Całki ciąg dalszy:

$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

**WZORY NA POCHODNE**

$(c)' = 0$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(x)' = 1$

$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctg\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$

$(arcctg\, x)' = \frac{-1}{x^2+1}$

**WZORY NA CAŁKI**

$\int dx = x + C$

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq 1$

$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int ctg\, x\, dx = -\ln|\sin x| + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+q}\right| + C$

**ASYMPTOTY:**

PIONOWA:

$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

UKOŚNA:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$

**CIĄGI:**

ARYTMETYCZNY - SUMA:

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

GEOMETRYCZNY - SUMA:

$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

$\int F(\sin x, \cos x) dx$

$t = tg\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\int F(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$

$t = tgx$

$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$

$\sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$

**TRYGONMETRIA:**

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

**SZEREG TAYLORA W PUNKCIE a**

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}\cdot f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}\cdot f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a)(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

**CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI**

$\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\, dx$

**METODA WSPÓŁCZYNNKÓW NIEOZNACZONYCH**

$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

**REGUŁA DE L'HOSPITALA**

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**SYMBOLE NIEOZNACZONE**

$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty - \infty, 0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$

**WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

**WŁASNOŚCI POCHODNEJ**

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

**Granice:**

$\left[\frac{A}{\pm\infty}\right] = 0$

$\left[\frac{A}{0}\right] = \pm\infty$

**Logarytmy:**

$\ln 0 \to -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln\infty \to \infty$

**DEFINICJA POCHODNEJ**

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

**FUNKCJA KWADRATOWA - POSTAĆ KANONICZNA:**

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}\right]$

**CAŁKA POWIERZCHNIOWA NIEZORIENTOWANA**

$z = \varphi(x,y)$ – płat

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

**CAŁKA KRZYWOLINIOWA NIESKIEROWANA**

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

**CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA**

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \big(P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\big)dt$$

**FUNKCJA LAGRANGE'A**

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) + \lambda G(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

**HESSIAN**

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

**JACOBIAN**

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \end{bmatrix}$$

**WŁASNOŚCI CAŁKI OZNACZONEJ**

$$P = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

**RÓŻNICZKA ZUPEŁNA**

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

**POCHODNA KIERUNKOWA**

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}\Big|_{p_0} = grad\, f_{p_0} \circ \vec{u}$$

**OPERATORY RÓŻNICZKOWE**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$grad\, f = \nabla f$$

$$div\, f = \nabla \circ \vec{f}$$

$$rot\, f = \nabla \times \vec{f}$$

**TWIERDZENIE GAUSSA-OSTROWACKIEGO**

$$\oint\!\!\!\oint \vec{F} \circ \vec{ds} = \iiint div\, \vec{F}\, dxdydz$$

**WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE**

$|J| = r$

$x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$

**WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE**

$|J| = r^2 \sin\theta$

$x = r \cdot \sin\theta\cos\Phi$

$y = r \cdot \sin\theta\sin\Phi$

$z = r \cdot \cos\theta$

**WSPÓŁRZĘDNE WALCOWE**

$|J| = r$

$x = r \cdot \cos\theta$

$y = r \cdot \sin\theta$

$z = h$

**WARUNEK NA POTENCJAŁ POLA**

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = R$$

**GRADIENT**

$$\vec{F} = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] \qquad (grad\Phi = \nabla\Phi)$$

**ISTNIENIE POTENCJAŁU**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

**DYWERGENCJA**

$$div\vec{F}[P,Q,R] = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

**LAPLASJAN**

$$div(grad\Phi) = div\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

**ROTACJA („WIR")**

$$Rot\vec{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

# CAŁKI NIEOZNACZONE

**● OGÓLNE POJĘCIE - CO TO CAŁECZKA**

$$*\int x^2 dx = \quad (\quad)' = x^2$$

liczba której pochodna wynosi $x^2$

WYNIK CAŁKOWANIA TO funkcja pierwotna

* może to być $\frac{1}{3}x^3$ lub $\boxed{\frac{1}{3}x^3 + C}$ (C - dowolna stała liczba)

**● STAŁĄ LICZBĘ MOŻNA WYJĄĆ PRZED CAŁKĘ**

$$*\int 5x^7 dx = 5\int x^7 dx = 5\cdot \frac{1}{8}x^8 + C$$

**● MOŻNA ROZBIJAĆ RÓWNIEŻ DODAWANIE I ODEJMOWANIE**

$$*\int \frac{x^2+x^7}{x^3}dx = \int\left(\frac{1}{x}+x^4\right)dx = \int\frac{1}{x}dx + \int x^4 dx = \ln|x| + \frac{1}{5}x^5 + C$$

**● OGÓLNY WZÓR**

dla $n \neq -1$ $\quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

(+ wzory z kartki)

dla $n = -1$ $\quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ $\quad \int \frac{f'}{f}dx = \ln|f| + C$

## * Całkowanie przez podstawianie

$$\int x \sin(4x^2+11)\,dx$$

$4x^2+11 \rightarrow t$, $\quad x\,dx \rightarrow \frac{dt}{8}$

① WYMYŚL CO PODSTAWIĆ JAKO t

$t = 4x^2+11$

② POCHODNA Z t $\cdot$ dx TO BĘDZIE dt

$dt = (8x)dx = 8x\,dx$

więc $\frac{dt}{8} = x\,dx$

③ JEŚLI WSZYSTKIE X'y ZOSTAŁY ZASTĄPIONE TO PODSTAWIENIE JEST ok

$$\int \sin t \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int \sin t\, dt = \frac{1}{8}(-\cos t) + C$$

④ PRZEKSZTAŁCAM PODSTAWIONĄ CAŁECZKĘ PRZY UŻYCIU WZORÓW

⑤ DOPIERO NA SAMYM KOŃCU PODSTAWIAM PRAWDZIWE WARTOŚCI t

$$= -\frac{1}{8}\cos(4x^2+11) + C$$

## * Całkowanie przez części

(1) ZNALEŹĆ TAKIE „u" I TAKIE „v'" ABY $u \cdot v'$ DAWAŁO FUNKCJĘ PODCAŁKOWĄ

$\int x \sin x \, dx =$

POCHODNA: $u = x$ → $u' = 1$

CAŁECZKA: $v' = \sin x$ → $v = -\cos x$

(2) LICZĘ POCHODNĄ Z u I CAŁKĘ Z v'

(1) $-x \cos x$ ← (3) ZAPISUJĘ WYNIK MNOŻENIA (1)

(2) $\int 1(-\cos x)\,dx$ ← (4) ZAPISUJĘ WYNIK MNOŻENIA (2) POD CAŁKĄ!

(5) WYNIK TO (1) − (2)

(1) − (2) =

$-x\cos x - \int 1(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

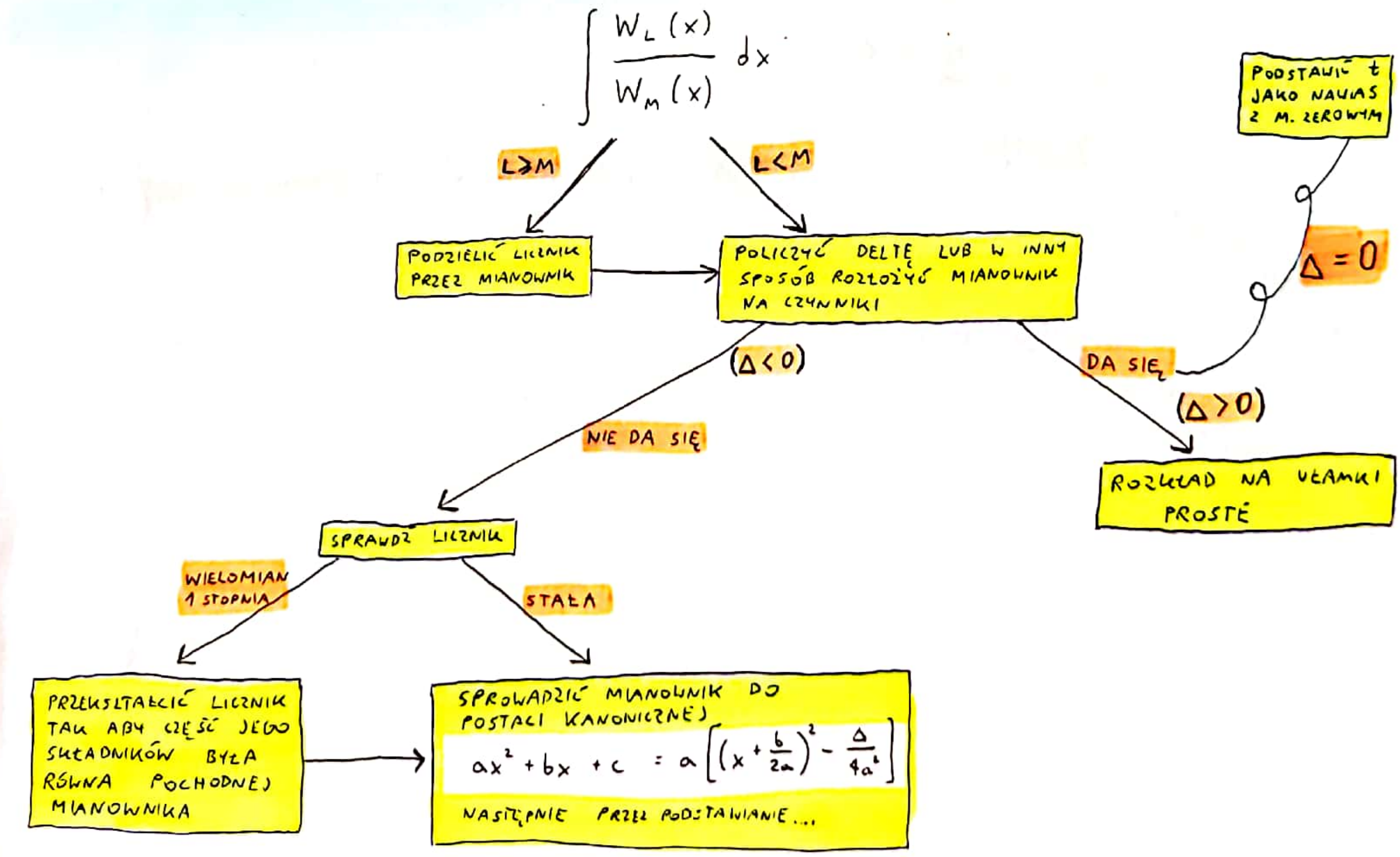
**UWAGI:**

* DOBIERZ ODPOWIEDNIO Z CZEGO CHCESZ LICZYĆ CAŁKĘ A Z CZEGO POCHODNĄ

np. całka z $x$ ( to $\frac{1}{2}x^2$ ) nic ci sensownego nie daje w tym zadaniu

* NAPISZ ŻYWCEM POCHODNA (coś 1) I CAŁECZKA (coś 2), POTEM SIĘ ZASTANAWIAJ

## * Całki wymierne - schemat



# 2 | ANALIZA | CAŁKI WYMIERNE – SPOSOBY

## ✱ Rozkład na ułamki proste

$$\int \frac{dx}{x^2+x+2}$$

① LICZĘ DELTĘ $\Delta = 9$

② ROZKŁADAM $1(x+2)(x-1)$

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

wielomian stopnia o 1 mniejszego

③ POMNOŻYĆ $\cdot\, (x+2)(x-1)$

$$1 = A(x-1) + B(x+2)$$
$$1 = Ax - A + Bx + 2B$$

④ ZACZĄĆ PORÓWNYWANIE OD NAJ. POTĘGI (tu $x^1$), POTEM PORÓWNAĆ STAŁE

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -A + 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = \frac{1}{3} \\ A = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

⑤ PODSTAWIĆ DO CAŁKI

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

## UWAGA:

✱ gdy występuje czynnik $(x-a)^k$ to

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

✱ tak samo dla $(x^2+bx+c)^k$

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_kx+C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

dla $x^2$ o jeden mniejszy stopień to 1 więc w. ogólny

$B_x + C \rightarrow$ nie zapomnij o stałej bez x !

**PRZYKŁAD 2**

$$\frac{x^3+x^2+2x-4}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

## ✱ szczególny przypadek: delta mianownika $= 0$

$$\int \frac{3x+1}{2x^2+4x+2}\,dx = \int \frac{3x+1}{2(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(3x+1)\,dx}{(x+1)^2}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

①

PODSTAWIAM t

$$\left| \begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix} \right| \rightarrow x = t-1$$

②

$$\frac{1}{2}\int \frac{3(t-1)+1}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{3t-2}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{3t}{t^2}\,dt - \int \frac{2}{t^2}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(3\int \frac{1}{t}\,dt - 2\int \frac{1}{t^2}\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(3\ln|t| - 2\,\frac{1}{-2+1}t^{-2+1}\right) + C = \frac{1}{2}\left(3\ln|x+1| + 2(x+1)^{-1}\right) + C$$

standardowo podstawieniem

**PODSUMOWUJĄC:**

① ZAPISAĆ W POSTACI ILOCZYNOWEJ

② PODSTAWIĆ $t$ JAKO NAWIAS Z MIEJSCEM ZEROWYM $(t = x - x_0)$

## * przypadek gdy $\Delta < 0$

$$\int \frac{x}{x^2-5x+7}\,dx \qquad \Delta = -3$$

JAKO, ŻE W LICZNIKU NIE JEST STAŁA, LECZ WIELOMIAN → PRZEKSZTAŁCAM LICZNIK NA I POCHODNĄ MIANOWNIKA

$$\int \frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2-5x+7}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-5+5}{x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} + \int \frac{5}{x^2-5x+7}\right)$$

WYJĘCIE $\frac{1}{2}$ PRZED CAŁKĘ

DODANIE SZTUCZNEJ STAŁEJ

Liczę osobno

(1)
$t = x^2-5x+7$
$dt = (2x-5)\,dx$
wtedy
$$\int \frac{1}{t}\,dt \to \ln|x^2-5x+7|+C$$

(2) MIANOWNIK DO POSTACI KANONICZNEJ

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \left(x+\frac{-5}{2}\right)^2 - \frac{-3}{4}$$
$$= \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$5\int \frac{1}{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \to \boxed{\begin{matrix} t = x-\frac{5}{2} \\ dt = dx \end{matrix}} \to 5\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = 5\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= 5\cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{10}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\left(x-\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

## * gdy mam (WIELOMIAN / $\sqrt{\text{PIERWIASTEK Z WIELOMIANU WIĘKSZEGO STOPNIA}}$) to tak samo robię

np.
$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-4x+2}}$$

ROBIĘ POCHODNĄ M. W LICZNIKU →

$$\frac{1}{2}\int \frac{6x-2}{\sqrt{3x^2-4x+2}}\,dx \quad \frac{1}{2}\int \frac{6x-4+2}{\sqrt{3x^2-4x+2}} = \frac{1}{2}\left(\int\frac{6x-4}{M} + \int \frac{2}{M}\right) \ldots$$

## * trygonometryczne

→ dążyć do rozłożenia na kilka całek. (GDY NIEPARZYSTA NP. $\cos^5 x$ TO RSB $\cos^4 x\cdot\cos x$)

PARZYSTA

np.
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$
$\cos^2 x = \frac{\cos 2x+1}{2}$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(\cos 2x+1)^2\,dx$$

↳ WZ. SKRÓCONEGO MNOŻENIA PO ROZPISANIU DAJE 3 CAŁKI

## Całki oznaczone

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. NAJPIERW LICZYSZ CAŁKĘ NIEOZNACZONĄ NIE ZWAŻAJĄC NA ( $\int_a^b$ )
2. PODSTAWIAM „b" I „a" ZA X'A DO TEJ CAŁKI NIEOZNACZONEJ

## Całki niewłaściwe

- * ŁATWE, $\infty$ W GRANICACH CAŁKOWANIA — podstawić epsilon
- * TRUDNE, STAŁE GRANICE CAŁKOWANIA — sprawdzić dziedzinę

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx$$

$\varepsilon$ – podstawiam epsilon

BO 0 NIE NALEŻY DO DZIEDZINY!


Z PRAWEJ BO GRANICA CAŁKOWANIA JEST OD 0 DO 1

NO ALE MOŻE TEŻ BYĆ LICZBA W ŚRODKU TEGO PRZEDZIAŁU NIENALEŻĄCA DO DZIEDZINY ;(

### ŁATWE - PRZYKŁAD

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_1^\varepsilon \frac{1}{x^2}\,dx$$ (podstawiam epsilon za nieskończoność)

### LICZĘ STANDARDOWO NIEOZNACZONĄ

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} = \frac{1}{-1} x^{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

### PODSTAWIAM DO WZORU F(b) – F(a)

$$\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^\varepsilon = \left[-\frac{1}{\varepsilon}\right] - \left[-\frac{1}{1}\right] = -\frac{1}{\varepsilon} + 1$$

ażeby zlikwidować epsilona liczę granicę j/w

$$\lim_{\varepsilon \to \infty}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) = 1$$

[ JEŻELI JAKAŚ LICZBA W ŚRODKU DZIEDZINY NIE NALEŻY DO DZIEDZINY TO TRZEBA PODZIELIĆ CAŁKĘ NA DWIE ]

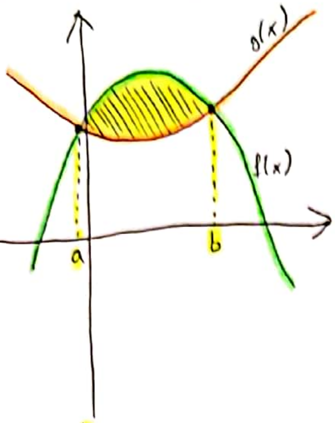
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{-1}^\varepsilon \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

z lewej — z prawej

PATRZ NA PRZEDZIAŁ !

## Pole obszaru

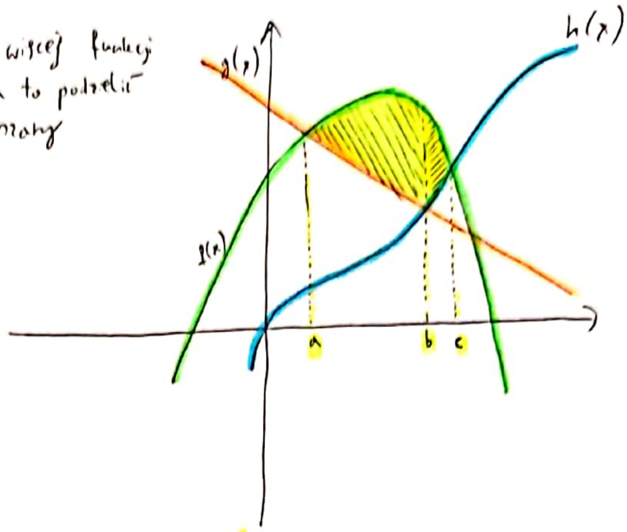
* jeśli więcej funkcji ogranicza to podzielić na obszary




$$P = \int_a^b \left[ f(x) - g(x) \right] dx$$

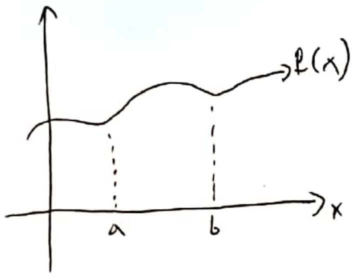
FUNK. OGRANICZAJĄCA Z GÓRY

FUNK. OGRANICZAJĄCA Z DOŁU



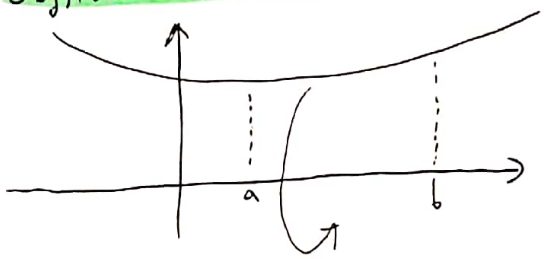

$$P = \begin{cases} P_1 = \int_a^b \left[ f(x) - g(x) \right] dx \\ P_2 = \int_b^c \left[ f(x) - h(x) \right] dx \end{cases}$$

## Długość łuku:

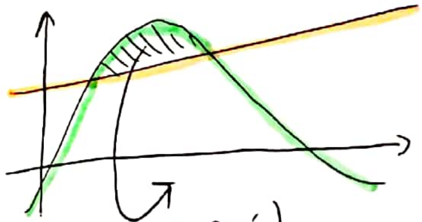



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[ f'(x) \right]^2}\, dx$$

## Objętość bryły obrotowej




$$V = \pi \int_a^b \left[ f^2(x) \right] dx$$

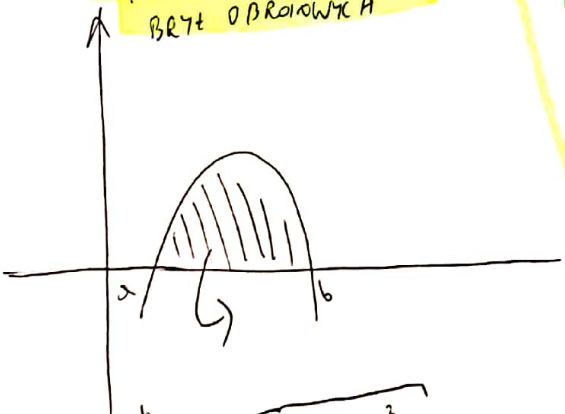


(coś a la pierścień)

$$V = \pi \int_a^b \left[ f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

f. ogr. z góry

## POLE POWIERZCHNI BRYŁ OBROTOWYCH




$$P_p = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[ f'(x) \right]^2}\, dx$$

dla $f(x) > 0$

Scanned with CamScanner

## CAŁKA PODWÓJNA - całki iterowane.

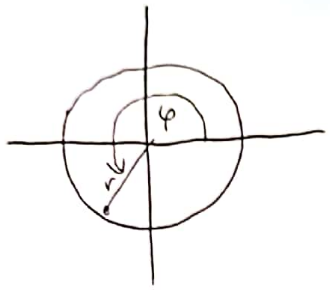
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right\} dx$$

Obszar normalny: → jednakowa z góry, jedna z dołu na ograniczenie.

$$D: \begin{cases} a \le x \le b \\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$$

JEŚLI OBSZAR JEST KOŁEM TO TRZEBA PRZEJŚĆ NA WSP. BIEGUNOWE.

## WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE




$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$D_B: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

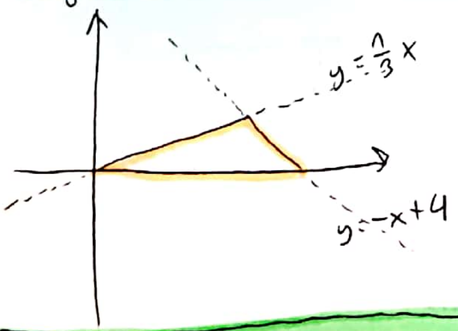
PAMIĘTAJ O JAKOBIANIE PRZEKSZTAŁCENIA
r - jakobian

ZAPISUJĘ PRZEKSZTAŁCENIE NP.

mnożę razy r

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 + 1} \cdot r \cdot d\varphi \right\} dr$$

## Co jeśli obszar nie jest normalny?




całka $\iint_D (4x+2y)\,dx\,dy$

ZMIANA GRANIC CAŁKOWANIA

### Scenariusz 1: DZIELĘ NA 2 OBSZARY

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \frac{1}{3}x \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le -x+4 \end{cases}$$

↓ SUMA TYCH CAŁEK TO MOJA CAŁKA ↓

$$\iint_{D_1} (4x+2y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left\{ \int_0^{\frac{1}{3}x} (4x+2y)\,dy \right\} dx$$

$$\iint_{D_2} (4x+2y)\,dx\,dy = \int_3^4 \left\{ \int_0^{-x+4} (4x+2y)\,dy \right\} dx$$

### Scenariusz 2: UZALEŻNIAM X OD Y'GREKA

przekształcam proste na x = ....

| | |
|---|---|
| $y = \frac{1}{3}x \to x = 3y$ | |
| $y = -x+4 \to x = 4-y$ | |

$$\to D: \begin{cases} 3y \le x \le 4-y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_D (4x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_{3y}^{4-y} (4x+2y)\,dx \right\} dy$$

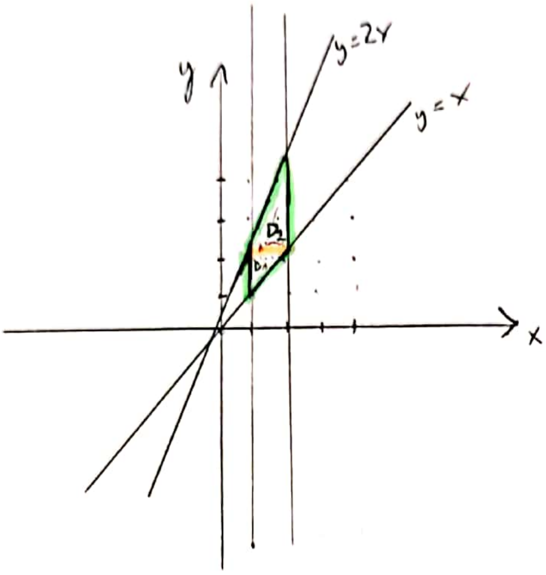
*TERAZ X JEST W ZMIENNYCH GRANICACH DLATEGO LICZĘ PO DX W ŚRODKU, DY NA ZEWNĄTRZ

(NA ZEWNĄTRZ CAŁKI SĄ NIEZMIENNE GRANICE)

## Zamiana granic całkowania

$$\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\, dy$$

obszar mogę zapisać jako: $D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$




Teraz obszar jest ograniczony na y'grekach dwoma prostymi $y=2x$ i $y=x$

* żeby zamienić granice całkowania muszę zobaczyć jakie funkcje ograniczają z góry i z dołu, ale TAK JAKBYM OŚ Y MIAŁ NA DOLE KARTKI

teraz ograniczają 2 funkcje u góry: 2 funkcje na dole

TRZEBA WIĘC PODZIELIĆ

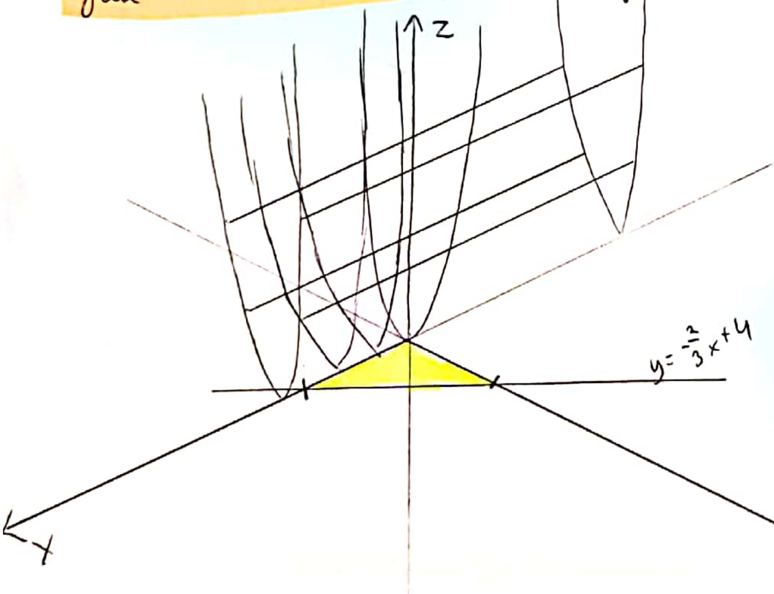
i teraz patrzę już na kartę (**Z OBRÓCONĄ GŁOWĄ**)! patrzę co ogranicza z dołu i z góry

$D_1: \begin{cases} 1 \le x \le y \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$ $D_2: \begin{cases} \frac{y}{2} \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$

$$= \int_1^2 dy \int_1^y f(x,y)\, dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)\, dx$$

## Jak to zrobić w 3D?

$z=y^2$, $2x+3y-12=0$, płaszczyzny układu wsp.




Obszar na osi x, y jest ograniczony od góry (oś z) tą parabolą.

*** UWAGA:** Zaznaczając $z=y^2$ x jest dowolny więc przesuwam parabolę jakby x mógł być gdziekolwiek chce

$$2x+3y-12=0$$
$$y=-\frac{2}{3}x+4$$

ZAPISUJĘ OBSZAR

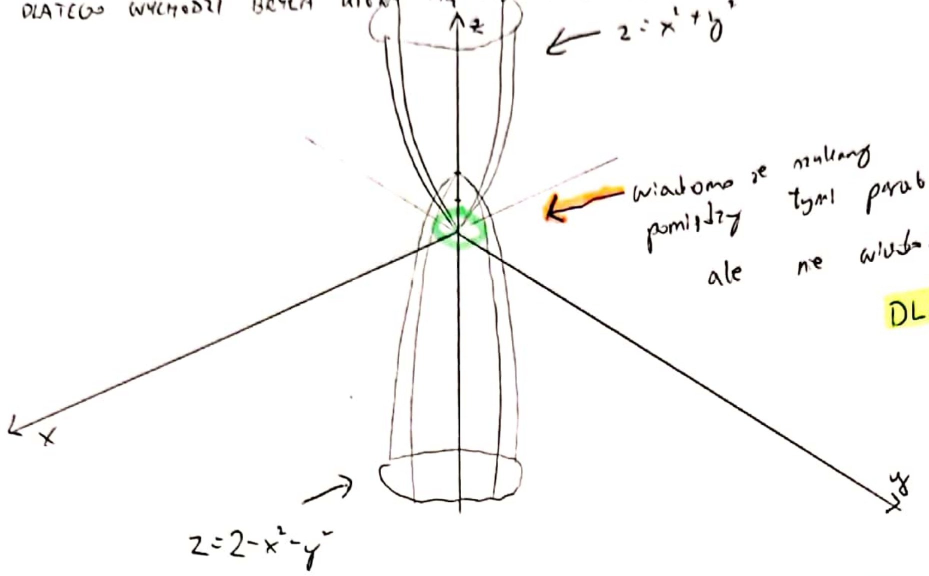
$D: \begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le -\frac{2}{3}x+4 \end{cases}$

Całka: $\iint_D y^2\, dx\, dy$

## Co zrobić, gdy nie widać obszaru 2D na osi x, y ?

$z = 2 - x^2 - y^2$ , $z = x^2 + y^2$

* RYSUJĘ PARABOLOIDY
tabela dla $x=0$, potem dla $y=0$
DLATEGO WYCHODZI BRYŁA KTÓRA SIĘ KRĘCI WOKÓŁ OSI Z




wiadomo że szukany obszar jest pomiędzy tymi paraboloidami (ich część wspólna) ale nie wiadomo nic o obszarze 2D

DLATEGO TRZEBA ZRÓWNAĆ

$z = z$

$2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2$

$\Downarrow$

$x^2 + y^2 = 1$

TEN OBSZAR TO OKRĄG O WYMIARZE PROMIEŃ $= 1$

## Jak zapisać całkę ograniczoną z góry i z dołu inną paraboloidą?

$$\iint_D \left(2 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)\right) dx\,dy \qquad = \iint_D (2 - 2x^2 - 2y^2)\, dx\,dy$$

ODP. ODJĄĆ FUNKCJĘ OGR. Z GÓRY I TĄ Z DOŁU.

## Współrzędne biegunowe

$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ podstawiam do wzoru pamiętając o jakobianie !!! oraz o zmianie na $dr\,d\varphi$

$$= \iint_{D_B} \left(2 - 2(r\cos\varphi)^2 - 2(r\sin\varphi)^2\right) \underbrace{r}_{1}\, dr\,d\varphi \quad = \iint_{D_B} \left(2 - 2r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right) r\, dr\,d\varphi \quad = \iint_{D_B} (2 - 2r^2) r\, dr\,d\varphi$$

Wstawiam obszar $D_B$: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$

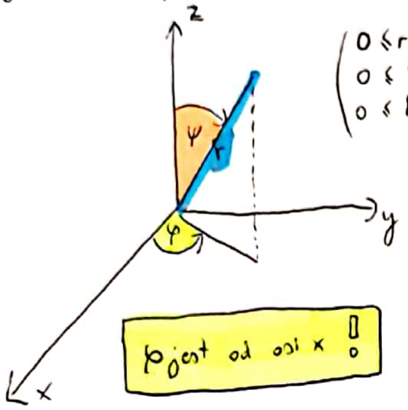
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} (2 - 2r^2) r\, d\varphi \right\} dr$$

Całka potrójna → inne współrzędne

SFERYCZNE (KULE)

$$\begin{cases} x = r\sin\psi\cos\varphi \\ y = r\sin\psi\sin\varphi \\ z = r\cos\psi \end{cases}$$

jakobian: $r^2\sin\psi$



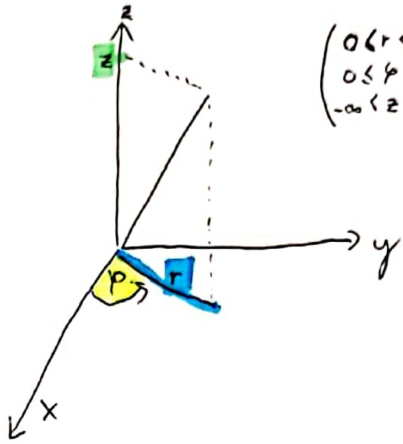
$$\begin{pmatrix} 0 \leq r \leq \infty \\ 0 \leq \psi \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix}$$

$\varphi$ jest od osi x !

WALCOWE (walce i stożki)

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

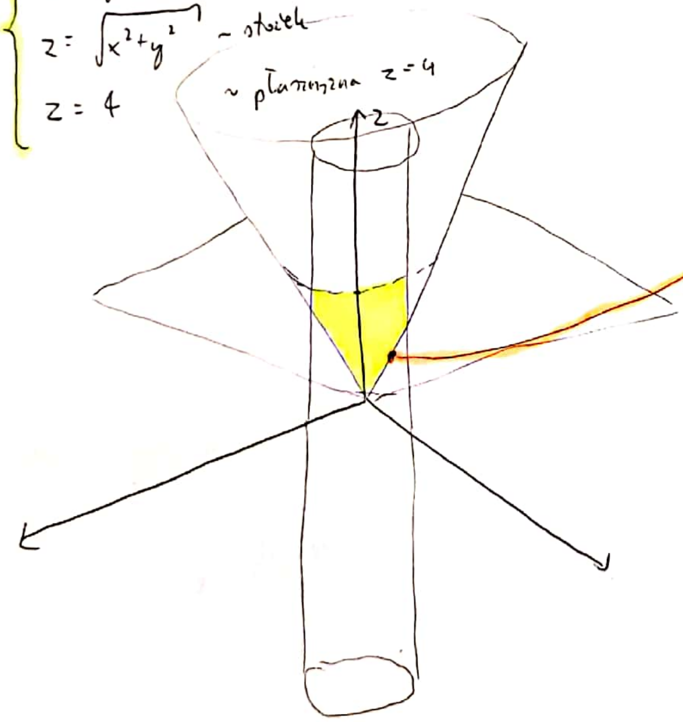
jakobian: r



$$\begin{pmatrix} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{pmatrix}$$

Wsp. walcowe: przykład

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 & \sim \text{walec o promieniu } 2 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} & \sim \text{stożek} \\ z = 4 & \sim \text{płaszczyzna } z=4 \end{cases}$$



Zapisuję

$$V_W = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \boxed{?} \leq z \leq 4 \end{cases}$$

z tym problemu nie ma

PROBLEM

na pewno nie jest od zera bo stożek się zaczyna i nie idzie tak jak walec

Co zrobić?

BIORĘ JAKIŚ PUNKT I ROZPISUJĘ

$(x, y, z)$

$(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$

$(x, y, \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2})$

$(x, y, r\sqrt{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2})$

$(x, y, r)$

STĄD $r \leq z \leq 4$

KOLEJNOŚĆ

WAŻNE !

gdy mam całkę:

$$\iiint_V zr\, dr\, d\varphi\, dz$$

oraz mam obszar

$$0 \leq r \leq 2$$
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq z \leq 4$$

to

$$\int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^4 zr\, dz \right] d\varphi \right\} dr$$

NAJPIERW CAŁKUJESZ PO dz

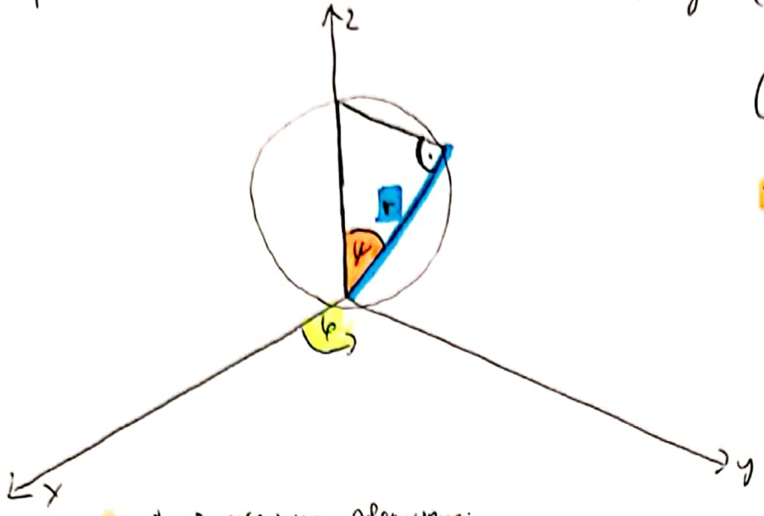
NAJBARDZIEJ NA ZEWNĄTRZ

Wsp. sferyczne - przykład z kuli.

$x^2+y^2+(z-1)^2=1$ → promień kuli: 1

↓

(z o 1 w górę)




* zastąpić wsp x,y,z sferycznymi
* nie zapomnieć o JAKOBIANIE!

TERAZ

$$V_s: \begin{cases} 0 \le r \le \boxed{?} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PROBLEM

Rozw. wystarczy cosinusa napisać

$\cos\psi = \frac{r}{2}$ → $\boxed{r = 2\cos\psi}$

: to jest maksymalne r :)

Całka krzywoliniowa SKIEROWANA

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(P[x(t), y(t)]\cdot x'(t) + Q[x(t),y(t)]\,y'(t)\right) dt$$

Łuk w POSTACI PARAMETRYCZNEJ!

$x = x(t)$
$y = y(t)$ $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

można odwrócić kolejność

$$\int_{\widehat{AB}} \dots = -\int_{\widehat{BA}}$$

* zmieniam x, y na parametryczne
* mnożę razy pochodne

Całka krzywoliniowa NIESKIEROWANA

$$\int_L f(x,y)\,dL$$

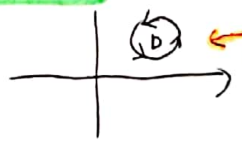
$$= \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$$

gdy podane parametryczne: bez tego

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

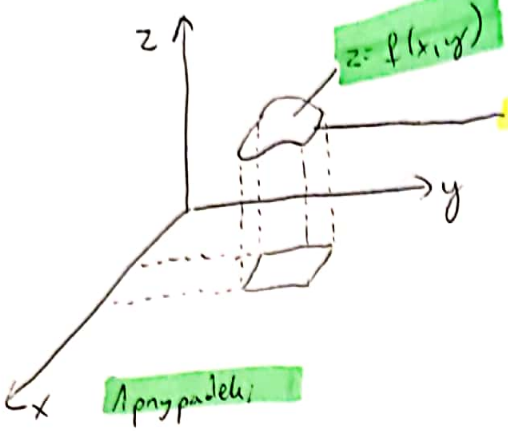
WZ. GREENA

całki krzywoliniowe skierowane - krzywe zamknięte




$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

## Całka powierzchniowa niezorientowana




$$S \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

WYZNACZNIK!

1 przypadek:

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

2 przypadek:

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \iint_\Delta F(\varphi,\psi,\chi)\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2+\left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,du\,dv$$

---

Przykład:

$$\iint_S (x^2+y^2)\,ds \quad \text{gdzie } S: \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$$

JEST TO STOŻEK PRZECIĘTY PŁASZCZYZNĄ $z=2$

* w całkach powierzchniowych musimy go podzielić na $S_1$ i $S_2$

$$\begin{cases} S_1 = z = \sqrt{x^2+y^2} \\ S_2 : z = 2 \end{cases}$$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \quad z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$D_2 : \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \quad z = 2$$

po prostu funkcja $f(x,y,z)$

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_{S_1}(x^2+y^2)\,dS + \iint_{S_2}(x^2+y^2)\,dS \underset{\text{1 przypadek}}{\overset{\text{UŻYWAM WZORU}}{=}} \iint_{D_1}(x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

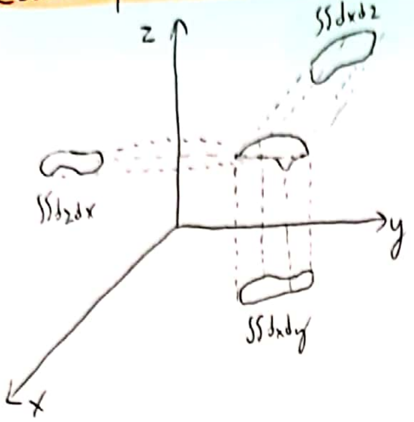
$$+\iint_{D_2}(x^2+y^2)\sqrt{1+0^2+0^2}\,dS = \iint_{D_1}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy + \iint_{D_2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

, ale $D_1 = D_2$ więc wystarczy 1 obl.

$$(\sqrt{2}+1)\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

12 ANALIZA CAŁKI

## Całka powierzchniowa zorientowana




$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy$$

PRZYPADEK 1:

$$= \iint_{D_1} P(h(y,z),y,z)\,dydz + \iint_{D_2} Q(x,g(x,z),z)\,dzdx + \iint_{D_3} R(x,y,f(x,y))\,dxdy$$

– PRZYPADEK 2 (PARAMETRYCZNIE)

$x = \varphi(u,v)$
$y = \psi(u,v)$
$z = \chi(u,v) \qquad (u,v)\in\Delta$

$$\iint_\Delta \left[P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]dudv$$

PRZYPADEK 3 (tylko jeśli
- powierzchnia jest zamknięta
- zorientowana zewnętrznie (+)
- ograniczająca obszar V )

**TW. GAUSSA – OSTROGRADSKIEGO**

$$\iint_S P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

---

Przykład z „przypadkiem 2":

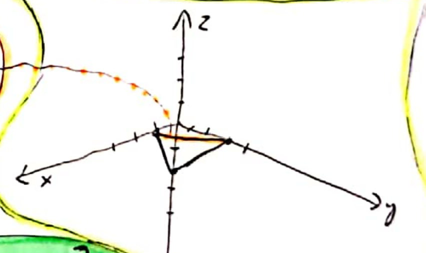
Oblicz strumień pola wektorowego $\vec{R} = [x+z,\ -2x,\ 2z-x]$ przez zewnętrzną powierzchnię trójkąta ABC otrzymanego z przecięcia płaszczyzny $6x+2y-3z=6$ z osiami współ.

Strumień można zapisać jako całkę $\vec{R} = [P,Q,R]$

$$\iint_S (x+z)\,dydz - 2x\,dzdx + (2z-x)\,dxdy$$

1

2 Rysuję płaszczyznę $6x+2y-3z=6$
$z = -2+2x+\frac{2}{3}y$
najpierw przyjmuję $x=0$ potem $y=0$ (żeby narysować)




3 Przechodzę na parametry

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -2+2u+\frac{2}{3}v \end{cases}$$

4 Wyznaczam obszar $\Delta$

$$\Delta: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le -3u+3 \end{cases}$$

dla $z=0$
$0 = -2+2x+\frac{2}{3}y$
$\Downarrow$
$y = -3x+3$

5 Podstawiam do wzoru z PRZYPADEK 2 z tym, że zamieniam x,y na parametry

$$\iint_\Delta \left[\left(u-2+2u+\frac{2}{3}v\right)\frac{D(y,z)}{D(u,v)} - 2u\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \left[2\left(-2+2u+\frac{2}{3}v\right)-u\right]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]dudv = \iint_\Delta \left(-1\frac{2}{3}u\right)dudv$$

6 Wstawiam obszar całkowania

$$= -1\frac{2}{3}\int_0^1 \left\{\int_0^{-3u+3} u\,dv\right\}du = -\frac{5}{6}$$

NA ZEWNĄTRZ STAŁE GRANICE OBSZARU !

ORIENTACJA BYŁA ZEWNĘTRZNA (+) WIĘC NIE ZMIENIAM ZNAKU !

## Pole wektorowe

$\vec{F}:[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)] : [P,Q,R]$

- każdemu punktowi jest przyporządkowany jeden wektor
- zbiór tych wektorów to pole wektorowe

## Potencjał pola wektorowego

Funkcję $\Phi(x,y,z)$ (WIELKIE FI) nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}=[P,Q,R]$, jeśli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=Q, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=R$$

(GRADIENT $=\vec{0}$ GDY MOŻNA POŁOŻYĆ NA WYKRESIE PŁASZCZYZNĘ Z POZIOMKĄ :) )

## GRADIENT ~ pole wektorowe z potencjałem

Wektor pola $\vec{F}$ nazywamy wtedy gradientem funkcji $\Phi(x,y,z)$

$$\underset{\text{pole wektorowe}}{\vec{F}} = \text{grad}\,\Phi = \underset{\text{„}\nabla\text{"-nabla}}{\nabla\Phi}$$

żeby obliczyć nablę, gradient z jakiejś funkcji:

$$\nabla\varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]$$

**UWAGA!** Nie każde pole wektorowe ma potencjał (Pole z potencjałem to pole potencjalne)

## Powierzchnia „równopotencjalna" a la "ekwipotencjalna"

to taka o równaniu $\Phi(x,y,z)=C$, gdzie $\Phi$ to potencjał

## Warunek na istnienie potencjału

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

## Dywergencja (ROZBIEŻNOŚĆ) – funkcja z jakiegoś pola wektorowego

DODAJE SIĘ WSP. POCHODNYCH I MA SIĘ Z TEGO JAKĄŚ FUNKCJĘ

$\text{div}\,\vec{F}<0$ gdy więcej wpływa niż wypływa
$\text{div}\,\vec{F}>0$ gdy mniej wpływa niż wypływa

$$\text{div}\,\vec{F}[P,Q,R] = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Jeśli pole wektorowe ma potencjał $\Phi$ (jest gradientem $\Phi$), wtedy:

$$\text{div}\,\vec{F} = \text{div}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right] = \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}_{\text{Laplasjan funkcji } \Phi} = \Delta\Phi$$

pochodna drugiego rzędu po x, po x

[Jeśli $\text{div}\,\vec{F}=0$ w każdym punkcie pola, wtedy pole jest zwane bezźródłowym]

(WIR)

**Rotacja** - pola wektorowego $\vec{F}$ jest innym polem wektorowym

[Pole w którym $rot\ \vec{F} = \vec{0}$ to pole niewirowe]

$$Rot\ \vec{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]$$

* Dywergencja rotacji w każdym punkcie jest równa 0 $(div(rot\ \vec{F}) = 0)$
* Pole wektorowe mające potencjał $\phi$ (będące gradientem $\phi$) jest zawsze niewirowe $(rot\ \vec{F} = rot\ (grad\ \phi) = 0)$

## PARAMETRYZACJA POWIERZCHNI

**Wektor styczny do krzywej danej równaniami parametrycznymi**

ZASTOSOWANIA:
* w fizyce: wektor styczny do toru ciała to wektor prędkości
* w matematyce: przy użyciu współrzędnych krzywoliniowych.

**Parametryczna krzywa:**

$x(t) = t^2$ ~ t to dowolny parametr (np. czas)

$y(t) = t$

→ tutaj jako $x = y^2$ (odwrócona parabola w prawo)

▶ niektóre krzywe sparametryzowane można przedstawić jako $y(x)$

▶ każdą funkcję $y(x)$ można sprowadzić do postaci parametrycznej.

**Przechodzimy do wyznaczania wektora stycznego:**

1) ZAPISAĆ KRZYWĄ PARAM. JAKO **WEKTOR WODZĄCY** ~ (w fizyce to by było równanie ruchu ciała)

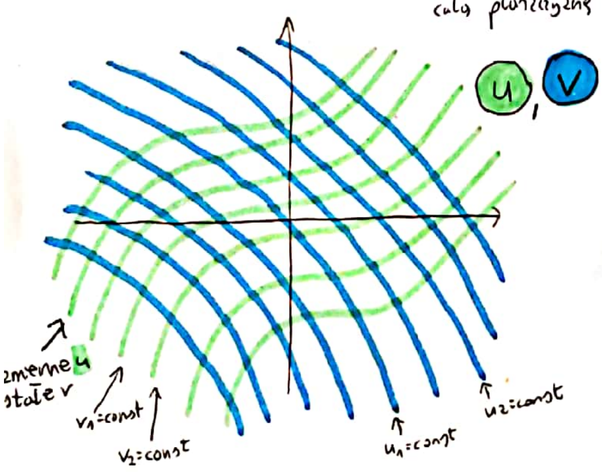
$$\vec{r}(t) = [t^2, t]$$

2) OBLICZYĆ POCHODNĄ WEKTORA WODZĄCEGO WZGLĘDEM CZASU = **WEKTOR STYCZNY** ~ (to by był wektor prędkości w danym punkcie)

$$\vec{s}(t) = \vec{r}\,'(t) = [2t, 1]$$

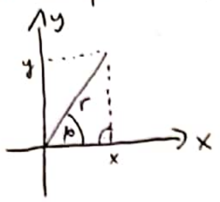
wektor styczny dla np. $t = 2$ to $\vec{s}(2) = [4, 1]$

**Współrzędne krzywoliniowe** * zamiast x,y dowolne dane liczby u,v, dzięki którym będzie można pokryć całą płaszczyznę



## Współrzędne biegunowe

* tylko dla punktów poza początkiem układu współrzędnych, punkt $r=0$ jest niejednoznaczny

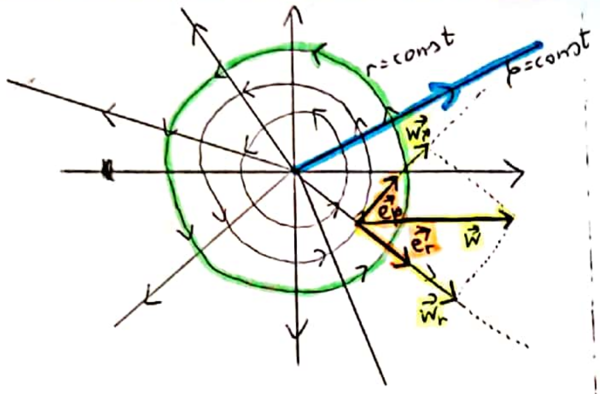



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

po przekształceniu ... $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (a właściwie z Pitagorasa), ale po przekształceniu coś takiego mam

$$\frac{y}{x} = tg\,\varphi$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

## * Siatka współrzędnych biegunowych




## Baza wektorów współrzędnościowych:

* z każdą współrzędną będzie związany pewien wektor bazowy

$\vec{e_r}$ - wektor styczny do zmieniającego się promienia, ale przy stałym kącie (styczny do linii $\varphi$=const)

$\vec{e_\varphi}$ - wektor styczny do zmieniającego się kąta, ale przy stałym promieniu (styczny do linii r=const)

$\vec{w}$ - dowolny wektor w dowolnym punkcie (np przyspieszenie w fizyce)

$\vec{w_\varphi}$ - składowa transwersalna

$\vec{w_r}$ - składowa radialna

$$\vec{w} = \vec{w_\varphi} + \vec{w_r} = w_\varphi \cdot \vec{e_\varphi} + w_r \cdot \vec{e_r}$$

(można wyrazić jako liczba * ten wektor [jednostkowy?] )

## Jak wyznaczyć ten wektor $\vec{e_\varphi}$?, $\vec{e_r}$?

### Zacznijmy od $\vec{e_r}$, czyli przyjmujemy kąt stały:

* znając $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ i dla $\varphi$=const można przyjąć, że to jest parametryczne równanie jakiejś krzywej, gdzie parametrem jest promień

* ta krzywa to jedna z tych wychodzących z układu (oznaczona $\varphi$=const)

$$\begin{cases} x(r) = r\cos\varphi \\ y(r) = r\sin\varphi \end{cases}$$

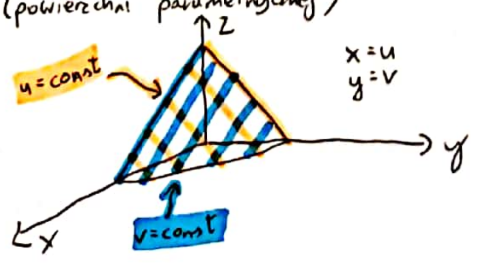
* aby wyliczyć wektor styczny, trzeba obliczyć pochodną z tego wektora położenia na tej krzywej po tym parametrze jaki tu jest (tutaj to jest r)

$$\vec{e_r} = [x'(r), y'(r)] = [\cos\varphi, \sin\varphi]$$

## Parametryzacja powierzchni

$$\vec{r}(u,v) = [\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,]$$

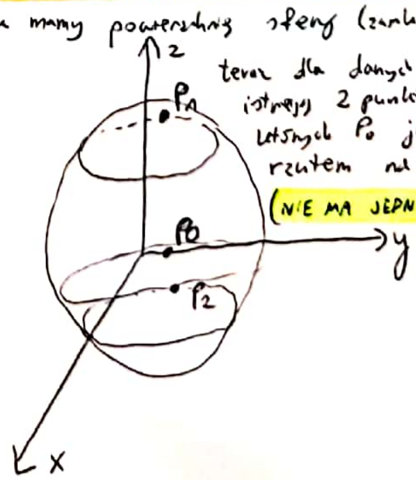
* idea jest taka, żeby najpierw przyjmować u jako stałe, a potem v jako stałe
* efektem tego będzie uzyskanie dwóch rodzin prostych (powierzchni parametrycznej)




### Dlaczego nie używamy zawsze x, y jako parametry?

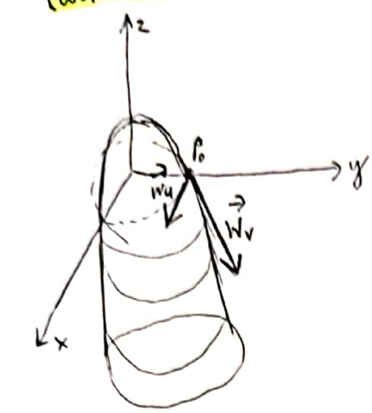
- np. jak mamy powierzchnię sfery (zamkniętą powierzchnię)

teraz dla danych x, y istnieją 2 punkty, dla których $P_0$ jest ich rzutem na płaszczyznę (NIE MA JEDNOZNACZNOŚCI)



## Wektory styczne do powierzchni

* jest ich nieskończona ilość
* przyglądamy się te, które są zgodne z parametryzacją powierzchni. (WSPÓŁRZĘDNOŚCIOWE WEKTORY STYCZNE)




Jakbyśmy chodzili jak mrówka i:

- szli w kierunku y greka (ale będąc na powierzchni) to będziemy (jak widać) schodzić w dół
- szli w kierunku x'a (po powierzchni) to będziemy iść poziomo

(1) ZAPISAĆ RÓWNANIE POWIERZCHNI PARAMETRYCZNE

$$\vec{r}(u,v) = [u, v, 1-u^2-v^2]$$

(2) POCHODNE CZĄSTKOWE → najpierw po u, potem po v.

$$\vec{w}_u = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) = [1, 0, -2u] \quad : \text{dla } P_0 : [1,0,0]$$

$$\vec{w}_v = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v) = [0, 1, -2v] : \text{dla } P_0 \; [0,1,-2]$$

$z = 1-(x^2+y^2)$

$u = x$

$v = y$

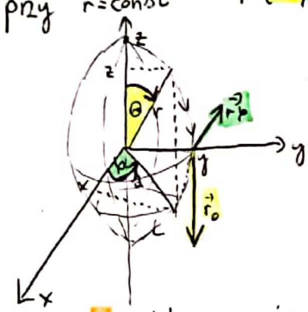
$P_0 = [0,1,0]$

## Parametryzacja sfery

(np. współrzędne geograficzne) (umożliwia liczenie wypływu pól wektorowych przez tę powierzchnię)

przy r=const

$$\vec{r}(\theta, \varphi) = [r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta]$$ czyli tak jak normalnie, ale r = const!




wektor styczny do „południków":

$$\vec{r}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}\vec{r}(\theta,\varphi) = [r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta]$$

wektor styczny do równoleżników:

$$\vec{r}_\varphi = [\ldots\ldots, 0, 0]$$

* wektory powinny iść w kierunku, który jest wskazywany przez (kierunek wzrostu kątów)
* taki układ dwóch wektorów rozpina pewną płaszczyznę → PŁASZCZYZNĘ STYCZNĄ DO SFERY

## Parametryzacja walca

$$\vec{r}(\varphi, z) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi, z], \text{ dla } r = const$$

w sumie, tak jak wyżej :)

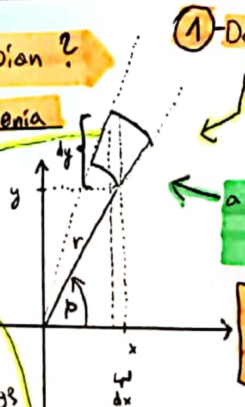
## Co to jest ten jakobian?

- jest to miara zniekształcenia

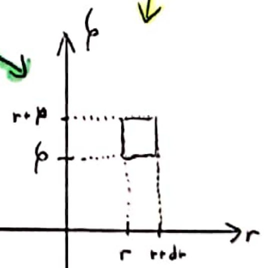
(1) Dodaję coś super-małego do r i do φ: tutaj wychodzi taki o kwadrat

a tutaj takie dziwne dziwadło (2)

Pole tego □ to: $dP = dr\,d\varphi$




(3) a pole tego to $dS = J\,dr\,d\varphi$




Pole tego prostokąta to $dS = dx\,dy$ (dy, dx)

WIĘC POLE TEGO LEWEGO TO POLE PRAWEGO RAZY JAKOBIAN!

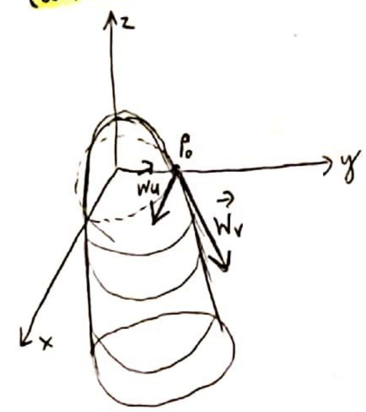
* W całkach, licząc pole powierzchni, dzielimy obszar na niesko. liczbę prostokątów.
* No ale we wsp. biegunowych musimy podzielić na te takie dziwne zaokrąglone obszary
* suma pól tych wszystkich figur krzywoliniowych musi być równa sumie pól prostokątów


Stąd: licząc całkę

$$\iint f \underbrace{dx\,dy}_{=dS} = \iint f\, J\, dr\, d\varphi$$

## Wektory styczne do powierzchni

* jest ich nieskończona ilość
* przykładamy się te, które są zgodne z parametryzacją powierzchni. (WSPÓŁRZĘDNOŚCIOWE WEKTORY STYCZNE)




$z = 1-(x^2+y^2)$

$u = x$

$v = y$

$P_0 = [0,1,0]$

Jakbyśmy chodzili jak mrówka:

- szli w kierunku y greka (ale będąc na powierzchni) to będziemy (jak widać) schodzić w dół
- szli w kierunku x'a (po powierzchni) to będziemy iść poziomo

① ZAPISAĆ RÓWNANIE POWIERZCHNI PARAMETRYCZNE

$$\vec{r}(u,v) = [u, v, 1-u^2-v^2]$$

② POCHODNE CZĄSTKOWE → najpierw po u, potem po v.

$$\vec{W_u} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v) = [1,0,-2u] = \text{dla } P_0: [1,0,0]$$

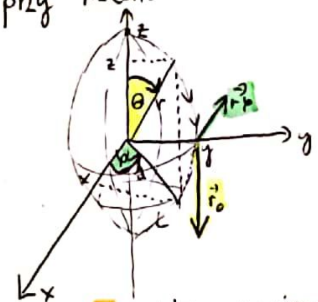
$$\vec{W_v} = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v) = [0,1,-2v] : \text{dla } P_0: [0,1,-2]$$

## Parametryzacja sfery

(np. współrzędne geograficzne) (umożliwia liczenie wypływów pól wektorowych przez tą powierzchnię)

przy $r = const$

$$\vec{r}(\theta,\varphi) = [r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta]$$ czyli tak jak normalnie, ale $r = const$!




wektor styczny do „południka”:

$$\vec{r_\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{r}(\theta,\varphi) = [r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta]$$

wektor styczny do równoleżnika:

$$\vec{r_\varphi} = [\ldots\ldots, 0, 0]$$

* wektory powinny iść w kierunku, który jest wskazywany przez (kierunek wzrostu kątów) → 
* taki układ dwóch wektorów rozpina pewną płaszczyznę → PŁASZCZYZNĘ STYCZNĄ DO SFERY

## Parametryzacja walca

$$\vec{r}(\varphi,z) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z],\quad \text{dla } r = const$$ w sumie, tak jak wyżej :)

## Co to jest ten jakobian?

- jest to miara zniekształcenia

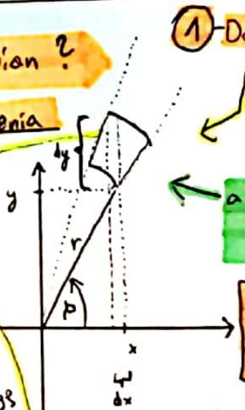
Pole tego prostokąta to $dS = dx\,dy$

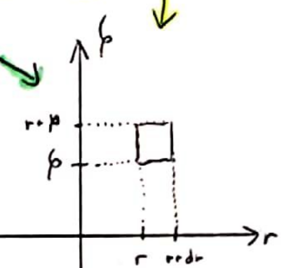
① Dodaję coś super-małego do r i do φ: tutaj wychodzi taki o kwadrat

a tutaj także dziwne dziwadło ②

Pole tego □ to: $dP = dr\,d\varphi$

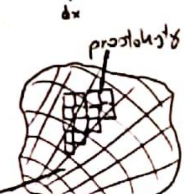
③ a pole tego to $dS = J\,dr\,d\varphi$




WIĘC POLE TEGO LEWEGO TO POLE PRAWEGO RAZY JAKOBIAN!

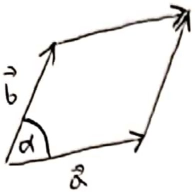
* W całkach, licząc pole powierzchni dzielimy obszar na mnóstwo małych prostokątów.
* No ale we wsp. biegunowych można podzielić na te także dziwne zaokrąglone obszary
* suma pól tych wszystkich figur krzywoliniowych musi być równa sumie pól prostokątów




Stąd: liczę całkę

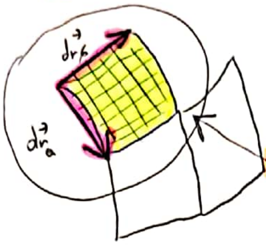
$$\iint f \underbrace{dx\,dy}_{=dS} = \iint f\, J\, dr\, d\varphi$$

## Element powierzchnii pola




$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ~ wzór na pole równoległoboku

[**Idea całki powierzchniowej:** podzielić powierzchnię na takie malutkie łatki, elementy, tak aby pokrywały całą powierzchnię]




* gdy elementy są wystarczająco małe, można pominąć zaokrąglenia: stawonyć równoległoboki

**① Rozpisuję wzór na pole powierzchni tego kawałeczka**

$dS = |d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v|$ ~ tutaj już używam u, v zamiast $\varphi, \theta$ (OGÓLNE PARAMETRY)

**② Wzory na wektory będące bokami równoległoboku:**

$d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot du \quad , \quad d\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot dv$

**③ Zapisuję ten wzór z podstawieniem już**

du, dv to są normalne, małe bo małe ale liczby więc WYCIĄGAM Z ILOCZYNU

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

* ten wzór zamienia całkę powierzchniową na całkę podwójną

* Przepis na wektor prostopadły do powierzchni
* jego długość jest równa polu powierzchni tej łatki
* łatka odpowiada przyrostom du i dv

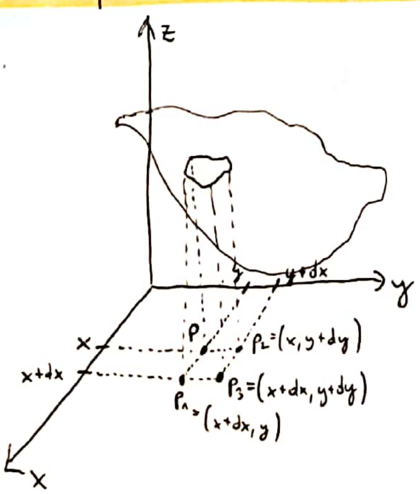
$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \, du\,dv$$

(bez modułu)

* przydaje się do wyliczania strumieni różnych pól (np. jak bardzo pole elektryczne wypływa przez daną powierzchnię)
* oraz do całek powierzchniowych nieskierowanych

## Element powierzchni dla funkcji dwóch zmiennych

$z = z(x,y)$, x, y, po rozpisaniu:




$\vec{r}(x,y) = [x, y, z(x,y)]$ WEKTOR KTÓREGO KONIEC WSKAZUJE PUNKT NA POWIERZCHNI

$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| dx\,dy$ POLE POWIERZCHNI TEJ MAŁEJ ŁATKI

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = [1, 0, z_x']$ , $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = [0, 1, z_y']$

iloczyn wektorowy jest równy:

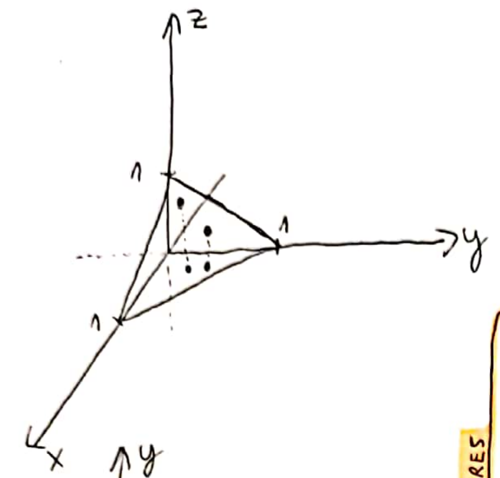
$d\vec{S} = [-z_x', -z_y', 1]\,dx\,dy$

DŁUGOŚĆ WEKTORA:

$dS = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\;dx\,dy$

## Całki powierzchniowe niezorientowane :: pole trójkąta

$z = 1 - x - y \;,\; x \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0$




① PODSTAWIAM NAJPIERW $x=0$, $y=0$ I RYSUJĘ

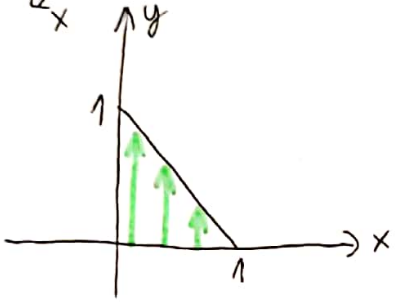
② POLE POWIERZCHNI = SUMA TYCH PÓL ELEMENTARNYCH NA KTÓRE PODZIELILIŚMY

$$P = \int dS$$

③ PARAMETRYZACJA (POWIERZCHNIA + ZAKRESY)

$$\vec{r}(x,y) = [x, y, 1-x-y]$$

④ RZUTUJĘ PUNKTY 3D NA PŁASZCZYZNĘ $xy$
RYSUJĘ OŚ $x, y$




ZAKRES

* wybieram sobie z której strony rysuję kreski

* tam gdzie strzałki się zaczynają tam wyznaczam stałe granice

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x \end{cases}$$

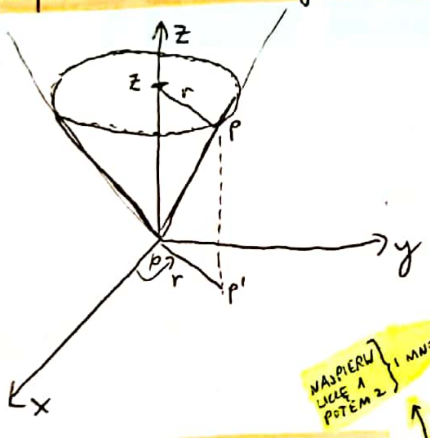
⑤ ZAKŁADAJĄC ŻE POWIERZCHNIĘ NA $(x,y)$ PODZIELIŁEM NA PROSTOKĄTY O BOKACH $DX, DY$ TO ICH ODBICIE W 3D BĘDZIE MIAŁO POLE $dS$

$$dS = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{3}\, dx\, dy$$

⑥ POLE CAŁEGO TRÓJKĄTA TO CAŁKA Z $dS$

$$P = \int dS = \iint \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Całka po powierzchni obrotowej :




$\int_S (x^2+y^2)\, dS$ – całkę tą można sobie wyobrazić jako masę pewnej powierzchni, gdzie gęstość na tej powierzchni to funkcja $(x^2+y^2)$

$S$ – powierzchnia bryły

$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$

**UWAGA!** Gdziekolwiek jest samotne $x^2+y^2$ w całkach (może być sinus lub $\sqrt{\;}$) = UŻYJ WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH

* we współrzędnych biegunowych $r$ jest wsp. radialną $r = \sqrt{x^2+y^2}$

① PRZECHODZĘ NA WSP. BIEGUNOWE — MOJE NOWE PARAMETRY TO TERAZ $r, \varphi$

$z = r \;,\; x = r\cos\varphi \;,\; y = r\sin\varphi$

$\rho = r^2$ (gęstość położenia, funkcja podcałkowa we wsp. biegun.)

$$\int_S \rho\, dS$$

② RYSUJĘ STOŻEK

BRZEG DOLNY: $z = r$
BRZEG GÓRNY: $z = 1$

③ PISZĘ WEKTOR POŁOŻENIA

$$\vec{r}(r,\varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi, r]$$

④ LICZĘ POCHODNE CZĄSTKOWE PO KOLEJNYCH PARAMETRACH, POTEM ICH ILOCZYN WEKTOROWY

$\vec{r}_r' = [\cos\varphi, \sin\varphi, 1]$, $\vec{r}_\varphi' = [-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0]$

$\vec{r}_r' \times \vec{r}_\varphi' = -r\cos\varphi\, \hat{i} - r\sin\varphi\, \hat{j} + r\, \hat{k}$

⑤ PODSTAWIAM DO WZORU NA $dS$

$$dS = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + r^2}\, dr\, d\varphi = \sqrt{2}\, r\, dr\, d\varphi$$

⑥ PISZĘ ZAKRESY PARAMETRÓW

$$0 \leqslant r \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

**UWAGA!**
* tutaj od razu jestem we wsp. biegunowych więc NIE UŻYWAM JAKOBIANU
* mogę też obliczyć $dS$ na poziomie $(x,y)$ ze wzoru
$dS_b = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy$
TERAZ UŻYĆ JAKOBIANU
$dS_b = \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, r\, dr\, d\varphi = dS_b$

**WAŻNE INFO O JAKOBIANIE**

⑦ NAJPIERW POLE BOCZNE $S_b$ LICZĘ

$$\int_{S_b} \rho\, dS_b = \sqrt{2} \cdot \int_0^1 r^2 \cdot r\, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

to $r^2$ to $\rho$

to $r$ wziąłem z wzoru na $dS$

całkę po $d\varphi$ obliczyłem od razu

iloczyn całek

NAJPIERW LICZĘ 1 POTEM 2 I MNOŻĘ

⑧ CAŁKA Z TEGO DENKA (OKRĘGU) GDZIE $z = 1$

* muszę zmienić w parametrach $z = r$ na $z = 1$ i przeanalizować iloczyn wektorowy i same te pochodne cząstkowe uwzględniając zmianę

$|\vec{r}_r' \times \vec{r}_\varphi'| = |r \cdot \hat{k}| = r$

$dS_{denka} = r\, dr\, d\varphi$

$$\int_{S_{denka}} \rho\, dS_{denka} = \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\pi$$

⑨ SUMUJĘ TE 2 CAŁKI

## Całka po sferze

Najpierw obliczenia ogólne:

① Wektor położenia we wsp. sferycznych:

$$\vec{r}(\theta,\phi) = [r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta]$$

② Wyprowadzenie wzoru na dS

$$dS = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi|\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Konkretny przykład:

$$\iint_S (x^2+y^2)\, dS$$

ta funkcja w liczce jest gęstością na sferze (FUNKCJA GĘSTOŚCI NA SFERZE)

$$x^2+y^2+z^2 = a^2$$

W tym przykładzie więc $r = a$.

Rozw. przykładu:

① WSTAWIAM PARAMETRYZACJĘ DO FUNKCJI PODCAŁKOWEJ

$$I = \iint_S \underbrace{(a^2\sin^2\theta\cos^2\phi + a^2\sin^2\theta\sin^2\phi)}_{(x^2+y^2)} \cdot \underbrace{a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi}_{dS} =$$

* mnożę to wszystko
* w 1 nawiasie jest jedynka trygonometryczna
* rozbijam na dwie całki

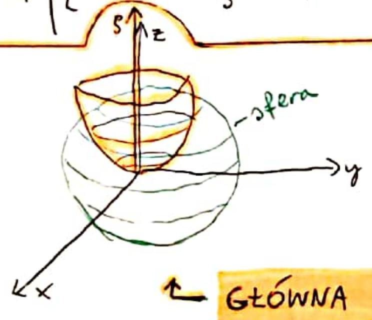
$$= a^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

Pierwszą całkę przez podstawienie:

$$\int \sin^3\theta\, d\theta = \int \sin^2\theta \cdot \sin\theta\, d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \quad \left| \begin{array}{l} t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta\, d\theta \\ -dt = \sin\theta\, d\theta \end{array} \right| = -\int dt\,(1-t^2) = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + C$$

$$= a^4\left(\left[-\cos\pi + \frac{\cos^3\pi}{3} - \left(-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3}\right)\right] \cdot 2\pi\right) = a^4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8}{3}\pi \cdot a^4$$

w fizyce: to by była [w kg] masa takiej sfery (gęstość powierzchniowa) np. ile kg na $cm^2$




$\rho(x,y) = x^2+y^2$ - funkcja podcałkowa to jest jakaś paraboloida

* MÓWI ŻE IM DALEJ JESTEŚMY W PRZESTRZENI x,y TYM WIĘKSZA GĘSTOŚĆ
* CAŁKUJĄC PO POWIERZCHNI TĄ FUNKCJĘ $\rho$ NIE OBCHODZI NAS JAKIE SĄ WARTOŚCI TEJ FUNKCJI POZA SFERĄ
* TO ŻE MY SIĘ OGRANICZAMY W FUNKCJI $\rho$ TYLKO DO PUNKTÓW NA SFERZE !!! GWARANTUJEMY PRZEZ USTAWIENIE PARAMETRYZACJI DO FUNKCJI $\rho$

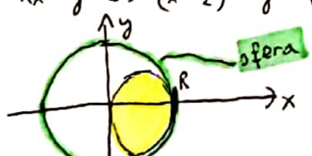
← GŁÓWNA IDEA CAŁKI POWIERZCHNIOWEJ →

## Pole powierzchni walca wewnątrz sfery

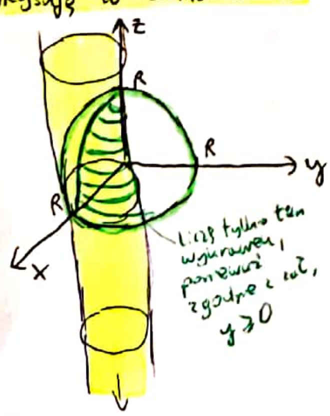
Pole walca $x^2+y^2 = Rx$ wewnątrz kuli: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

① Rysuję jak to będzie wyglądać na osi (x,y)

$$x^2 - Rx + y^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \qquad \left(\frac{R}{2}, 0\right) \text{ wsp. okręgu}$$



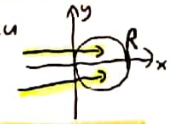

② Rysuję to samo w 3D




③ MUSZĘ ZNALEŹĆ PARAMETRY

Rozpisuję y'greka w walcu

$$y^2 = Rx - x^2 \nearrow y_+ = \sqrt{Rx-x^2} \quad \searrow y_- = -\sqrt{Rx-x^2}$$




CZYLI WIEM JAK SIĘ ZMIENIA Y'GREK

PISZĘ ZAKRES x-ÓW

$$0 \leq x \leq R$$

Z JEST PSKI CO DOWOLNY

Aha, tam gdzie y jest (+) i (-) powierzchnie są symetryczne, więc mogę założyć, że pole $S = 2S_+$

Jako, że y jest zależne od x, a z jest dowolne to piszę parametry:

$$\begin{cases} z = u \\ x = v \end{cases}$$

Widać na oko, że kula ogranicza mi współrzędną z'tową

Wstawiam 1 równanie do drugiego

$$Rx + z^2 = R^2 \nearrow z_+ = \sqrt{R^2 - Rx} \quad \searrow z_- = -\sqrt{R^2-Rx}$$

④ PISZĘ WEKTOR POŁOŻENIA

$$\vec{r}(z,x) = [x, \sqrt{Rx-x^2}, z]$$

⑤ UŻYWAM WYPROWADZONEGO WZORU TYLKO DLA (z,x)

element powierzchni: $dS = \sqrt{1 + {y'_x}^2 + {y'_z}^2}\, dx\, dz = \frac{\frac{1}{2}R}{\sqrt{Rx-x^2}}\, dx\, dz$

⑥ LICZĘ JUŻ NORMALNIE CAŁKĘ Z SAMEGO dS'a

$$S_+ = \int dS = \frac{1}{2}R \int \frac{dx\,dz}{\sqrt{Rx-x^2}} = \frac{1}{2}R \int_0^R dx \int_{-\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx-x^2}} =$$

WYCIĄGAM TEN CZŁON $\frac{1}{\sqrt{Rx-x^2}}$ z całki po dz do całki po dx

$$= \frac{1}{2}R \int_0^R \frac{1}{\sqrt{Rx-x^2}} \cdot 2\sqrt{R^2-Rx}\, dx$$

POLICZYŁEM NA RAZIE CAŁKĘ Z JEDYNKI PO DZ OZNACZONĄ CZYLI $\sqrt{R^2-Rx} - (-\sqrt{R^2-Rx}) = 2\sqrt{R^2-Rx}$ I WKŁADAM TO DO CAŁKI PO DX

$$= \frac{1}{2}R \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R-x}} \cdot 2 \cdot \sqrt{R} \cdot \sqrt{R-x}\, dx = R\sqrt{R} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

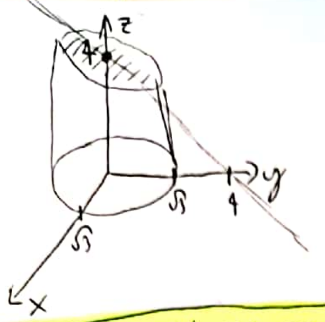
$$= 2R\sqrt{R}\,\sqrt{x}\,\Big|_0^R = 2R^2 \rightarrow S = 2S_+$$

$$S = 4R^2$$

③

## Całka po walcu ściętym płaszczyzną

$x^2+y^2=3$, pł: $z=0$, $z=4-y$ $\quad \int y\,dS$




UWAGA: zazwyczaj mam $x, y, z(x,y)$ to mogę użyć wzoru na $dS$

$$dS=\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}\,dx\,dy$$

① DZIELĘ CAŁKĘ NA DENKO GÓRNE, BOKI I DENKO DOLNE

$$\int y\,dS=\int_g+\int_b+\int_d$$

② UZALEŻNIAM OD WSP. WALCOWYCH – PISZĘ WEKTOR POŁOŻENIA

$$\vec r(\varphi,z)=[\sqrt3\cos\varphi,\ \sqrt3\sin\varphi,\ z]$$

③ PISZĘ ZAKRESY

$0\leq\varphi\leq2\pi$

$\boxed{0\leq z\leq4-y} \rightsquigarrow 0\leq z\leq 4-\sqrt3\sin\varphi$

y we wsp. walcowych

④ WZÓR NA $dS$ – STANDARDOWO → OD RAZU LICZĘ CAŁKĘ POLA BOCZNEGO

$$dS=\sqrt3\,d\varphi\,dz \qquad \int_b y\,dS=\sqrt3\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sqrt3\sin\varphi\int_0^{4-\sqrt3\sin\varphi}dz=-3\sqrt3\pi$$

⑤ TERAZ ~~POWIERZCHNIA~~ CAŁKA Z GÓRNEGO DENKA – WZÓR NA $dS$

$$dS=\sqrt{1+1}\,dx\,dy$$

⑥ RZUTUJĘ KOŁO GÓRNE NA OŚ $(x,y)$ I WYCHODZI TEŻ KOŁO – MUSZĘ POLICZYĆ CAŁKĘ PO NIM
PRZECHODZĘ NA WSP. BIEGUNOWE
UŻYWAM JAKOBIANU

$$dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$$

$$\int_g=\iint\underbrace{r\sin\varphi}_{\text{y w wsp. biegunowych}}\cdot\underbrace{\sqrt2}_{\text{było w dS}}\cdot\underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{\text{stare dxdy}}=\sqrt2\int_0^{\sqrt3}r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin\varphi=\sqrt2\cdot\frac{3\sqrt3}{3}\cdot0=0$$

Wyszło 0, czyli jedna z kilku całek może być równa 0, liczy się suma

⑦ POZOSTAŁA CAŁKA Z DOŁU

$dS=dx\,dy=r\,dr\,d\varphi$ (LEPIEJ PRZEJŚĆ NA BIEGUNOWE)

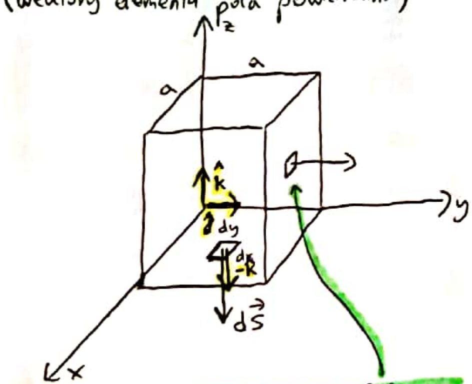
(MAM $x,y,z(x,y)$ WIĘC $dS=\sqrt{0+0+1}\,dx\,dy$)

$$\int_d=\iint r\sin\varphi\,r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\sqrt3}r^2\,dr\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi=0$$

## Całki powierzchniowe skierowane:

### Wektory powierzchniowe dla sześcianu

(wektory elementu pola powierzchni)




założenia:

* jeżeli powierzchnię podzielimy na małe kawałeczki to:
  - ma być prostopadły do tej powierzchni
  - ma mieć długość równą polu danego elementu

$$d\vec S=\underbrace{dS}_{\text{długość wektora } d\vec S}\cdot\underbrace{(-\hat k)}_{\text{wersor}=1}=-\hat k\,dS=-\hat k\cdot dx\,dy$$

a to przecież $dS=dx\,dy$

Jakbym chciał element na prawą ścianę:

① RZUTUJĘ NA PŁASZCZYZNĘ $(x,z)$

*jego ścianki do $dx\,dz$ bo to są PRZYROSTY PO X'IE I PO Z'CIE.

$dS=dx\,dz$ – pole prostokąta

② SKIERUJĘ WEKTOR NA ZEWNĄTRZ ŚCIANKI

$$d\vec S=dx\,dz\,\hat j$$

Wprowadzam pole wektorowe

$$\vec v=3\hat\imath+4\hat k$$

Liczę przykładową całkę powierzchniową

$$\int\vec V\circ d\vec S=\int(3\hat\imath+4\hat k)\underset{\text{iloczyn skalarny}}{\circ}(-\hat k\,dx\,dy)=\int-3\underbrace{\hat\imath\circ\hat k}_{\substack{=0\\ \text{bo są prostopadłe}}}dx\,dy-4\underbrace{\hat k\circ\hat k}_{=1}dx\,dy=-4\int_{S_d}dx\,dy=-4a^2$$

całka z 1 z jej powierzchni to po prostu pole powierzchni

jest to całka po całym denku dolnym

[ *jakby $\vec v$ opisywało jakiś przepływ cieczy to wynik tej całki to by był strumień przez tą powierzchnię ]

## WNIOSEK:

* jeśli graficznie jesteśmy w stanie wyznaczyć wektory normalne (prostopadłe) do powierzchni to nie musimy używać wzoru na iloczyn wektorowy
(ewentualnie tylko wartości ich, a kierunek już domnażając $dS$ odpowiedni wektor normalny

① ② ③

# 3 sposoby zapisu:

* używając współrzędnych kartezjańskich

$\int x\,dydz - 2z\,dzdx + 5\,dxdy$

② * fizyczny

$\int \vec{E}\circ d\vec{S}$

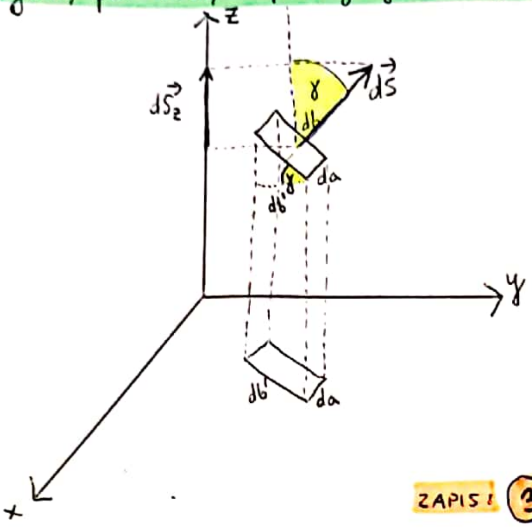
pole wektorowe równe:

$\vec{E} = x\hat{i} - 2z\hat{j} + 5\hat{k}$

③ * od razu sprowadzenie całki skierowanej na nieskierowaną

$\int (x\cos\alpha - 2z\cos\beta + 5\cos\gamma)\,dS$

## Jedną powierzchnię zapiszemy jako sumę 3 powierzchni (tych na osiach)




Np. płaszczyzna $z = 4 - y$ ~ tak jakbym patrzył na z od strony y'greka

$d\vec{S}$ - wektor prostopadły do tej płaszczyzny
- tworzy kąt γ z osią z.

$db' = \cos\gamma \cdot db$

$dS' = da\cdot db' = da\cdot db\cdot\cos\gamma = dS\cdot\cos\gamma$

$dS_z = dS\cdot\cos\gamma$

Ponieważ cos γ może być czasem ujemny to znaczy, że skierowane "pole powierzchni" może być ujemne.

ZAPIS: ③ $d\vec{S} = (dS\cdot\cos\alpha\ ,\ dS\cos\beta\ ,\ dS\cos\gamma)$

element pola razy cosinus α → czyli dS razy cosinus jaki tworzy ten wektor z osią x

(z osią y) (z osią z)

ILOCZYN SKALARNY

$\vec{a}\circ\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$

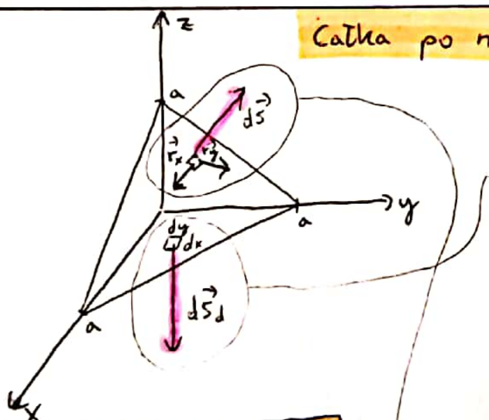
ZAPIS: ① $d\vec{S} = (dydz\ ,\ dzdx\ ,\ dxdy)$

pole prostokącika na płaszczyźnie (y, z)

## Całka po namiocie i zamieszanie ze znakami

$\iint_S yz\,dydz + xz\,dzdx + xy\,dxdy$

S - zewnętrzna strona bryły ograniczonej powierzchniami $x=0$, $y=0$, $z=0$; $x+y+z=a$ $(a>0)$




Dolna powierzchnia:

$dS = dxdy$ ~pole tego małego prostokącika

$z=0$, $dz=0$ przyrost zerowy jest równy 0

DLATEGO WYWALAM Z CAŁKI WSZYSTKIE CZŁONY Z DZ

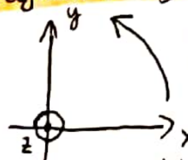
$\iint_{S_d} = \ldots = -\iint_{S_d} xy\,dxdy$

DODAJĘ MINUS BO ŻEBY POWSTAŁ WEKTOR NA ZEWNĄTRZ MUSZĘ PRZEKRĘCIĆ y W STRONĘ x



$= -\int_0^a x\,dx\int_0^{a-x} y\,dy$

## Reguła śruby prawoskrętnej




wyobraź sobie że przekręcam jedną oś do drugiej

Jeśli kierunek który wyznacza to odkręcanie śruby to znaczy że śruba jest bliżej ciebie = SKIEROWANA W TWOJĄ STRONĘ OŚ Z

[* we współrzędnych kartezjańskich jeśli wektor jest na przeciw którejś osi (x, y, z) to trzeba zmienić znak]

* aby wektor $d\vec{S}$ wychodził na zewnątrz muszę przekręcać $\vec{r}_x$ do $\vec{r}_y$ czyli traktuję $\vec{r}_x$ jako PIERWSZY

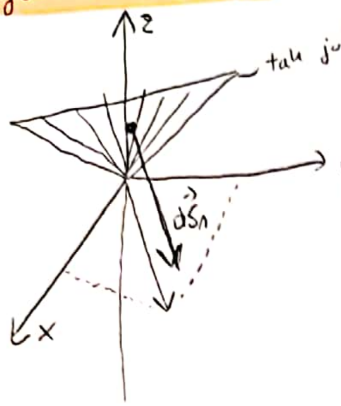
* jeśli wektor $d\vec{S}$ na wszystkie składowe tylko z osiami to można nic nie zmieniać w całce tylko wstawić $(x+y+z=a) \to z = a-x-y$ WYLICZONE Z

Sumując te wszystkie całki wychodzi wypadkowy strumień przez powierzchnię zewnętrzną

$\iint_S y(a-x-y)(-1)\,dydx + x(a-x-y)(-1)\,dydx + xy\,dxdy$

TAM GDZIE dz WSTAWIAM różniczkę tej, której nie ma tam razy pochodną cząstkową ... tej zmiennej

## Wybór znaków c.d.




$$\int y\,dydz + x\,dzdx + z\,dxdy$$

ABY ZNALEŹĆ ZNAKI RZUTUJĘ WEKTOR $d\vec{S}$ NA PŁASZCZYZNY

* na płaszczyźnie x, y na dodatnią część płaszczyzny
* na płaszczyźnie z ujemną

TAKIE SĄ WIĘC ZNAKI

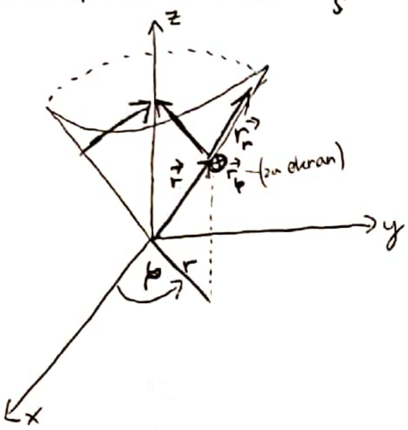
$$[+dydz,\ +dzdx,\ -dxdy]$$ , a całka wygląda tak:

$$\int y\,dydx + x\,dydx - 2\,dxdy = \iint (y+x-2)\,dxdy$$

---

## Całka po stożku

$$\int_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$$ , gdzie S – górna strona powierzchni bocznej stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z \leq 1$




① PRZYJMUJĘ WSP. BIEGUNOWE

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$ w tym przypadku


więc $z = r$

② PISZĘ WEKTOR POŁOŻENIA

$$\vec{r}(\varphi, r) = [r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ r]$$

③ CHCĘ TRAKTOWAĆ TĄ CAŁKĘ JAKO [ILOCZYN SKALARNY POLA WEKTOROWEGO $\vec{V}$ ORAZ WEKTORA POWIERZCHNIOWEGO $d\vec{S}$]

$$\int \vec{V} \circ d\vec{S}, \quad \vec{V} = [x^2, y^2, z^2]$$

④ ZAPISUJĘ WEKTORY STYCZNE (POCHODNE CZĄSTKOWE PO DANYM PARAMETRZE) NA RYSUNKU

$\vec{r}_r$ idzie w stronę rosnącego r czyli w górę po boku stożka

$\vec{r}_\varphi$ idzie zgodnie z kątem $\varphi$ czyli za ekran.

⑤ * TERAZ MUSZĘ WYMYŚLEĆ: KTÓRY WEKTOR BĘDZIE PIERWSZY W ILOCZYNIE WEKTOROWYM ABY ZACHOWAĆ DOBRY KIERUNEK WEKTORA $d\vec{S}$

(bo powiedziano w zadaniu że ma być kierunek wewnętrznej strony stożka) (REGUŁA ŚRUBY)

TEN WZÓR NIE WYMAGA MARTWIENIA SIĘ O ZNAKI

$$d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi}_{\text{dobra kolejność}}\,dr\,d\varphi$$

pochodne cząstkowe:

$\vec{r}_r = [\cos\varphi, \sin\varphi, 1]$, $\vec{r}_\varphi = [-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0]$

**Rozpisuję ILOCZYN wektorowy**

* przyjmuję skróty $\cos\varphi = c$, $\sin\varphi = s$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c & s & 1 \\ -rs & rc & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\varphi\,\hat{i} - r\sin\varphi\,\hat{j} + r\hat{k}$$

WSP. x, y ujemne, z dodatnie RYSUNEK POTWIERDZA :)

$$d\vec{S} = (-r\cos\varphi\,\hat{i} - r\sin\varphi\,\hat{j} + r\hat{k})\,dr\,d\varphi$$

⑥ PISZĘ ZAKRESY

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$0 \leq r \leq 1$$

⑦ WYRAŻAM POLE $\vec{V}$ PRZEZ PARAMETRY

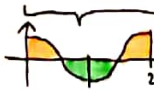
$$\vec{V} = [r^2\cos^2\varphi,\ r^2\sin^2\varphi,\ r^2]$$

⑧ LICZĘ ILOCZYN SKALARNY TO • TO

$$\vec{V} \circ d\vec{S} = r^3(1 - \cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\,dr\,d\varphi$$

⑨ WSTAWIAM TO COŚ DO CAŁKI (OD RAZU ROZDZIELAM CO DO dr, CO DO $d\varphi$ :))

$$I = \int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} (1 - \cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\,d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$




TE FUNKCJE PO ZSUMOWANIU SĄ RÓWNE ZERO !!!

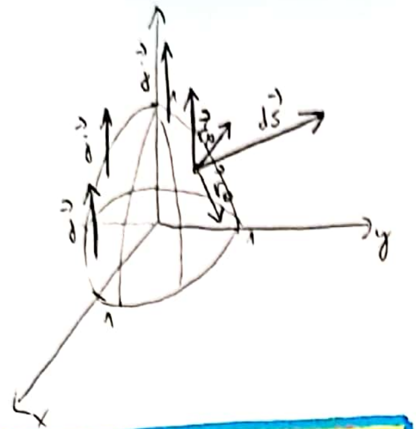
CO TEN WYNIK OZNACZA ???

Jeśli $\vec{V}$ to by było jakieś pole prędkości np. wody która by płynęła to wypadkowy strumień wody byłby dodatni i wynosił $\frac{\pi}{2}$ czyli więcej wody wpływa do stożka niż wypływa

## 2 podejścia do liczenia całek

$\int_S \vec{j} \circ d\vec{S}$, gdzie $\vec{j} = [0,0,1]$, S: górna połowa sfery $x^2+y^2+z^2=1$ zorientowana [redacted] na zewnątrz

inny zapis: $\int_S 1\, dx\, dy$




### 1) Podejście manualne

① ZAZNACZAM WEKTORY STYCZNE DO PARAMETRÓW $\theta$ i $\varphi$ i SPRAWDZAM KTÓRY MA BYĆ PIERWSZYM W ILOCZYNIE WEKTOROWYM ABY WEKTOR dS BYŁ NA ZEWNĄTRZ i LICZĘ $d\vec{S}$

$$d\vec{S} = (r^2 \sin^2\theta \cos\varphi\, \hat{i} + r^2 \sin^2\theta \sin\varphi\, \hat{j} + r^2 \sin\theta \cos\theta\, \hat{k})\, d\theta\, d\varphi$$

② ILOCZYN SKALARNY Z $\vec{j}$

$$\vec{j} \circ d\vec{S} = r^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$$

③ GRANICE i CAŁKA

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{1}{4}\cos 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi = \pi$$

### 2) Podejście inteligentne / geometryczne /

* znajduję wzór na pole łatki: dS (wyprowadzony w $\boxed{20}$) we wsp. sferycznych

$$dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

* oraz znajduję definicję iloczynu skalarnego:

$$\vec{j} \circ d\vec{S} = |\vec{j}|\, |d\vec{S}| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{j}, d\vec{S})$$

* kąt pomiędzy wektorem prostopadłym (do sfery) a $\vec{j}$ jest taki sam jak między nim a osią z to kąt teta ($\theta$)

Piszę więc całkę:

$$I = \int 1 \cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \cdot \cos\theta$$

**CO TO MOŻE ZNACZYĆ W FIZYCE?**

$\vec{j}$ - to może być wektor strumienia gęstości masy. (np. woda, która leci z jakiejś wnęki do góry równomiernie)

$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$

$\rho$ - gęstość tej wody [kg wody w $m^3$]

CZYLI WYNIK JEST W:

$$\underbrace{\frac{kg}{m^3}}_{\rho} \cdot \underbrace{\frac{m}{s}}_{\vec{v}} \cdot \underbrace{m^2}_{d\vec{S}} = \frac{kg}{s}$$

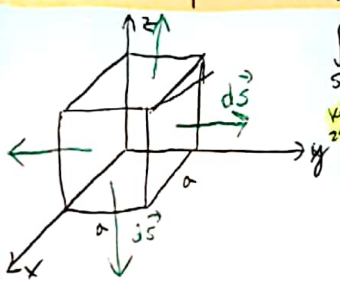
czyli w ciągu 1 sekundy 3,14 kilograma takiego gazu/wody przelatuje przez powierzchnię

*TAK SAMO MOŻE TO BYĆ PRĄD np. w ciągu 1sek. przepływa 3,14 kulombów przez powierzchnię

---

## Zamiana całki powierzchniowej na objętościową (potrójną) (GAUSS OSTROGARDZKI) - szczególny przypadek Stokesa

$\int_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$ S - wewnętrzna strona powierzchni brzegowej sześcianu $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$




kółko oznacza zamknięte powierzchnie

$$\oint_{\partial V_{zewn.}} \vec{V} \circ d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\, \vec{V}\, dx\, dy\, dz = -\oint_{\partial V_{wewn.}} \vec{V} \circ d\vec{S}$$

oznacza brzeg pewnej objętości V

$$\vec{V} = [x^2, y^2, z^2]$$

Dywergencja - suma pochodnych cząstkowych kolejnych współrzędnych po kolejnych współrzędnych wektora $\vec{V}$

$$\mathrm{div}\, \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

*z pola wektorowego daje pole skalarne
*mówi o źródłowości tego wektora $\vec{V}$.

W tym przykładzie całka jest po wewnętrznym brzegu, więc jest na minusie:

$$I = -\iiint_V (2x+2y+2z)\, dx\, dy\, dz = -\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz\, (2x+2y+2z)$$

Najpierw całkuję po z-cie, czyli x i y są stałymi:
UWAGA! NIE MOGĘ ICH WYJĄĆ PRZED NAWIAS BO TO DODAWANE

***powierzchnia musi być zamknięta!**

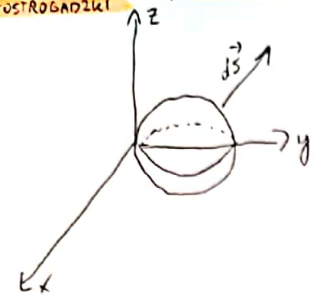
$$= -\int_0^a dx \int_0^a dy\, (2xz + 2yz + z^2)\Big|_0^a = -\int_0^a dx \int_0^a dy\, (2ax + 2ay + a^2)$$

$$= -\int_0^a dx\, (2axy + ay^2 + a^2 y)\Big|_{y=0}^{y=a} = -\int_0^a (2a^2 x + 2a^3)\, dx = -(a^4 + 2a^4) = -3a^4$$

## GAUSS - przykład ze sferą - 3 rozwiązania

OSTROGADZKI

$\int_{S^+} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$ $S'$ - sfera $x^2+y^2+z^2=2y$ zorientowana na zewnątrz




① LICZĘ POŁOŻENIE, PROMIEŃ SFERY

$x^2+y^2-2y+z^2=0 \rightarrow x^2+(y-1)^2+z^2=1$ $S=(0,1,0)$

$x^2+(y-1)^2-1+z^2=0$

② GAUSSUJĘ

$\int_{\partial V} \vec{v}\circ d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{v}\,dV$, gdzie $\vec{v}=[x,y,z]$, $\mathrm{div}\,\vec{v} = 1+1+1=3$

stąd $I = \iiint_V 3\,dxdydz = 3\iiint_V dx\,dy\,dz$

### ROZWIĄZANIE ① (DLA INTELIGENTNYCH)

całka potrzebna to całka objętościowa więc używam szkolnego wzoru na obj. kuli.

$I = 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi$

### ROZWIĄZANIE ② (DLA MYŚLĄCYCH)

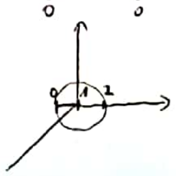
* przechodzę na wsp. sferyczne, ale piszę $y-1$ zamiast $y$ greku:

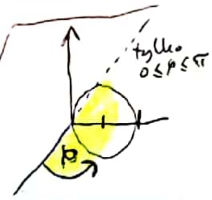
$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y-1 = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$

$J = r^2\sin\theta$ JAKOBIAN

i zapisuję całkę:

$I = 3\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,(\sin\theta) = 4\pi$




### ROZWIĄZANIE ③ (SCHEMATYCZNIE)

* przechodzę na wsp. sferyczne, ale normalne od początku osi układu, czyli rozpisać muszę na nowo granice $(r,\theta,\varphi)$, a wsp. $x,y,z$ są "podręcznikowe" ale granice to

$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $J = r^2\sin\theta$

$\begin{cases} \theta \text{ takie same} \\ 0\leq\varphi\leq\pi \\ 0\leq r\leq 2\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$ ← nie ma pełnego obrotu

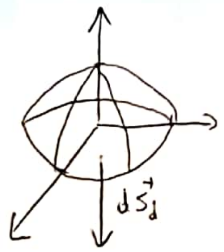
$r_{max}$ liczę z równania sfery

$r^2 = 2y$
$r^2 = 2r\sin\theta\sin\varphi \rightarrow r = 2\sin\theta\sin\varphi$

$I = \int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\theta\sin\varphi} r^2\sin\theta\,dr = 4\pi$

## Czy mogę dorysować denko do otwartej powierzchni, aby móc skorzystać z Gaussa? Owszem

Oblicz strumień pola $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j} + z\hat{k}$ przez górną powierzchnię sfery $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\geq 0)$ (zorientowaną na zewnątrz)




Potrzebuję policzyć $\int_S \vec{F}\circ d\vec{S}$

Zapiszę prawo Gaussa tak jakby powierzchnia była zamknięta:

$\int_{S\cup S_d}\vec{F}\circ d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV = \int_S \vec{F}\circ d\vec{S} + \int_{S_d}\vec{F}\cdot d\vec{S}_d$

↑ a tego szukam

Liczę całkę objętościową

$\iiint_V 1\,dV$ = to jest połowa obj. kuli czyli $\frac{1}{2}$ · szkolny wzór $= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

Liczę całkę dolnej powierzchni

$d\vec{S}_d = -\hat{k}\cdot dS_d = -\hat{k}\cdot dxdy$

$\vec{F}\circ d\vec{S}_d = -z\,dxdy$ ale na dolnej powierzchni $z=0$, więc wyrażenie to jest równe zero.

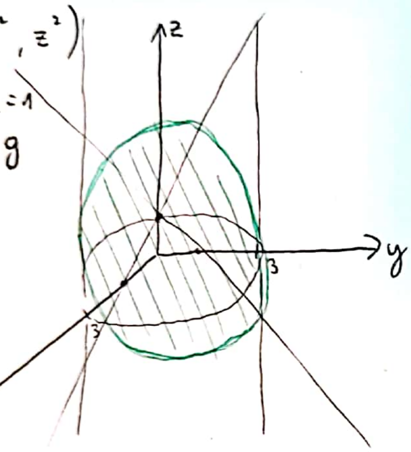
Więc wynik to $\frac{2}{3}\pi$

# Twierdzenie STOKESA

$$\oint \vec{F} \circ d\vec{l} = \int (\text{rot}\,\vec{F}) \circ d\vec{S}$$

$\vec{F}(x^2 z, xy^2, z^2)$

$C: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$




**Jak policzyć szybko rotację?**

$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ gdzie nabla $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]$

* zgodnie z zasadą 1 → 2 → 3 zapisuję 23 → 31 → 12 w pustych polach

$$\text{rot}\,\vec{F} = \left[\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial xy}{\partial z}, \frac{\partial x^2 z}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x}, \frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{\partial x^2 z}{\partial y}\right]$$

23 31 12

* najpierw różnicę 2 − 3 z argumentów nabli (CZARNO)
* potem dopisuję 3 i 2 wyraz z pola $\vec{F}$ (na odwrót niż nabla) [ZIELONO]

* teraz mogę policzyć $d\vec{S}$ $\vec{r}(x,y) = [x, y, 1-x,y]$

$$d\vec{S} = (r_y' \times r_x')\,dxdy = [1, 1, 1]\,dxdy$$

* iloczyn skalarny

$$\text{rot}\,\vec{F} \circ d\vec{S} = [0, x^2, y^2] \circ [1, 1, 1]\,dxdy$$

* współrzędne biegunowe

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \longrightarrow (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) \cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$\oint \vec{F} \circ d\vec{l} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 r^3\,dr = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{81}{2}\pi$$

**UWAGA!** Pamiętaj, że masz tu iloczyn skalarny, więc nie musisz liczyć wartości wektora $dS$, tylko sam $d\vec{S}$