Wrocław, 29.12.2016

Dynamika maszyn roboczych i pojazdów
Laboratorium
Referat nt. drgań

Prowadzący:
Dr. inż. Aleksander Skurjat

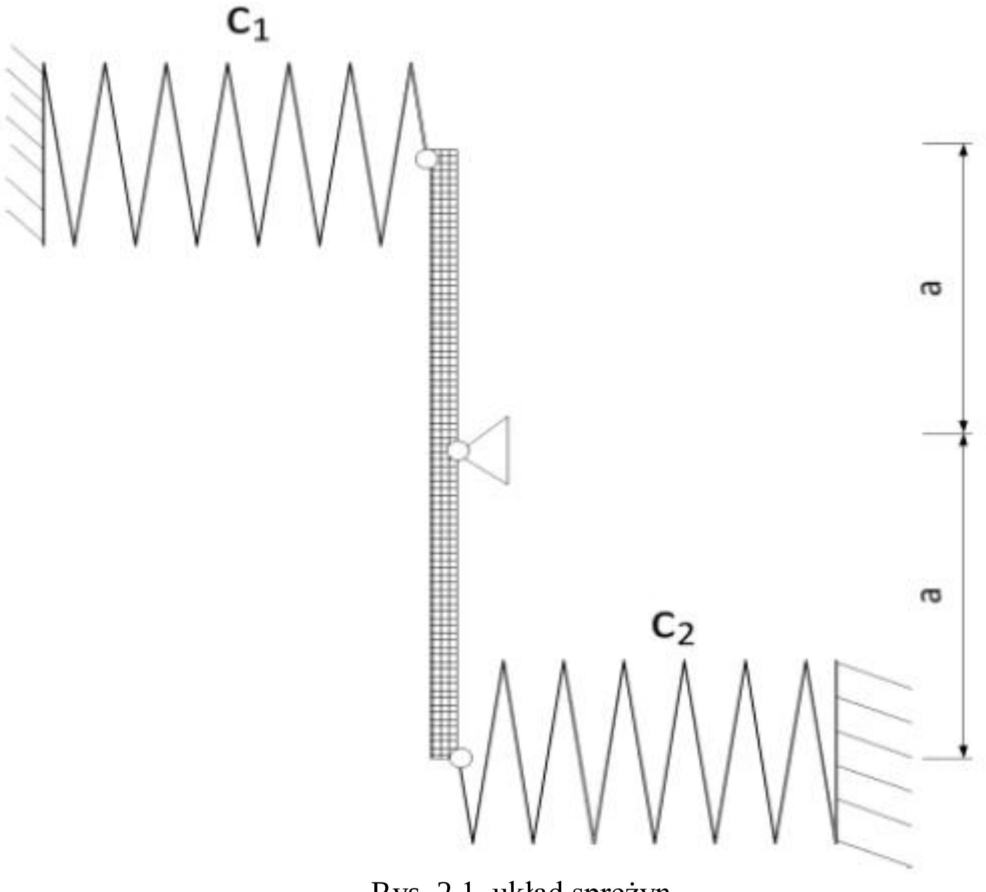
Filip Solarczyk, 205476

1. Wstęp

Drgania to procesy, w trakcie których pewne wielkości fizyczne na przemian rosną i maleją w czasie.
Drgania swobodne ciała wywołane są wychyleniem z położenia równowagi trwałej, kiedy na ciało nie działają żadne siły, poza siłami określającymi położenie równowagi i siłami dążącymi do jej przywrócenia.
Drgania swobodne obejmują szeroki zakres rodzajów drgań, w analizie drgań wyszczególnia się drgania układów w zależności od ich okresowości, liniowości, występowanie rozpraszania energii (tłumienie), liczbie stopni swobody układu. Liniowość układu zapewnia niezależność częstotliwości drgań od amplitudy.

2. Drgania o jednym stopniu swobody.

Najprostszym rodzajem drgań są drgania liniowego układu o jednym stopniu swobody bez tłumienia.
Rozważmy przypadek:

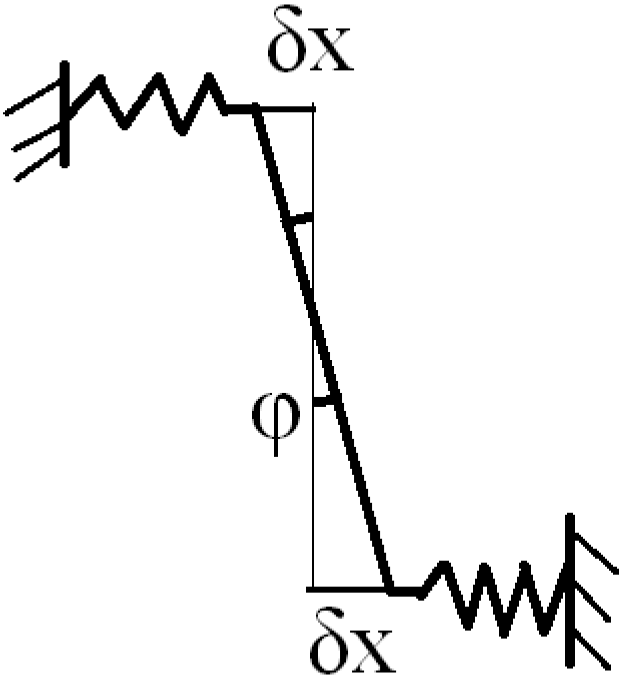


Rys. 2.1. układ sprężyn

Gdzie c_1 i c_2 oznaczają sztywności sprężyn, a to odległość środka sprężyn od podpory natomiast masa belki wynosi m.
Układ ma jeden stopień swobody - obrót wokół środkowej podpory. Oznaczmy kąt obrotu jako φ. Gdy układ zostanie wychylony z położenia równowagi o δx zacznie drgania.
Wychylenie to można uzależnić od kąta:

$$\delta x = a\sin\varphi = a\varphi$$

przyjmując że kąt φ jest na tyle mały że sin φ≈ φ.



Rys 2.2. układ po wychyleniu z położenia równowagi

Aby znaleźć równanie ruchu opisujące układ, a co za tym idzie częstość własną drgań układu należy najpierw obliczyć energię układu:

$$E_p = c_1 \frac{\delta x^2}{2} + c_2 \frac{\delta x^2}{2} = \frac{1}{2} a^2 \varphi^2 (c_1 + c_2)$$

oraz, ponieważ

$$I = \frac{1}{12} m (2a)^2 = \frac{1}{3} m a^2$$

zatem:

$$E_k = I \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{1}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2$$

Kolejnym krokiem jest podstawienie do równania Lagrange'a:

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{\varphi}})}{dt} - \frac{dL}{d\varphi} = 0$$

Różnica ta wynosi 0 bo na układ nie działają żadne inne siły - jest to układ zachowawczy. Ponieważ:

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{6} m a^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} a^2 \varphi^2 (c_1 + c_2)$$

Należy teraz policzyć pochodne:

$$\frac{dL}{d\dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m a^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{\varphi}})}{dt} = \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = -a^2 \varphi (c_1 + c_2)$$

dostajemy zatem równanie:

$$\frac{1}{3}ma^2\ddot{\varphi} + a^2\varphi(c_1 + c_2) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \varphi\frac{3(c_1 + c_2)}{m} = 0$$

zatem częstość własna układu:

$$\omega = \sqrt{\frac{3(c_1 + c_2)}{m}}$$

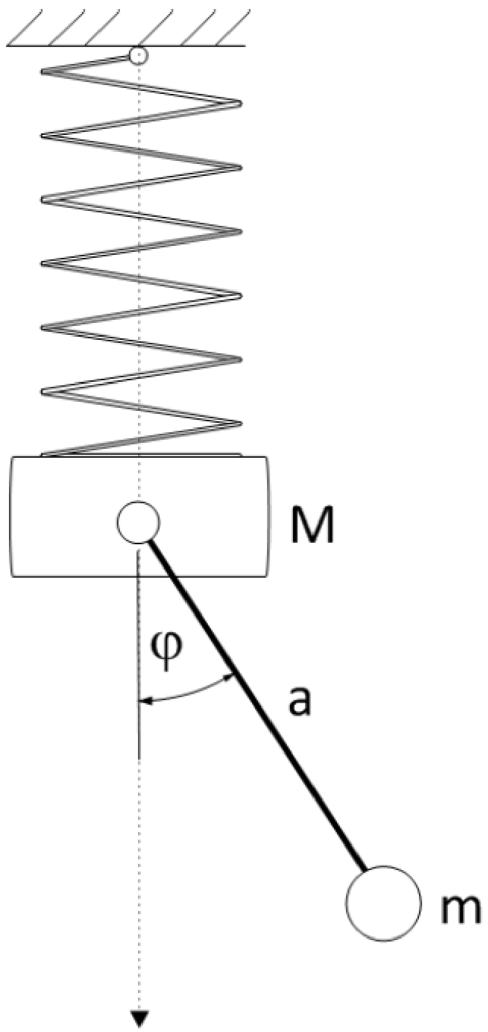
a równanie ruchu - rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\varphi(t) = C_1 \sin\sqrt{\frac{3(c_1 + c_2)}{m}}t + C_2 \cos\sqrt{\frac{3(c_1 + c_2)}{m}}t$$

określające drgania z jakimi oscyluje układ (zależne od t czasu).

3. Drgania o wielu stopniach swobody.

Liniowe i nietłumione układy o wielu stopniach swobody, np. kilka ciał połączonych sprężynami, mogą wykonywać drgania w różnej postaci. Drgania te można przedstawić jako sumę drgań harmonicznych zwanych *drganiami własnymi* lub *drganiami normalnymi.* Rozważmy układ:



Rys. 3.1. układ o wielu stopniach swobody

Gdzie m i M to masy bloczków, c określa sztywność sprężyny, a jest długością pręta (bezmasowy), φ jest kątem odchylenia masy m od pionu.
Układ ten ma 2 stopnie swobody - przemieszczenie masy M w pionie o x oraz wahania masy m od pionu φ.
Obliczmy energię układu (przyjmując za poziom 0 początkowe położenie masy M):

$$E_p = c\frac{x^2}{2} + Mgx + mg(x + a\cos\varphi)$$

$$E_k = M\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{{V_m}^2}{2}$$

przy czym:

$$\overrightarrow{V_m} = \vec{\dot{x}} + \overrightarrow{\dot{\varphi}a}$$

$$V_m^2 = \dot{x}^2 + (\dot{\varphi}a)^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi}\, a\cos(90 - \varphi) = \dot{x}^2 + (\dot{\varphi}a)^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi} a\sin\varphi$$

zatem:

$$E_k = M\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{\dot{x}^2 + (\dot{\varphi}a)^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi} a\sin\varphi}{2}$$

więc:

$$L = E_k - E_p = M\frac{\dot{x}^2}{2} + m\frac{\dot{x}^2 + (\dot{\varphi}a)^2 - 2\dot{x}\dot{\varphi} a\sin\varphi}{2} - c\frac{x^2}{2} - Mgx - mg(x + a\cos\varphi)$$

równanie Lagrange'a dla zmiennej φ:

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{\varphi}})}{dt} - \frac{dL}{d\varphi} = 0$$

obliczenie pochodnych:

$$\frac{dL}{d\dot{\varphi}} = ma^2\dot{\varphi} - \dot{x} m a\sin\varphi$$

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{\varphi}})}{dt} = ma^2\ddot{\varphi} - \ddot{x} m a\sin\varphi - \dot{x}\dot{\varphi} m a\cos\varphi$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = -m\dot{x}\dot{\varphi} a\cos\varphi + mga\sin\varphi$$

po wstawieniu do równania:

$$ma^2\ddot{\varphi} - \ddot{x} m a\sin\varphi - \dot{x}\dot{\varphi} m a\cos\varphi + m\dot{x}\dot{\varphi} a\cos\varphi - mga\sin\varphi = 0$$

$$a\ddot{\varphi} - \ddot{x}\sin\varphi - g\sin\varphi = 0$$

równanie Lagrange'a dla zmiennej x:

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{x}})}{dt} - \frac{dL}{dx} = 0$$

obliczenie pochodnych:

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = M\dot{x} + m\dot{x} - m\dot{\varphi} a\sin\varphi$$

$$\frac{d(\frac{dL}{d\dot{x}})}{dt} = \ddot{x}(M + m) - m\ddot{\varphi} a\sin\varphi - m\dot{\varphi}^2 a\cos\varphi$$

$$\frac{dL}{dx} = -cx - Mg - mg$$

po wstawieniu do równania:

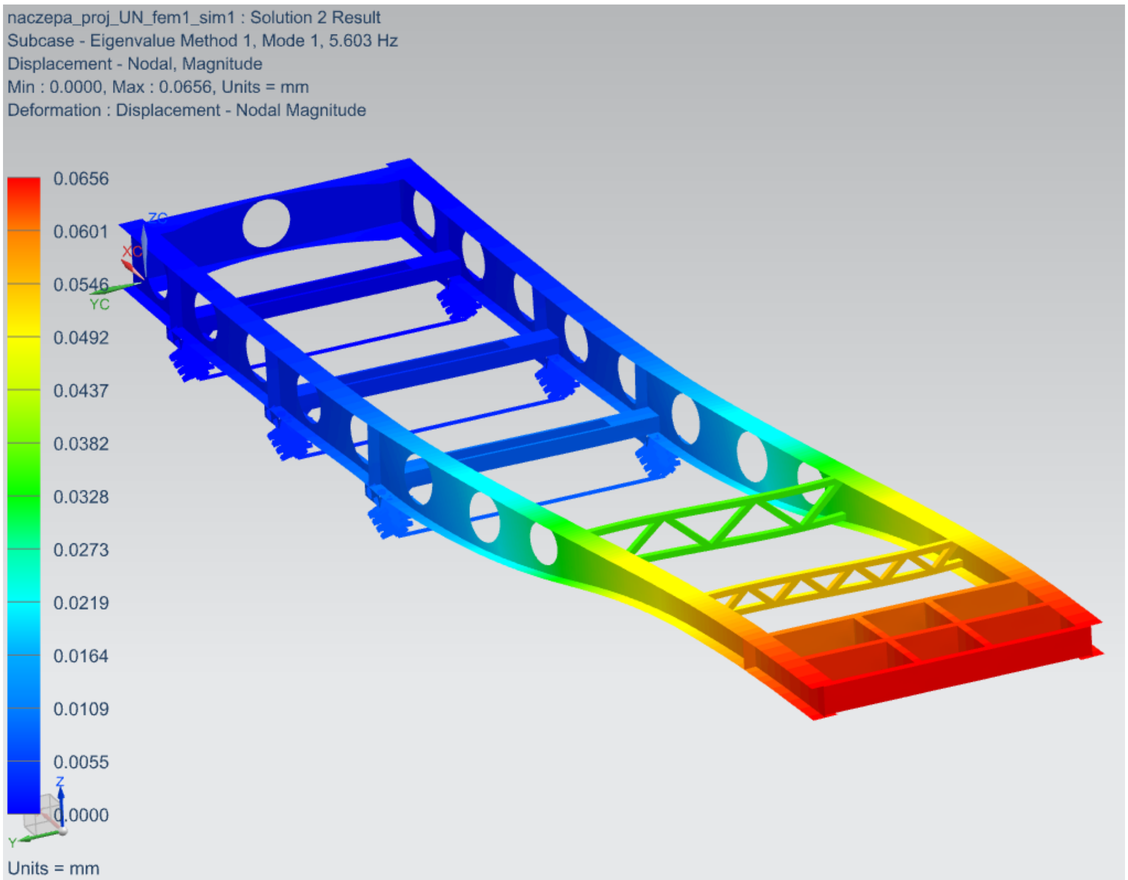
$$\ddot{x}(M + m) - m\ddot{\varphi} a\sin\varphi - m\dot{\varphi}^2 a\cos\varphi - cx - Mg - mg = 0$$

Zatem uzyskujemy układ 2 równań opisujący zadany układ:

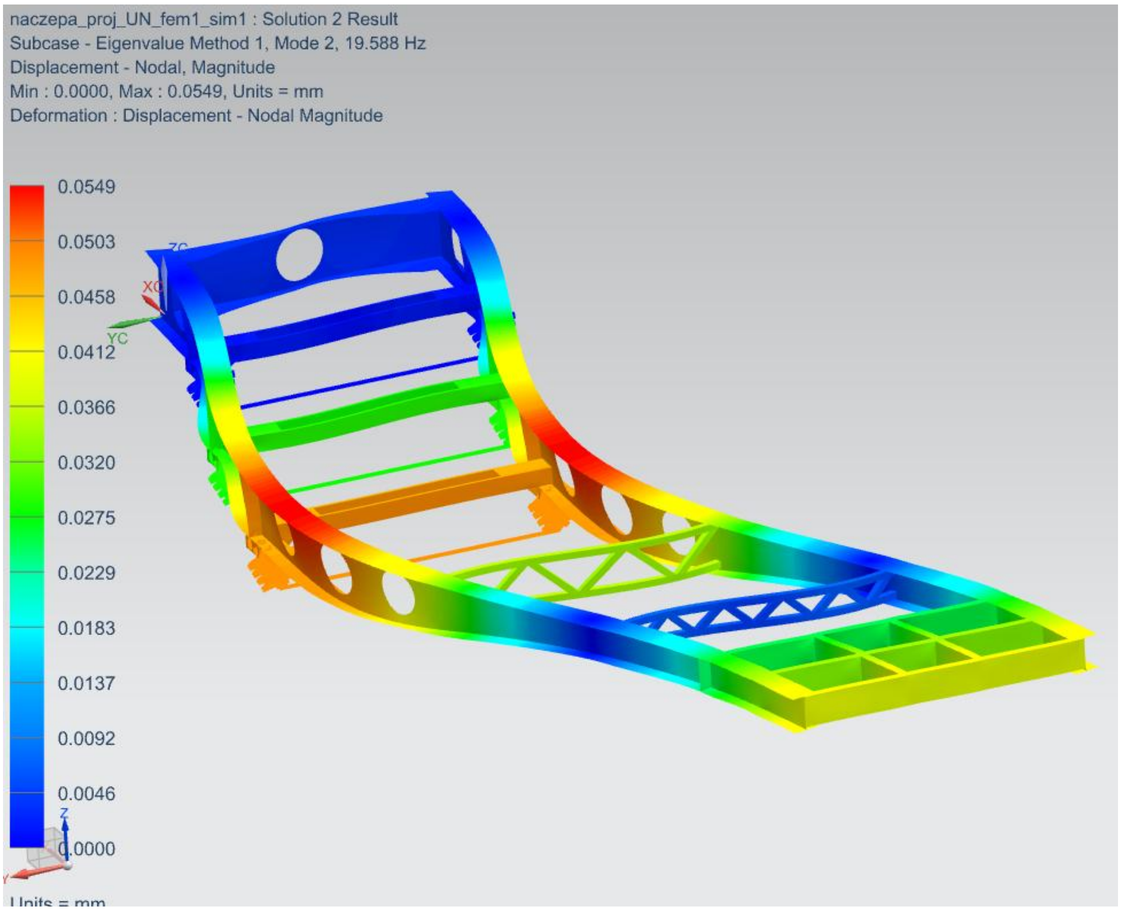
$$\begin{cases} a\ddot{\varphi} - \ddot{x}\sin\varphi - g\sin\varphi = 0 \\ \ddot{x}(M+m) - m\ddot{\varphi}a\sin\varphi - m\dot{\varphi}^2 a\cos\varphi - cx - Mg - mg = 0 \end{cases}$$

4. Wpływ drgań na konstrukcje

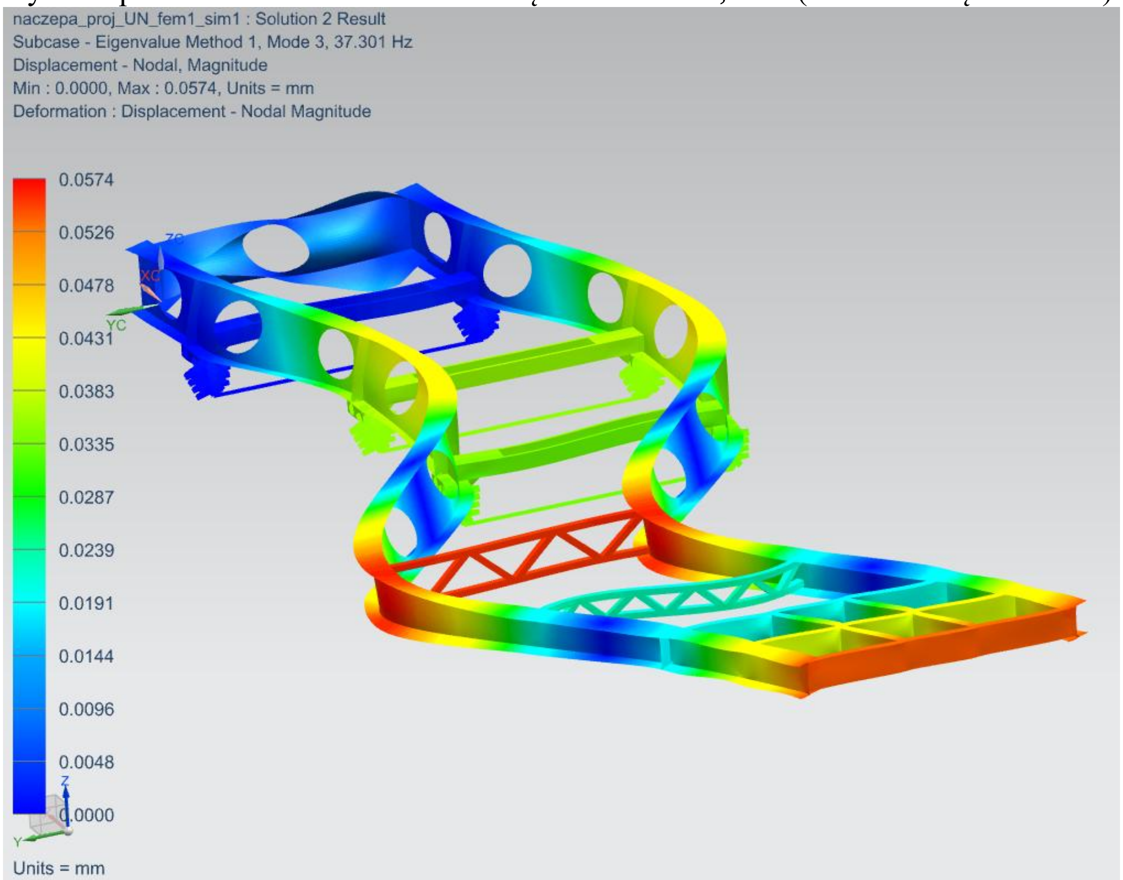
W procesie projektowania konstrukcji inżynierskich pod uwagę należy również wziąć drgania układu które w skrajnych przypadkach prowadzić mogą do zniszczenia.
W programie NX 9.0 zamodelowano ramę naczepy zdolnej do przewozu ładunku o masie całkowitej 40 t. Następnie po odpowiednim utwierdzeniu wybrano rozwiązanie Real Eigenvalues - pozwalające na analizę zachowania konstrukcji (przemieszczeń, naprężeń) w zależności od częstotliwości drgań. Najlepiej jest wiedzieć na jakie częstotliwości narażona może być konstrukcja aby przeprowadzić symulację jej zachowania w określonych wcześniej warunkach. W naszym przypadku badane częstotliwości rozciągają się w przedziale od 5,6 Hz do 66 Hz (łącznie przeliczono dla 10 częstotliwości). Wyniki przemieszczeń:



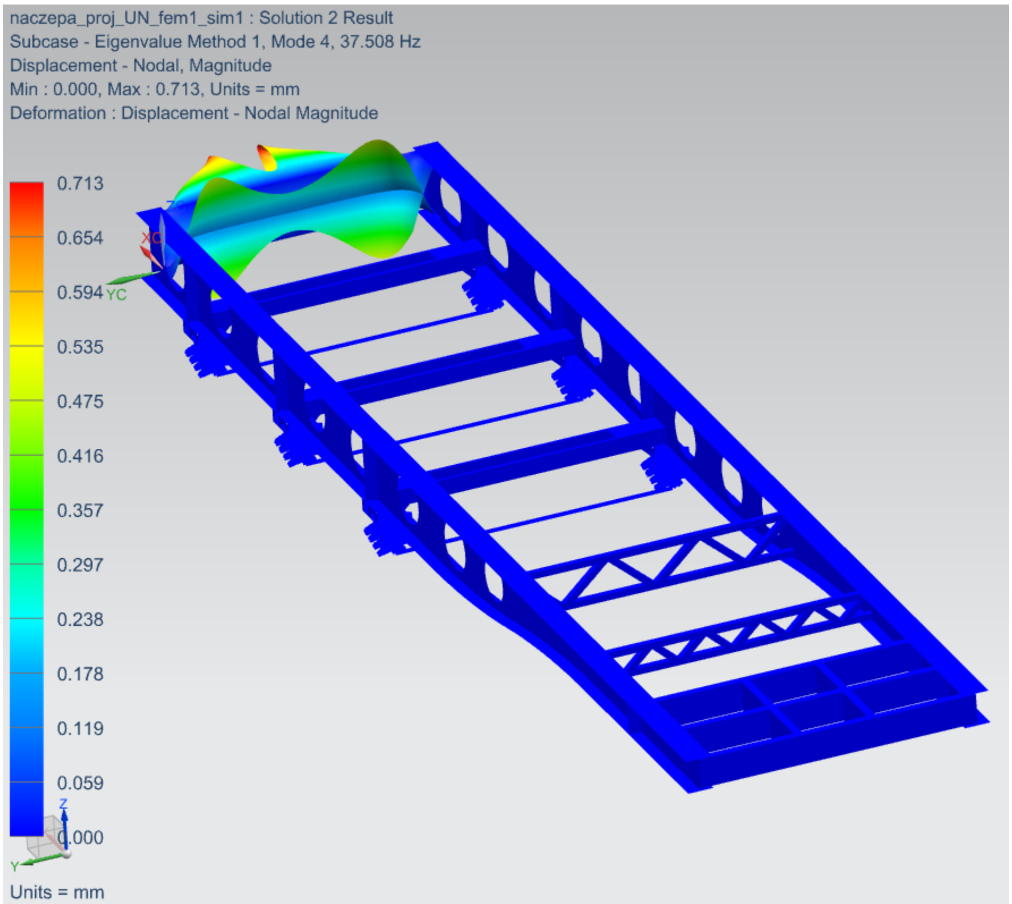
Rys 4.1. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 5,6 Hz (1 badana częstotliwość)



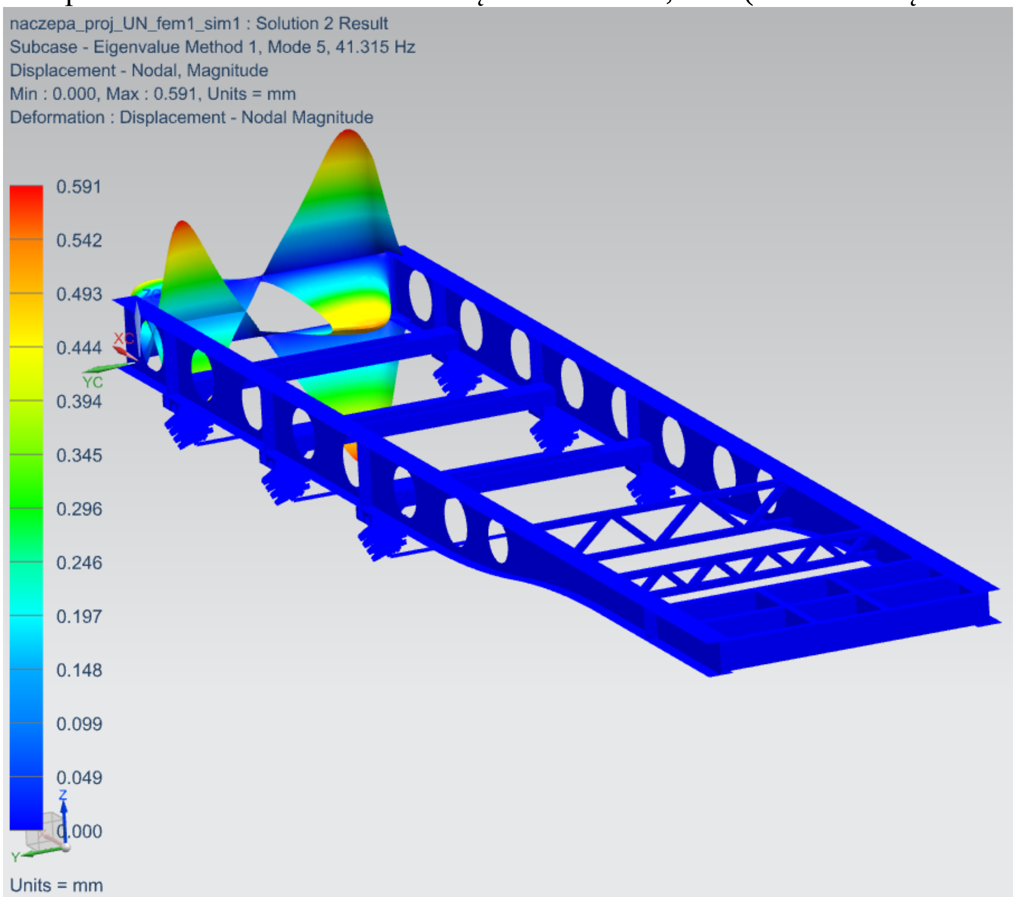
Rys 4.2. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 19,6 Hz (2 badana częstotliwość)



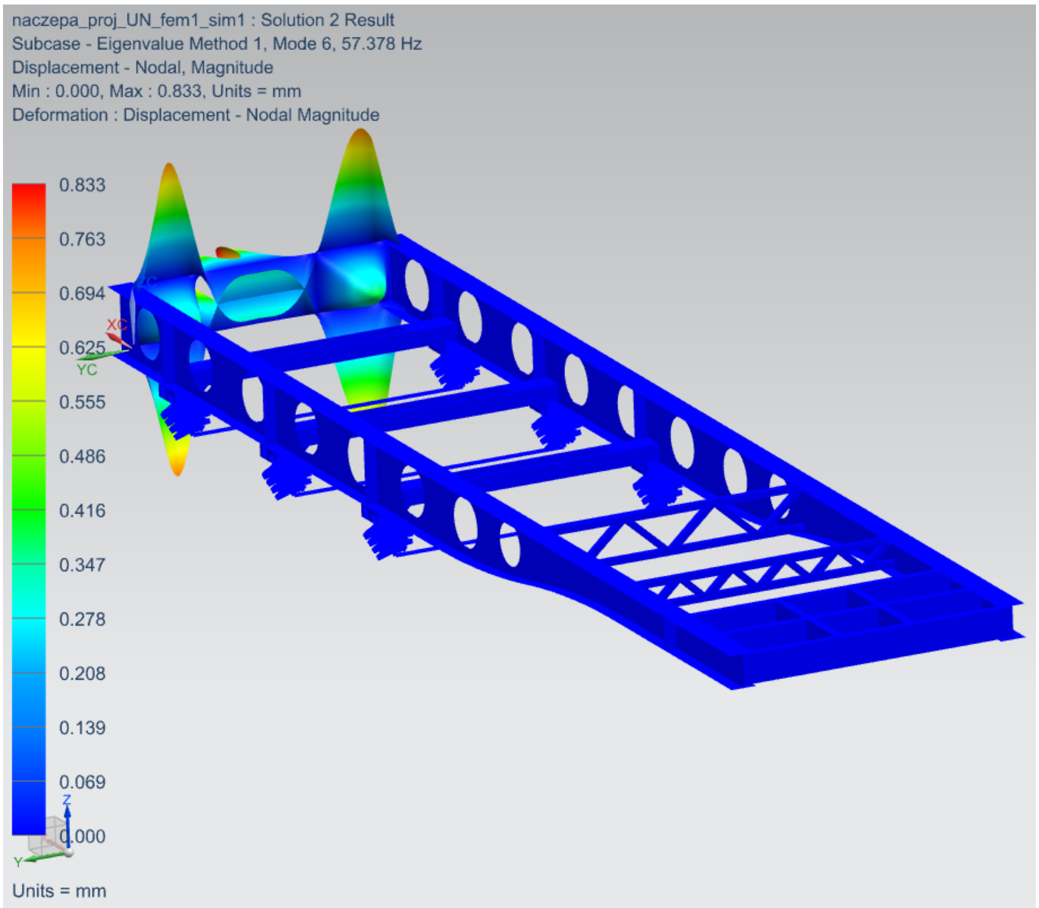
Rys 4.3. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 37,3 Hz (3 badana częstotliwość)



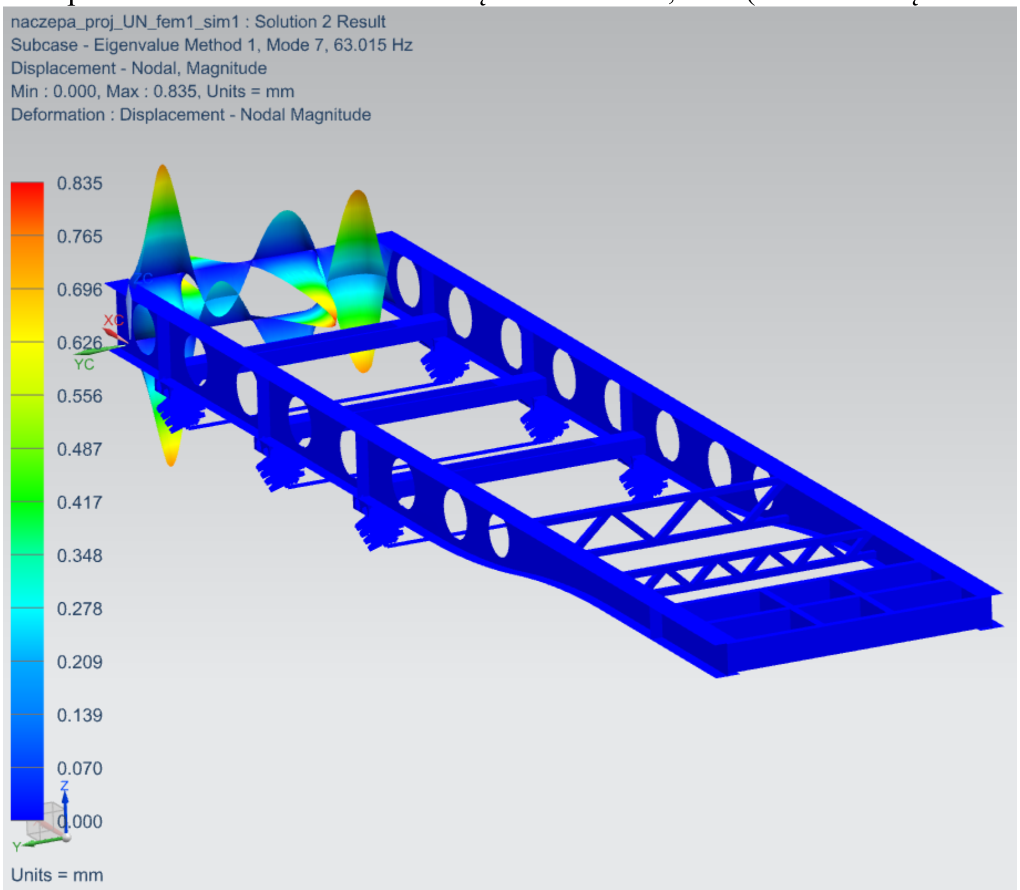
Rys 4.4. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 37,5 Hz (4 badana częstotliwość)



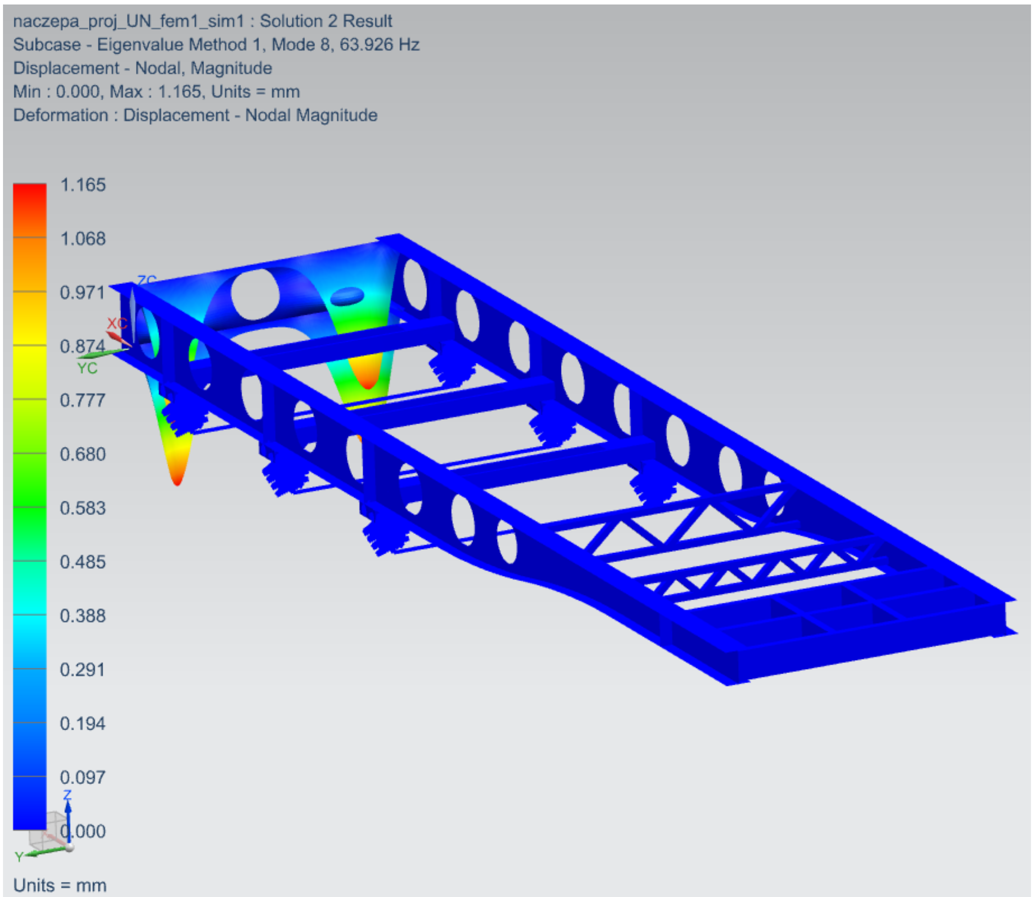
Rys 4.5. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 41,3 Hz (5 badana częstotliwość)



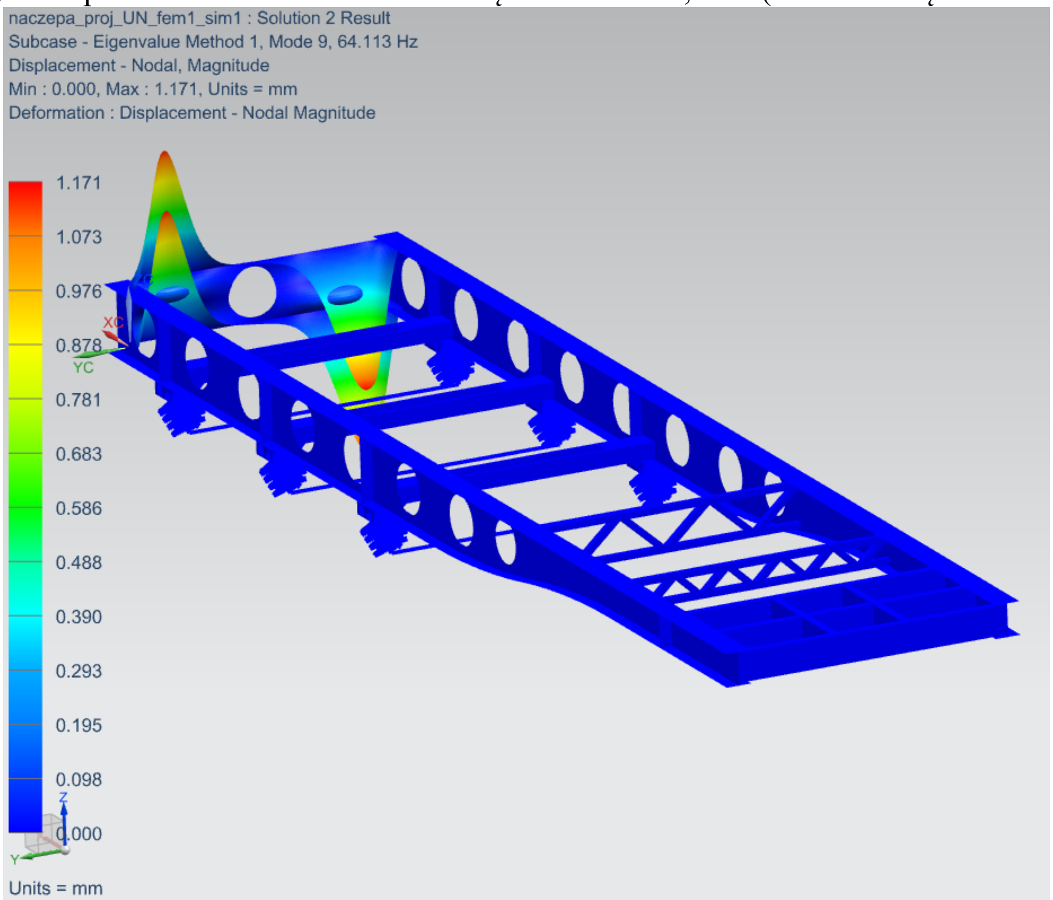
Rys 4.6. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 57,4 Hz (6 badana częstotliwość)



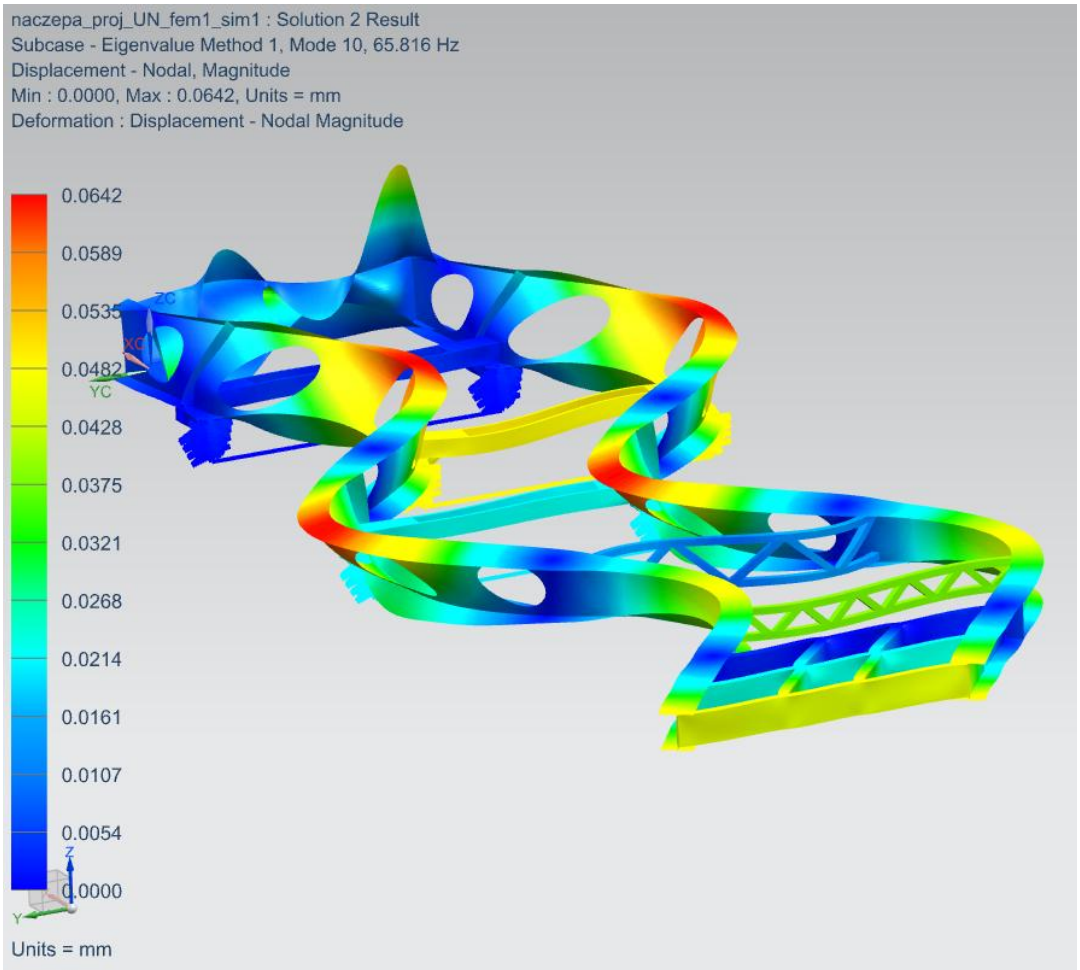
Rys 4.7. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 63 Hz (7 badana częstotliwość)



Rys 4.8. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 63,9 Hz (8 badana częstotliwość)



Rys 4.9. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 64,1 Hz (9 badana częstotliwość)



Rys 4.10. przemieszczenia w ramie dla częstotliwości 65,8 Hz (10 badana częstotliwość)

Z przeprowadzonych pomiarów wynika że konstrukcja jest bezpiecznie zaprojektowana w stosunku do drgań - przemieszczenia nie przekraczają (lub bardzo nieznacznie dla wartości 64 Hz) 1 mm. Wszystkie wyniki pokazane zostały w odpowiedniej skali (przesadzonej w stosunku do rzeczywistości) aby łatwiej można było zaobserwować jak zmienia się geometria modelu pod wpływem określonej częstotliwości drgań.