

## ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

IIUWr. II rok informatyki.

1. (1pkt) Pokaż, że problem znajdowania otoczki wypukłej nie może być rozwiązany w modelu drzew decyzyjnych.
2. (2pkt) Udowodnij, że  $\Omega(n \log n)$  jest dolną granicą dla problemu znajdowania otoczki wypukłej (punktów na płaszczyźnie) w modelu liniowych drzew decyzyjnych.
3. (2pkt) Rozważmy następujący problem:

PROBLEM *3SUM*:*Dane:* Liczby rzeczywiste  $x_1, \dots, x_n$ .*Wynik:* 'TAK' - jeśli  $\exists_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i + x_j + x_k = 0$ ,  
'NIE' - w przeciwnym przypadku.

Udowodnij, że  $\Omega(n \log n)$  jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

4. (1,5pkt) Ułóż algorytm rozwiązujący problem *3SUM* w czasie  $O(n^2)$ .
5. (**Z** 2pkt) Rozwiąż poprzednie zadanie dla takiej "wersji" problemu *3SUM*, w której operacja dodawania jest zastąpiona operacją *XOR*, tj. chcemy sprawdzić, czy w danym ciągu istnieją elementy  $a, b, c$ , takie że  $a \oplus b \oplus c = 0$ .
6. (2pkt) Rozważmy problem, polegający na sprawdzeniu, czy w zbiorze  $n$  punktów leżących na płaszczyźnie znajdują się co najmniej 3 punkty współliniowe. Udowodnij, że problem ten nie jest prostszy niż problem *3SUM*, a dokładniej, że istnienie algorytmu rozwiązującego ten problem w czasie  $o(n^{2-\epsilon})$  implikuje istnienie algorytmu o złożoności  $o(n^{2-\epsilon})$  dla problemu *3SUM*.
7. (1,5pkt) Udowodnij, że  $2n - 1$  porównań trzeba wykonać, aby scalić dwa ciągi  $n$  elementowe w modelu drzew decyzyjnych. Zastosuj grę z adversarzem, w której adversarz na początku ogranicza przestrzeń danych tak, by zawierała  $2n$  zestawów danych takich i by każde porównanie wykonane przez algorytm eliminowało co najwyżej jeden zestaw.
8. (2pkt) Rozważmy problem wyznaczenia za pomocą porównań elementów największego i drugiego z kolei w zbiorze  $n$ -elementowym. Udowodnij, że  $n + \lceil \log n \rceil - 2$  porównań potrzeba i wystarcza do wyznaczenia tych elementów.

ZADANIA DODATKOWE - NIE BĘDĄ ROZWIĄZYWANE W CZASIE ĆWICZEŃ

1. (2 pkt) Mamy dany ustalony zbiór permutacji na  $n$  elementach  $F \subseteq S_n$ . Chcemy posortować liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (używając tylko porównań) wiedząc, że ich permutacja sortująca należy do  $F$ . Pokaż, że istnieje dla tego problemu drzewo decyzyjne o głębokości  $O(n + \log |F|)$ .
2. (0 pkt) Pokaż, że  $\Omega(n \log n)$  pozostaje dolną granicą dla problemu sortowania, jeśli w modelu drzew decyzyjnych na zapytania o relację między elementami  $a$  i  $b$  możliwe są trzy odpowiedzi: " $a < b$ ", " $a = b$ " i " $a > b$ ".
3. (1 pkt) Pokaż, że problem "Element uniqueness" rozkłada się na  $\Omega(n!)$  spójnych składowych.
4. (2 pkt) Rozważmy następujący problem weryfikacji rozmiaru wielozbioru (MSV). Dany jest wielozbiór złożony z  $n$  liczb rzeczywistych oraz liczba naturalna  $k$ . Należy sprawdzić, czy w tym wielozbiorze jest dokładnie  $k$  różnych elementów. Postaraj się wskazać jak najwięcej różnych spójnych składowych, na które problem ten rozkłada się.
5. (2 pkt) *Algebraiczne Drzewo Obliczeń* jest uogólnieniem algebraicznego drzewa decyzyjnego. Posiada ono dwa rodzaje wierzchołków:

- wierzchołki obliczeniowe: z każdym takim wierzchołkiem  $u$  związana jest wartość  $f_u$ , która jest określona jako wynik jednej z poniższych operacji:

$$f_u \leftarrow f_w + f_v, \quad f_u \leftarrow f_w - f_v, \quad f_u \leftarrow f_w * f_v, \quad f_u \leftarrow f_w / f_v, \quad f_u \leftarrow \sqrt{f_v},$$

gdzie  $f_w$  i  $f_v$  są wartościami skojarzonymi z pewnymi przodkami wierzchołka  $u$  lub są elementami ciągu wejściowego lub stałymi z  $R$ .

- wierzchołki rozgałęziające: wierzchołek  $v$  wykonuje test  $f_u < 0$  bądź  $f_u \geq 0$  bądź  $f_u = 0$ , gdzie  $u$  jest przodkiem  $v$ .

Problem Set Equality (SE) zdefiniowany jest następująco: dane są zbiory  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  oraz  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ; pytamy, czy  $X = Y$ . Pokaż, że jeśli dane dla problemu SE są liczbami całkowitymi, to problem ten może być rozwiązany w modelu Algebraicznych Drzew Obliczeń w czasie liniowym.

6. (1 pkt) Rozważmy decyzyjną wersję problemu otoczki wypukłej: mamy dane  $n$  punktów  $p_1, \dots, p_n$  na płaszczyźnie oraz liczbę naturalną  $k$ . Pytamy, czy otoczka wypukła tego zbioru składa się z  $k$  punktów. Wiedząc, że problem MSV, zdefiniowany w jednym z poprzednich zadań, wymaga  $\Omega(n \log k)$  operacji w modelu algebraicznych drzew decyzyjnych, pokaż, że w tym modelu decyzyjna wersja problemu otoczki także wymaga tylu działań.
7. (2 pkt) Problem "Przekrój zbiorów" zdefiniowany jest następująco:

PROBLEM:

*Dane:* Liczby rzeczywiste  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ .

*Wynik:* 'TAK' - jeśli  $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$   
 'NIE' - w przeciwnym przypadku.

Udowodnij, że  $\Omega(n \log n)$  jest dolną granicą na rozwiązanie tego problemu w modelu liniowych drzew decyzyjnych.

Krzysztof Loryś