Granice funkcji W PUNKCIE W PIGUŁCE

1 RZECZ DO ZROBIENIA : PODSTAWIENIE (LICZBY DO KTÓREJ DĄŻY)

wychodzi wyrażenie nieoznaczone $\left[\frac{0}{0}\right]$

wychodzi granica

FUNKCJA JEST CIĄGŁA W PUNKCIE
JEST OKREŚLONA

PRZYKŁAD

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6-7x^4-7x^3+7x+6}{x^4-2x^3+x^2-8x-12}$$

COŚ SIĘ MUSI SKRÓCIĆ

zamiast szukać standardowo dzielników 6tk: : ±1, ±2, ±3, ±6

OD RAZU WIEM ŻE DZIELI SIĘ PRZEZ (x−3)

DZIELĘ!

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x^5+3x^4+2x^3-x^2-3x-2)\cancel{(x-3)}}{(x^3+x^2+4x+4)\cancel{(x-3)}} = 10$$

OTO MOJA GRANICA ♡

PODSTAWIAM JESZCZE RAZ

FUNKCJA JEST
× NIECIĄGŁA
× NIEOKREŚLONA
W PUNKCIE

BADAM WIĘC GRANICE LEWOSTRONNĄ I PRAWOSTRONNĄ

lewostronna

zapisujś $x \to 2^-$
TEN MINUS TO ZNACZY ŻE DĄŻY Z LEWEJ

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2}$$

PODSTAWIAM POD x COŚ MINIMALNIE MNIEJSZEGO NIŻ 2

[coś mniejszego niż dwa (trochę)] − 2 < 0

WIĘC

$$\left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

prawostronna

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-1}{x-2}$$

PODSTAWIAM POD x COŚ MINIMALNIE WIĘKSZEGO NIŻ 2

[coś większego niż dwa (trochę)] − 2 > 0

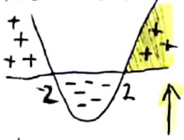
$$\left[\frac{3}{0^+}\right] = \infty$$

GRANICE SĄ RÓŻNE
=
GLOBALNA GRANICA NIE ISTNIEJE

JEŚLI SĄ TAKIE SAME TO TAKA JEST OGÓLNA GRANICA

JEŚLI WYCHODZI NADAL WYRAŻENIE NIEOZNACZONE $\left[\frac{\text{coś}}{0}\right]$ TO
MOŻNA TEŻ ~~NALEŻY~~ NARYSOWAĆ WYKRES MIANOWNIKA

NP. $\lim_{x\to 2^+} \frac{\text{coś}+}{x^2-4}$



$\frac{\text{coś}+}{+} = +\infty$

(x dąży do dwójki od prawej więc

BO $\frac{\text{coś}}{0}$ to zawsze $+\infty$ LUB $-\infty$

Scanned with CamScanner

Granice funkcji - definicja Heinego

TREŚĆ

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ (wtedy i tylko wtedy gdy) dla każdego ciągu argumentów x_n, zmierzającego do x_0, odpowiednio zbudowany ciąg wartości $f(x_n)$ zmierza do g

ZAPIS

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \bigwedge x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0 \quad f(x_n) \to g$$

UZASADNIENIE RÓWNOŚCI Z DEFINICJI

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \qquad \text{niech } x_n \xrightarrow{n \to \infty} 1^+,\ x_n \neq 1$$

$$\text{wtedy} \quad f(x_n) = \frac{1}{\underbrace{x_n - 1}_{\to 0^+}} \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$$

TWIERDZENIA O ARYTMETYCE GRANIC

$(f+g) \to g_1 + g_2$

$(f-g) \to g_1 - g_2$

$(cf) \to c \cdot g_1$

$(f \cdot g) \to g_1 \cdot g_2$

$\left(\frac{f}{g}\right) \to \frac{g_1}{g_2}$

$f^g \to g_1^{g_2}$

Przykład A

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\ \left[\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cancel{(1+x-1+x)}}^{}\left[\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x^2}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right]^{\to 3}}{\underbrace{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}_{\to 2}\cancel{(1+x-1+x)}}=\frac{3}{2}$$

1) Mnożę przez $\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$

czyli $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

2) Mnożę przez $\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^2}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)$

czyli $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

ŻEBY TO DOBRZE ZROZUMIEĆ:

* w obu przypadkach posiadam już nawias $(a-b)$ i mnożę przez drugą połowę wzoru
* należy się oswoić z mnożeniem przez (a^2+ab+b^2) w celu otrzymania a^3-b^3
* mnożąc przez drugą część od razu otrzymuję wynik, ale gdy rozpisuję zarówno licznik jak i mianownik to w obydwu miejscach mam coś pokroju [wynik] · [nawias drugi zza znaku dzielenia]

Przykład B

$$\lim_{x\to\infty}3x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\ [\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x\left(x^2+2-x^2\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}\ \left[\tfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}=\frac{6}{2}=3$$

Standardowo przekształcam $[\infty-\infty]$ na $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mnożąc przez sztuczną jedynkę

Następnie dzielę przez x'a.

Granice jednostronne

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)=g \ \wedge\ \lim_{x\to x_0^-}f(x)=g$$

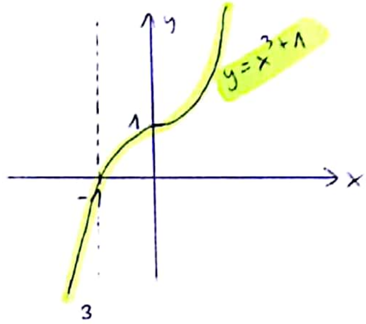
$\lim_{x\to 0}3^{\frac{1}{x}}$ sprawdzam $\lim_{x\to 0^+}3^{\frac{1}{x}\to+\infty}=+\infty$; $\lim_{x\to 0^-}3^{\frac{1}{x}\to-\infty}=0$

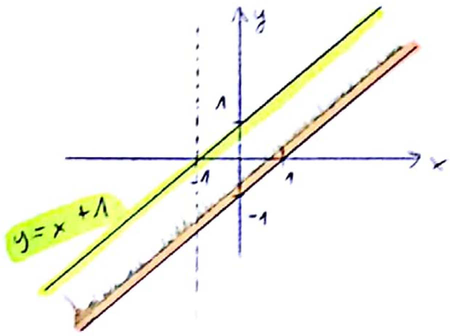
granice jednostronne są różne

=

globalna granica nie istnieje

$$\lim_{x \to -1} \frac{|x^3+1|}{|x+1|}$$





WYZNACZAM

Granica prawostronna
Granica lewostronna

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}} = 3$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{-(x^3+1)}{-(x+1)} = \lim_{x \to -1^-} (x^2-x+1) = 3$$

granica istnieje!

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

1) $x \to -1$ więc patrzę w tym miejscu na oś wartości
2) jeśli dążę z lewej to patrzę na wartość odnośnie na lewo i analogicznie jeśli dążę od prawej

Twierdzenie o trzech funkcjach

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\tfrac{1}{2}x}_{\to 0} \cdot \sin \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to \infty} \qquad \in \langle -1, 1 \rangle$$

$\sin \frac{1}{x}$

* wyznaczam granice funkcji większej/równej i równej/mniejszej

1 FUNKCJA		2 FUNKCJA		3 FUNKCJA
$\frac{1}{2}x \cdot (-1)$	$\leq$	$\frac{1}{2}x \cdot \sin\frac{1}{x}$	$\leq$	$\frac{1}{2}x \cdot 1$
$\downarrow$ 0		$\downarrow$ 0		$\downarrow$ 0
$\sin\frac{1}{x}$ osiąga min -1		POMIĘDZY TAKA SAMA GRANICA		$\sin\frac{1}{x}$ osiąga max 1

Badanie granicy w punkcie: | ciągłość f. w punkcie | ciągłość funkcji | funkcje ciągłe

1) Funkcja jest ciągła w punkcie $x_0 \in D \Leftrightarrow$ gdy istnieje granica i jej wartość jest równa wartości tego punktu.

2) Funkcja jest ciągła $\Leftrightarrow$ gdy jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny

3) Funkcje te są zawsze ciągłe:

* wielomianowa
* wymierna
* wykładnicza
* logarytmiczna
* trygonometryczna

ZAD. Wskaż punkty nieciągłości funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \\ 2-x & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

* każda funkcja z wymienionych jest ciągła dla swojej dziedziny

1) Hipoteza jest, że punkt $x_0 = 1$ jest punktem nieciągłości
a) sprawdzić czy w tym punkcie jest wartość → JEST
b) sprawdzić granice jednostronne ponieważ z dwóch stron są opisane innymi formułami

$f(1) = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2-x) = 1$$

MA WARTOŚĆ

MA GRANICE

ale są inne, więc TAK, jest to punkt nieciągłości

HOSPITALIZACJA czyli... Reguła de l'Hospitala

Jeżeli wyrażenie $\frac{f(x)}{g(x)}$ jest w granicy postaci $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, to:
(również $\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]$, $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

UWAGA! ZACHODZI TYLKO POD WARUNKIEM ŻE DRUGA [redacted] ISTNIEJE! GRANICA (MOŻE BYĆ WŁAŚCIWA I NIEWŁAŚCIWA)

Twierdzenie Darboux

JEŻELI
f jest ciągła na $\langle a,b\rangle$ i $f(a)\cdot f(b)<0$

TO ISTNIEJE
$c\in(a,b)$ że $f(c)=0$
(punkt c w którym funkcja się zeruje pomiędzy a i b)

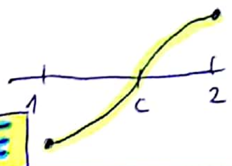
Przykładowe zadanie z tw. Darboux: Wykaż, że dane równanie ma na wskazanym przedziale dokładnie jedno miejsce zerowe. Wyznacz jego przybliżoną wartość. $x^4=x+1$ na $\langle 1,2\rangle$

I ISTNIENIE

Sprawdzam znak dla wartości z wskazanego przedziału

$$\underbrace{f(1)<0 \qquad f(2)>0}_{f(1)\,f(2)<0}$$

istnieje $c\in(1,2)$, $f(c)=0$



II JEDEN PIERWIASTEK

$f(x)=x^4-x-1$ jest ciągła bo funkcje wielomianowe są ciągłe

Sprawdzam jaka jest na przedziale

$f(x)=x^4-x-1$

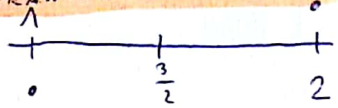
$f'(x)=4x^3-1>0$ na $\langle 1,2\rangle$

$f\nearrow$

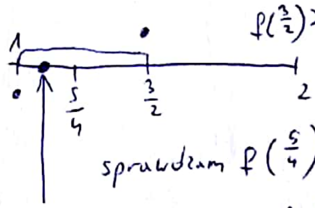
TAK

III PRZYBLIŻONA WARTOŚĆ

WYZNACZAM POŁOWY ODCINKÓW I SPRAWDZAM WARTOŚĆ



$f(\frac{3}{2})>0$ więc $c\in(1,\frac{3}{2})$



sprawdzam $f(\frac{5}{4})$

$c\cong\frac{9}{8}$ z błędem $\frac{1}{8}$ [długość odcinka]

DO WOLI MOŻNA....

INNE

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+x^4+1}}{4x^3+2x^2+1}\overset{\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]}{=}\frac{|x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}{x^3\left(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}=-\frac{1}{4}$$

* WYCIĄGAJĄC SPOD PIERWIASTKA PAMIĘTAJ O WARTOŚCI BEZWZGL.
* DĄŻY DO MINUSA WIĘC WAŻNE

$$f(x)=\frac{(mx^2+2x+3)^3}{4x^6+3x^4+2}+\frac{mx+2}{x+2}$$

ZNAJDŹ TAKĄ WARTOŚĆ PARAMETRU m ABY

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=-4$$

WYSTARCZY UŻYĆ WZORU SKRÓC. MNOŻ. I BĘDĄ DWA x^6 WIĘC BĘDZIE MOŻNA JE WYJĄĆ PRZED NAWIAS → ZAPISZ ICH STOSUNEK

$$\frac{m^3}{4}+\lim_{x\to\infty}\frac{mx+2}{x+2}=-4$$

$$\frac{m^3}{4}+\frac{m}{1}=-4$$

$$m^3+4m+16=0$$

ZADANIE. Wyznacz te parametry a oraz b przy których funkcja $g: R \to R$ określona wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+a}{x-2} & \text{dla } x \neq 2 \\ b & \text{dla } x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $x=2$

Zgodnie z teorią (15) POCHODNA | 4 cytuję:

„Funkcja jest ciągła w punkcie jeżeli

1. * istnieje skończona granica w tym punkcie
2. * granica ta jest równa wartości w tym punkcie"

Sprawdzam WARUNEK 1

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+a}{x-2} = \left[\frac{4+a}{0}\right]$$

zakładam że $a \neq -4$ i $a = 4$ i sprawdzam

$\frac{coś}{0}$ jest równe $\pm\infty$ więc funkcja nie może być ciągła w punkcie

$4+a \neq 0$ zał. $(a \neq -4)$ NIE

zał. $(a = -4)$ co wtedy?

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

TAK

WARUNEK 1 spełniony tylko dla $a=(-4)$

Sprawdzam WARUNEK 2

Skoro granica w punkcie 2 jest równa 4 to zgodnie z WARUNKIEM 2 wartość w tym punkcie też musi być równa 4. więc $b=4$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\sqrt[5]{(2-3x)^3}}{\sqrt[3]{(3-2x)^5}} \right)$$

NAJWYŻSZA POTĘGA x W MIANOWNIKU JEST $\sqrt[3]{x^5}$ DZIELĘ PRZEZ NIĄ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{\sqrt[15]{(2-3x)^9}}{\sqrt[15]{x^{25}}}}{\sqrt[3]{\frac{(3-2x)^5}{x^5}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[15]{\frac{(2-3x)^9}{x^9}\cdot\frac{1}{x^{16}}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x}-2\right)^5}}.$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[15]{\left(\frac{2}{x}-3\right)^9\cdot\frac{1}{x^{16}}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x}-2\right)^5}} = \cancel{\lim_{x\to -\infty}} \frac{\sqrt[15]{(0-3)^9\cdot 0}}{\sqrt[3]{(0-2)^5}} = \frac{0}{-\sqrt[3]{32}} = 0$$

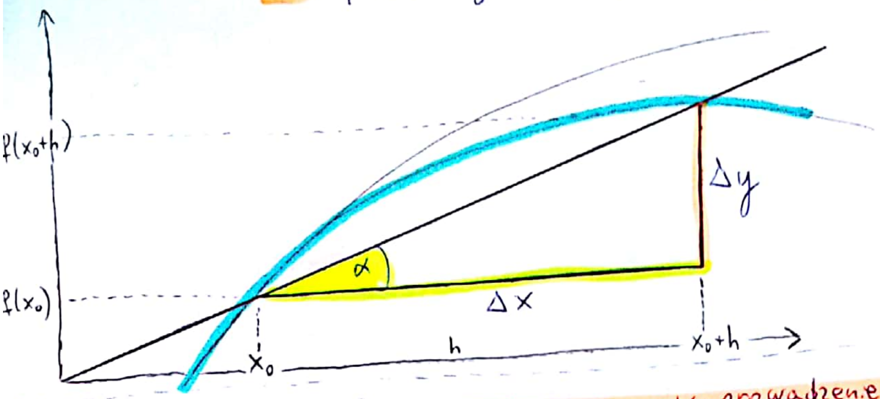
PODSTAWIAM

Scanned with CamScanner

WZORY OGÓLNE POCHODNEJ

Pochodna

* styczna do krzywej
* w punkcie jest liczbą, no ogół jest jakąś tam funkcją



ILORAZ RÓŻNICOWY

$$tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 – wyprowadzenie wzoru

PRZEKSZTAŁCENIA	OBJAŚNIENIA
$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Δx = x końcowy − x początkowy // różnica między punktem końcowym a punktem początkowym
	Δy = wartość dla x'a końcowego − wartość dla x początkowego
$f'(x_0) = \lim\limits_{x_k \to x_0} \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}$	$\Delta x \to 0$ więc $x_k - x_0 \to 0$ więc $x_k \to x_0$
	h – długość „schodka" ilorazu
$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0}$	"Funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0" oznacza że funkcja ma pochodną w punkcie x_0

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

Proste pochodne – wzorki

$(c)' = 0$

$(ax)' = a$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Zależności między pochodnymi

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$(f+g)' = f' + g'$

$(f-g)' = f' - g'$

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

UWAŻAJ BY NIE LICZYĆ TAK

$$\frac{f'}{g'} \neq \left(\frac{f}{g}\right)' \quad !!! \quad \neq$$

CZĘSTY BŁĄD

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI RÓŻNICZKOWALNEJ

TEORIA

Funkcja jest rosnąca w przedziale (a,b) jeśli: dla każdej liczby $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$

. . . . malejąca . . . . $f'(x) < 0$

NA PRZYKŁADACH

P1

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2+2} \qquad D=R$$

Liczę pochodną ilorazu

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(x^2+2)-(x^2-4x)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ZAPYTANIE Kiedy $f(x)$ jest rosnąca?

ODP: $f(x)$ jest rosnąca $\Leftrightarrow f'(x) > 0$

Liczę... MIANOWNIK TO KWADRAT LICZBY WIĘC ZAWSZE >0

$$(2x-4)(x^2+2)-(x^2-4x)(2x) > 0$$

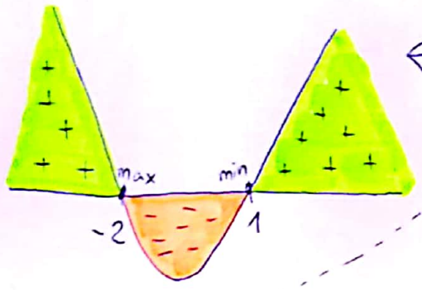
$$4x^2+4x-8 > 0$$

$$(x+2)(x-1) > 0$$

NIE SUMA BO RÓŻNIE MOŻE BYĆ MNIEJSZA A TEŻ ROSNĄĆ

ODP Dla $x<-2$ oraz $x>1$

RYSUJĘ WYKRES POCHODNEJ...



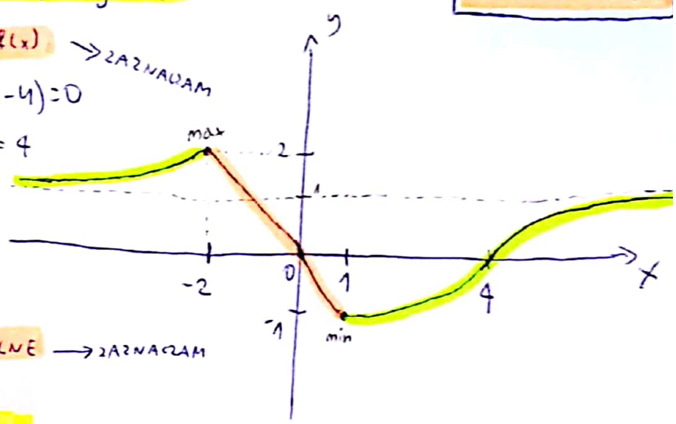
wg pochodnej
ZIELONY - ROŚNIE
POMARAŃCZ - MALEJE

Dalsza analiza funkcji...

1) MIEJSCA ZEROWE $f(x)$ → ZAZNACZAM

$$x^2-4x = x(x-4) = 0$$

$$x=0 \vee x=4$$



2) EKSTREMA LOKALNE → ZAZNACZAM

$x_0 = -2$ i $x_0 = 1$

$f(-2) = 2$

$f(1) = -1$

WARTOŚCI DLA TYCH EKSTREMÓW

Na lewo od max'a i prawo od min'a nie ma już żadnych miejsc zerowych

CO WIĘC Z WYKRESEM ?

ano po to są granice

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4x}{x^2+2} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-4x}{x^2+2} = 1$$

A WIĘC WYKRES DĄŻY DO ASYMPTOTY 1ki

EKSTREMA LOKALNE

jeśli: znak pochodnej zmienia się z "+" na "-" to funkcja w punkcie x_0 osiąga maksimum

analogicznie: z "-" na "+" → minimum

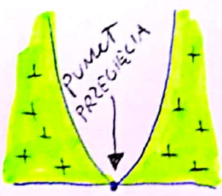
UWAGA! MUSI ZMIENIĆ ZNAK!

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0$

$x = 0$



POCHODNA SIĘ ZERUJE

ALE NIE ZMIENIA ZNAKU!

NIE MA WIĘC EKSTREMUM

RÓWNANIE KWADRATOWE:

np. zadania z parametrem

DLA $\Delta = 0$ NIE ZMIENIA ZNAKU

NIE MA EKSTREMUM

WAŻNE

Przykład (P2) Znajdź ekstrema lokalne

$$f(x)=\frac{x^2-2}{3-x} \qquad D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$$

$$f'(x)=\frac{2x(3-x)-(x^2-2)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{-x^2+6x-2}{(3-x)^2}$$

Szukam kandydatów na ekstrema (ZERUJĘ POCHODNĄ) (1)

$$f'(x)=0 \iff -x^2+6x-2=0$$

$$\Delta=28$$

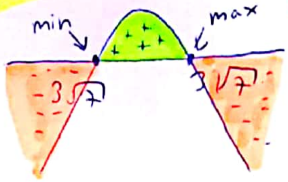
$$\sqrt{\Delta}=2\sqrt{7}$$

WYZNACZAM MZ POCHODNEJ (2)

$$x_1=3+\sqrt{7}$$

$$x_2=3-\sqrt{7}$$

(3) (RYSUJĘ WYKRES)

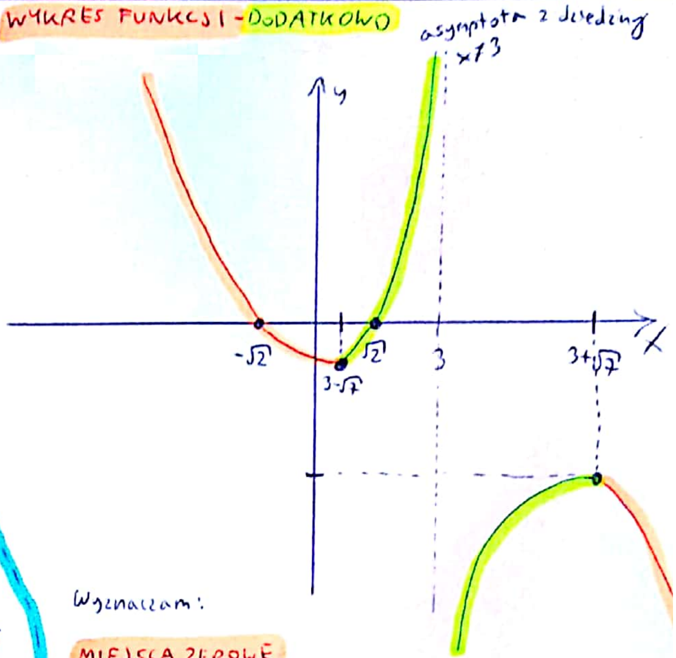


EKSTREMA LOKALNE TO

$$f_{max}=f(3+\sqrt{7})$$ (LICZĘ ICH WARTOŚCI) (4)

$$f_{min}=f(3-\sqrt{7})$$

WYKRES FUNKCJI - DODATKOWO



Wyznaczam:

MIEJSCA ZEROWE

$$x^2-2=0$$

$$x=\sqrt{2} \ \vee\ x=-\sqrt{2}$$

EKSTREMA I MONOTONICZNOŚĆ

Parametr

WYZNACZ LICZBĘ EKSTREMÓW

$$f(x)=(m-1)x^3-x^2+x+2$$

$$f'(x)=3(m-1)x^2-2x+1$$

DELTA

$$\Delta=4-12(m-1)+12$$

$$\Delta=16-12m$$

RÓWNANIE

$$f'(x)=0 \iff \boxed{3(m-1)x^2-2x+1=0}$$

Rozpisuję przypadki

I FUNKCJA LINIOWA

ZAŁ. $m=1$

$m=1$

$$-2x+1=0$$

$$x=\frac{1}{2}$$

} 1 ekstremum

II ZAŁ. $m\neq 1 \ \wedge\ \Delta<0$

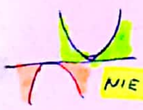
$$16-12m<0$$

$$m>\frac{4}{3}$$

} 0 ekstremów

III ZAŁ. $m\neq 1 \ \wedge\ \Delta=0$

$$m=\frac{4}{3}$$



NIE ZMIENIA ZNAKU!

} 0 ekstremów

IV ZAŁ. $m\neq 1 \ \wedge\ \Delta>0$

$$m<\frac{4}{3}$$

$$m\in(-\infty,1)\cup\left(1,\frac{4}{3}\right)$$

} 2 ekstrema

WAŻNE

PAMIĘTAJ O WYKLUCZANIU INNEGO ZAŁOŻENIA Z TAKIEGO PRZEDZIAŁU

Liczenie prostych pochodnych

* zamiana pierwiastków na potęgi

PRZYKŁAD 1

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$$

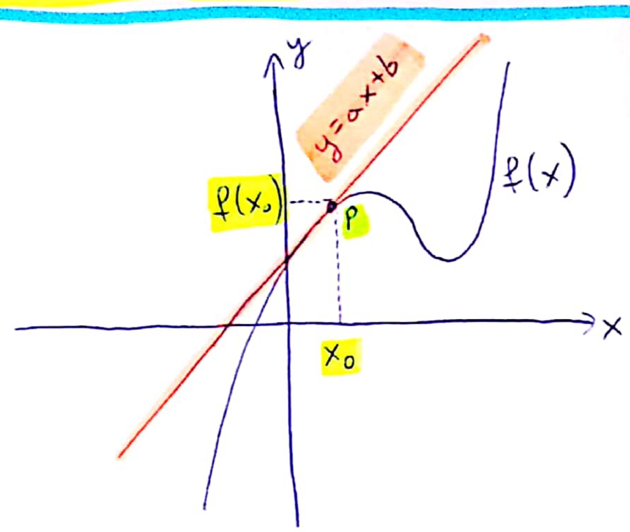
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

PRZYKŁAD 2

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x\cdot x^{\frac{1}{3}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}=x^{-\frac{5}{6}}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{6}x^{-\frac{5}{6}-1}=-\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}}$$

STYCZNA DO WYKRESU FUNKCJI



$\boxed{a=f'(x_0)}$ czyli nachylenie w punkcie ....

więc

JEST TO POCHODNA DLA TEGO PUNKTU

więc

$$y=ax+b \Rightarrow y=f'(x_0)x+b.$$

NO ALE PRZECIEŻ MAMY WSPÓŁRZĘDNE TEGO PUNKTU

$$P=(\underbrace{x_0}_{x},\underbrace{f(x_0)}_{y})$$

więc podstawiam

$$f(x_0)=f'(x_0)\cdot x_0+b$$

MAM JUŻ WYLICZONE b - PODSTAWIAM

$$y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

CO PO UPROSZCZENIU DAJE WZÓR Z TABLIC

$$\underbrace{y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)}_{\text{RÓWNANIE STYCZNEJ}}$$

P - punkt styczności

WSPÓŁCZYNNIKI KIERUNKOWE TO POCHODNE DLA TYCH ARGUMENTÓW KTÓRE SĄ ARGUMENTAMI DANYCH PUNKTÓW STYCZNOŚCI

WYZNACZ RÓWNANIA STYCZNYCH RÓWNOLEGŁYCH DO PROSTEJ $y=4x$

⇓

PUNKTY W KTÓRYCH STYCZNA MA WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY RÓWNY 4

⇓

PUNKTY W JAKICH POCHODNA PRZYJMUJE WARTOŚĆ 4

RÓWNOLEGŁE STYCZNE / PROSTOPADŁE / PUNKT

Wyznacz wszystkie parametry p, dla których styczne poprowadzone do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+px}{x^2-4}$ w punktach przecięcia z osią OX są równoległe.

1) Wyznaczam dziedzinę $x \neq 2 \wedge x \neq -2$

2) Namierzam punkty styczności. Punkty te przecinają oś OX więc ich wartości to zawsze 0.

Dlatego:

$$f(x) = 0 \iff x^2 + px = 0$$

$$\underbrace{x = 0} \vee \underbrace{x = -p}$$

$$P_1 = (0,0) \wedge P_2 = (-p, 0)$$

3) Styczne mają być równoległe. Dzieje się tak gdy współczynniki a są jednakowe. Te współczynniki a to przecież pochodne w danych punktach.

3a) Liczę pochodną dla całej funkcji: $f(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x+p)(x^2-4) - (x^2+px)(2x)}{(x^2-4)^2}$$

3b) Liczę współczynniki a dla danych punktów (pochodne dla tych punktów)

$$a_1 = f'(0) = -\frac{p}{4}$$

$$a_2 = f'(-p) = \frac{(-p)\cdot(p^2-4) - (p^2-p^2)\cdot(2\cdot(-p))}{(p^2-4)^2} = \frac{-p\cdot(p^2-4)}{(p^2-4)^2} = \boxed{\frac{-p}{p^2-4} \text{ przy zał. } p \neq 2,\ p \neq -2}$$

5) Sprawdzam założenia!

4) Porównuję współczynniki

$$\frac{-p}{4} = \frac{-p}{p^2-4} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow \underbrace{p = 2\sqrt{2}} \vee \underbrace{p = -2\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

Punkt $P = (1;3)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^2+ax+3}{x+b}$ gdzie $b \neq -1$. Styczna tej funkcji w punkcie P jest prostopadła do prostej o równaniu $2x+y+7=0$. Oblicz a, b i równanie stycznej.

1) PIERWSZE SKOJARZENIE [PUNKT + FUNKCJA]

podstaw $P(1;3)$ do $f(x)$

$$3 = f(1)$$

$$\Downarrow$$

$$a = 3b - 1$$

2) PODSTAW TO DO WZORU

$$f(x) = \frac{x^2 + (3b-1)x + 3}{x+b}$$

masz wzór z tylko jedną niewiadomą!

3) WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY W PUNKCIE TO POCHODNA OD ARGUMENTU PUNKTU

$$f'(1)$$

4) STYCZNA PROSTOPADŁA DO PROSTEJ

$$y = -2x - 7$$

ZATEM

WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY STYCZNEJ TO RÓWNIEŻ $\frac{1}{2}$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$b = 1$$

$$a = 2$$

5) SZUKANA STYCZNA

$$y = \frac{1}{2}x + c$$

PODSTAWIĆ DO PUNKTU $P(1,3)$

$$3 = \frac{1}{2} + c$$

$$\Downarrow \quad c = \frac{5}{2}$$

Znajdź równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 16x^2 + \frac{1}{x}$ (PROSTE ZADANIE)

(1 UWAGA) $b=0$ bo przechodzi przez $(0,0)$

Reszta pozostanie zawsze ..

$$\left.\begin{array}{l} a = f'(x_0) \\ y_0 = f(x_0) \\ y_0 = a \cdot x_0 \end{array}\right\} f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 \Big\} x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} y = f'(x_0) \cdot x \\ y = 12x \end{array}$$

↑ STYCZNA

↓ EKSTREMA

Pochodna funkcji kwadratowej f określona jest wzorem $f'(x) = -6x + 9$. Znajdź wzór funkcji f wiedząc, że osiąga ona maksimum równe 7.

$f'(x) = -6x + 9$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
POCHODNA F	FUNKCJA F

Oznacza to, że dwumiany $2ax + b$ i $-6x + 9$ są równe

stąd: $a = -3$, $b = 9$

Funkcja osiąga maksimum dla x-a dla którego $f'(x) = 0$, tj. $x = \frac{3}{2}$

$$7 = f\left(\tfrac{3}{2}\right) = -3\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 9\cdot\tfrac{3}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Znajdowanie ekstremów funkcji - z niewiadomymi

1. Wyznaczenie wzoru pochodnej
2. Znalezienie punktów gdzie pochodna się zeruje
3. Wyznaczenie wzoru funkcji i wartości tych x-ów dla których pochodna się zeruje