Zadanie 5

Treść

Ułóż algorytm, który dla danego grafu $G = (V, E)$ oraz liczby naturalnej k znajdzie możliwie największy podzbiór $V' \subseteq V$, taki że dla każdego wierzchołka $v \in V'$ zachodzi:

$$|\{u \in V' : \{v,u\} \in E\}| \geq k \text{ oraz}$$
$$|\{u \in V' : \{v,u\} \notin E\}| \geq k$$

Wyjaśnienie

Celem jest znalezienie największego (w sensie liczby wierzchołków) podzbioru V' grafu G, takiego że każdy wierzchołek v w tym podzbiorze V' ma:

1. Co najmniej k **sąsiadów** należących do V'.
2. Co najmniej k **nie-sąsiadów** należących do V' (czyli wierzchołków z $V' \setminus v$ z którymi v nie tworzy krawędzi w G).

Algorytm

Niech V_{cur} oznacza zbiór aktualnie rozważanych (jeszcze nieusuniętych wierzchołków). Początkowo $V_{\text{cur}} = V$. Dla każdego wierzchołka $v \in V_{\text{cur}}$ będziemy śledzić jego stopień $d_{\text{cur}}(v)$ (liczbę sąsiadów w V_{cur}).

1. Utwórz kubełki `KUB[i]` dla i od 0 do $|V| - 1$. Dla każdego wierzchołka $v \in V$ oblicz jego początkowy stopień $d(v)$ w grafie G i umieść v w kubełku `KUB[d(v)]`.

2. Utwórz pustą kolejkę `Q`. Dla każdego wierzchołka $v \in V_{\text{cur}}$:
   i. Jeśli $d_{\text{cur}}(v) < k$ (za mało sąsiadów w V_{cur}), dodaj v do `Q`.
   ii. Jeśli $|V_{\text{cur}}| - 1 - d_{\text{cur}}(v) < k$ (za mało nie-sąsiadów w V_{cur}), dodaj v do `Q` (jeśli nie został już dodany).

   Oznacz wierzchołki dodane do `Q` jako “do usunięcia”, aby uniknąć duplikatów.

3. Dopóki kolejka `Q` nie jest pusta:

   i. Wyjmij wierzchołek v z `Q`. Oznacz v jako “usunięty” i usuń go z V_{cur} (zmniejszając tym samym $|V_{\text{cur}}|$).

   ii. Dla każdego sąsiada u wierzchołka v (takiego, który jest w V_{cur} i nie jest “usunięty” ani “do usunięcia”):
      a. Przenieś u z `KUB[`$d_{\text{cur}}(u)$`]` do `KUB[`$d_{\text{cur}}(u) - 1$`]`. Zaktualizuj $d_{\text{cur}}(u) \leftarrow d_{\text{cur}}(u) - 1$.
      b. Jeśli $d_{\text{cur}}(u) < k$ (teraz u ma za mało sąsiadów), dodaj u do `Q` i oznacz jako “do usunięcia”.

   iii. Po usunięciu v i zaktualizowaniu wszystkich sąsiadów, rozmiar V_{cur} zmalał. Może to spowodować, że niektóre wierzchołki mają teraz za mało nie-sąsiadów.

      Dla każdego wierzchołka w znajdującego się w kubełku `KUB[`$|V_{\text{cur}}| - k$`]`:
      - jeśli w jest w V_{cur} i nie jest “do usunięcia”, dodaj w do `Q` i oznacz jako “do usunięcia”. (Warunek $|V_{\text{cur}}| - 1 - d_{\text{cur}}(w) < k$ będzie automatycznie spełniony dla $d_{\text{cur}}(w) = |V_{\text{cur}}| - k$).

4. Zbiór V' to wszystkie wierzchołki, które nie zostały oznaczone jako “usunięte” (czyli pozostałe V_{cur}).

Opracował: Filip Figzał, 2025

Analiza złożoności

1. **Inicjalizacja kubełków** $O(V + E)$

   Obliczenie stopni wszystkich wierzchołków i umieszczenie ich w kubełkach.

2. **Inicjalizacja kolejki** $O(V)$

   Przejrzenie wszystkich $|V|$ wierzchołków i ewentualne dodanie ich do kolejki.

3. **Pętla główna**

   Pętla wykonuje się co najwyżej $|V|$ razy, ponieważ każdy wierzchołek może być dodany do kolejki i usunięty co najwyżej raz.

   i. **Wyjęcie z kolejki, oznaczenie** $O(V)$

   Obie operacje wykonują się w czasie $O(1)$.

   ii. **Aktualizacja sąsiadów**

   Gdy wierzchołek v jest usuwany, przeglądamy jego sąsiadów. Każda krawędź $\{v, u\}$ jest brana pod uwagę co najwyżej dwa razy w całym algorytmie (raz gdy v jest usuwane i raz gdy u jest usuwany).

   Każdy wierzchołek jest dodawany do kolejki co najwyżej raz.

   Sumaryczne koszty

   - Aktualizacja stopni i przenoszenie między kubełkami $O(E)$
   - Dodawanie sąsiadów do kolejki $O(V)$

   iii. **Sprawdzenie warunku nie-sąsiadów** $O(V)$

   Każdy wierzchołek może zostać dodany do kolejki co najwyżej raz oraz sprawdzamy tylko jeden kubełek.

Całkowita złożoność czasowa algorytmu wynosi $O(V + E)$.

Złożoność pamięciowa to $O(V + E)$ na przechowanie grafu, kubełków i kolejki.

Dowód poprawności

Dowód opiera się na niezmienniku pętli. Niech V_{cur} oznacza zbiór wierzchołków nieusuniętych.

Na początku każdej iteracji głównej pętli, każdy wierzchołek $w \in V_{\text{cur}}$, który nie znajduje się w kolejce `Q`, spełnia oba warunki zadania względem aktualnego zbioru V_{cur}:

1. Liczba sąsiadów $w \in V_{\text{cur}}$ (oznaczane jako $d_{\text{cur}}(w)$) jest $\geq k$.
2. Liczba nie-sąsiadów w w V_{cur} (to jest $|V_{\text{cur}}| - 1 - d_{\text{cur}}(w)$) jest $\geq k$.

Inicjalizacja

Przed pierwszą iteracją pętli (po inicjalizacji kolejki:

- Wszystkie wierzchołki $v \in V$ (bo $V_{\text{cur}} = V$ na tym etapie) zostały sprawdzone.
- Te, które nie spełniały warunku liczby sąsiadów lub nie-sąsiadów, zostały dodane do kolejki `Q`.

  Zatem każdy wierzchołek $w \in V_{\text{cur}}$ niebędący w `Q` musi spełniać oba warunki.

Utrzymanie

Załóżmy, że niezmiennik jest prawdziwy na początku iteracji. Wierzchołek v jest wyjmowany z `Q` i usuwany z V_{cur}.

1. **Usunięcie**

   v nie jest już w V_{cur}, więc nie musi spełniać niezmiennika. Rozmiar V_{cur} maleje o 1.

2. **Aktualizacja sąsiadów**

   Dla każdego sąsiada u wierzchołka v (który jest w V_{cur}):

   i. Jego stopień $d_{\text{cur}}(u)$ maleje o 1.

   ii. Jeśli nowy $d_{\text{cur}}(u)$ spadnie poniżej k, u jest dodawany do `Q`.

3. **Sprawdzenie nie-sąsiadów**

   Liczba nie-sąsiadów wynosi teraz $|V_{\text{cur}}|_{\text{nowy}} - 1 - d_{\text{cur}}(w)$. Jeśli ta wartość jest mniejsza od k, w jest dodawany do `Q`. Algorytm identyfikuje takie wierzchołki dla których liczba nie-sąsiadów to $k - 1$ (poprzez odwołanie do odpowiedniego kubełka).

Po tych operacjach każdy wierzchołek $w \in V_{\text{cur}}$, który nie jest w `Q`, musi mieć $d_{\text{cur}}(w) \geq k$ (bo inaczej zostałby dodany w poprzedniej iteracji lub w kroku ii.) oraz $|V_{\text{cur}}| - 1 - d_{\text{cur}} \geq k$ (bo inaczej zostałby dodany w poprzedniej iteracji lub w kroku iii.).

Terminacja

Pętla kończy się, gdy kolejka `Q` jest pusta. Zgodnie z niezmiennikiem, w tym momencie każdy wierzchołek w w ostatecznym zbiorze V_{cur} (czyli V') nie jest w `Q` i nie jest usunięty. Dlatego każdy $w \in V'$ spełnia oba warunki:

1. $d_{V'}(w) \geq k$
2. $|V'| - 1 - d_{V'}(w) \geq k$

Jest to dokładnie definicja wymaganego podzbioru.

∎

Maksymalność

Algorytm usuwa wierzchołki iteracyjnie. Wierzchołek jest usuwany tylko wtedy, gdy narusza co najmniej jeden z warunków w kontekście aktualnie nieusuniętych wierzchołków.

Jeśli wierzchołek v został usunięty, oznacza to, że nie mógłby być częścią żadnego poprawnego rozwiązania V_{opt} będącego podzbiorem aktualnego V_{cur} (w momencie przed usunięciem v), ponieważ v naruszałby warunki w V_{opt} (gdyż $V_{\text{opt}} \subseteq V_{\text{cur}}$ i warunki są monotoniczne w sensie, że usunięcie innych wierzchołków nie poprawi sytuacji v). Każdy wierzchołek, który mógłby należeć do jakiegokolwiek rozwiązania, nie zostanie usunięty. Zatem znaleziony zbiór V' jest największym możliwym podzbiorem.

∎