Branko J. Malešević

POZITIVNOST MTP FUNKCIJA

Miksovano trigonometrijsko polinomske nejdnakosti. *Pod MTP - miksovano trigonometrijsko polinomskom funkcijom podrazumevamo funkciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$$

za $\alpha_i \in R \backslash \{0\}$ *i* $p_i, q_i, r_i \in N_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ *za vrednosti argumenta* $x \in (0, c)$, *pri standardnoj vrednosti* $c = \pi/2$. *Za MTP funkciju* f *osnovni problem nanižne aproksimacije je da se odredi polinom* P *takav da*

$$f(x) > P(x)$$

za $x \in (0, c)$. *Ukoliko za polinom* P *važi polinomska nejednakost*

$$P(x) > 0$$

za $x \in (0, c)$, *tada za MTP funkciju* f *važi MTP nejdnakost*

$$f(x) > 0$$

za $x \in (0, c)$.

U cilju određivanja navišnih i nanižnih polinomskih aproksimacija MTP funkcija koristićemo Makloren-ove polinome[*)] *trigonometrijskih funkcija* cos *i* sin *određenih redom sa*

$$T_{2n}^{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

i

$$T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

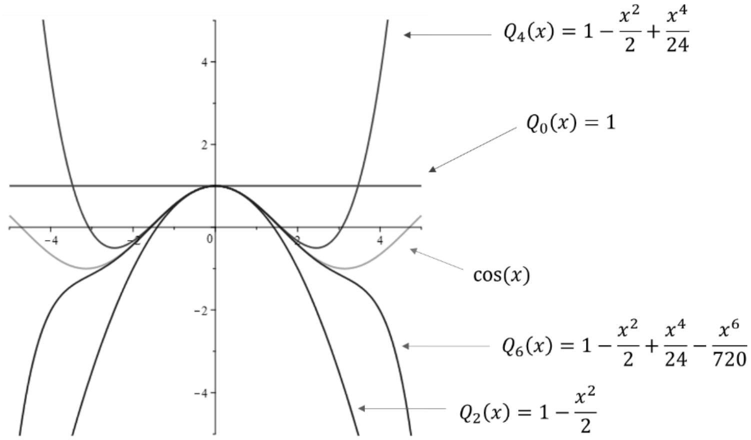
za $n \in N_0$ *i* $x \in (0, c)$.

Lema 1. *Za Maklorenov polinom* cos *funkcije* $T_m^{\cos,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{m/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i}$, *parnog stepena* m, *važi:*

$$m = 4\,k \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\; \overline{T}_m^{\cos,0}(x) \geq \overline{T}_{m+4}^{\cos,0}(x) \geq \mathbf{cos}\, x,$$

$$m = 4\,k+2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\; \underline{T}_m^{\cos,0}(x) \leq \underline{T}_{m+4}^{\cos,0}(x) \leq \mathbf{cos}\, x.$$

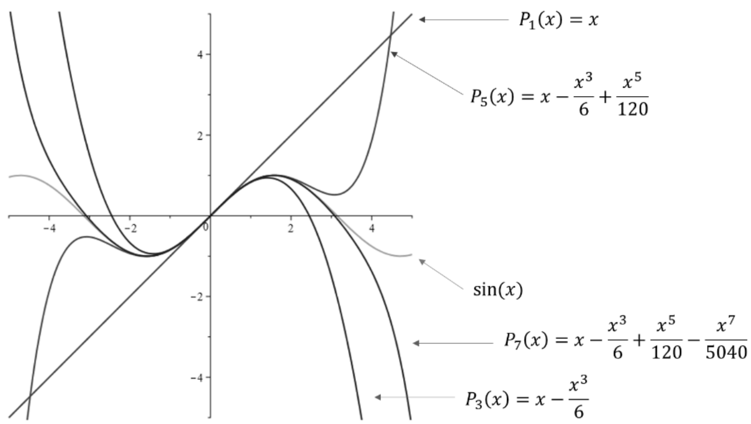
[*)] pri tom koristimo oznaku $T_k^{\varphi,a}(x)$ za *Tejlorov polinom* stepena k funkcije φ u tački a i specijalno za $a = 0$ takav polinom uobičajeno nazivamo *Maklorenov polinom*



Lema 2. *Za Maklorenov polinom* sin *funkcije* $T_m^{\sin,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{(m-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}$, *neparnog stepena* m, *važi*:

$$m = 4\,k+1 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(n+4)}\,\Big]\Big)\; \overline{T}_m^{\sin,0}(x) \geq \overline{T}_{m+4}^{\sin,0}(x) \geq \mathbf{sin}\, x,$$

$$m = 4\,k+3 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in \Big[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\,\Big]\Big)\; \underline{T}_m^{\sin,0}(x) \leq \underline{T}_{m+4}^{\sin,0}(x) \leq \mathbf{sin}\, x.$$



Teorema 1.
Za Maklorenove polinome odgovarajućeg stepena cos *i* sin *funkcija važe nejednakosti*

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} T_{4s+2}^{\cos,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{2s+1} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\, x^{2i} & < & \mathbf{cos}\, x & < & \sum\limits_{i=0}^{2s} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\, x^{2i} = T_{4s}^{\cos,0}(x) \\ T_{4r+3}^{\sin,0}(x) = \sum\limits_{i=0}^{2r+1} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\, x^{2i+1} & < & \mathbf{sin}\, x & < & \sum\limits_{i=0}^{2r} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\, x^{2i+1} = T_{4r+1}^{\sin,0}(x) \end{array} \right\} \quad (r, s \in N_0),$$

za realne vrednosti argumenata x.

Teorema 2
Za ma koju MTP funkciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$$

postoji polinom P *kao nanižna polinomska aproksimacija MTP funkcije* f *takva da važi*

$$f(x) > P(x),$$

za vrednosti argumenta $x \in (0, c)$.

Napomena. *Važi implikacija koja dokazuje pozitivnost MTP funkcije*:

$$(\forall x \in (0,c)) P(x) > 0 \implies (\forall x \in (0,c)) f(x) > 0\,.$$

Postupci određivanja polinoma $P(x)$

(*i*) Metoda direktnog poređenja. *Koristi se za klasu prostih MTP funkcija oblika*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{p_i} \cos^{q_i} x + \sum_{j=1}^{m} \beta_i\, x^{p_j} \sin^{r_j} x,$$

gde $\alpha_i, \beta_j \in R\backslash\{0\}$ *i* $p_i, q_i, p_j, r_j \in N_0$ $(i=1,\ldots,n \,\wedge\, j=1,\ldots,m)$ *za vrednosti argumenta* $x \in (0,c)$, *pri standardnoj vrednosti* $c=\pi/2$. *U cilju određivanja polinoma* $P(x)$ *moguće je koristiti**) *prethodno navedene procene*:

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_i > 0: & \cos x > T^{\cos,0}_{4s+2}(x), \\ \alpha_i < 0: & \cos x < T^{\cos,0}_{4s}(x), \\ \beta_j > 0: & \sin x > T^{\sin,0}_{4r+3}(x), \\ \beta_j < 0: & \sin x < T^{\sin,0}_{4r+1}(x); \end{array} \right\}$$

za $x \in (0,c)$.

Napomena 1. (*Ograničenje metode direktnog poređenja*) *Primetimo da*

$$\cos x > T^{\cos,0}_{4s+2}(x) \qquad\qquad (x \in (0,\pi/2))$$

i pri tom Tejlorov polinom $T^{\cos,0}_{4s+2}(x)$ *ima (jedinstven) koren* $c_s \in (0,\pi/2)$. *Stoga za sabirke sa pozitivnim koeficijentima uz parne stepene* $\cos^{2\ell} x$ $(q_i = 2\ell)$ *važi*

$$\cos^{2\ell} x \geq \left(T^{\cos,0}_{4s+2}(x)\right)^{2\ell} \qquad\qquad (x \in (0,c_s)).$$

Dakle, metoda direktnog poređenja može da se razmatra u ovom slučaju samo na $(0,c_s) \subset (0,\pi/2)$.

Napomena 2. (Prevazilaženje ograničenja metode direktnog poređenja) *Ostvaruje se transformacijom proste MTP funkcije tako što se za sabirke sa pozitivnim koeficijentima uz parne stepene* $\cos^{2\ell} x$ $(q_i = 2\ell)$ *primeni transformacija*

$$\cos^{2\ell} x = (1-\sin^2 x)^{\ell} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k \sin^k x\,.$$

(*ii*) Metoda višestrukih uglova. *Koristi se za opštu MTP funkciju*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$$

tako što se svaki izraz $\cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$ *transformiše prema tablici*

*) Uzimajući u obzir Napomenu 1 i Napomenu 2.

$\mathbf{cos}^n x\, \mathbf{sin}^m x$		
$n=q_i$	$m=r_i$	smena
parno	parno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{cos}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{m+\frac{n}{2}+j}\binom{n}{j}\binom{m}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-j}}{2^{n+m}}$
neparno	parno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{cos}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
parno	neparno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{sin}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
neparno	neparno	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}\mathbf{sin}((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$

Navedene semene omogućavaju da se dobije zapis MTP funkcije preko višestrukih uglova u sledećem obliku

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, x^{p_i}\,(\mathbf{cos}^{q_i}x\,\mathbf{sin}^{r_i}x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, x^{p_i}\left(\sum_{k=0}^{m_i}\theta_k\,\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)}\Big(\underbrace{(q_i-r_i-2k)\,x}_{(=t)}\Big)\right)$$

pri čemu

$$\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)}=\begin{cases}\mathbf{cos}\ : & q_i\text{-neparno}, r_i\text{-parno ili } q_i\text{-parno}, r_i\text{-parno}\\ \mathbf{sin}\ : & q_i\text{-neparno}, r_i\text{-neparno ili } q_i\text{-parno}, r_i\text{-neparno}\end{cases}\qquad i\quad m_i=m_i(q_i,r_i)=\left\lceil\frac{q_i+r_i}{2}\right\rceil-1$$

dok se koeficijenti θ_k određuju spram navedene tablice. Na osnovu prethodnog

$$\mathbf{trig}_k^{(q_i,r_i)}\text{-}\textit{funkcije su ili } \mathbf{cos}\text{-}\textit{funkcija ili } \mathbf{sin}\text{-}\textit{funkcija}.$$

Samim tim moguće je koristiti prethodno navedene procene (*bez ikakvih ograničenja*):

$$(**)\qquad\left\{\begin{array}{ll}\alpha_i\theta_k>0: & \mathbf{cos}\,t>T_{4s+2}^{\cos,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k<0: & \mathbf{cos}\,t<T_{4s}^{\cos,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k>0: & \mathbf{sin}\,t>T_{4r+3}^{\sin,0}(t),\\ \alpha_i\theta_k<0: & \mathbf{sin}\,t<T_{4r+1}^{\sin,0}(t);\end{array}\right\}$$

gde je $t=(q_i-r_i-2k)\,x$, u cilju određivanja nanižne polinomske aproksimacije $P(x)$ nad $(0,c)$.

Prethodne smene za konkretne vrednosti stepena $n,m\leq 4$ su tabelirane u Dodatku na kraju ovog teksta.

Projektni zadatak: *Za pogodno*[*)] *izabranu MTP funkciju $f:(0,c)\longrightarrow R$ dokazati MTP nejednakost $f(x)>0$ nad $(0,c)$, određujući pozitivnu nanižnu polinomsku aproksimaciju $P(x)>0$ nad $(0,c)$.*

Test primer rešenja

(*i*) Metoda direktnog poređenja

Primer. *Dokazati pozitivnost proste MTP funkcije*

$$f(x)=x^3\sin x-x\cos^3 x+x-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{32}x^4$$

nad $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

[*)] Pod tim podrazumevamo da je izbor funkcije takav de je grafički - vizuelno pozitivna nad posmatranim intervalom i da se sastoji od bar dva sabirka od kojih je bar jedan sa pozitvnim i bar jedan sa negativnim koeficijentom.

Rešenje. Koristimo poređenja

$$\sin x > T^{\sin,0}_{4k_1+3}(x) \quad \text{i} \quad \cos x < T^{\cos,0}_{4k_2+0}(x),$$

nad $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2 \in N_0$. Pomoću ovih aproksimacija formiramo polinom

$$P_{k_1,k_2}(x) = x^3\, T^{\sin,0}_{4k_1+3}(x) - x\left(T^{\cos,0}_{4k_2+0}(x)\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4,$$

koji razmatramo nad $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2 \in N_0$. Po načinu formiranja

$$f(x) > P_{k_1,k_2}(x)$$

nad $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ i za svaki izbor indeksa $k_1, k_2 \in N_0$. Tražimo neki izbor indeksa $k_1, k_2 \in N_0$ za koji je tačna nejednakost

$$P_{k_1,k_2}(x) > 0$$

nad intervalom sa racionalnim rubovima

$$(0, 1.58) = \left(0, \frac{79}{50}\right)$$

koji sadrži posmatrani interval $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1.570796\ldots)$.

1. $\boldsymbol{k_1 = 0, k_2 = 0:}$

$$\begin{aligned}
P_{0,0}(x) &= x^3\, T^{\sin,0}_3(x) - x\left(T^{\cos,0}_0(x)\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - x\left(1\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= -\frac{1}{6}x^6 + \frac{35}{32}x^4 - \frac{3}{2}x^3.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme, kao u drugom projektnom zadatku, može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{0,0}(x) < 0.$$

Samim tim:

$P_{0,0}(x)$ *nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije* $f(x)$ *nad* $(0, \pi/2)$.

2. $\boldsymbol{k_1 = 0, k_2 = 1:}$

$$\begin{aligned}
P_{0,1}(x) &= x^3\, T^{\sin,0}_3(x) - x\left(T^{\cos,0}_4(x)\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - x\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4 \\
&= -\frac{1}{13824}x^{13} + \frac{1}{384}x^{11} - \frac{7}{192}x^9 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{8}x^5 + \frac{35}{32}x^4.
\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme, kao u drugom projektnom zadatku, može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 153/100))\; P_{0,1}(x) > 0$$

i $P_{0,1}(x)$ ima jednu nulu $x = 1.53570...$ na $(1.53, \pi/2)$. Samim tim:

$P_{0,1}(x)$ *nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije* $f(x)$ *nad* $(0, \pi/2)$.

3. $k_1=1, k_2=0$:

$$\begin{aligned}P_{1,0}(x) &= x^3\, T_7^{\sin,0}(x) - x\Big(T_0^{\cos,0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4\\ &= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7\right) - x\Big(1\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4\\ &= -\frac{1}{5040}x^{10} + \frac{1}{120}x^8 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{35}{32}x^4 - \frac{3}{2}x^3.\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme, kao u drugom projektnom zadatku, može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{1,0}(x) < 0.$$

Samim tim:

$P_{1,0}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

4. $k_1=1, k_2=1$:

$$\begin{aligned}P_{1,1}(x) &= x^3\, T_7^{\sin,0}(x) - x\Big(T_4^{\cos,0}(x)\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4\\ &= x^3\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7\right) - x\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\Big)^3 + x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{32}x^4\\ &= -\frac{1}{13824}x^{13} + \frac{1}{384}x^{11} - \frac{1}{5040}x^{10} - \frac{7}{192}x^9 + \frac{1}{120}x^8 + \frac{1}{4}x^7 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{7}{8}x^5 + \frac{35}{32}x^4.\end{aligned}$$

Primenom Šturmove teoreme, kao u drugom projektnom zadatku, može se zaključiti

$$(\forall x \in (0, 79/50))\; P_{1,1}(x) > 0.$$

Samim tim:

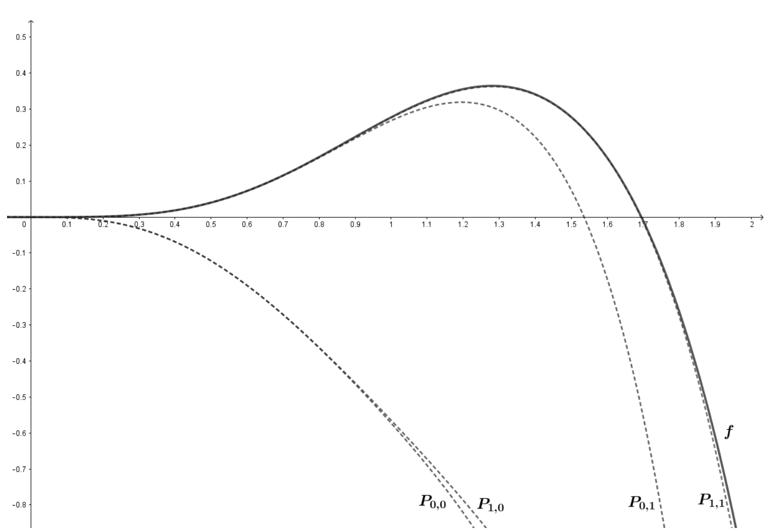
$P_{1,1}(x)$ jeste traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

Zaista, na osnovu poretka

$$(\forall x \in (0, \pi/2))\; f(x) > P_{1,1}(x),$$

ujedno je dokazana pozitivnost polazne MTP funkcije:

$$(\forall x \in (0, \pi/2))\; f(x) > 0.$$



(ii) *Metoda višestrukih uglova*

Primer. *Dokazati pozitivnost MTP funkcije*

$$f(x) = \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rešenje. Koristimo sledeću transformaciju*)

$$(\star) \qquad \cos x \sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x.$$

Samim tim imamo sledeću transformaciju polazne MTP funkcije na višestruke uglove

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x \\ \underset{(\star)}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{f(x)} &\boldsymbol{= -\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x}. \end{aligned}$$

Koristimo poređenja

$$\begin{aligned} \cos 3x &< T^{\cos,0}_{4k_1+0}(3x), \\ \cos x &> T^{\cos,0}_{4k_2+2}(x), \\ \sin x &> T^{\sin,0}_{4k_3+3}(x), \\ \cos x &< T^{\cos,0}_{4k_4+0}(x), \end{aligned}$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2, k_3, k_4 \in N_0$. Pomoću ovih aproksimacija formiramo polinom

$$P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x) = -\frac{1}{4}T^{\cos,0}_{4k_1}(3x) + \frac{1}{4}T^{\cos,0}_{4k_2+2}(x) + xT^{\sin,0}_{4k_3+3}(x) - 2x^2 T^{\cos,0}_{4k_4}(x),$$

koji razmatramo nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za $k_1, k_2, k_3, k_4 \in N_0$. Po načinu formiranja

$$f(x) > P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x)$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i za svaki izbor indeksa $k_1, k_2, k_3, k_4 \in N_0$. Tražimo neki izbor indeksa $k_1, k_2, k_3, k_4 \in N_0$ za koji je tačna nejednakost

$$P_{k_1,k_2,k_3,k_4}(x) > 0$$

nad intervalom $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 1.570796\ldots)$. U narednom se navodi da ta nejednakost važi i na nešto širem intervalu $(0, 1.58) = \left(0, \frac{79}{50}\right)$ koji sadrži posmatrani interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Napomenimo da jednakost važi u levom rubu $x = 0$. Za takav izbor indeksa ujedno dobijamo i dokaz polazne MTP nejednakosti $f(x) > 0$ na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

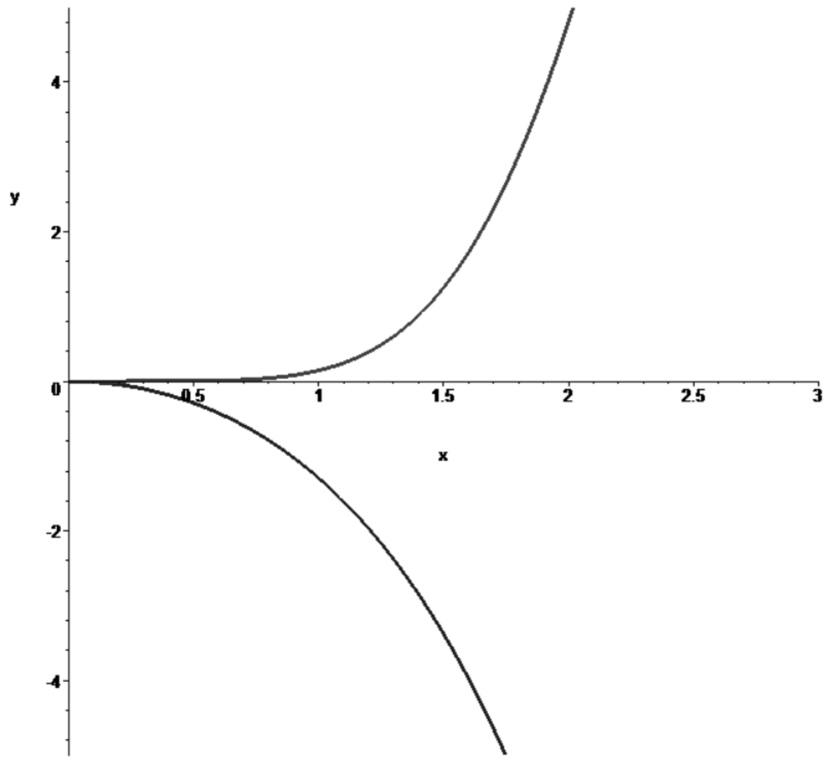
$\boldsymbol{k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0:}$

$$\begin{aligned} P_{0,0,0,0}(x) &= -\frac{1}{4}\,T^{\cos,0}_0(3x) + \frac{1}{4}\,T^{\cos,0}_2(x) + x\,T^{\sin,0}_3(x) - 2x^2\,T^{\cos,0}_0(x) \\ &= -\frac{1}{4}\Big(1\Big) + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2\Big) + x\Big(x - \frac{1}{3!}x^3\Big) - 2x^2\Big(1\Big) \\ &= -\frac{1}{6}x^4 - \frac{9}{8}x^2 < 0, \end{aligned}$$

*)do navedene jednakosti se moglo doći trigonometrijskim transformacijama ili prema formulama navedenim u pregledu teorije, a koje su tabelirane u Dodatku

za $x \in \left(0, \frac{79}{50}\right)$. Samim tim izbor indeksa nije odgovarajući jer

$P_{0,0,0,0}(x)$ nije traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.

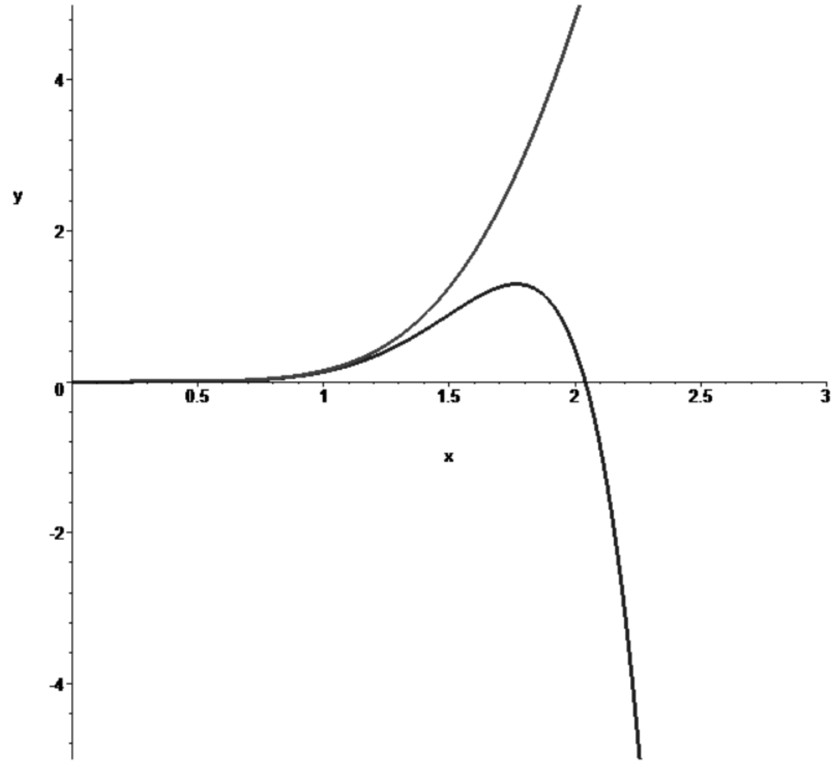


$\boldsymbol{k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 1:}$

$$\begin{aligned}
P_{2,1,0,1}(x) &= -\frac{1}{4}\,T_8^{\cos,0}(3x) + \frac{1}{4}\,T_6^{\cos,0}(x) + x\,T_3^{\sin,0}(x) - 2x^2\,T_4^{\cos,0}(x) \\
&= -\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2!}(3x)^2 + \frac{1}{4!}(3x)^4 - \frac{1}{6!}(3x)^6 + \frac{1}{8!}(3x)^8\Big) \\
&\quad + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6\Big) \\
&\quad + x\Big(x - \frac{1}{3!}x^3\Big) \\
&\quad - 2x^2\Big(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\Big) \\
&= -\frac{729}{17920}x^8 + \frac{61}{360}x^6 > 0,
\end{aligned}$$

za $x \in \left(0, \frac{79}{50}\right)$. Preciznije, prva pozitivna nula ovog polinoma je $x_0 = \frac{8}{81}\sqrt{427} = 2.04\ldots > \frac{79}{50} > \frac{\pi}{2}$. Samim tim izbor indeksa jeste odgovarajući jer

$P_{2,1,0,1}(x)$ jeste traženi polinom za dokaz pozitivnosti MTP funkcije $f(x)$ nad $(0, \pi/2)$.



Napomena. *Izložena metoda višestrukih uglova za dokazivanja MTP nejednakosti predstavlja jedan pristup za automatsko dokazivanje ove klase analitičkih nejednakosti nad razmatranim intervalom. Bitno je napomenuti da u opštem slučaju problem dokazivanja pozitivnosti neke analitičke funkcije nad nekim intervalom jeste algoritamski neodlučiv problem.*

Dodatak (tablica transformacija na višestruke uglove)

Neka je p oznaka za paran i n oznaka za neparan broj, tada navodimo transformacije

$\cos^p x \cdot \sin^p x$:

- $\cos^2 x = 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/2$
- $\cos^4 x = 1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 3/8$
- $\sin^2 x = 1/2 - 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x)$
- $\sin^4 x = 1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) - 1/2 \cdot \cos(2 \cdot x) + 3/8$
- $\cos^2 x \cdot \sin^2 x = -1/8 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/8$
- $\cos^4 x \cdot \sin^2 x = -1/32 \cdot \cos(6 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(4 \cdot x) + 1/32 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/16$
- $\cos^2 x \cdot \sin^4 x = 1/32 \cdot \cos(6 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(4 \cdot x) - 1/32 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1/16$
- $\cos^4 x \cdot \sin^4 x = 1/128 \cdot \cos(8 \cdot x) - 1/32 \cdot \cos(4 \cdot x) + 3/128$,

$\cos^p x \cdot \sin^n x$:

- $\cos^2 x \cdot \sin x = 1/4 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(x)$
- $\cos^4 x \cdot \sin x = 1/16 \cdot \sin(5 \cdot x) + 3/16 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \sin(x)$
- $\sin^3 x = -1/4 \cdot \sin(3 \cdot x) + 3/4 \cdot \sin(x)$
- $\cos^2 x \cdot \sin^3 x = -1/16 \cdot \sin(5 \cdot x) + 1/16 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \sin(x)$
- $\cos^4 x \cdot \sin^3 x = -1/64 \cdot \sin(7 \cdot x) - 1/64 \cdot \sin(5 \cdot x) + 3/64 \cdot \sin(3 \cdot x) + 3/64 \cdot \sin(x)$,

$\cos^n x \cdot \sin^p x$:

- $\cos x \cdot \sin^2 x = -1/4 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/4 \cdot \cos(x)$
- $\cos x \cdot \sin^4 x = 1/16 \cdot \cos(5 \cdot x) - 3/16 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x = 1/4 \cdot \cos(3 \cdot x) + 3/4 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^2 x = -1/16 \cdot \cos(5 \cdot x) - 1/16 \cdot \cos(3 \cdot x) + 1/8 \cdot \cos(x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^4 x = 1/64 \cdot \cos(7 \cdot x) - 1/64 \cdot \cos(5 \cdot x) - 3/64 \cdot \cos(3 \cdot x) + 3/64 \cdot \cos(x)$,

$\cos^n x \cdot \sin^n x$:

- $\cos x \cdot \sin x = 1/2 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin x = 1/8 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos x \cdot \sin^3 x = -1/8 \cdot \sin(4 \cdot x) + 1/4 \cdot \sin(2 \cdot x)$
- $\cos^3 x \cdot \sin^3 x = -1/32 \cdot \sin(6 \cdot x) + 3/32 \cdot \sin(2 \cdot x)$.