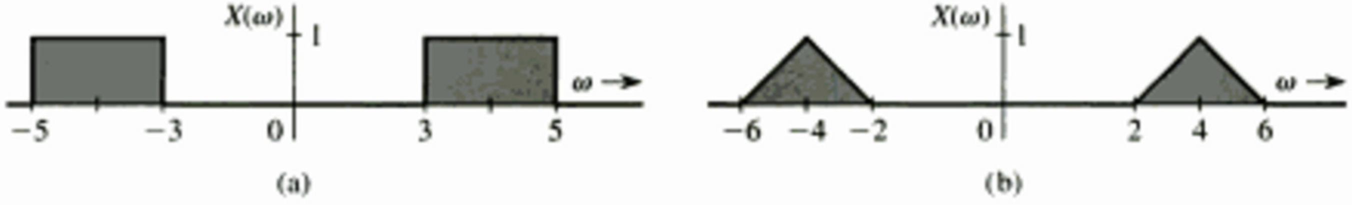


Figura P7.3-7

7.3-7 Utilize a propriedade de deslocamento na freqüência e a Tabela 7.1 para determinar a transformada de Fourier inversa do espectro mostrado na Fig. P7.3-7

$$X(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega - 4}{2}\right) + \text{rect}\left(\frac{\omega + 4}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\text{sinc}(t) \Longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\text{sinc}(t)\cos 4t$$

$$X(\omega) = \Delta\left(\frac{\omega + 4}{4}\right) + \Delta\left(\frac{\omega - 4}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\text{sinc}^2(t) \Longleftrightarrow \Delta\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\text{sinc}^2(t)\cos 4t$$