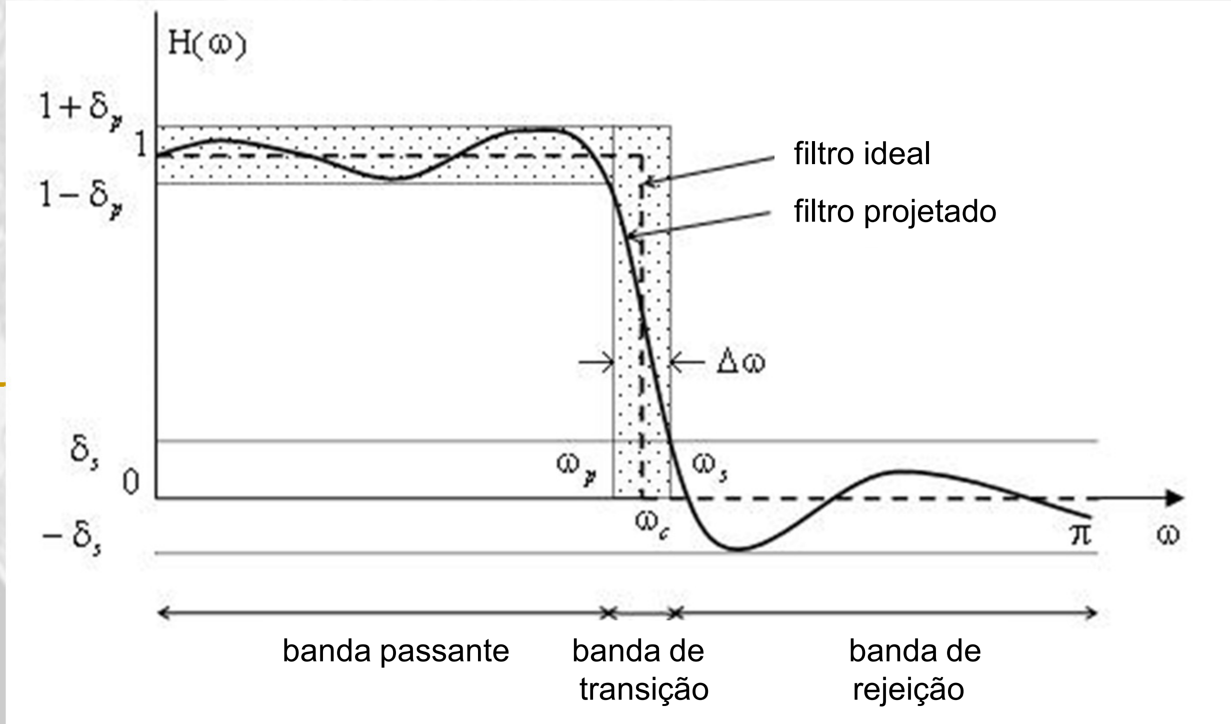
Introdução aos Filtros

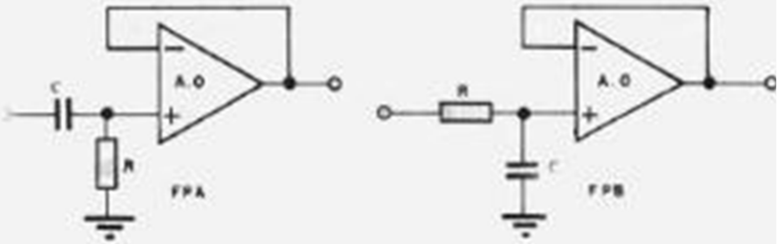


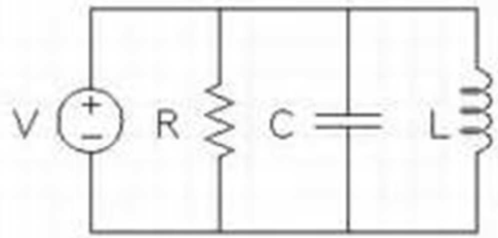
Prof. Cláudio A. Fleury

Fontes: Cap.14; **Circuitos Elétricos**; Nilsson e Riedel; LTC; RJ-Brasil; 2003;
Cap.4; **Sinais e Sistemas Lineares**; Lathi; Bookman; RS-Brasil; 2007

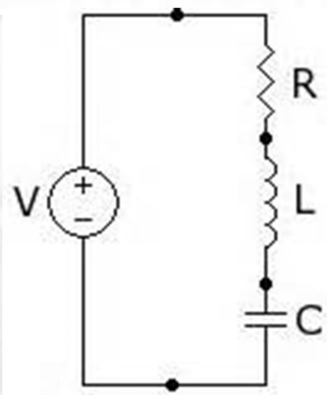
2. Introdução

- Filtro é uma rede elétrica que transmite sinais dentro de uma faixa de frequência especificada: **banda passante**





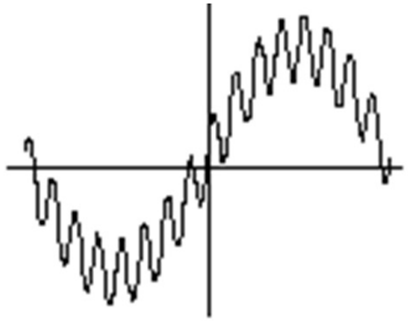
  - A faixa de frequência suprimida pelo filtro é chamada de **banda de bloqueio** (banda de rejeição)
  - A frequência que separa as banda passante e de bloqueio é chamada de **frequência de corte**



2. Introdução

- Filtragem em frequência

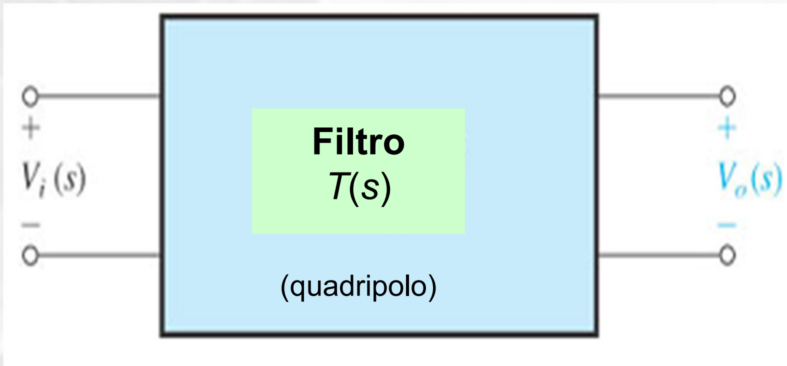
Domínio do Tempo



2. Introdução

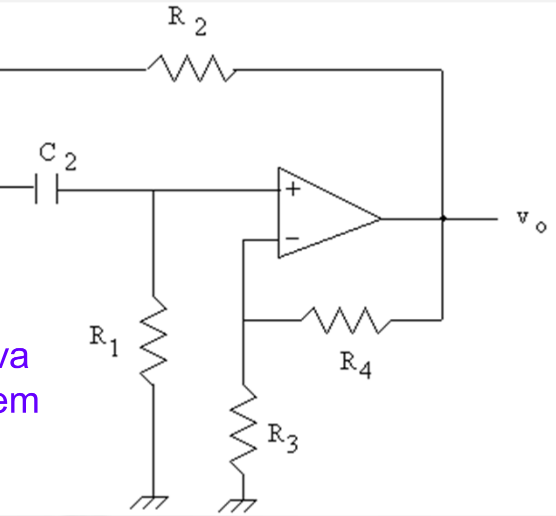
- Filtro ≡ Circuito de Seleção de Frequências
  - Usado em dispositivos de comunicações: rádios, televisores, telefones, satélites, celulares, ...
  - **Filtro real** não elimina **totalmente** as frequências indesejadas... apenas **atenua** os sinais indesejados, e transmite os sinais desejados com um **mínimo de atenuação**
  - Circuito linear com **Função de Transmissão** (Transferência) específica:

$$T(s) \equiv \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

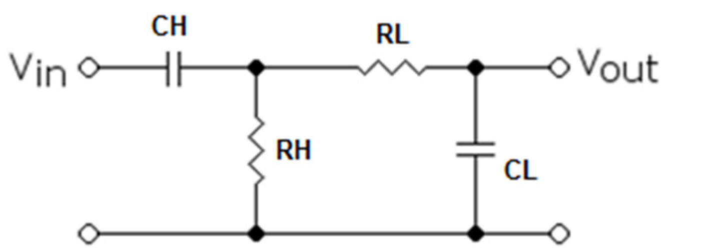


2. Introdução

- **Análise de Circuito/Sistema**
  - Conhecer as características[1] de um determinado circuito (SLITC)
- **Síntese de Circuito/Sistema (projeto)**
  - Projetar um circuito (SLITC) que possua características desejadas
  - <u>Estratégia popular</u> usada no projeto de filtros (circuitos): conexão série (cascata) de estágios de filtragem (células) de primeira e/ou de segunda ordens



Célula Ativa
De 2ª Ordem



Célula Passiva de 2ª Ordem

[1] Função de Transferência, EDLCC, Resposta em Frequência, Resposta ao Impulso, Espaço de Estados etc

2. Introdução

Resposta em Frequência dos 4 tipos de Filtros Ideais

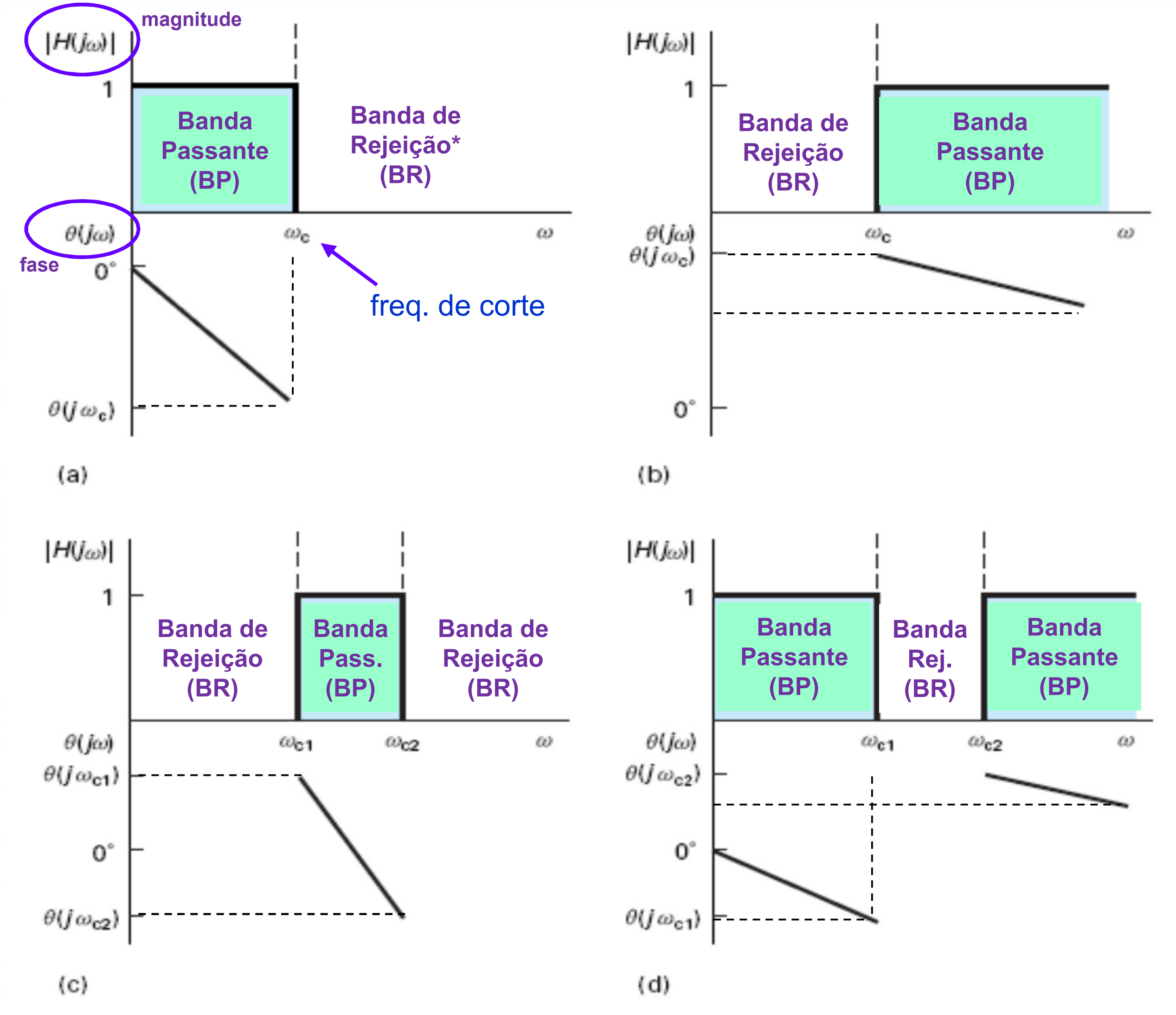
Tipos de Filtros

a) Passa-baixas

b) Passa-Altas

c) Passa-Faixa

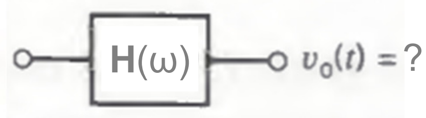
d) Rejeita-Faixa



* Banda de Bloqueio (BB)

2. Introdução

$$v_i(t) = \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t + \cos\omega_3 t$$



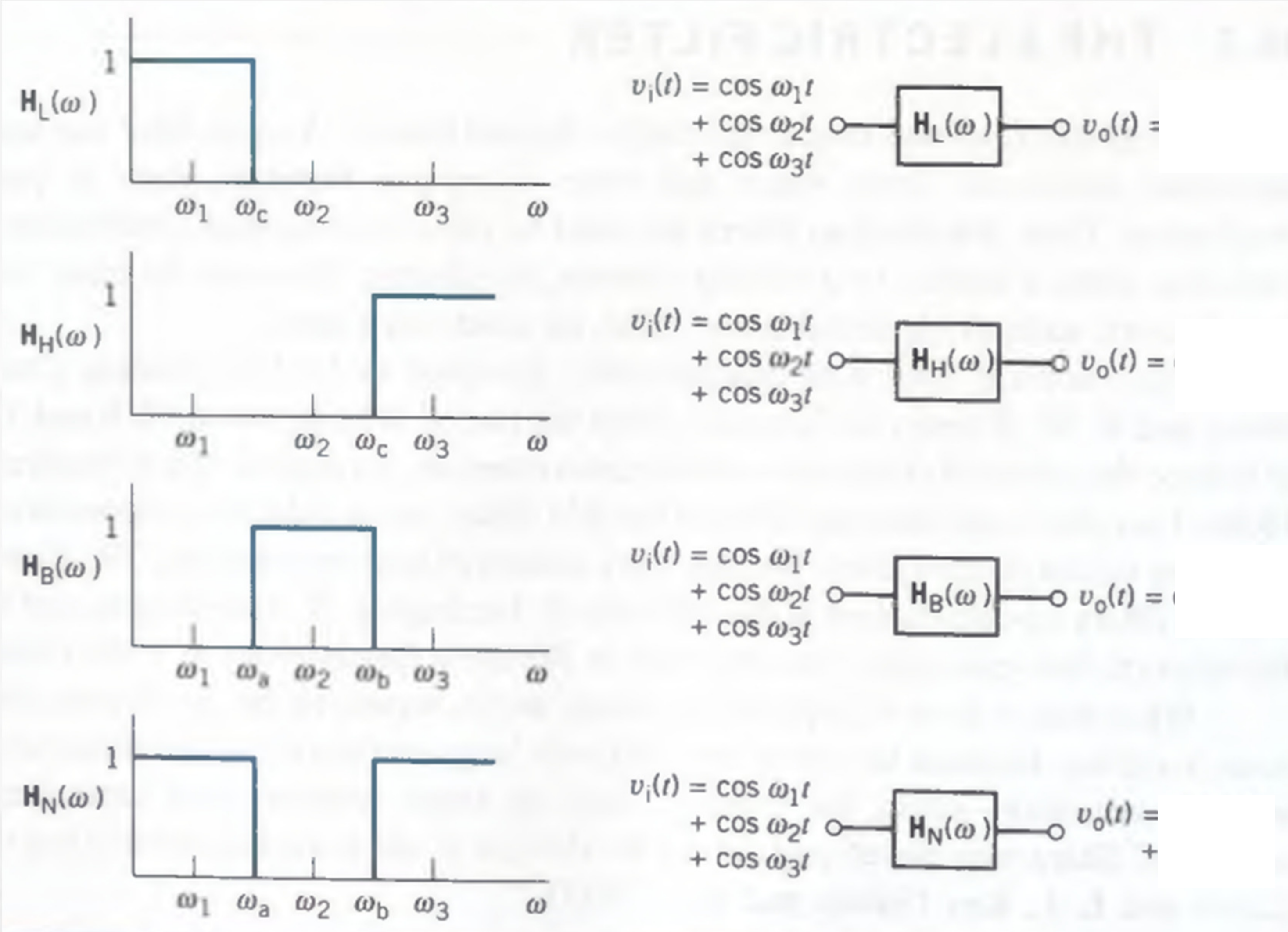
Passa Baixas

Passa Altas

Passa Faixa

Rejeita Faixa

(Notch)



3. Histórico

- 1910s
  - Primeiras transmissões de rádio (comunicações sem fio)
- 1915 – primeiros filtros elétricos para eliminar ruídos estáticos
  - George Campbell (USA)
  - Karl Willy Wagner (ALE)
- 1920s
  - Transmissões regulares de rádio
  - Filtros passivos RLC (Campbell e outros)
- 1930s
  - Teoria dos filtros: S. Darlington, S. Butterworth, E. A. Guillemin
- 1955 Primeiros filtros ativos RC
  - R. P. Sallen (MIT) e E. L. Key (MIT)
  - Topologia Sallen-Key

4. Resposta em Frequência

- É a resposta do SLITC, em regime estacionário, a senóides de várias frequências (teoricamente $0 < f < \infty$)
- É a característica de filtragem de frequências de um SLITC
- É a resposta de um SLITC estável[1] a um sinal de entrada do tipo exponencial complexa de duração infinita:

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{\text{SLITC}} \longrightarrow y(t) = H(s).e^{st}$$

Fazendo $s = j\omega$: $\quad x(t) = e^{j\omega t} \;\Rightarrow\; y(t) = H(j\omega).e^{j\omega t}$,

Resposta em Frequência

ou com $x(t) = \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\{e^{j\omega t}\} \;\Rightarrow\; y(t) = \mathrm{Re}\{H(j\omega).e^{j\omega t}\}$

$$= |H(j\omega)|.\cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

[1] SLITCs BIBO estáveis 'possuem T.L. com RDC que inclui o eixo imaginário $j\omega$

4. Resposta em Frequência

- Autofunção dos SLITC's: **senóides**
  - Os SLITCs respondem a uma entrada senoidal de frequência **ω** com outra senóide de mesma frequência **ω**, porém com amplitude multiplicada por $|H(j\omega)|$ e fase deslocada por $\angle H(j\omega)$
  - O gráfico $|H(j\omega)|$ x ω é chamado de **Resposta de Amplitude** do SLITC (rigorosamente, deveria ser *Resp. de Magnitude*)
  - O gráfico $\angle H(j\omega)$ x ω é chamado de **Resposta de Fase** do SLITC

4. Resposta em Frequência

- A magnitude da Resposta em Frequência como **razão de tensões** no domínio das frequências, geralmente é expressa em dB's
  - Ganho: $G(\omega) = 20.log_{10}(|H(j\omega)|)$ (dB)
  - Atenuação: $A(\omega) = -20.log_{10}(|H(j\omega)|)$ (dB)

$$deciBel = 20\log_{10}\frac{V_{saída}}{V_{entrada}} \quad \text{(dB)}$$

ou

$$deciBel = 10\log_{10}\frac{P_{saída}}{P_{entrada}} \quad \text{(dB)}$$

Magnitude H	**$20 \log_{10} H$ (dB)**
0.001	−60
0.01	−40
0.1	−20
0.5	−6
$1/\sqrt{2}$	−3
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
10	20
20	26
100	40
1000	60

4. Resposta em Frequência

- **Exemplo**:

Seja um SLITC com ganho $|H(j\mathbf{10})| = \mathbf{3}$ e fase $\angle H(j\mathbf{10}) = \mathbf{-\pi/6}$.

a) Qual será a saída desse SLITC se uma senóide de 10 rad/s for colocada em sua entrada?

Ele responderá também com uma senóide de mesma frequência (auto-função), 10rad/s, mas com uma amplitude **3** vezes maior que a colocada em sua entrada, e com um atraso de fase de **30°** ou **π/6** rad:

entrada: $\mathbf{x(t) = 5.cos(10.t + \pi/4)}$, *saída*: $\mathbf{y(t) = 15.cos(10.t + \pi/12)}$

b) Qual será a saída desse SLITC para uma entrada senoidal de 20 rad/s?

Não há informações suficientes sobre a Resposta em Frequência do SLITC na frequência de 20 rad/s... Não há como responder essa indagação.

4. Resposta em Frequência

Exemplo: Determine a **Resposta de Amplitude** e a **Resposta de Fase** do SLITC com ***Função de Transferência***

$$H(s)=\frac{s+0{,}1}{s+5},\quad \text{RDC: } \operatorname{Re}\{s\}>-5$$

Resp. em Frequência — Resp. de Amplitude — Resp. de Fase

$$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega+0{,}1}{j\omega+5}\Rightarrow\quad |H(j\omega)|=\frac{\sqrt{\omega^2+0{,}01}}{\sqrt{\omega^2+25}}\quad \text{e}\quad \angle H(j\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0{,}1}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

Determine a saída $y(t)$ do SLITC para as seguintes entradas:

a) $x(t)=\cos(2t)$ b) $x(t)=\cos(10t-50°)$

a) $x(t)=\cos(2t)\Rightarrow\omega=2$

$$|H(j2)|=\sqrt{2^2+0{,}01}\Big/\sqrt{2^2+25}=0{,}372$$

$$\angle H(j2)=\tan^{-1}(2/0{,}1)-\tan^{-1}(2/5)=65{,}3^\circ$$

$$y(t)=0{,}372\cos(2t+65{,}3^\circ)$$

b) $x(t)=\cos(10t-50^o)\Rightarrow\omega=10$

$$|H(j10)|=\sqrt{10^2+0{,}01}\Big/\sqrt{10^2+25}=0{,}894$$

$$\angle H(j10)=\tan^{-1}(10/0{,}1)-\tan^{-1}(10/5)=26^\circ$$

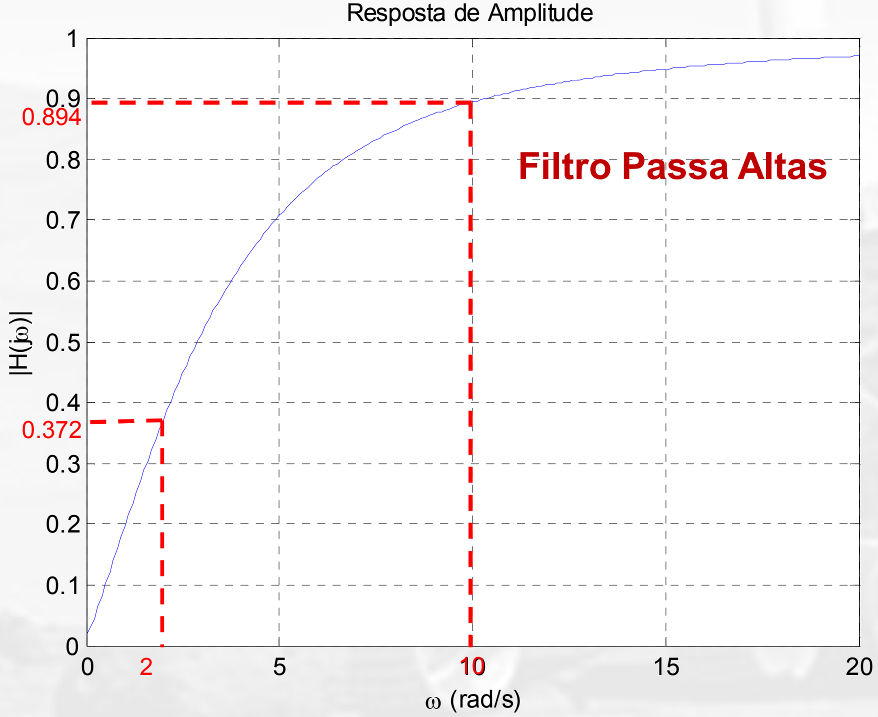
$$y(t)=0{,}894\cos(10t-50^\circ+26^\circ)=0{,}894\cos(10t-24^\circ)$$

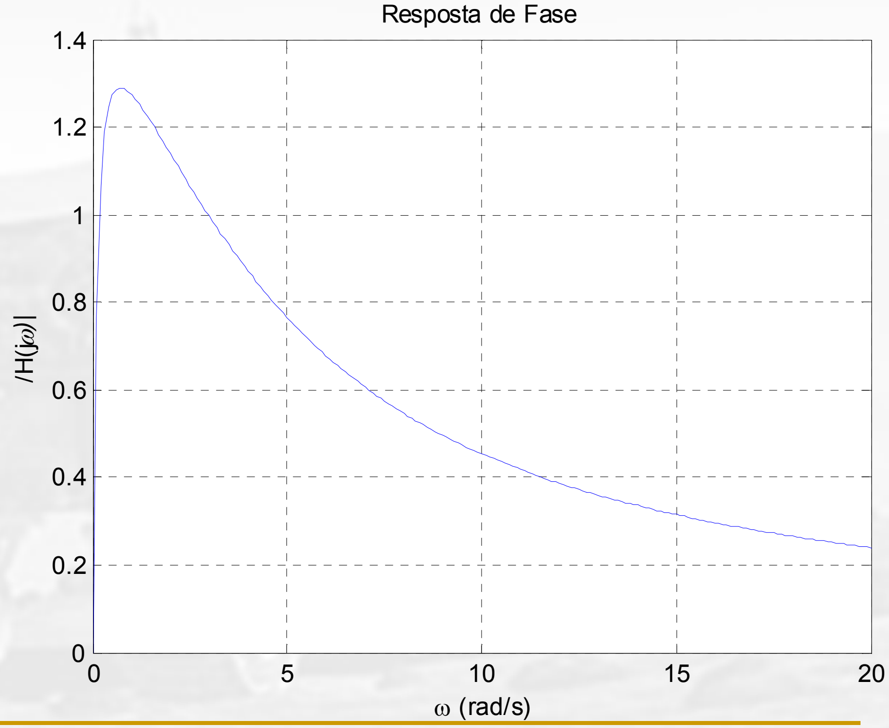
4. Resposta em Frequência

Exemplo: Determine **Resposta em Frequência** do SLITC: $H(s) = \dfrac{s + 0{,}1}{s + 5}$

```python
from matplotlib.pylab import plot,grid,figure
from numpy import arange,sqrt,arctan
w = arange(0,80,0.1);     # freq. angular (rad/s)
Hwmag = sqrt(w*w+0.01) / sqrt(w*w+25)
Hwfas = arctan(w/0.1)- arctan(w/5)
plot(w,Hwmag); grid('on'); figure()
plot(w,Hwfas); grid('on')
```

```matlab
w = 0:0.1:80;  % freq. angular (rad/s)
Hwmag = sqrt(w.*w+0.01)./sqrt(w.*w+25);
Hwfas = atan(w/0.1)-atan(w/5);
plot(w,Hwmag); grid; figure
plot(w,Hwfas); grid
```





4. Resposta em Frequência

Exercício: Determine a resposta de um SLITC causal, em repouso, definido por sua EDLCC[1] se a entrada for $x(t) = 20.\text{sen}(3t + 35^o)$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

Solução: **Função de Transferência** e **Resposta em Frequência**:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 5X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+5}{s^2+3s+2}$$

$$\text{Polos: -1 e -2, todos no SPE} \Rightarrow H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+5}{(j\omega)^2 + j3\omega + 2} = \frac{j\omega+5}{j3\omega + 2 - \omega^2}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+25}}{\sqrt{9\omega^2 + (2-\omega^2)^2}} \quad \text{e} \quad \angle H(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right)$$

$$|H(j3)| = \sqrt{34}\big/\sqrt{81+49} = 0{,}511$$

$$\angle H(j3) = \tan^{-1}(3/5) - \tan^{-1}(9/\text{-}7) = 30{,}9^o - (-52{,}1^o) = 83{,}1^o$$

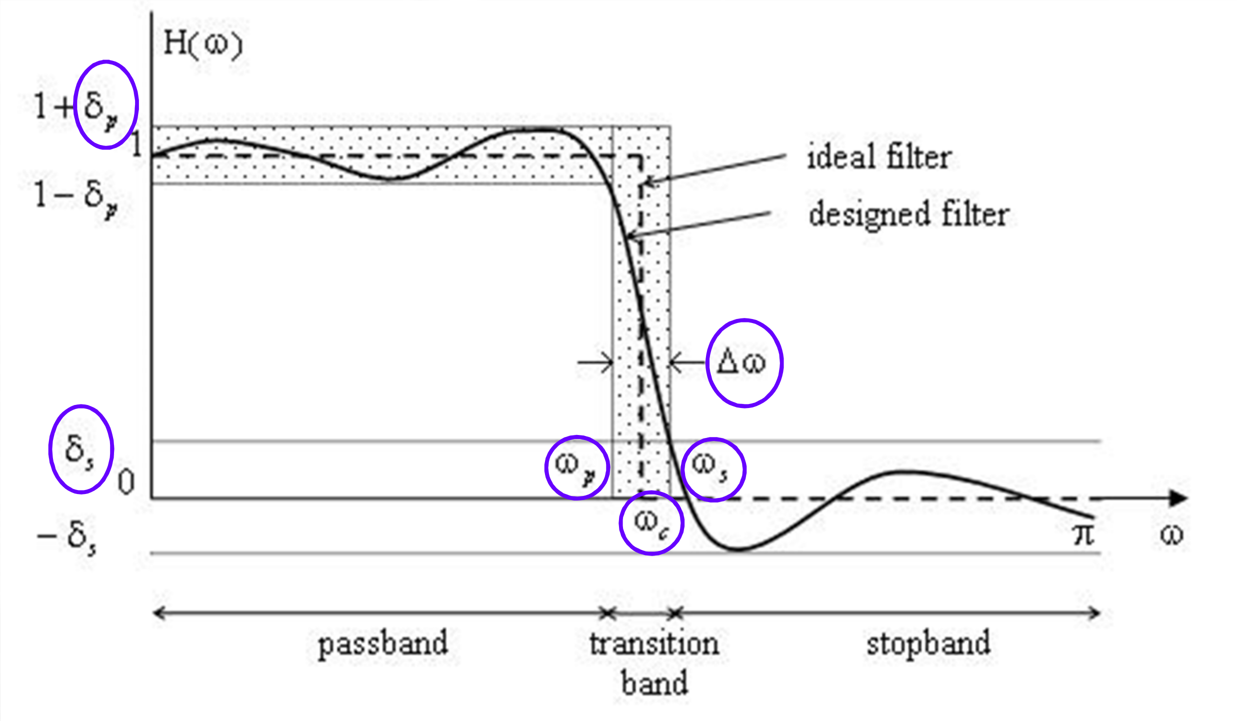
$$y(t) = |H(j3)|\,|.20.sen(3t + 35^o + \angle H(j3))$$

$$y(t) = 0{,}511.20.sen(3t + 118{,}1^o) = 10{,}23.sen(3t - 61{,}9^o)$$

[1] E.D.L.C.C. Equação Diferencial Linear de Coeficientes Constantes

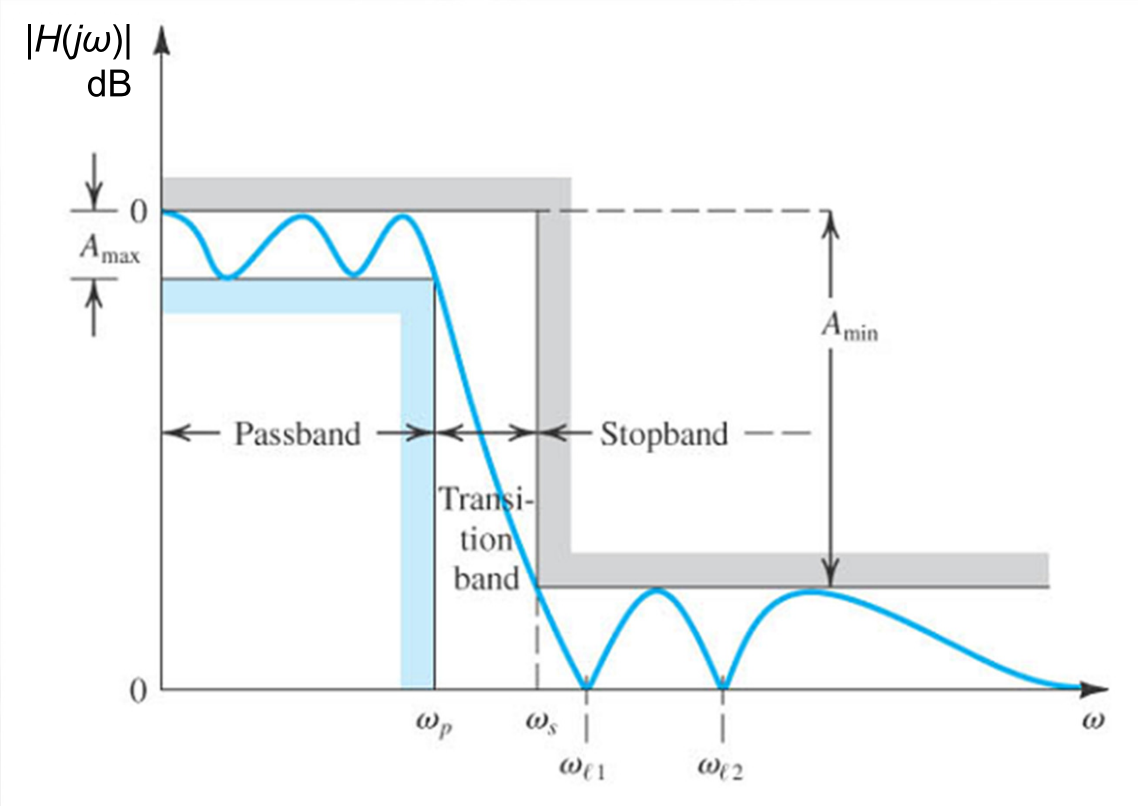
5. Especificação de Filtros

- Parâmetros Absolutos
  - Oscilação máxima na Banda Passante: δ_P
  - Atenuação mínima na Banda de Bloqueio: δ_S
  - Frequência de Corte: ω_c
  - Largura da Banda de Transição: $\Delta\omega$ ou ω_P e ω_S



5. Especificação de Filtros

- Parâmetros Relativos (em dB)
  - Atenuação máxima na Banda Passante (dB): $A_{máx}$
  - Atenuação mínima na Banda de Bloqueio (dB): $A_{mín}$
  - Frequência final da Banda Passante: ω_P
  - Frequência inicial da Banda de Bloqueio: ω_S



6. Filtros Passivos

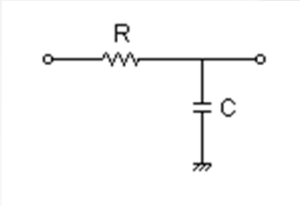
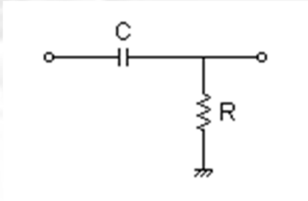
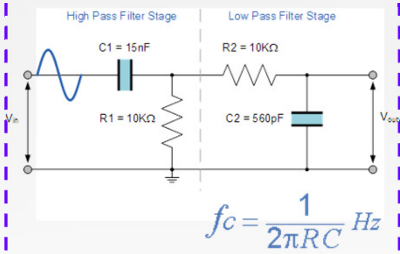
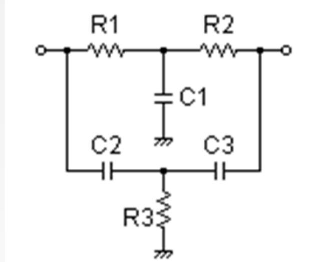
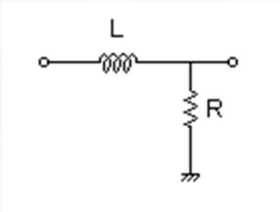
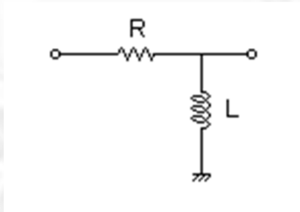
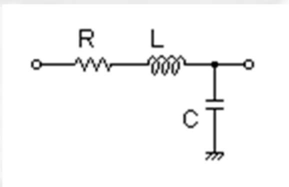
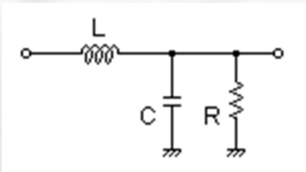
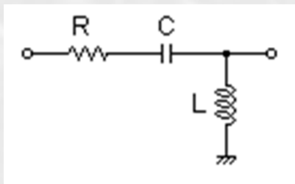
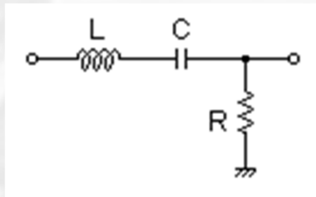
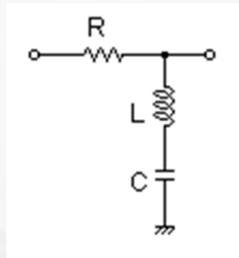
- Usam **somente** componentes passivos (não precisam de alimentação para funcionar): Resistores, Capacitores e Indutores

- **Não amplificam** o sinal de entrada
  - A magnitude da *Resposta em Frequência* é sempre menor ou igual a 1

- **Dependem da carga** ligado ao filtro
  - A frequência de corte e a largura de banda variam com a carga

- **Dependem da resistência interna** da fonte de alimentação
  - A frequência de corte e a largura de banda variam com o R_i das fontes

6. Filtros Passivos

	Passa-Baixas	Passa-Altas	Passa-Faixa	Rejeita-Faixa
Filtros RC				 Twin-T Notch
Filtros RL				
Filtros RLC	 			

7 Filtro Passa-Baixas

- **Permite** a passagem das componentes de **baixas frequências** e **bloqueia** as componentes de **altas frequências**
- Ganho máximo em $\omega = 0$ rad/s
  - Um polo aumenta o ganho nas frequências de sua vizinhança e gera a F.T. com ganho normalizado (unitário) em $\omega = 0$ rad/s

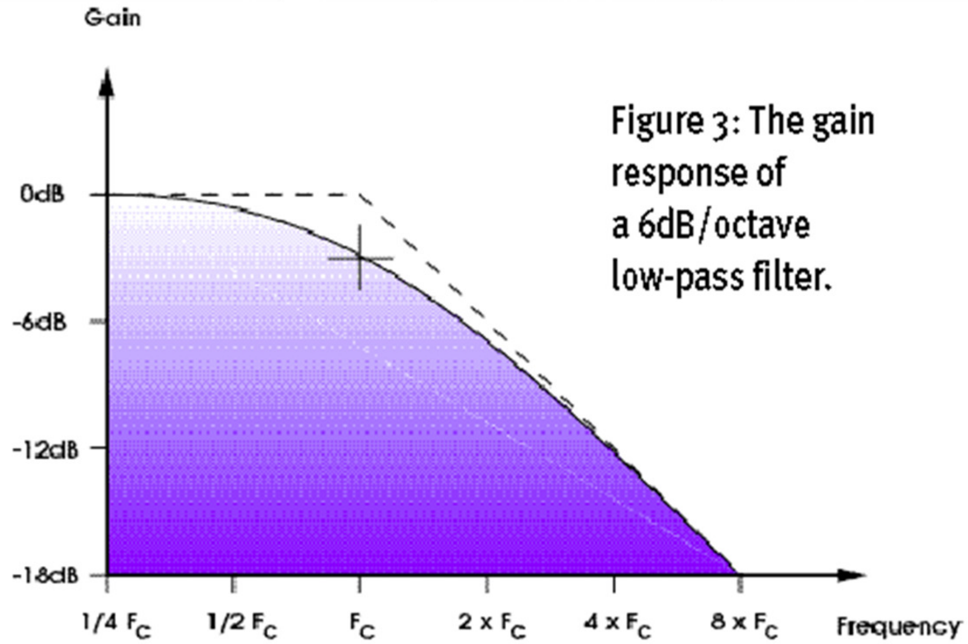


Figure 3: The gain response of a 6dB/octave low-pass filter.