$$ {}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i\,, \tag{6.51} $$

$$ \begin{aligned} {}^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i \\ + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}\,, \end{aligned} \tag{6.52} $$

$$ \tau_i = {}^{i}n_i^T\,{}^{i}\hat{Z}_i\,. \tag{6.53} $$

> Inclusão da força da gravidade no algoritmo dinâmico

O efeito da carga da gravidade sobre os elos pode ser incluído simplesmente ajustando-se ${}^{0}\dot{v}_0 = G$, em que G tem a magnitude do vetor gravidade, mas apontando na direção oposta. Isso equivale a dizer que a base do robô está acelerando para cima, com uma aceleração de 1 g. Essa aceleração fictícia para cima tem sobre os elos o mesmo efeito que a gravidade teria. Dessa forma, o efeito da gravidade é calculado sem um esforço computacional maior.

6.6 ITERATIVO *VERSUS* FORMA FECHADA

As equações (6.46) a (6.53) fornecem um esquema computacional pelo qual, dadas as posições, velocidades e acelerações das juntas, podemos computar os torques de juntas necessários. Como no desenvolvimento das equações para calcular o Jacobiano no Capítulo 5, essas relações podem ser usadas de duas formas: como algoritmo computacional numérico, ou como algoritmo usado analiticamente para desenvolver equações simbólicas.

O uso das equações como algoritmo computacional numérico é atraente porque elas se aplicam a qualquer robô. Uma vez que os tensores de inércia, massa dos elos, vetores P_{C_i} e matrizes ${}^{i+1}_{i}R$ tenham sido especificados para um determinado manipulador, as equações podem ser aplicadas diretamente para estimar os torques das juntas correspondentes a qualquer movimento.

No entanto, com frequência estamos interessados em obter uma percepção melhor da estrutura das equações. Por exemplo, qual é a forma dos termos de gravidade? Como os efeitos da magnitude da gravidade se comparam com os da inércia? Para investigar essas e outras questões, é útil escrever equações dinâmicas de forma fechada. Tais equações podem ser derivadas aplicando-se as equações recursivas de Newton-Euler simbolicamente a Θ, $\dot{\Theta}$ e $\ddot{\Theta}$. Isso é análogo ao que fizemos no Capítulo 5 para derivar a forma simbólica do Jacobiano.

6.7 UM EXEMPLO DE EQUAÇÕES DINÂMICAS DE FORMA FECHADA

Aqui computamos as equações dinâmicas de forma fechada para o manipulador planar de dois elos mostrado na Figura 6.6. Por simplicidade, presumimos que a distribuição de massa é extremamente simples: toda a massa existe como uma massa pontual na extremidade distal de cada elo. Essas massas são m_1 e m_2.

Primeiro, determinamos os valores de várias quantidades que aparecerão nas equações recursivas de Newton-Euler. Os vetores que localizam o centro de massa para cada elo são

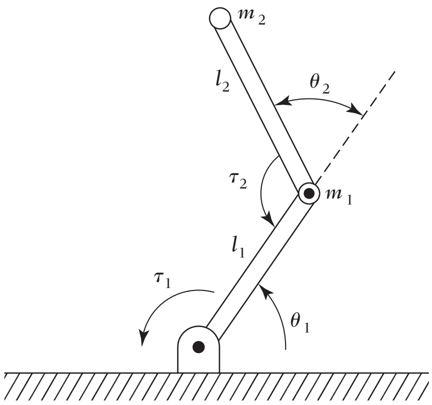

Figura 6.6: Manipulador planar de dois elos com massas pontuais na extremidade distal dos elos.

$$^1P_{C_1} = l_1\hat{X}_1 \ ,$$
$$^2P_{C_2} = l_2\hat{X}_2 \ .$$

Por causa do pressuposto de massa pontual, o tensor de inércia escrito no centro de massa de cada elo é a matriz zero:

$$^{C_1}I_1 = 0 \ ,$$
$$^{C_2}I_2 = 0 \ .$$

Como não há forças agindo no efetuador, temos

$$f_3 = 0 \ ,$$
$$n_3 = 0 \ .$$

A base do robô não está girando, de forma que temos

$$\omega_0 = 0 \ ,$$
$$\dot{\omega}_0 = 0 \ .$$

Para incluir a força da gravidade, usaremos

$$^0\dot{v}_0 = g\hat{Y}_0 \ .$$

A rotação entre os sucessivos sistemas de referência é dada por

$$^{i}_{i+1}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & -s_{i+1} & 0,0 \\ s_{i+1} & c_{i+1} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix},$$

$$^{i+1}_{i}R = \begin{bmatrix} c_{i+1} & s_{i+1} & 0,0 \\ -s_{i+1} & c_{i+1} & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Agora aplicamos as equações (6.46) a (6.53).

As iterações "para fora" para o elo 1 são como segue:

$$
\begin{aligned}
{}^1\omega_1 &= \dot{\theta}_1 \hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \\
{}^1\dot{\omega}_1 &= \ddot{\theta}_1 \hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}, \\
{}^1\dot{v}_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
{}^1\dot{v}_{C_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
{}^1F_1 &= \begin{bmatrix} -m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1\ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
{}^1N_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.54}
$$

As iterações "para fora" para o elo 2 são como segue:

$$
\begin{aligned}
{}^2\omega_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \\
{}^2\dot{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \\
{}^2\dot{v}_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 + gs_1 \\ l_1\ddot{\theta}_1 + gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
{}^2\dot{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + gs_{12} \\ l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + gc_{12} \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

(6.55) continua

$$
{}^{2}F_{2} = \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix},
\qquad \text{continuação (6.55)}
$$

$$
{}^{2}N_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

As iterações “para dentro” para o elo 2 são como segue:

$$
\begin{aligned}
{}^{2}f_{2} &= {}^{2}F_{2}\,, \\
{}^{2}n_{2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.56}
$$

As iterações “para dentro” para o elo 1 são como segue:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}f_{1} &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g s_{12} - m_2 l_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \\ m_2 l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g c_{12} + m_2 l_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
{}^{1}n_{1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_1 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + m_2 l_1 g s_2 s_{12} \\ + m_2 l_1 l_2 c_2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 g c_2 c_{12} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{6.57}
$$

Extraindo os componentes $\hat{Z}$ de ${}^{i}n_{i}$, encontramos os torques das juntas:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2 c_2 \left(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) + \left(m_1 + m_2\right) l_1^2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad - 2 m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g c_{12} + \left(m_1 + m_2\right) l_1 g c_1\,, \\
\tau_2 &= m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 \left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right).
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

As equações (6.58) fornecem expressões para os torques em todos os atuadores como uma função de posição, velocidade e aceleração das juntas. Note que essas funções um tanto complexas surgiram de um dos manipuladores mais simples que se pode imaginar. É óbvio que as equações de forma fechada para um manipulador com seis graus de liberdade serão muito complexas.

6.8 A ESTRUTURA DAS EQUAÇÕES DINÂMICAS DE UM MANIPULADOR

É muitas vezes conveniente expressar as equações dinâmicas de um manipulador em uma única equação que oculta alguns dos detalhes, mas mostra parte da estrutura das equações.

> A equação no espaço de estado

Quando as equações de Newton-Euler são avaliadas simbolicamente para qualquer manipulador, geram uma equação dinâmica que pode ser escrita na forma

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) + G(\Theta) \ , \tag{6.59}$$

em que $M(\Theta)$ é a **matriz de massa** $n \times n$ do manipulador, $V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$ é um vetor $n \times 1$ de termos centrífugos e de Coriolis, e $G(\Theta)$ é um vetor $n \times 1$ de termos de gravidade. Usamos o nome **equação no espaço de estado** porque o termo $V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$, que aparece em (6.59), depende tanto de posição quanto de velocidade [3].

Cada elemento de $M(\Theta)$ e $G(\Theta)$ é uma função complexa que depende de Θ, a posição de todas as juntas do manipulador. Cada elemento de $V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$ é uma função complexa tanto de Θ como de $\dot{\Theta}$.

Podemos separar os vários tipos de termos que aparecem nas equações dinâmicas e formar a matriz de massa do manipulador, o vetor centrífugo e de Coriolis, e o vetor gravidade.

EXEMPLO 6.3

Dê $M(\Theta)$, $V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$ e $G(\Theta)$ para o manipulador da Seção 6.7.

A Equação (6.59) define a matriz de massa do manipulador, $M(\Theta)$; ela é composta de todos os termos que multiplicam $\ddot{\Theta}$ e é uma função de Θ. Portanto, temos

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 c_2 + l_1^2(m_1 + m_2) & l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 \\ l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 c_2 & l_2^2 m_2 \end{bmatrix}. \tag{6.60}$$

Toda matriz de massa de manipulador é simétrica e positivo-definida, e é, portanto, sempre invertível.

O termo de velocidade, $V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right)$, contém todos os termos que têm qualquer dependência da velocidade das juntas. Assim, obtemos

$$V\left(\Theta, \dot{\Theta}\right) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}. \tag{6.61}$$

Um termo como $-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_2^2$ é causado por uma **força centrífuga** e reconhecido como tal porque depende do quadrado de uma velocidade de junta. Já $-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$ é causado por uma **força de Coriolis** e sempre conterá o produto de duas velocidades de juntas.