17 RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA | 1 | K

KOMBINATORYKA - PODSTAWY

* SILNIA: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ zał. $n \in N_+$, $0! = 1$

* SYMBOL NEWTONA $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ zał. $k, n \in N$, $\boxed{k \leqslant n}$ BARDZO WAŻNE ZAŁOŻENIE

kolejność nieważna

LICZBA K-ELEMENTOWYCH KOMBINACJI N-ELEMEN. ZBIORU

KOMBINATORYKA:

*reguła mnożenia: jeżeli pewnego wyboru dokonujemy w dwóch etapach lub więcej,
w pierwszym etapie możemy dokonać wyboru na k sposobów
w drugim etapie możemy dokonać wyboru na m sposobów
} wyboru możemy dokonać na k·m sposobów

*reguła dodawania: jeżeli pewnego wyboru dokonujemy decydując się na jedną opcję
możemy dokonać wyboru na k sposobów (-jeśli zdecydujemy się na 1 opcję)
-jeśli zdecydujemy się na 2 opcję dokonać wyboru możemy na m sposobów
} wyboru możemy dokonać na k+m sposobów

W PRAKTYCE:

ZAD. Oblicz ile możemy zapisać liczb czterocyfrowych (cyfry nie mogą się powtarzać) z cyfr należących do zbioru {0,1,2,3,4,5}. Liczba ta ma być podzielna przez 5.

1. ZAPISUJĘ SOBIE 4 MIEJSCA NA LICZBĘ
*jako, że liczba ma być podzielna przez 5 to są dwa przypadki

4 3 2 1	4 3 2 1 0	4 3 2 1 0	5
4	4	3	1

0 nie może zaczynać liczby

są 4 kombinacje, kolejna cyfra nie może mieć użytej cyfry, więc jedną skreślam w każdej innej

$4\cdot4\cdot3\cdot1 = 48$

5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1	0
5	4	3	1

$5\cdot4\cdot3\cdot1 = 60$

REGUŁA MNOŻENIA

$48 + 60 = 108$

REGUŁA DODAWANIA

PERMUTACJE Z POWTÓRZENIAMI

$$\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}$$

gdzie: n - łączna ilość wszystkich elementów
k_n - ilość elementów w każdej grupie

PRZYKŁAD:

MISSISSIPPI - tworzymy nowy wyraz z tych liter

permutacji będzie: $\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!}$

*wszystko mieszamy na 11! sposobów
*wszystkie „i" oraz „s" możemy zmieniać na 4! sposobów itp.
*nie ma znaczenia, które „s" weźmiemy bo nowy wyraz będzie identyczny

Scanned with CamScanner

KOMBINATORYKA

4 ZDJĘCIA i 3 TOREBKI

WSZYSTKIE KOMBINACJE

NR TOREBKI: 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3

FOTO: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

ZAD. W KAŻDEJ TOREBCE CONAJMNIEJ JEDNO FOTO

NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA ROZMIEŚCIĆ ZDJĘCIA?

WSZYSTKIE KOMBINACJE − *sytuacja kiedy to wszystkie zdjęcia są w jednej torebce (3 sytuacje)

AB CD | null | null

*sytuation kiedy to jedna torebka jest pusta

BIORĘ POD UWAGĘ (odejmując dane poniższe przypadki)

TOREBKA: 1 2 | 1 2 | 1 2 | 1 2
ZDJĘCIE: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

NR TOREBKA ZDJĘCIE: ~~1 1 1 1~~ = −1

NR TOREBKA ZDJĘCIE: ~~2 2 2 2~~ = −1

14 sytuacji kiedy 3 torebka jest pusta

TOREBKA NR ZDJĘCIE: 1 3 | 1 3 | 1 3 | 1 3 = 16

TOREBKA NR ZDJĘCIE: ~~1 1 1 1~~ = −1

TOREBKA NR ZDJĘCIE: ~~3 3 3 3~~ = −1

14 sytuacji kiedy 2 torebka jest pusta

TOREBKA NR ZDJĘCIE: 2 3 | 2 3 | 2 3 | 2 3 = 16

TOREBKA NR ZDJĘCIE: ~~2 2 2 2~~ = −1

TOREBKA NR ZDJĘCIE: ~~3 3 3 3~~ = −1

14 sytuacji kiedy 1 torebka jest pusta

WYNIK

$81 - (3 \cdot 14) - 3 = 36$

DLACZEGO NIE POWIELAJĄ SIĘ ZBIORY TYPU 1 1 1 1

Ej ~~[illegible]~~ każde foto w 1 torebce

← ~~BOWIEM ODEJMUJĘ JĄ OD BRANEJ CZĘŚCI, CZYLI W/W WZÓR NIE BIORĘ POD UWAGĘ~~

− UWZGLĘDNIAM TO NATOMIAST 3X ŻE WSZYSTKIE ZDJ SĄ W 1 TOREBCE

Scanned with CamScanner

KOMBINATORYKA

OBLICZ ILE JEST LICZB OŚMIOCYFROWYCH W ZAPISIE KTÓRYCH NA DOKŁADNIE DWÓCH MIEJSCACH STOI 5.

1° Liczba ma na początku 5tkę:

$\frac{5}{1}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}$ - CYFRA / - MOŻLIWOŚCI

LUB LUB LUB LUB LUB LUB

szukamy miejsca na drugą 5tkę

może ona stać na jednym z 7 pozostałych miejsc

7ka wynika stąd

na pozostałych miejscach są 9tki możliwości (bo $\{0,\dots,9\}-\{5\}=9$)

$$1\cdot 7\cdot 9^6$$

2° Liczba bez 5 na początku

$\frac{?}{8}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}\ \frac{?}{9}$ cyfra / możliwości

(bez 5 i 0)

szukamy miejsca na 2 piątki, tj.

$\binom{7}{2}$ - 7 miejsc, - 2 piątki $= 21$

21 to 2 randomowe 5, ~~...~~ więc wynikają one 2 5-piątki

$$8\cdot 21\cdot 9^5$$

$$1\cdot 7\cdot 9^6 + 8\cdot 21\cdot 9^5$$

HANIA I MARCIN SĄ W GRUPIE SKŁADAJĄCEJ SIĘ Z 11 DZIECI, USTAWIONYCH W LOSOWY SPOSÓB W KOLEJCE.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, takiego, że pomiędzy Hanią i Marcinem będzie stało dokładnie 5 dzieci. → zbiór E

Ω - zbiór permutacji zbioru 11-elementowego $\quad |\Omega| = 11!$

1 element, 4 elementy

H d d d d d M d d d d

TEORIA NA KOLEJNEJ STRONIE

1. LICZĘ SYTUACJE, KIEDY HANIA I MARCIN SĄ USTAWIENI W TEN SPOSÓB, ŻE MIĘDZY NIMI STOI DOKŁADNIE 5 DZIECI

KOMBINACJE! (liczba 1 elementowych kombinacji w zbiorze 5elem.)

$\binom{5}{1} = 5$ kombinacji

UWAGA! JAKO ŻE MOGĄ STAĆ: NAJPIERW HANIA LUB NAJPIERW MARCIN TO MAMY 2 x WIĘCEJ MOŻLIWOŚCI

10 kombinacji

2. JAKO, ŻE H i M zajmują 2 miejsca to pozostałe 9 uzupełniamy losowo

9!

całość można ustawić na 10! sposobów

$$10\cdot 9! = 10!$$

$$|E| = 10!$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{10!}{11!} = \frac{1}{11}$$

Scanned with CamScanner

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA - TEORIA

OBLICZANIE PRAWDOPODOBIEŃSTWA - TEORIA

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie: $|A|$ - liczba zdarzeń sprzyjających (moc zbioru $|A|$)
$|\Omega|$ - liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru $|\Omega|$)

Pojęcia

* **doświadczenie losowe** - czynność którą wykonujemy np. rzut kostką, wybór dnia tygodnia
* **zdarzenie elementarne** - zdarzenie (TYLKO JEDNO) jakie może wydarzyć się w doświadczeniu losowym np. wypadło 5 oczek, wybrano środę.
* **zdarzenie losowe** - zbiór jednego lub kilku zdarzeń elementarnych, np. wypadła parzysta liczba oczek, wybrano dzień powszedni
* **moc zbioru** - liczba elementów danego zbioru np. $|\{2,4,6\}| = 3$, $|\{\text{dni powszednie}\}| = 5$

np. dla rzutu kostką.

Ω - zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $|\Omega| = 6$

A - zdarzenie losowe (podzbiór Ω), np. zdarzenie, że wypadła parzysta liczba oczek $A = \{2,4,6\}$ $|A| = 3$

Z urny w której znajduje się 10 kul: 6 białych i 4 czarne losujemy 5 kul. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania
b) 4 kul białych

1 SPOSÓB

Ω - zbiór 5 elementowych podzbiorów zbioru 10 elementowego

$$|\Omega| = \binom{10}{5} = 4 \cdot 7 \cdot 9$$

$$|B| = \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{1} = 3 \cdot 5 \cdot 4$$

$$P(B) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{5}{21}$$

2 SPOSÓB

Ω - zbiór wszystkich możliwych losowań 5 kul

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

$\overline{10} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \overline{7} \cdot \overline{6}$

mają być 4 kule więc, ~~[illegible]~~

LICZBA KOMBINACJI 4 KUL W ZBIORZE 5 KUL

$$\binom{5}{4} = 5$$

PRZYKŁADOWE ZDARZENIE (1 z 5)

MAX 6				MAX 4	
6	5	4	3	4	MOŻLIWOŚCI
B	B	B	B	C	CZARNA/BIAŁA

ZDARZENIE × 5

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{21}$$

Scanned with CamScanner

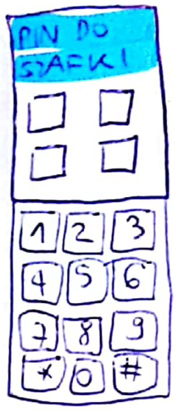
KOMBINACJA vs PERMUTACJA - TEORIA

KOMBINACJE

mało :)

kolejność nie ma znaczenia

otwory zamek obojętnie 5432, 3245, 4253 itp. każda kombinacja 2,3,4,5



5432

PERMUTACJE

dużo.....

kolejność ma znaczenie

permutacji od 2,3,4,5 jest 24, więc kod do domu to konkretne 5432 w tej kolejności, czyli jedna konkretna z 24 permutacji

---

domek z 5 kart

WZÓR NA KOMBINACJE DOWIEDZIONY!
(Liczba k-elementowych kombinacji n-elementowego zbioru)

permutacje: $\overline{52}\cdot\overline{51}\cdot\overline{50}\cdot\overline{49}\cdot\overline{48} = 311\,875\,200$

wzór na permutacje $\frac{n!}{(n-k)!}$

~~Kombinacja~~

obojętne w jakiej kolejności są karty więc trzeba wywalić liczbę kart o innej permutacji ale tej samej kombinacji

W ile sposobów ułożę 5 kart? W 5!

KOMBINACJA 5 KART

$$\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2\,598\,960$$

$$\frac{52!}{47!} \xrightarrow{:5!} \frac{52!}{5!\cdot 47!}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \leftarrow \binom{n}{k}$$

czy ważna jest kolejność?

- NIE → **KOMBINACJE** $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- TAK → **PERMUTACJE**
  - TAK: *mogą się powtarzać: n^k
    np. $\overline{4}\cdot\overline{4}\cdot\overline{4}\cdot\overline{4} = 4^4$
  - NIE: *nie mogą się powtarzać: $\frac{n!}{(n-k)!}$
    np. $\overline{52}\cdot\overline{51}\cdot\overline{50}\cdot\overline{49}$
    lub
    $\overline{4}\cdot\overline{3}\cdot\overline{2}\cdot\overline{1}$ wtedy $4!$

Scanned with CamScanner

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE + CAŁKOW.

Prawdopodobieństwo warunkowe - z czym to się je?

WZÓR TEORETYCZNY

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

WZÓR PRAKTYCZNY

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{(a pod warunkiem b)}} = \frac{|A\cap B|}{|B|}$$

PRZYKŁAD

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Jakie jest równe, $\underbrace{\text{że wypadła co najmniej jedna 6}}_{A}$ jeśli wiadomo, $\underbrace{\text{że suma oczek jest podzielna przez 5?}}_{B}$

SCHEMAT DZIAŁANIA:

1. WYJMUJEMY Z OMEGI ZBIÓR B.
2. WYJMUJEMY ZE ZBIORU B ZBIÓR $A\cap B$

$|\Omega| = 6\cdot 6$

$$B = \{\underbrace{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)}_{s=5},\underbrace{\boxed{(4,6)},(5,5),\boxed{(6,4)}}_{s=10}\}$$

1. $|B| = 7$

2. $|A\cap B| = 2$

$$P(A|B) = \frac{2}{7}$$

Prawdopodobieństwo całkowite - nie takie trudne jak się wydaje.

JEŻELI:

zbiór Ω podzielimy na B_1 i B_2

takie, że

$B_1 \cup B_2 = \Omega$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ / $P(B_1) > 0$, $P(B_2) > 0$

to dla tego dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \underbrace{P(A|B_1)}_{\text{Prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem } B_1}\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA - NAJWAŻNIEJSZE

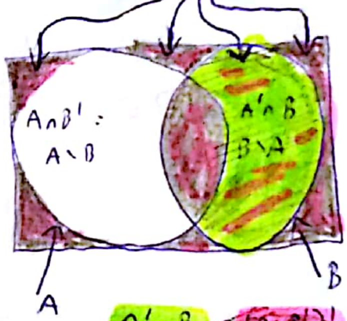
$P(A) \leq 1$

$P(A) + P(A') = 1$ gdzie A' jest zdarzeniem przeciwnym do A

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(\Omega) = 1$ ZDARZENIE PEWNE

$P(\emptyset) = 0$ ZDARZENIE NIEMOŻLIWE



$A'\cap B \subset (A\cap B')'$

Przykładowe zadanie

$P(A\cap B') = 0{,}7$. Wykaż, że $P(A'\cap B) \leq 0{,}3$

Korzystam z prawa: $P(A) \leq P(B)$ gdy $A \subset B \subset \Omega$

$A'\cap B \in (A\cap B')'$ więc

$$P(A'\cap B) \leq P((A\cap B')') = 1 - P(A\cap B') = 0{,}3$$

Scanned with CamScanner

KOMBINACJE

KOMBINACJE – JAK NIE POLICZYĆ ZA DUŻO

PRZYKŁAD

2 osoby $\xrightarrow{\text{oddzielnie}}$ 3 hotele

1. WYBIERAM 2 HOTELE Z 3

$$\binom{3}{2} = 3$$

2. WKŁADAM 2 LUDZIA DO HOTELI

$$\binom{2}{1} \qquad \binom{1}{1}$$

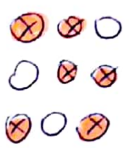
1 z 2 ludzia do 1szego — 1 z 1 ludzia do drugiego

$\Downarrow$

SUMA

$$3 \cdot 2 = 6$$

MOŻLIWOŚCI WYBORU HOTELI Z 3



$\}$ 3

1. WYBIERAM 1 HOTEL Z 3

$$\binom{3}{1} = 3$$

2. WKŁADAM 1 LUDZIA DO HOTELU

$$\binom{2}{1} = 2$$

3. WYBIERAM 2 HOTEL Z 3 (JUŻ 2)

$$\binom{2}{1} = 2$$

4. WKŁADAM 2IEGO LUDZIA DO HOTELU 2

$$\binom{1}{1} = 1$$

$\Downarrow$

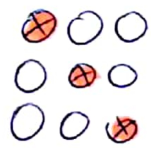
SUMA

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

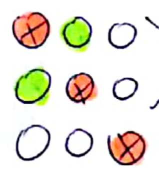
wniosek?

WYBIERAJĄC HOTELE:

1 TURA



2 TURA



wybierając zielone zdublują się wybrane hotele

DLATEGO WYNIK TRZEBA PODZIELIĆ PRZEZ 2

$$\frac{12}{2} = 6$$

bo hotele są tu NIEROZRÓŻNIALNE

INNY PRZYKŁAD

Podziel 8 osób na 4 osobowe zespoły

$$\underset{\text{LE KOMBINACJI OS Z 8 OS}}{\binom{8}{4}} \cdot \underset{\text{POZOSTAŁE}}{\binom{4}{4}} = 70 \cdot 1$$

4 osoby z 8 * 4 osoby z 4

DLACZEGO JEST TO ŹLE?

policzono wszystkie kombinacje dwa razy tą samą kombinację (POZOSTAŁE)

A B C D — F G H J

F G H J vs A B C D

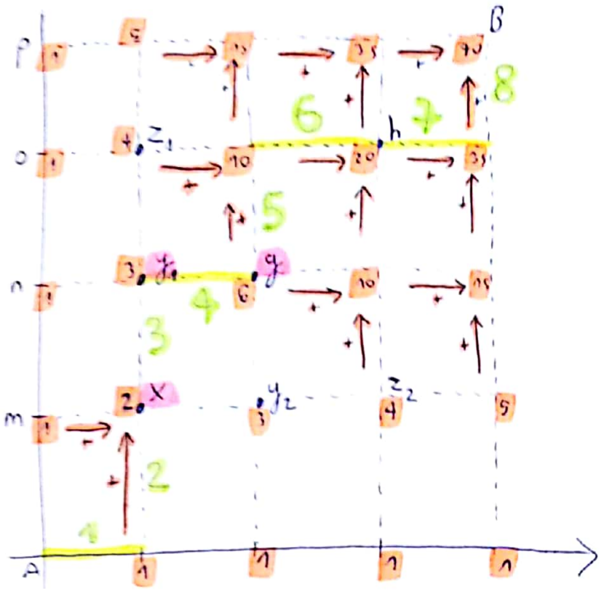
$\}$ to to samo

$\Downarrow$

$$\underbrace{\frac{70}{2} = 35}$$

KOMBINATORYKA

Ile jest najkrótszych (poruszając się tylko ↑, →) z punktu A do B dróg



* ABY DOSTAĆ SIĘ DO PUNKTU x mogę pójść na 2 sposoby

* ABY DOSTAĆ SIĘ DO PUNKTU y mogę pójść z pola x (na które są 2 sposoby) lub n (na które jest 1 sposób)
tak więc mogę pójść na $2+1=3$ sposoby

* ABY DOSTAĆ SIĘ NA POLE g mogę pójść z pól y_1 lub y_2 $\Rightarrow 3+3=6$

* IDĄC TYM TOKIEM MYŚLENIA dodaję sposoby na które mogę dojść na pola z których mogę dojść na wymarzone miejsce.

* ABY DOJŚĆ DO CELU POTRZEBUJĘ 8 RUCHÓW ⇒ $\binom{8}{4} = 70$

- wybieram sobie dowolne 4 ruchy w prawo (nie dowolne na planszy, ale dowolne w kolejności prawo-góra) → na wykresie zaznaczyłem wybrane ruchy 1, 4, 6, 7

PORADY DO ZADAŃ TYPU „OBLICZ ILE JEST LICZB ...”

Najczęstsze błędy

1. Gdy liczba ma kilka przypadków np. pierwsza cyfra to 2, 1 lub 0 to gdy uzupełniam pozostałe cyfry dowolną cyfrą to muszę w/w cyfry odjąć z tej puli możliwych.
2. Cyfry którymi uzupełniam brakujące miejsca mogą się powtarzać.
3. Czytaj dokładnie polecenie. Pamiętaj, że jeśli polecenie określa dane cyfry, jakie mają wystąpić w zapisie to MUSISZ O TYM PAMIĘTAĆ!
4. Zawsze wykluczaj 0 z pierwszej cyfry liczby naturalnej.

Wskazówki

1. Jeśli mam ułożyć cyfry pamiętaj o kolejności rosnącej to po prostu wylosuj sobie np. możliwe kombinacje tych ~~...~~ w całej ~~...~~ liczbie cyfr i one automatycznie ułożą się po kolei bo kombinacja nie określa różnicy pomiędzy ich ułożeniem

Przykładzik: Oblicz ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0, 1, 3, 5

(PAMIĘTAJ O BŁĘDZIE NR 3)

Rozbijam sobie na przypadki: (suma ma wynosić 5)

pierwsza cyfra →

P	RESZTA (99) → uzupełniam zerami	
5	→	1
3	$+1+1 \rightarrow \binom{99}{2}$ →	+ 4851
1	$+1+1+1+1 \rightarrow \binom{99}{4}$ →	+ 3 764 376
1	$+3+1 \rightarrow 99 \cdot 98$ →	+ 9702
		= 3 778 930

(i) Ustalam pierwszą liczbę a pozostałe rozrzucam losowo po reszcie cyfr (99), reszta to same zera.

Scanned with CamScanner

PRAWDOPODOBIEŃSTWO → PODZIELNOŚĆ LICZB

Ze zbioru liczb $\{1,2,\ldots,15,16\}$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie ze zwracaniem i oznaczamy kolejno wylosowane liczby x_1, x_2, x_3. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia.

$|\Omega| = 16^3$

a) Iloczyn $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ jest liczbą podzielną przez 3.

* Jeśli w iloczynie jest jakakolwiek liczba podzielna przez 3 to cały iloczyn jest podzielny

LICZBY x: PODZIELNE PRZEZ 3: $\underbrace{\{3,6,9,12,15\}}_{5}$ | NIEPODZIELNE PRZEZ 3: $\underbrace{\text{POZOSTAŁE}}_{11}$

zdarzenie przeciwne (żadna z liczb x nie jest podzielna przez 3)

$11 \cdot 11 \cdot 11$

$P(A') = \frac{11^3}{16^3}$ $\quad P(A) = 1 - \frac{11^3}{16^3} = \frac{2765}{4096}$ $\square$

b) B – suma $x_1 + x_2 + x_3$ jest liczbą podzielną przez 3.

Przypadki do rozpatrzenia:

1°	3x reszta z dzielenia przez 3 = 1	$6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$
2°	3x reszta z dzielenia przez 3 = 2	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$
3°	3x reszta z dzielenia przez 3 = 0 (liczba podzielna przez 3)	$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$
4°	1x reszta z dzielenia = 1 1x reszta z dzielenia = 2 1x reszta z dzielenia = 0 (podzielna)	3! (6) możliwości ustawienia kolejności tych liczb

$r=1 \quad r=2 \quad r=0$

$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 = 6^2 \cdot 5^2$

$$P(B) = \frac{6^2 \cdot 5^2 \cdot 6^3 \cdot 5^3 \cdot 5^3}{16^3} = \frac{683}{2048}$$

Ze zbioru $A = \{1,2,\ldots,40\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich dwóch liczb których iloczyn

a) jest podzielny przez 4

$|\Omega| = \binom{40}{2} = 39 \cdot 20$

2 wylosowane liczby muszą być:

1°	2x parzysta	$\binom{20}{2} = 10 \cdot 19$
2°	1x liczba podzielna przez 4 1x nieparzysta	$\binom{10}{1}$ $\binom{20}{1}$ $10 \cdot 20$

$$P(A) = \frac{10 \cdot 19 + 10 \cdot 20}{39 \cdot 20} = \frac{1}{2}$$

b) przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

$|\Omega| = \binom{40}{2} = 39 \cdot 20$

2 wylosowane liczby muszą być:

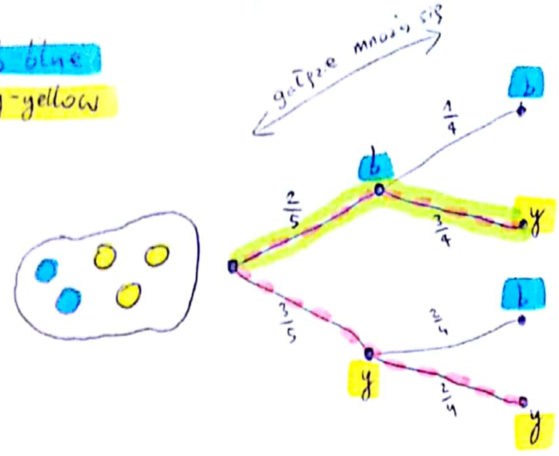
1°	2x liczba, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1	$\binom{14}{2} = 13 \cdot 7$
2°	2x liczba, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2	$\binom{13}{2} = 13 \cdot 6$

$$P(B) = \frac{13 \cdot 7 + 13 \cdot 6}{39 \cdot 20} = \frac{7}{10}$$

Scanned with CamScanner

METODA DRZEWA

b - blue
y - yellow



Prawdopodobieństwo, że druga kula będzie żółta

$$P(y_2) = \begin{matrix} P(B_1 \to Y_2) \\ + \\ P(Y_1 \to Y_2) \end{matrix} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

WARUNKOWE

Prawdopodobieństwo, że najpierw wylosuję niebieską, a potem żółtą

- - - - gałęzie prowadzące do y2

——— gałąź spełniająca zdarzenie

więc:

$$P(B_1|y_2) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{1}{2}$$

KIEDY UŻYWAĆ DRZEWA:

* wieloetapowe
* identyczne
* 2 rezultaty

DLATEGO ŻE

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

← część wspólna zdarzeń czyli b, a potem y

← zdarzenie y2

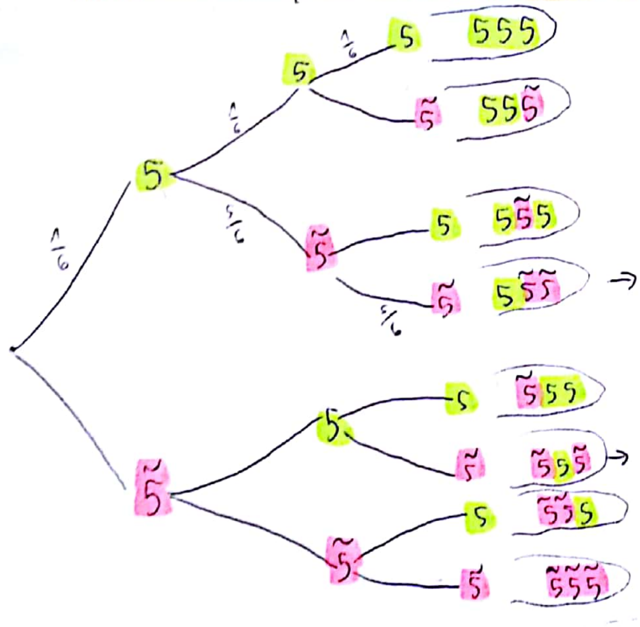
WZÓR NA PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

yt/MIT OpenCourseWare/Conditional Probability

Rzut kostką - studium przypadku wypadnięcia 5'tki. [3 rzuty]

5 - wypadnięcie 5tki

$\tilde{5}$ - wypadnięcie innej cyfry



$\to \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$\to \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$P(\text{tylko 5'tki})$	$= {}^3C_3$	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0$	$= \left(\frac{1}{6}\right)^3$
$P(\text{jedna 5'tka})$	$= {}^3C_1$	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1$	$\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$	$= 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$
$P(\text{dwie 5'tki})$	$= {}^3C_2$	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1$	$= 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$
$P(\text{nie ma 5'tki})$	$= {}^3C_0$	$\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0$	$\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$	$= \left(\frac{5}{6}\right)^3$
NA ILE SPOSOBÓW		P(5)	P($\tilde{5}$)	

Scanned with CamScanner

WARUNKOWE + KOSTKA

(MATURA PR 12/2014) 5 PKT - PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę", pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę".

Zdarzenie elementarne $(\underset{6}{\sqcup}\,\underset{6}{\sqcup}\,\underset{6}{\sqcup})$ $|\Omega| = 6^3$

A - co najmniej jedna "1"

B - co najmniej jedna "6"

Wzór:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{|A\cap B|}{|B|}}$$

Zdarzenie B

1,2,3,4 lub 5

$$\begin{matrix}(6\,\sqcup\,\sqcup)\\(\sqcup\,6\,\sqcup)\\(\sqcup\,\sqcup\,6)\end{matrix} \lor \begin{matrix}(6,6,\sqcup)\\(6,\sqcup,6)\\(\sqcup,6,6)\end{matrix} \lor (6,6,6)$$

$$|B| = 3\cdot 5^2 + 3\cdot 5 + 1 = 91$$

Zdarzenie $A\cap B$

$$\begin{matrix}(6\,1\,\sqcup)\\(1\,6\,\sqcup)\\(6\,\sqcup\,1)\\(1\,\sqcup\,6)\\(\sqcup\,6\,1)\\(\sqcup\,1\,6)\end{matrix} \lor \begin{matrix}(6,1,1)\\(1,6,1)\\(1,1,6)\end{matrix} \quad \begin{matrix}(1,6,6)\\(6,1,6)\\(6,6,1)\end{matrix}$$

$$|A\cap B| = 6\cdot 4 + 3 + 3 = 30$$

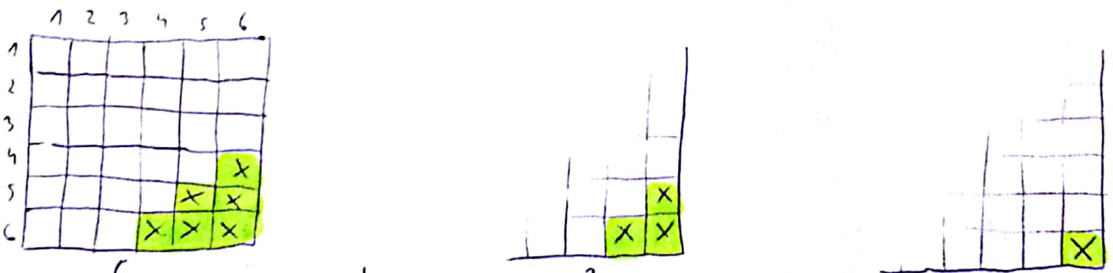
$$P(A|B) = \frac{30}{91}$$

Ciekawy sposób na rzuty kostkami

Rzucono trzy razy sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek jest równa co najmniej 16.

$|\Omega| = 6^3$

A: $\underset{\geq 10}{(6,\sqcup,\sqcup)}$ $\quad \underset{\geq 11}{(5,\sqcup,\sqcup)}$ $\quad \underset{= 12}{(4,6,6)}$



$$|A| = 6 + 3 + 1 = 10$$

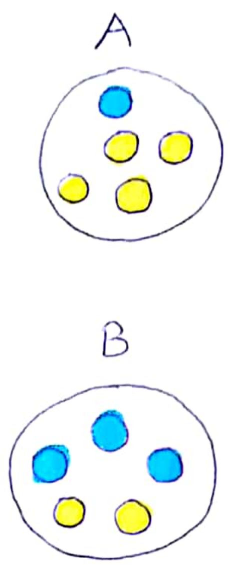
$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \text{ (Odp.)}$$

Scanned with CamScanner

PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

Różnica pomiędzy $P(A|B)$ a $P(B|A)$. PRAWDOP. WARUNKOWE

YOUTUBE / CONDITIONAL PROBABILITY



(KAMYCZKI)

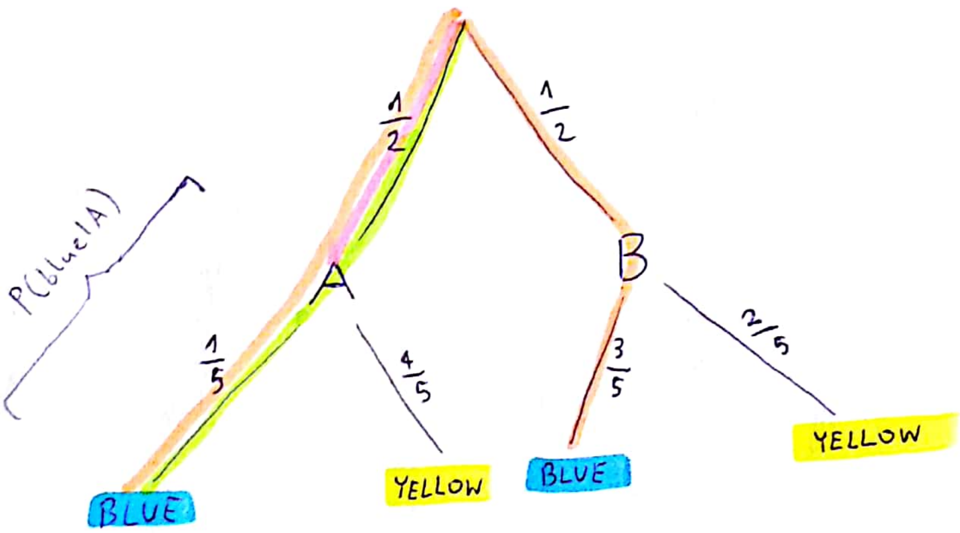
	blue	yellow
Bowl A	1	4
Bowl B	3	2

WYLOSUJĘ NIEBIESKI POD WARUNKIEM ŻE BIORĘ POD UWAGĘ MICHĘ A

$$P(blue|A) = \frac{1}{5}$$

$$P(A|blue) = \frac{1}{4}$$

KAMYCZEK POCHODZI Z MICHY A BIORĄC POD UWAGĘ, ŻE JEST NIEBIESKI



$$P(blue|A) = \frac{P(blue \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

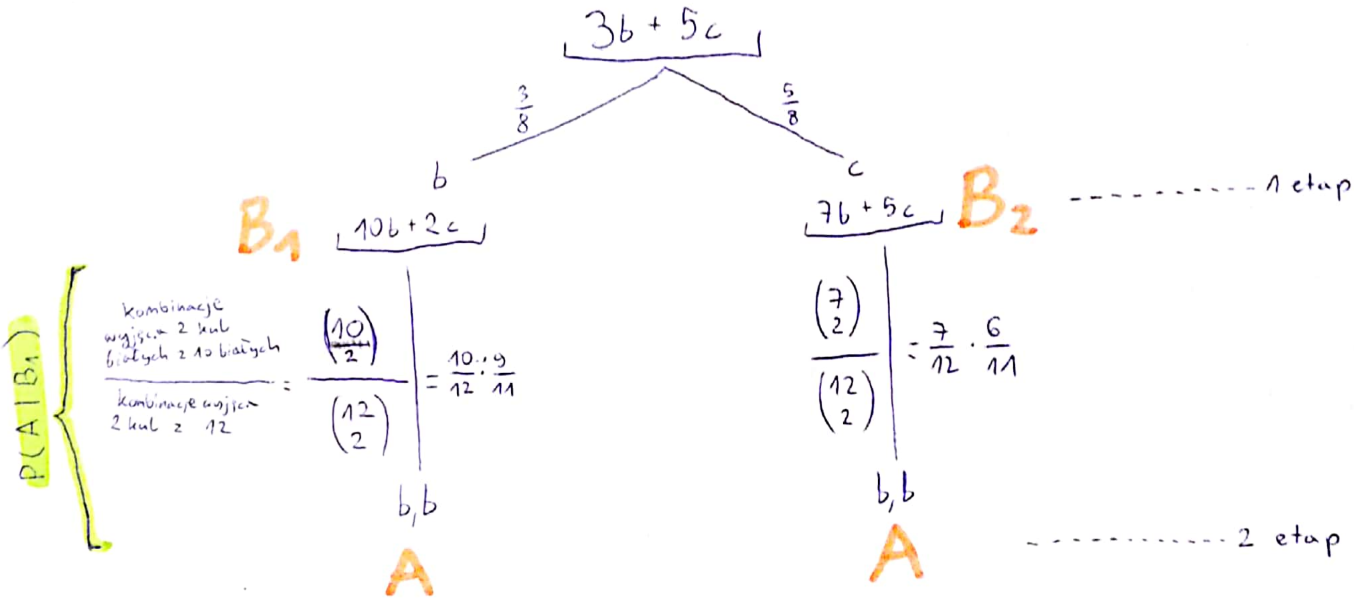
$$P(A|blue) = \frac{P(A \cap blue)}{P(blue)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$$

Scanned with CamScanner

PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

(MATURA PR 05/2015) 4 PKT) - PRAWDOPODOBIEŃSTWO CAŁKOWITE

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule z wylosowanej urny będą białe.



Przyjmuję założenia:

A - obie kule z drugiej urny będą białe

B_1 - losujemy z urny $10b + 2c$, $P(B_1) = \frac{3}{8} > 0$

B_2 - losujemy z urny $7b + 5c$, $P(B_2) = \frac{5}{8} > 0$

$$B_1 \cup B_2 = \Omega, \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{15}{22} \qquad P(A \mid B_2) = \frac{7}{22}$$

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)$$

$$P(A) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{11} \quad \text{(Odp.)}$$

(wymnożone gałęzie)

Scanned with CamScanner