Branko J. Malešević

ŠTURMOV ALGORITAM

Šturmova teorema. *Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima koji razmatamo nad realnim segementom $[a,b]$, pod pretpostavkom da na tom segmentu ima samo jednostruke nule. Formirajmo niz polinoma $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na sledeći način:*

(i) $P_0(x) = P(x)$,

(ii) $P_1(x) = P'(x)$,

(iii) $P_{i+1}(x) = -\mathtt{REM}(P_i(x), P_{i-1}(x))$ *redom za* $i = 1, 2, \ldots, r-1$ *i* $P_r(x) = C\text{–}Const.$

Neka je $\xi \in [a,b]$ označimo $V(\xi)$ broj promena znakova u nizu $P_0(\xi), P_1(\xi), \ldots, P_r(\xi)$, ignoršući eventualno javljanje korena polinoma u tom nizu. Tada razlika

$$N = V(a) - V(b)$$

određuje broj nula polinoma $P(x)$ na segmentu $[a,b]$.

Projektni zadatak: *Neka je dat realni polinom $P(x)$ nad realnim segmentom $[a,b]$.*

(i) **1.** *Odrediti Euklidovim algoritmom najveći zajednički delilac $G(x) = \mathtt{GCD}(P(x), P'(x))$.*

2. *Za polinom $P(x) := P(x)/G(x)$, upotrebom Šturmove teoreme, odrediti broj nula na $[a,b]$.*

(ii) *Primena Šturmove teoreme.*

Neka je k broj decimala na koji se zaokružuje neki realan broj. Za polinom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

sa realnim koeficijentima

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$$

odrediti niz naniže zaokruženih racionalnih koeficijenata

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$$

određenih po sledećim pravilima:

* ako je $a_k = \mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k \mathsf{a}_{k+1} \ldots > 0$ tada $\alpha_k = \mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k$;
* ako je $a_k = \mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}_k \mathsf{a}_{k+1} \ldots < 0$ tada $\alpha_k = \mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1 \ldots \mathsf{a}'_k$, gde je a'_k naviše zaokružena cifa (uz eventualno posledično zaokruživanje i prethodnih cifara za jedan broj naviše).

Odrediti proceduru za formiranje racionalnog polinoma

$$\mathsf{P}(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \,.$$

Neka je $[a,b]$ segment sa racionalnim rubnim tačkama. Naći takav polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima i broj k, da na osnovu pozitivnosti polinoma $\mathsf{P}(x)$ nad segmentom $[a,b]$ imamo dokaz o pozitivnosti polinoma $P(x)$ nad segmentom $[a,b]$.

Test primer rešenja

(i) *Neka je dat polinom*

$$\boldsymbol{P(x) = x^9 - 3x^7 - x^6 + 3x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 1}$$

odrediti broj nula na segmentu $[0,3]$.

Rešenje. Primenom Euklidovog algoritma za polinome

$P(x) = x^9 - 3x^7 - x^6 + 3x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 1$ i $P'(x) = 9x^8 - 21x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 6x$

najveći zajednički delilac je

$$G(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

Dovoljno je primeniti Šturmovu teoremu na polinom

$$P_0(x) = P(x)/G(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

koji ima samo jednostruke nule. Primenom Šturmovog algoritma

$P_0, P_1 := P_0'$

`WHILE` $(\mathrm{dg}\, P_0 \neq 1)$ `DO`

$Q := -\mathrm{rem}(P_0, P_1, x):$

`PRINT(`Q`):`

$P_0 := P_1;$

$P_1 := Q;$

`END DO`

dobijamo Šturmov niz polinoma

$P_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1$

$P_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$

$P_2(x) = \dfrac{3}{16}x^2 + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{15}{16}$

$P_3(x) = -32x - 64$

$P_4(x) = -\dfrac{3}{16}.$

U nizu realnih brojeva

$$P_0(0) = -1,\ P_1(0) = -1,\ P_2(0) = \frac{15}{16},\ P_3(0) = -64,\ P_4(0) = -\frac{3}{16}$$

postoji

$$V(0) = 2 \text{ promene znaka u } x = 0.$$

Sa druge strane u nizu realnih brojeva

$$P_0(3) = 104,\ P_1(3) = 134,\ P_2(3) = \frac{39}{8},\ P_3(3) = -160,\ P_4(3) = -\frac{3}{16}$$

postoji

$$V(3) = 1 \text{ promena znaka u } x = 3.$$

Odatle imamo zaključak

$$\text{polinom } P(x) \text{ ima } N = V(0) - V(3) = 1 \text{ realnu nulu na } [0,3].$$

(ii) Na primeru polinomske funkcije:

$$P(x)=\left(\frac{\pi}{1260}-\frac{1}{420}\right)x^8+\left(-\frac{\pi^2}{1680}+\frac{\pi}{840}\right)x^7+\left(-\frac{\pi}{30}+\frac{1}{10}\right)x^6+\left(-\frac{\pi^2}{60}+\frac{\pi}{30}\right)x^5+\left(\frac{2\pi}{3}-2\right)x^4$$

pokazaćemo kako se može uz *nanižnu aproksimaciju koeficjenata* razlomcima i uz upotrebu Šturmove teoreme dokazati

$$P(x)>0$$

nad $(0,1.35)$. Svaki koeficijent posmatranog polinoma je iz polja $\mathbb{Q}(\pi)$ i na osnovu činjenice da se π može obostrano aproksimirati racionalnim brojevima tada se i svaki koeficijent može izračunati sa proizvoljnom tačnošću. Odatle imamo polinomsku funkciju $P(x)$ datu uz numerčki zapis koeficjenata sa proizvoljnom tačnošću:

$$P(x)=1.12375...10^{-4}x^8-2.13477...10^{-3}x^7-4.71975...10^{-3}x^6-5.97736...10^{-2}x^5+9.43951...10^{-2}x^4.$$

Izvršimo zaokruživanje cifara prema algoritmu

* ako je $a_k=\mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1\ldots\mathsf{a}_k\mathsf{a}_{k+1}\ldots>0$ tada $\alpha_k=\mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1\ldots\mathsf{a}_k$;
* ako je $a_k=\mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1\ldots\mathsf{a}_k\mathsf{a}_{k+1}\ldots<0$ tada $\alpha_k=\mathsf{a}_0.\mathsf{a}_1\ldots\mathsf{a}'_k$, gde je a'_k naviše zaokružena cifa.

birajući

$$k=2.$$

Na taj način dobijamo nanižni polinom sa racionalnim koeficijentima

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(x) &= 1.12\cdot10^{-4}x^8-2.14\cdot10^{-3}x^7-4.72\cdot10^{-3}x^6-5.98\cdot10^{-2}x^5+9.43\cdot10^{-2}x^4\\
&= 1.12\cdot\frac{1}{10^4}x^8-2.14\cdot\frac{1}{10^3}x^7-4.72\cdot\frac{1}{10^3}x^6-5.98\cdot\frac{1}{10^2}x^5+9.43\cdot\frac{1}{10^2}x^4\\
&= \frac{112}{10^6}x^8-\frac{214}{10^5}x^7-\frac{472}{10^5}x^6-\frac{598}{10^4}x^5+\frac{943}{10^4}x^4\\
&= \frac{112}{1000000}x^8-\frac{214}{100000}x^7-\frac{472}{100000}x^6-\frac{598}{10000}x^5+\frac{943}{10000}x^4\\
&= \boldsymbol{\frac{7}{62500}x^8-\frac{107}{50000}x^7-\frac{59}{12500}x^6-\frac{299}{5000}x^5+\frac{943}{10000}x^4}.
\end{aligned}$$

Prema Šturmovoj teoremi (i) razmatrani polinom sa racionalnim koeficijentima na širem intervalu sa racionalmim krajevima

$$(-0.1,1.35)=\left(-\frac{1}{10},\frac{27}{20}\right)$$

ima samo jednu nulu (evidentno) $x=0$, pa samim tim na razmatranom intervalu

$$(0,1.35)=\left(0,\frac{27}{20}\right)$$

nema nula. Pri tom na osnovu

$$\mathsf{P}\left(\frac{27}{20}\right)=\frac{198243967671}{800000000000000}=0.0002478...>0$$

sleduje zaključak

$$(\forall x\in(0,1.35))\ \mathsf{P}(x)>0.$$

Na osnovu poretka

$$(\forall x\in(0,1.35))\ P(x)>\mathsf{P}(x),$$

ujedno je dokazana pozitivnost polaznog polinoma

$$(\forall x\in(0,1.35))\ P(x)>0.$$