



Podstawy Informatyki

Katedra Telekomunikacji, EiT

dr inż. Jarosław Bułat (c)

kwant@agh.edu.pl



Plan prezentacji

- » Przeciążenie operatorów
- » Funkcja rekurencyjna
- » Lista jednokierunkowa
- » Drzewa binarne



class Car{} car = car1 + car2; //??? przeciążenie operatorów



Przeciążenie operatorów

- » Operator może mieć różną implementację w zależności od typu użytych argumentów
 - nie wszystkie języki: C++/C#/Python/..., C/Java/PHP/...
 - poprawia czytelność kodu
 - umożliwia np. rozszerzenie biblioteki standardowej na poziomie języka
 - przykład polimorfizmu
 - tzw. Lukier składniowy "Syntactic sugar"

polimorfizm (*wielopostaciowość*) Pozwala programiście używać zmiennych, funkcji, wartości na kilka różnych sposobów: jeden interfejs dla wielu różnych rzeczy



https://www.ibm.com/support/knowledgecenter/en/SSLTBW 2.2.0/com.ibm.zos.v2r2.cbclx01/cplr318.htm

» Najczęściej używane: +, -, +=, -=, <<, >>, ==, =





```
#include <iostream>
using namespace std;
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
};
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c << endl;
```

- » Definiuję klasę complex operującą na liczbach zespolonych
- » Deklaruję i inicjalizuję dwa obiekty tej klasy



```
#include <iostream>
using namespace std;
class Complex {
  public:
     float re_, im_;
     Complex(float, float);
};
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c << endl;
```

- » Definiuję klasę complex operującą na liczbach zespolonych
- » Deklaruję i inicjalizuję dwa obiekty tej klasy
- Chciałbym używać operatorów arytmetycznych pomiędzy tymi obiektami



```
#include <iostream>
using namespace std;
class Complex {
  public:
     float re_, im_;
     Complex(float, float);
};
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c << endl;
```

- » Definiuję klasę complex operującą na liczbach zespolonych
- » Deklaruję i inicjalizuję dwa obiekty tej klasy
- Chciałbym używać operatorów arytmetycznych pomiędzy tymi obiektami
- » Chciałbym używać— standardowych bibliotek



```
#include <iostream>
using namespace std;
class Complex {
  public:
     float re_, im_;
     Complex(float, float);
};
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c << endl;
```

```
error: no match for 'operator+'
(operand types are 'Complex' and
'Complex')
   Complex c = c1 + c2;
error: no match for 'operator<<'
(operand types are 'std::ostream
{aka std::basic ostream<char>}'
and 'Complex')
   cout << c << endl:
```



przeciążenie + operator+()



» Definiuję nowy operator +

```
class Complex {};
Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy <mark>operator +</mark>
- » Wygląda podobnie jak definicja metody, posiada:



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody, posiada:
 - typ



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody, posiada:
 - typ
 - <mark>nazwę</mark>



```
class Complex {};
Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody, posiada:
 - typ
 - nazwę
 - <mark>zasięg</mark>



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody, posiada:
 - typ
 - nazwę
 - zasięg
 - listę argumentów const Complex &right



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody
- operator+ jest wywołany na obiekcie c1



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Definiuję nowy operator +
- » Wygląda podobnie jak definicja metody
- » operator+ jest wywołany na obiekcie c1
- » Można całkiem "legalnie" jawnie wywołać operator+



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Kolejność operacji
- » Tworzę nowy obiekt typu Complex, będę w nim przechowywał wynik działania



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

» Kolejność operacji

Tworzę nowy obiekt typu
 Complex, będę w nim
 przechowywał wynik działania
 Wykonuję dodawanie



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re = this->re + right.re ;
  result.im_=this->im_ + right.im_;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Kolejność operacji
- » Tworzę nowy obiekt typu Complex, będę w nim przechowywał wynik działania
- » Wykonuję dodawanie
 - this jest opcjonalne

jaką wartość ma this->re ???



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex & right) {
  Complex result;
  result.re = this->re + right.re ;
  result.im_=this->im_ + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Kolejność operacji
- » Tworzę nowy obiekt typu Complex, będę w nim przechowywał wynik działania
- » Wykonuję dodawanie

jaką wartość ma right.im_ ???



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Kolejność operacji
- » Tworzę nowy obiekt typu Complex, będę w nim przechowywał wynik działania
- » Wykonuję dodawanie
- » Wyrażenie

```
c1+c2
c1.operator+(c2)
tworzy nowy, tymczasowy
obiekt, jest on zwracany przez
```

wartość i przypisany do **c** i **d**



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

- » Kolejność operacji
- » Tworzę nowy obiekt typu Complex, będę w nim przechowywał wynik działania
- » Wykonuję dodawanie
- » Wyrażenie

c1+c2 c1.operator+(c2)

tworzy nowy, tymczasowy obiekt, jest on zwracany przez wartość i przypisany do **c** i **d**

result jest obiektem, jest wynikiem działania c1+c2



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im ;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator+(c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

Deklaracja wymaga konstruktora domyślnego, należy go jawnie zdefiniować



```
class Complex {};
Complex Complex::operator+(const
Complex &right){
  Complex result;
  result.re =this->re + right.re ;
  result.im =this->im + right.im;
  return result;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(\beta, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  Complex d = c1.operator + (c2);
  cout << c.re << c.im << endl;
```

Deklaracja wymaga
 konstruktora domyślnego,
 należy go jawnie zdefiniować

 W tym momencie następuje
 przypisanie, wykonuje go domyślny operator przypisania:

Complex::operator=(const Complex&)

- » Operator ten jest aut. tworzony przez kompilator: przepisuje składowe
- » Można go oczywiście redefiniować



quiz Pl11_overl+

socrative.com

- login
- student login

Room name:

KWANTAGH



przeciążenie poza klasą

jako metoda lub jako funkcja



- » Operator można zdefiniować:
- » <mark>wewnątrz klasy</mark>
- » poza nią (jako funkcję)
 - left: c1
 - right: c2

```
Complex Complex::operator+(const Complex &right);
Complex c = c1 + c2;
Complex d = c1.operator+(c2);

Complex operator+(const Complex& left, const Complex& right);
Complex c = c1 + c2;
Complex d = c1.operator+(c2);
Complex d = operator+(c1, c2);
```



- » Operator można zdefiniować:
- » wewnątrz klasy
- » poza klasą (jako funkcję)
 - left: c1
 - right: c2
- » Nie wszystkie operatory mogą być definiowane poza klasą





Expression	As member function	As non-member function
@a	(a).operator@()	operator@ (a)
a@b	(a).operator@ (b)	operator@ (a, b)
a=b	(a).operator= (b)	cannot be non- member
a(b)	(a).operator()(b)	cannot be non- member
a[b]	(a).operator[](b)	cannot be non- member
a->	(a).operator-> ()	cannot be non- member
a@	(a).operator@ (0)	operator@ (a, 0)

- Operator można zdefiniować:
- » wewnątrz klasy
- » poza klasą (jako funkcję)
 - left: c1
 - right: c2
- » Nie wszystkie operatory mogą być definiowane poza klasą

http://en.cppreference.com/w/cpp/language/operators



```
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  Complex c2(3, -7); // 3-j7
  Complex c = c1 + c2;
  cout << c << endl;
```

» Instrukcję:

```
cout << c << endl</p>
```

» Można zapisać:

```
cout.operator<<(c) << endl
```

- » Czyli operator << nie wykonuje się na klasie Complex tylko na klasie ostream, na obiekcie std::cout
- » Przeciążenie operatora << musi być zrealizowane poza klasą



```
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

» Deklaracja/definicja klasy nie zawiera żadnej "wzmianki" o przeciążeniu operatora "<<"</p>



```
class Complex {
  public:
     float re_, im_;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

- Deklaracja/definicja klasy nie zawiera żadnej "wzmianki" o przeciążeniu operatora "<<"</p>
- » Przeciążenie operator<< jest funkcją, nie metodą</p>



```
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+i3
  cout << c1 << endl;
```

- Deklaracja/definicja klasy nie zawiera żadnej "wzmianki" o przeciążeniu operatora "<<"
- » Przeciążenie operator<< jest funkcją, nie metodą</p>
- Jak kompilator odnajduje odnajduje odpowiednią implementację "<<"???



```
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

- Deklaracja/definicja klasy nie zawiera żadnej "wzmianki" o przeciążeniu operatora "<<"</p>
- » Przeciążenie operator<< jest funkcją, nie metodą</p>
- » Jak kompilator odnajduje odnajduje odpowiednią implementację "<<" ???</p>
 - typ lewego argumentu



```
class Complex {
  public:
     float re , im ;
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;</pre>
```

- » Deklaracja/definicja klasy nie zawiera żadnej "wzmianki" o przeciążeniu operatora "<<"</p>
- » Przeciążenie operator<< jest funkcją, nie metodą</p>
- » Jak kompilator odnajduje odnajduje odpowiednią implementację "<<" ???</p>
 - typ lewego argumentu
 - typ prawego argumentu



```
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im_ << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

Wywołanie kaskadowe:

```
cout << c1 << c2 << endl;
jest możliwe ponieważ
implementacja <<:
```

otrzymuje referencję na out





```
ostream &operator<<(ostream &out,
const Complex &right){
  out << right.re_ << " ";
  out << right.im_ << endl;
  return out;
}

int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3

  cout << c1 << endl;
}</pre>
```

» Wywołanie kaskadowe:

```
cout << c1 << c2 << endl;
```

jest możliwe ponieważ implementacja <<:

- otrzymuje referencję na out
- wykonuje na niej operację



```
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im_ << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

» Wywołanie kaskadowe:

```
cout << c1 << c2 << endl;
```

jest możliwe ponieważ implementacja <<:

- otrzymuje referencję na out
- wykonuje na niej operację
- zwraca referencję na ten obiekt aby następny operator mógł wykonać następną operację



» Operator << można rozwinąć jako funkcje</p>

```
ostream &operator<<(ostream &out,
const Complex &right){
   out << right.re_ << " ";
   out << right.im_ << endl;
   return out;
}

int main() {
   Complex c1(1, 3); // 1+j3

   cout << c1 << endl;
}</pre>
```



» Operator << można rozwinąć jako funkcje

```
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  operator<<(cout, c1) << endl;</pre>
```



» Operator << można rozwinąć jako funkcje</p>

```
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  ( operator << (cout, c1) ) << endl;
```



```
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  ( operator < < (cout, c1) ) << endl;
```

- » Operator << można rozwinąć jako funkcje
- » Referencja zwracana jako rezultat umożliwia kaskadowe wywołanie (wywołanie funkcji na wyniku funkcji)



```
ostream &operator << (ostream &out,
const Complex &right) {
   out << right.re_ << " ";
   out << right.im_ << endl;
   return out;
}

int main() {
   Complex c1(1, 3); // 1+j3

   cout << c1 << endl;
}</pre>
```

operator << (cout, c1), endl);

- » Operator << można rozwinąć jako funkcje
- » Referencja zwracana jako rezultat umożliwia kaskadowe wywołanie (wywołanie funkcji na wyniku funkcji)
- » Przyporządkowanie argumentów



```
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  operator << (operator << (cout, c1), endl);
```

- » Operator << można rozwinąć jako funkcje</p>
- » Referencja zwracana jako rezultat umożliwia kaskadowe wywołanie (wywołanie funkcji na wyniku funkcji)
- » Przyporządkowanie argumentów
 - std::cout



```
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &rigkt) (
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main()
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  operator << (operator << (cout, c1), endl);
```

- » Operator << można rozwinąć jako funkcje</p>
- » Referencja zwracana jako rezultat umożliwia kaskadowe wywołanie (wywołanie funkcji na wyniku funkcji)
- » Przyporządkowanie argumentów
 - std::cout
 - argument



```
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &rigkt) (
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main()
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
  operator << (operator << (cout, c1), endl);
```

- » Operator << można rozwinąć jako funkcje
- » Referencja zwracana jako rezultat umożliwia kaskadowe wywołanie (wywołanie funkcji na wyniku funkcji)
- » Przyporządkowanie argumentów
 - std∷cout
 - argument
 - std::cout na którym można wykonać następną operację



quiz Pl11_overl<<

socrative.com

- login
- student login

Room name:

KWANTAGH



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

» Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

- » Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne
- » Jak wtedy uzyskać dostęp do re_ i im_?



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

- » Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne
- » Jak wtedy uzyskać dostęp do re_ i im_?
 - można dodać "getter"



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
int main() {
  Complex c1(1, 3); // 1+j3
  cout << c1 << endl;
```

- » Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne
- » Jak wtedy uzyskać dostęp do re_ i im ?
 - można dodać "getter"
 - można zaprzyjaźnić się z funkcją "operator<<"

error: 'float Complex::im_' is private float re , im ;



przyjaciel (friend)

ma dostęp do moich sekretów



friend

```
class Friendship{
   private:
     int x ;
  public:
     friend void f(Friendship &obj);
     void setX(int x);
     int getX();
};
void f(Friendship &obj){
  obi.x = 10;
int main() {
  Friendship ex;
  f(ex);
  cout << ex.getX() << endl;
```

- W klasie zadeklarowano, że funkcja f(...) będzie zaprzyjaźniona
- » To nie jest deklaracja metody!!!
- » Funkcja f(...) jest zwykłą funkcją, nie ma operatora dostępu Friendship::
- » Funkcja f(...) ma dostęp do prywatnych składowych klasy
- Funkcja zaprzyjaźniona może użyć dowolnej składowej obiektu który jest w zasięgu
- » "Przyjaźń" inicjalizuje klasa



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
};
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
```

- » Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne
- » Jak wtedy uzyskać dostęp do re_ i im_?
 - można dodać "getter"
 - można zaprzyjaźnić się z funkcją "operator<<"

```
error: 'float Complex::im_' is private float re_, im_;
```



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
     friend ostream & operator < < (
     ostream &out, const Complex &right);
ostream & operator << (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
```

Zazwyczaj w klasie dane będą prywatne

Jak wtedy uzyskać dostęp do re_ i im_?

- można dodać "getter"
- można zaprzyjaźnić się z funkcją "operator<<"
- Funkcja operator<<(...) jest teraz przyjacielem klasy Complex więc może używać jej prywatnych komponentów



```
class Complex {
  private:
     float re , im ;
  public:
     Complex(float, float);
     Complex operator+(...);
     friend ostream & operator << (
     ostream &out, const Complex &right);
ostream & operator < < (ostream & out,
const Complex &right){
  out << right.re << " ";
  out << right.im << endl;
  return out;
```

Jest to typowa konstrukcja przeciążonego operatora << Możliwość definiowania przeciążonego operatora poza klasą ma na celu umożliwienie mieszanie typów składników:

A << B:

c = a + b;



quiz Pl11_friend

socrative.com

- login
- student login

Room name:

KWANTAGH



Żeby **zrozumieć rekurencję** musisz najpierw **zrozumieć rekurencję**



Rekurencja

» Upraszczając (bardzo): rekurencja to odwołanie się w definicji funkcji do tej samej funkcji int foo(int x){
y = foo(x-1);
return y;

- » Jest podstawową techniką w językach funkcyjnych
- » Zastępuje iteracje (np. pętle)
- » Nadaje się do przeszukiwania struktur danych w postaci plików XML, nieregularnego drzewa, "linked list", etc...
- » Zawsze zwiększa zapotrzebowanie programu na zasoby (RAM i CPU)



» Algorytm obliczania silni:

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad \mathrm{dla} \ n \geqslant 1$$

» Zatem:



» Algorytm obliczania silni:

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad \mathrm{dla} \ n \geqslant 1$$

» Można ten algorytm zapisać rekurencyjnie w postaci:

$$b_n = nb_{n-1}$$
$$b_0 = 1$$





» Algorytm obliczania silni:

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad \mathrm{dla} \ n \geqslant 1$$

» Można ten algorytm zapisać rekurencyjnie w postaci:

$$b_n = nb_{n-1}$$

$$b_0 = 1$$

pierwszą linię algorytmu należy iterować tak długo aż zostanie osiągnięty stan b₀, który jest znany i wynosi 1





algorytm:

$$b_n = nb_{n-1}$$

$$b_0 = 1$$

rozwiązanie:

$$b_{3} = 3 * b_{2}$$

$$= 3 * (2 * b_{1})$$

$$= 3 * (2 * (1 * b_{0}))$$

$$= 3 * (2 * (1 * 1))$$

$$= 3 * (2 * 1)$$

$$= 3 * 2$$

$$= 6$$

» Algorytm obliczania silni:

$$n! = \prod_{k=1}^n k \qquad \mathrm{dla} \ n \geqslant 1$$

» Można ten algorytm zapisać rekurencyjnie w postaci:

pierwszą linię algorytmu należy iterować tak długo aż zostanie osiągnięty stan b₀, który jest znany i wynosi 1



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
         = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
         = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
int main(){
  cout << factorial(3) << endl;
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
rozwiązanie:
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
         = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
         = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact < = 0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
int main(){
  cout << factorial(3) << endl;
```



```
algorytm:
     b<sub>n</sub>=nb
rozwiązanie:
          = 3 * b_2
b_3
          = 3 * (2 * b_1)
          = 3 * (2 * (1 * b_0))
          = 3 * (2 * (1 * 1))
```

= 3 * (2 * 1)

= 3 * 2

= 6

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact < = 0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
int main(){
  cout << factorial(3) << endl;
```



```
#include <iostream>
algorytm:
                                         using namespace std;
     b<sub>n</sub>=nb
                                         int factorial(int fact){
                                            if (fact < = 0){
                                               return 1;
                                            } else {
rozwiązanie:
                                               return fact*factorial(fact-1);
         = 3 * b_2
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
                                         int main(){
         = 3 * (2 * (1 * 1))
                                            cout << factorial(3) << endl;
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
         = 6
```





```
algorytm:

\frac{b_n}{b_{n-1}} = nb_{n-1}
```

rozwiązanie:

```
b<sub>3</sub> = 3 * b_2
= 3 * (2 * b_1)
= 3 * (2 * (1 * b_0))
= 3 * (2 * (1 * 1))
= 3 * (2 * 1)
= 3 * 2
= 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   if (fact<=0){
     return 1;
   } else {
     return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
```



```
algorytm:

b_n = nb_{n-1}

b_0 = 1
```

rozwiązanie:

```
b_{3} = \frac{3 * b_{2}}{3 * (2 * b_{1})}
= 3 * (2 * (1 * b_{0}))
= 3 * (2 * (1 * 1))
= 3 * (2 * 1)
= 3 * 2
= 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
         = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
```

= 6

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
         = 3 * b_2
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
         = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
         = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
          = 3 * (\bar{2} * b_1)
          = 3 * (2 * (1 * b_0))
          = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
          = 3 * 2
          = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   if (fact<=0){
      return 1;
   } else {
      return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*factorial(0))))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
         = 3 * (2 * b_1)
         = 3 * (2 * (1 * b_0))
         = 3 * (2 * (1 * 1))
         = 3 * (2 * 1)
         = 3 * 2
         = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1))))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*1)))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
         = 3 * (\bar{2} * b_1)
          = 3 * (2 * (1 * b_0))
          = 3 * (2 * (1 * 1))
          = 3 * (2 * 1)
          = 3 * 2
          = 6
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   if (fact<=0){
      return 1;
   } else {
      return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*factorial(0))))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*1)))
factorial(3*factorial(2*1))
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
      b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
          = 3 * (\bar{2} * b_1)
          = 3 * (2 * (1 * b_0))
          = 3 * (2 * (1 * 1))
          = 3 * (2 * 1)
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   if (fact<=0){
      return 1;
   } else {
      return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*factorial(0))))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*1)))
factorial(3*factorial(2*1))
factorial(3*2)
6
```



```
algorytm:
     b_n = nb_{n-1}
     b_0 = 1
rozwiązanie:
b_3
          = 3 * (\bar{2} * b_1)
          = 3 * (2 * (1 * b_0))
          = 3 * (2 * (1 * 1))
          = 3 * (2 * 1)
          = 3 * 2
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   if (fact<=0){
      return 1;
   } else {
      return fact*factorial(fact-1);
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*factorial(0))))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*1)))
factorial(3*factorial(2*1))
factorial(3*2)
```





```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
  if (fact<=0){
     return 1;
  } else {
     return fact*factorial(fact-1);
int main(){
  cout << factorial(3) << endl;
```

- » Problem stopu
- » Warunek zakończenia algorytmu == warunek zakończenia rekurencji





```
#include <iostream>
using namespace std;

int factorial(int fact){
    return fact*factorial(fact-1);
}

int main(){
    cout << factorial(3) << endl;
}</pre>
```

- » Problem stopu
- » Warunek zakończenia algorytmu == warunek zakończenia rekurencji
- » Błędny warunek == nieskończona rekurencja:

"./ex11" terminated by signal SIGSEGV (Address boundary error)





```
#include <iostream>
using namespace std;

int factorial(int fact){
    return fact*factorial(fact-1);
}

int main(){
    cout << factorial(3) << endl;
}</pre>
```

- » Problem stopu
- » Można sobie wyobrazić implementację rekurencji:

```
int foo(int x, int maxRec){
  if(maxRec > ....){
    ????
```

- » warunek "awaryjnie" kończy algorytm to jest zły pomysł
- » Warunek stopu powinien być cechą algorytmu
- » Głębokość rekurencji może zależeć od danych - problem



```
#include <iostream>
using namespace std;
int factorial(int fact){
   return fact*factorial(fact-1);
int main(){
   cout << factorial(3) << endl;
factorial(3)
factorial(3*factorial(2))
factorial(3*factorial(2*factorial(1)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1....)))
factorial(3*factorial(2*factorial(1*1)))
factorial(3*factorial(2*1))
factorial(3*2)
```

- » Każde kolejne zagłębienie (zagnieżdżenie) to wywołanie funkcji bez zakończenia poprzedniej
- » Podczas wywołania funkcji na stosie odkładany jest adres powrotu, wartości rejestrów, etc...
- » Zbyt duży poziom zagłębienia przepełni stos
- » Wykorzystując rekurencję można uprościć algorytm, kosztem zasobów (RAM+CPU)



quiz Pl11_req

socrative.com

- login
- student login

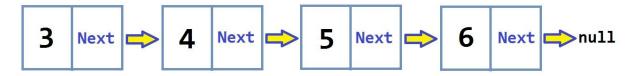
Room name:

KWANTAGH



Lista jednokierunkowa ang. *linked list*





- » Każdy bloczek to dowolnie złożona struktura
- » Każda struktura zawiera wskaźnik na następną
- » "Łańcuch" takich struktur można w trakcie działania programu modyfikować:
 - dostawić nowy element na końcu
 - wyrzucić [5] a [4]->next przypisać do [6]
 - zamienić [3] z [6] bez kopiowania, tylko przepisując odpowiednie [*]->next
 - zmienić wartość każdego elementu
- » Dostęp jest sekwencyjny





» Zalety:

- duża elastyczność w manipulacji danymi
- zmiany nie wymagają kopiowania
- nie wymagana ciągła przestrzeń adresowa
- możliwe grafy, drzewa, dwukierunkowy listy

» Wady:

- większa zajętość pamięci (wymagany "next")
- przeglądanie sekwencyjne (nie da się list[30])*
- tworzenie listy wymaga new ... czyli syscall*



```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *n0, *n1, *n2;
n2 = new list; // tail
n2->x=0;
n2->next = NULL;
n1 = new list; //
n1->x=1;
n1->next = n2;
n0 = new list; // head
n0->x=2;
n0 -> next = n1;
```

- » Struktura składa się z węzłów, w których są dane oraz wskaźnika na następny węzeł
- » Węzły są tworzone dynamicznie, inicjalizowane i łączone ze sobą
- » NULL w ostatnim węźle oznacza koniec łańcucha



```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size_t size){
  list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
  return node;
```

Tworzenie listy w pętli:

koniec listy



```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size_t size){
  list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
  return node;
```

- Tworzenie listy w pętli:
 - koniec listy
 - utworzenie nowego węzła





```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size t size){
   list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
   return node;
```

- koniec listy
- utworzenie nowego węzła
- <mark>wypełnienie danymi</mark>



```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size t size){
  list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
  return node;
```

- koniec listy
- utworzenie nowego węzła
- wypełnienie danymi
- dowiązanie następnego węzła





```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size t size){
  list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
  return node;
```

- koniec listy
- utworzenie nowego węzła
- wypełnienie danymi
- dowiązanie następnego węzła
- przesunięcie wskaźnika z następnego na bieżący węzeł





```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size t size){
   list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
   return node;
```

- koniec listy
- utworzenie nowego węzła
- wypełnienie danymi
- dowiązanie następnego węzła
- przesunięcie wskaźnika z następnego na bieżący węzeł
- zwrócenie wskaźnika na pierwszy węzeł listy



```
struct list{
  int x;
  list *next;
list *createList(size t size){
   list *node = NULL;
  for (int x=0; x < size; x++){
     list *tmp = new list;
     tmp->x=x;
     tmp->next = node;
     node = tmp;
   return node;
```

- koniec listy
- utworzenie nowego węzła
- wypełnienie danymi
- dowiązanie następnego węzła
- przesunięcie wskaźnika z następnego na bieżący węzeł
- zwrócenie wskaźnika na pierwszy węzeł listy
- Funkcja tworzy listę od końca do początku



```
struct list{
  int x;
  list *next;
                               >>
                               >>
int main(){
  list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
     return true;
  if (!node->next){
     return false;
  return find(node->next, x);
```

Cel: przeszukaj całą listę, sprawdź czy zawiera "x"

Utwórz listę

Przeszukaj



```
struct list{
  int x;
  list *next;
int main(){
  list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
     return true;
  if (!node->next){
     return false;
  return find(node->next, x);
```

» Algorytm w funkcji find(...):

 jeżeli bieżący element zawiera poszukiwaną wartość zwróć true



```
struct list{
  int x;
   list *next;
int main(){
   list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);</pre>
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
     return true;
  if (!node->next){
      return false;
  return find(node->next, x);
```

Algorytm w funkcji **find(...)**:

- jeżeli bieżący element zawiera poszukiwaną wartość zwróć true
- jeżeli to jest ostatni element, zwróć false (na pewno nie zawiera poszukiwanej wartości)



```
struct list{
  int x;
   list *next;
int main(){
   list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);</pre>
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
     return true;
  if (!node->next){
      return false;
  return find(node->next, x);
```

Algorytm w funkcji **find(...)**:

- jeżeli bieżący element zawiera poszukiwaną wartość zwróć true
- jeżeli to jest ostatni element, zwróć false (na pewno nie zawiera poszukiwanej wartości)
- kontynuuj wyszukiwania w następnym węźle



```
struct list{
  int x;
   list *next;
int main(){
   list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);</pre>
bool find(list *node, int x){
   if (node->x == x){
      return true;
   if (!node->next){
      return false;
  return find(node->next, x);
```

Algorytm w funkcji find(...):

- jeżeli bieżący element zawiera poszukiwaną wartość zwróć true
- jeżeli to jest ostatni element, zwróć false (na pewno nie zawiera poszukiwanej wartości)
- kontynuuj wyszukiwania w następnym węźle
- przekaż z powrotem wynik wyszukiwania w następnych węzłach



```
Algorytm w funkcji find(...):
struct list{
                                Algorytm w wersji z petla
  int x;
  list *next;
int main(){
  list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);
                                        bool findIter(list *node, int x){
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
                                          do{
                                             if (node->x == x){
     return true;
                                                return true;
  if (!node->next){
     return false;
                                             node = node->next;
                                           }while (node);
                                           return false;
  return find(node->next, x);
```



```
struct list{
  int x;
  list *next;
int main(){
  list *head = createList(10);
  cout << find(head, 4);
bool find(list *node, int x){
  if (node->x == x){
     return true;
  if (!node->next){
     return false;
  return find(node->next, x);
```

- » Algorytm w funkcji find(...):
- » Algorytm w wersji z pętlą
- » Czy w tym wypadku warto stosować rekurencję?

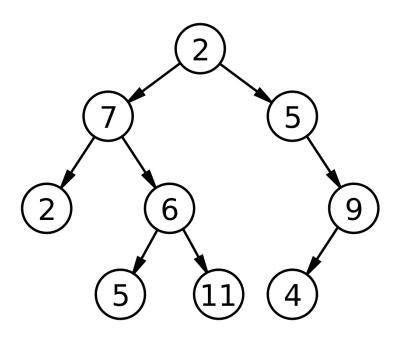
NIE

```
bool findIter(list *node, int x){
    do{
        if (node->x == x){
            return true;
        }
        node = node->next;
    } while (node);
    return false;
}
```





Drzewo binarne



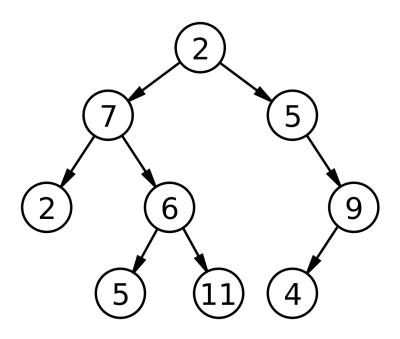
» Struktura danych

- » Każdy węzeł może mieć:
 - 0 potomków (np. node 2)
 - 1 potomka (np. node 9)
 - 2 potomków (np. node 7)

https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_tree



Drzewo binarne



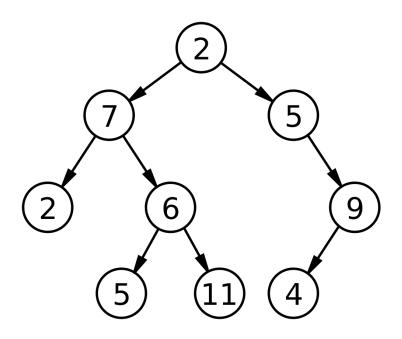
https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_tree

» Struktura opisująca węzeł drzewa binarnego jest podobna do listy

```
struct lista{
   int x;
   lista *next;
};

struct node{
   int x;
   node *left;
   node *right;
};
```





https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_tree

» Struktura opisująca węzeł drzewa binarnego jest podobna do listy

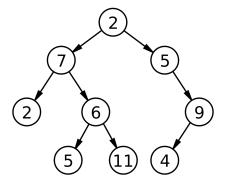
```
struct lista{
   int x;
   lista *next;
};

struct node{
   int x;
   node *left;
   node *right;
};
```



```
struct node{
   int x;
   node *left, *right;
};
bool find(node *current, int x){
   if (!current){
     return false;
   if (current->x == x){
     return true;
   if (find(current->left, x)){
     return true;
   if (find(current->right, x)){
     return true;
   return false;
```

» Algorytm przeszukiwania:

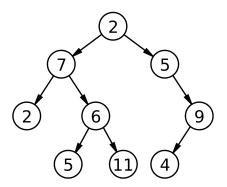




```
struct node{
  int x;
  node *left, *right;
};
bool find(node *current, int x){
  if (!current){
     return false;
  if (current->x == x){
     return true;
  if (find(current->left, x)){
     return true;
  if (find(current->right, x)){
     return true;
  return false;
```

» Algorytm przeszukiwania:

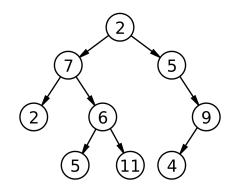
 sprawdzam czy bieżący nie jest NULL





```
struct node{
  int x;
  node *left, *right;
};
bool find(node *current, int x){
  if (!current){
     return false;
  if (current->x == x)
     return true;
  if (find(current->left, x)){
     return true;
  if (find(current->right, x)){
     return true;
  return false;
```

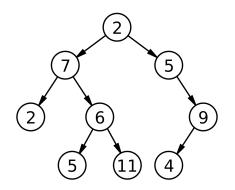
- » Algorytm przeszukiwania:
 - sprawdzam czy bieżący nie jest NULL
 - warunek końca (znaleziona wartość)





```
struct node{
  int x;
  node *left, *right;
};
bool find(node *current, int x){
  if (!current){
     return false;
  if (current->x == x){
     return true;
  if (find(current->left, x)){
     return true;
   if (find(current->right, x)){
     return true;
  return false;
```

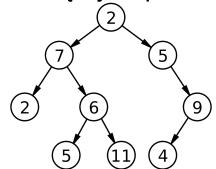
- » Algorytm przeszukiwania:
 - sprawdzam czy bieżący nie jest NULL
 - warunek końca (znaleziona wartość)
 - wywołuję algorytm dla lewej i prawej gałęzi





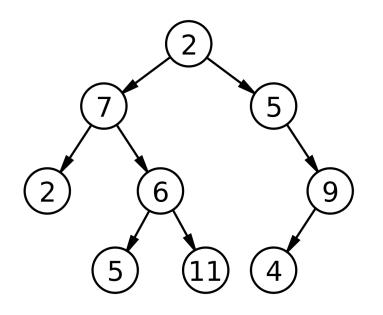
```
struct node{
  int x;
  node *left, *right;
};
bool find(node *current, int x){
  if (!current){
     return false;
  if (current->x == x){
     return true;
  return (find(current->left, x) ||
         find(current->right, x));
```

- » Algorytm przeszukiwania:
 - sprawdzam czy bieżący nie jest NULL
 - warunek końca
 (znaleziona wartość)
 - wywołuję algorytm dla lewej i prawej gałęzi
 - zwięzły zapis









- » Algorytm rekurencyjny świetnie działa dla problemów rekurencyjnych
- » Upraszcza zapis algorytmu
- » Umożliwia (zastępuje) realizację pętli dla języków które nie posiadają pętli
- » Wymaga większych zasobów (RAM + CPU)
- » Potencjalnie może powodować błąd przepełnienia stosu



Dziękuję