Zadanie 1

Treść

Przeprowadź dowód poprawności algorytmu Kruskala, który przyrównuje ciąg krawędzi drzewa wybranych przez algorytm Kruskala z ciągiem krawędzi minimalnego drzewa spinającego (otrzymanego przez jakiś algorytm optymalny). W dowodzie nie powołuj się na własności typu *cut property* czy *cycle property*.

Algorytm Kruskala

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, ważonym, gdzie wagi krawędzi są nieujemne, opisane funkcją $c : E \to \mathbb{R}_0^+$. Algorytm Kruskala znajduje minimalne drzewo rozpinając (MST) dla G w następujący sposób:

1. Zainicjalizuj zbiór krawędzi MST jako pusty: $T = \emptyset$.
2. Utwórz listę wszystkich krawędzi E' z grafu G.
3. Posortuj krawędzie na liście E' w kolejności niemalejącej według ich wag $c(e)$. Niech posortowana lista krawędzi to $(e_1, e_2, ..., e_m)$, gdzie $m = |E|$.
4. Dla każdej krawędzi e_i z posortowanej listy (od $i = 1$ do m):
   - Jeśli dodanie krawędzi e_i do zbioru T nie tworzy cyklu w grafie $(V, T \cup \{e_i\})$, dodaj krawędź e_i do T.
5. Zbiór T zawiera krawędzie minimalnego drzewa rozpinającego grafu G.

Dowód

Niech T będzie drzewem wynikowym algorytmu Kruskala dla grafu G, a M niech będzie minimalnym drzewem rozpinającym grafu G o największej liczbie wspólnych krawędzi z T.

Załóżmy nie wprost, że $T \neq M$. Rozpatrzmy $e_i = (v, u)$ $(1 \leq i \leq m)$ będące najlżejszą krawędzią taką że $e_i \in E_T \land e_i \notin E_M$. Wtedy w M istnieje inna ścieżka S z v do u, taka że $|S| > 1$. Zatem w S istnieje e_j $(1 \leq j \leq m)$, takie że $e_j \in E_M \land e_j \notin E_T$ (w przeciwnym przypadku istniałby cykl w T).

Rozpatrzmy przypadki:

1. $\boldsymbol{c(e_i) < c(e_j)}$:

   Wtedy usuwamy e_j z M i dodajemy e_i. W ten sposób uzyskujemy drzewo rozpinające o wadze mniejszej niż M, zatem M nie jest MST. ↯

2. $\boldsymbol{c(e_i) = c(e_j)}$:

   Wtedy usuwamy e_j z M i dodajemy e_i uzyskując $M' = \left(V, \left(E_M \setminus \left\{e_j\right\}\right) \cup \left\{e_j\right\}\right)$, zatem zarówno M jest MST jak i M'.

3. $\boldsymbol{c(e_i) > c(e_j)}$:

   Wtedy e_j było rozpatrywane przed e_i i nie zostało dodane do T. Czyli e_j tworzyło cykl w T. Oznacza to, że istnieje jakieś e_k ($k < j$ i $c(e_k) \leq c\left(e_j\right) < c(e_i)$), takie że $e_k \in T \land e_k \notin M$. Mamy sprzeczność z założeniem wyboru e_i, bo założyliśmy, że e_i jest najlżejszą dostępną krawędzią. ↯

Co dowodzi poprawności algorytmu Kruskala.

∎

Opracował: Filip Figzał, 2025