Przestrzeń Liniowa - przestrzeń złożona z **wektorów**, które:

- dodawać: łączne: $((u+v)+w)=(u+(v+w))$
  przemienne: $u+v=v+u$

- mnożyć przez liczbę: rozdzielne względem dodawania $a(v+w)=av+bw$
  rozdzielne względem dodawania liczb $(a+b)v=av+bv$

* istnieje również wektor zerowy 0 : $v+0=v$

* istnieje wektor przeciwny : $v+w=0$

Podprzestrzeń Liniowa - taki podzbiór X przestrzeni liniowej w którym działania na wektorach zwracają wynik który dalej mieści się w tym X.

* Dla dowolnych dwóch wektorów: $u+v \in X$
: $au \in X$ gdzie a - dowolna liczba

Kombinacja Liniowa - wektor b jest kombinacją liniową wektorów $a_1, a_2, \dots, a_n$ gdy da się znaleźć takie skalary $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ że:
$b=\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$

Przykład:
$(-2,1)=a(1,1)+b(2,1)$

UKŁAD RÓWNAŃ
$$\begin{cases} a+2b=-2 \\ a+b=1 \end{cases} \nearrow \begin{matrix} a=4 \\ b=-3 \end{matrix}$$
$\searrow$ * gdyby był sprzeczny to nie jest kombinacją liniową

Liniowa niezależność - tworzymy kombinację liniową tych wektorów jeśli jest równa zeru to układ liniowo niezależny

(są liniowo zależny gdy istnieje k takie że $x=ky$)

Przykład:
$\alpha_1(-1,3,2)+\alpha_2(0,4,1)+\alpha_3(5,0,1)=0$

$$\begin{cases} -\alpha_1+5\alpha_3=0 \\ 3\alpha_1+4\alpha_2=0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$
więc TAK

LUB * Liczymy rząd macierzy
- jeśli jest tyle schodków ile wektorów to są niezależ
- jeśli wyznacznik macierzy $n \times n \neq 0$ to niezależne

Scanned with CamScanner

Baza przestrz. liniowej - coś co tworzą kilka wektorów, które

* są liniowo niezależne
* przy ich pomocy (kombinacja liniowa) można przedstawić każdego innego wektora z tej samej przestrzeni.

Drugi warunek: przykład

$\vec{x}_1 = [1, 0, 3]$
$\vec{x}_2 = [0, 2, 2]$
$\vec{x}_3 = [1, -2, 0]$

WARUNEK: $\underset{x,y,z}{\forall} \ \underset{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}{\exists} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

prawą stronę przekształcam...

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 3\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ -2\alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{porównuję z } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = y \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = z \end{cases}$$

z układu Cramera

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

WYZNACZNIK GŁÓWNY $\neq 0$
CZYLI 1 ROZWIĄZANIE

Przykład: Sprawdzanie czy jest podprzestrzenią

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 - 3x_4 = 0\}$

* należy przyjąć jakieś x i y i sprawdzić czy zbiór jest zamknięty na sumę i mnożenie przez skalar

$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$
$a \in \mathbb{R}, x \in V \Rightarrow ax \in V$

* nadaję więc każdemu elementowi odpowiedni indeks: dla x'ów i y greków.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in V$

* zapisuję z nimi warunek

$x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \ \wedge \ y_1 + y_3 - 3y_4 = 0$

* no ale teraz jako argument w warunku podstawiam $(x+y)$

$(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) - 3(x_4 + y_4) = (x_1 + x_3 - 3x_4) + (y_1 + y_3 - 3y_4) = 0 + 0 = 0$

* mnożę każdy element x (z odp indeksem) razy a i wychodzi ax_n → do warunku

$ax_1 + ax_3 - 3ax_4 = a(x_1 + x_3 - 3x_4) = a \cdot 0 = 0$

Przykład 2:

$\{x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 \leq 0\}$

* zamiast stawiać warunki można znaleźć takie dwa wektory które je łamią

$w_1 = (-1, 1, 0)$
$w_2 = (3, -\frac{1}{2}, 0)$

ICH SUMA NIE SPEŁNIA WARUNKU

Scanned with CamScanner

Znajdowanie współrzędnych wektora w bazie

= taką kombinację liniową znaleźć aby $[\alpha, \beta, \gamma]$ to był ten wektor

np. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \, \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} . \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \, \end{bmatrix}$

Zapis poziomy wektorów

czyli: $2x^4 + 3x^3 + x^2 - 1$ to $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Wymiar przestrzeni wektorowej

– liczba wektorów bazy tej przestrzeni

dim V = <wymiar>

[przykład z wielomianami]

np. $V = p \in R[x] : p''' = 0\}$ elementy takie jak $x^3, x^2, x, 1$

$(x^3)''' = (3x^2)'' = (6x)' = (6)$ $V = R_3[x]$ wymiar $\dim V = 4$

Przykład 1 → Wskazanie bazy i wymiaru.

$V = \{(r - 2s - t, \; 2r + s - 3t, \; 3r + 4s - 5t) : x, y \in R\}$

$r(1,2,3) + s(-2,1,4) + t(-1,-3,-5)$

Wektory tworzące

$V_1 = (1,2,3)$

$V_2 = (-2,1,4)$

$V_3 = (-1,-3,-5)$

Warunek liniowej niezależności:

$\alpha(1,2,3) + \beta(-2,1,4) + \gamma(-1,-3,-5) = 0$

czyli: liczę z definicji np Gaussem

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right]$

i szukam sprzeczności ?

lub od razu liczę rząd

JEDEN WEKTOR ZALEŻNY OD INNYCH

$rz = 2$ $\dim V = 2$

Tym razem mam WARUNEK [PRZYKŁAD 2]

WARUNEK ZROBIŁ O JEDEN WEKTOR TWORZĄCY MNIEJ

$V = (x,y,z,t) \in R^4 : x + y = z - y$

Warunek zapiszę jako $x = z - 2y$, wtedy:

$(z - 2y, y, z, t)$,

PO ROZPISANIU $\dim V = 3$

(PRZYKŁAD 3: WIELOMIANY)

$V = p \in R_4[x] : p(1) + p(-1) = p'(0)$

Zastanawiam się jak to w ogóle zacząć ???

otóż: $p = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

1 (tworzymy wielomian z współczynnikami literkami, a x-y do potęgi jak podano w $R_4[x]$)

2 (podstawiam do warunku)

$(a + b + c + d + e) + (a - b + c - d + e) = d$

$2a + 2c + 2e = d$

3 (chcesz więc wyeliminować dx, co zrobić? Pomnóż * x)

$2ax + 2cx + 2ex = dx$

4 (Podstawiam eliminując dx)

$p = a(x^4 + 2x) + bx^3 + c(x^2 + 2x) + e(2x + 1)$

5 (Ogarniasz generatory czyli te kawałki z x'ami gdzie masz literkę

$p_1 = x^4 + 2x, \; p_2 = x^3, \; p_3 = x^2 + 2x, \; p_4 = 2x + 1$

NO I TO JEST BAZA $B = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$\dim V = 4$ (bo 4 elementy)

Scanned with CamScanner

✱ W R^n każdy zestaw liniowo niezależnych n wektorów tworzy bazę.

Macierz przejścia z B do B' – to odpowiednie kombinacje liniowe wektorów z bazy B, których wynikiem jest dany wektor z B'.

PRZYKŁAD

$V = R_2[x]$, $\{B = x+1, x+2, x^2+1\}$, $B' = \{x+3, x+4, x^2\}$

1 (zapisać jako pionowe wektory)

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pierwszy wektor z B'

Macierz przejścia to pionowo te wektory

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & \dots & \dots \\ \beta & \dots & \dots \\ \gamma & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Przekształcenie liniowe $L: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ jest liniowe gdy zachodzą warunki:

1) $L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = L(\vec{u}_1) + L(u_2)$ $(u_1, u_2 \in U)$

2) $L(\alpha \vec{u}) = \alpha L(\vec{u})$ $(u \in U, \alpha \in R)$

PRZYKŁAD: $L: R^2 \to R^2$, L jest symetrią względem osi Oy

1 (zapisać jako co to jest)

$L(x,y) = (-x, y)$

2) $L(u_1 + u_2)$
$L(x_1+x_2, y_1+y_2) = (-x_1 - x_2, y_1 + y_2) = (-x_1, y_1) + (-x_2, y_2) = L(u_1) + L(u_2)$

3) $L(\alpha x) = L(\alpha x, \alpha y) = \alpha L(x,y)$

RZUT PROSTOKĄTNY NA PŁASZCZYZNĘ xOz to $L(x,y,z) = (x, 0, z)$

PRZYKŁAD $L: M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $L(A) = 3A - A^T$ NIE PRZEJMUJ SIĘ OZNACZENIAMI

$L(A_1 + A_2) = 3(A_1+A_2) - (A_1+A_2)^T = 3A_1 - A_1^T - A_1^T - A_2^T = (3A_1 - A_1^T) + (3A_2 - A_2^T) = L(A_1) + L(A_2)$

PRZYKŁAD $L: M_{2\times2} \to R$, $L(A) = \det A$

dowód że nie spełnia $L(A) = \alpha L(A)$

Przyjmując:

✱ $\alpha = 2$ →

✱ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$L(2A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 2 = 4$

$2L(A) = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$

→ L nie jest liniowe

Scanned with CamScanner

Jądro

– jądro macierzy M to zbiór takich wektorów w, że pomnożenie tej macierzy z tym wektorem w da nam wektor zerowy

$M \cdot w = 0$

Formalne dla $L: U \to V$, $u \in U$, $L(\vec{u}) = 0$

$$\text{Ker } L = \{ \vec{u} \in U : L(\vec{u}) = 0 \}$$

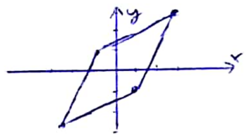
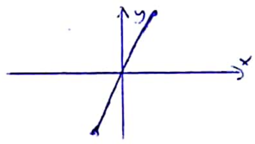
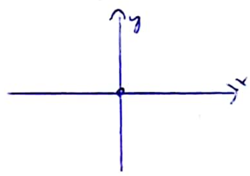
Obraz

– obraz macierzy M to zbiór takich wektorów, które możemy wygenerować przez mnożenie M z w

Formalne dla $L: U \to V$

$$\text{im } L = \{ \vec{v} \in V : \text{istnieje wektor } \vec{u} \in U, \text{ takie } L(\vec{u}) = \vec{v} \}$$

Związek jądra z obrazem

macierz	aby otrzymać wektor zerowy pomnożyć przez	jądro / wymiar	kwadrat po odwzorowaniu macierzy M	obraz - wymiar	rząd macierzy M
$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\ker M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dim ker M = 0		dim im M = 2	RzM = 2
$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$w = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ $(\alpha \in R)$	$\ker M = \left\{ w = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in R \right\}$ dim ker M = 1		dim im M = 1	RzM = 1
$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ $(\alpha, \beta \in R)$	$\ker M = \left\{ w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in R \right\}$ dim ker M = 2		dim im M = 0	RzM = 0

Wnioski:

* Suma rozmiarów jądra i obrazu daje rozmiar przekształcenia liniowego
* Rozmiar obrazu macierzy jest równa rzędowi tej macierzy

* Wyznaczanie jądra, obrazów oraz bazy przekształceń L - PRZYKŁAD

$L: R^3 \to R^4$, $L(x,y,z) = (2x-y-z,\ x+y+4z,\ 2x+y+5z,\ -x-z)$

① OBRAZ - OPIS PRZESTRZENI DANEJ PRZEZ GENERATORY

* zapisać jako $x(\ldots) + \ldots$

$L(x,y,z) = x(2,1,2,-1) + y(-1,1,1,0) + z(-1,4,5,-1)$ obraz to wektory pojedynczo bez x,y.

$\operatorname{im} L = \operatorname{Lin}\{(2,1,2,-1),\ (-1,1,1,0),\ (-1,4,5,-1)\}$

* wymiar obrazu to rząd macierzy z tych wektorów (TUTAJ = 2)
* bazą są dwa wybrane liniowo niezależne wektory

② JĄDRO - PODANE ELEMENTY PRZYRÓWNAĆ DO ZERA - UKŁAD RÓWNAŃ

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array}$$

trzeba uzależnić od z (z rzędu po skróceniu zostały)

$x = -z$
$y = -3z$
$z \in R$

PROSTA O RÓWNANIU $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ (geometrycznie)

$\operatorname{Ker} L = \underbrace{\{(-z,-3z,z) : z \in R\}}_{(\text{jądro})} = \operatorname{Lin}\underbrace{\{(1,3,-1)\}}_{(\text{baza})}$, $\underbrace{\dim \operatorname{ker} L = 1}_{(\text{wymiar jądra})}$

$L: M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $L(A) = A - A^T$

① NAJPIERW JĄDRO

przyjmuję $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, warunek więc to: $A - A^T = 0$, $A^T = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$, to daje układ: $\begin{cases} x = x \\ y = z \\ z = y \\ t = t \end{cases}$, eliminuję jedną zmienną $\begin{cases} x = p \\ y = q \\ z = q \\ t = r \end{cases}$,

mając p, q, r mogę zapisać to jako zbiór $\operatorname{Ker} L = \operatorname{lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, te macierze to też jest baza

② POTEM OBRAZ

$L(A) = A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & y-z \\ z-y & 0 \end{bmatrix}$, tylko macierz antysymetryczna $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ może być wartością tego przekształcenia

, więc $\operatorname{Im} L = \operatorname{lin}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, macierz ta też jest bazą.

---

* Wyznaczanie wzoru odwzorowania

mając dane w odwzorowaniu liniowym $f: R^3 \to R^2$:

$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,2) \\ f(1,1,0) = (-1,0) \\ f(1,1,1) = (2,3) \end{cases}$, tworzę kombinację liniową $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, z której wyliczam $\begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y - z \\ \gamma = z \end{cases}$,

tak więc $f(x,y,z) = ? = f(\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1))$

$f((x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1))$

$(x-y)\cdot f(1,0,0) + (y-z)\cdot f(1,1,0) + z\cdot f(1,1,1)$

$(x-y)(1,2) + (y-z)(-1,0) + z(2,3)$

$(x-y,\ 2x-2y) + (z-y,\ 0) + (2z,\ 3z) = (x-2y+3z,\ 2x-2y+3z)$

* wyjmuję funkcję do samych wektorów
* podstawiam wartości

Scanned with CamScanner

* znajdowanie macierzy odwzorowań liniowych

- w bazach standardowych:

$L: R^4 \to R^2, \quad L(x,y,z,t) = (x-y+2z,\ 4x-y+3z-t)$

* należy rozpisać wektory bazy $\left[x(1,4)+y(-1,-1)+z(2,3)+t(0,-1)\right]$, a następnie zapisać je kolumnami w macierzy (ważne - kolumnami !!!)

$$A_L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

- we wskazanych bazach:

$L: R^2 \to R^3, \quad L(x,y) = (x+y,\ 2x+y,\ x-3y)$

$u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,-1)$

$v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (0,1,-1)$, $v_3 = (0,0,1)$

* należy podstawić do funkcji odwzorowania L wektory o odp. rozmiarach,

z tego wzoru $\binom{x=1}{y=1}$

czyli $L(1,1) = (2,3,-2)$, następnie kombinacje liniowe tych wektorów przy użyciu v_n,

$L(1,-1) = (0,1,4)$

czyli $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wynikiem jest macierz z α, β, γ kolumnami tj. $\begin{bmatrix} \alpha & ? \\ \beta & ? \\ \gamma & ? \end{bmatrix}$ (z drugiego wektora)

---

* nowa i stara baza | ZMIANA BAZY

* dany wektor v ma różne współrzędne w różnych bazach

MOGĘ STWORZYĆ NOWY WEKTOR "NA BAZIE" e_1 i e_2 BĘDZIE JUŻ TO WEKTOR W NOWEJ BAZIE

$e_1' = 1e_1 + 2e_2 = (e_1, e_2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$e_2' = -3e_1 + 4e_2 = (e_1, e_2)\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ŁĄCZNIE: macierz przejścia z starej do nowej $P^E_{E'} = P$

$(e_1'\ e_2') = (e_1\ e_2)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

można rozdzielić

wektory starej bazy wyrażone jako kombinacje wektorów nowej

$e_1 = \frac{4}{10} e_1' - \frac{2}{10} e_2'$

$e_2 = \frac{3}{10} e_1' + \frac{1}{10} e_2'$

$(e_1\ e_2) = (e_1'\ e_2') \cdot \begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

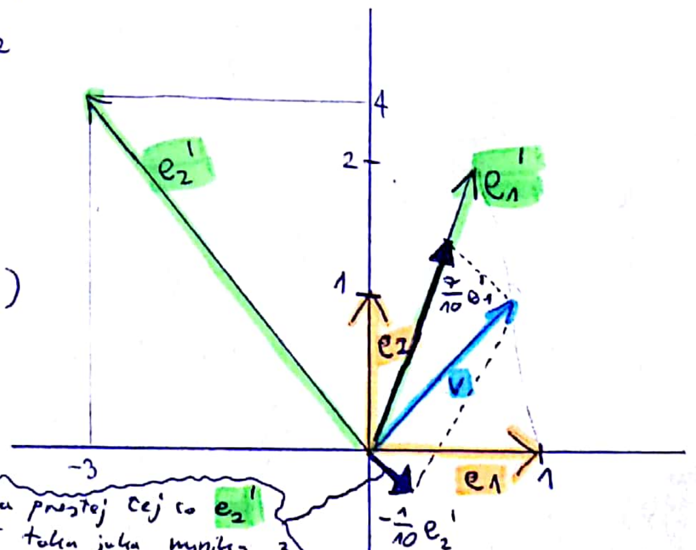
$P^{E'}_{E} = P^{-1}$ macierz przejścia z nowej do starej

WEKTOR OGÓLNIE

$v = 1e_1 + 1e_2 = \frac{7}{10} e_1' + \left(-\frac{1}{10}\right) e_2'$

λ_1, λ_2, λ_1', λ_2'

* wektor v zawsze wygląda dokładnie tak samo
* chodzi o to, że przy pomocy wybranych wektorów bazy należy właśnie jego wyrazić (niezmienionego)
* można to zrobić dobierając odpowiednie długości tych wektorów
- NA TEJ SAMEJ PROSTEJ
- JEŚLI W PRZECIWNYM KIERUNKU TO WARTOŚĆ NA MINUSIE



* leży na prostej co e_2'
* długość taka jaka wynika z pomnożenia współczynnika ... e_2'

* znajdowanie wektorów ~~wektora~~ starej bazy

* wektory bazowe

$E = E' \cdot P^{-1}$ ~ $(e_1\ e_2) = (e_1'\ e_2') \cdot P^{-1}$ ~ m. przejścia z nowej do starej

macierz odwrotna ($P \cdot P^{-1}$ = MACIERZ JEDNOSTKOWA)

$E' = \underbrace{E \cdot P}_{\text{(macierz przejścia na końcu)}}$ ~ $(e_1'\ e_2') = (e_1\ e_2) \cdot P$ ~ m. przejścia ze starej do nowej

* konkretny dowolny wektor ze starej bazy $v = (p, q)_{BAZA}$

$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix}$ wsp wektora w nowej bazie

najpierw macierz przejścia

$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix}$

no ale tylko jak się wymnoży przez $e_1 e_2$

PRZYKŁAD:

$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{wektor starej bazy}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{bmatrix}}_{\text{wektor nowej bazy}}$

czyli w starej bazie używam całych wektorów e_1 i e_2 aby wyrazić v: 100% e_1, 100% e_2 WYKORZYSTANE

w nowej bazie używam tylko $\frac{7}{10}$ wektora e_1' i $-\frac{1}{10} e_2'$ (na minus więc do tyłu)

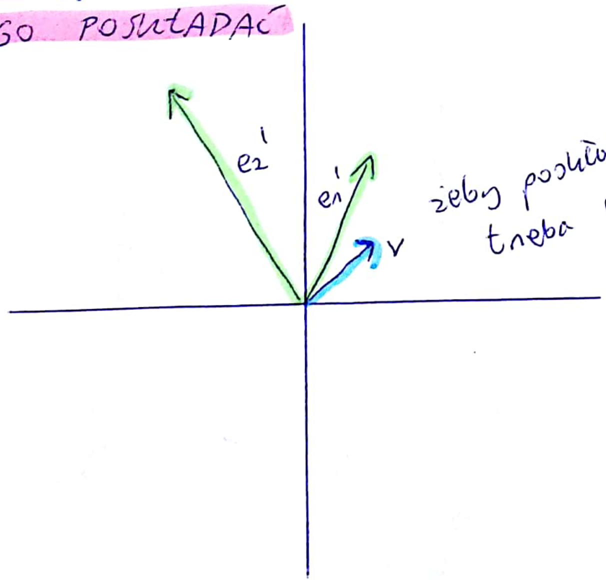
$\boxed{\text{LAMBDY NOWEJ BAZY}} = \boxed{\text{MACIERZ P Z NOWEJ DO STAREJ}} \cdot \boxed{\text{LAMBDY STAREJ BAZY}}$

* znajdywanie wektora w bazie to nie to samo znajdowanie tych wsp. w nowej bazie

WSP. W STAREJ BAZIE TO	W NOWEJ BAZIE
$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ i można je użyć do wyznaczenia wektora na osi tylko mnożąc przez $(e_1\ e_2)$	$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix}$ i też można je użyć do wyznaczenia tego wektora tylko mnożąc przez $(e_1'\ e_2')$
CZYLI	czyli
$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$	to to samo $\lambda_1' e_1' + \lambda_2' e_2'$

TO TO SAMO PONIEWAŻ PO WYMNOŻENIU WYCHODZI KONKRETNY WEKTOR V

LAMBDY TO TYLKO DŁUGOŚCI TYCH WEKTORÓW Z BAZY Z JAKICH TRZEBA GO POSKŁADAĆ



żeby poskładać tak (konkretny wektor v) trzeba użyć

$\lambda_1' = \frac{7}{10}$ (o tyle skrócę wektor e_1')

$\lambda_2' = -\frac{1}{10}$ (o tyle zostanie przedłużony w dół wektor e_2')

Odwzorowanie liniowe - ludzkim językiem

x^1, x^2, x^n to nie potęga tylko $x^1 = x$, $x^2 = y$ itd.

* należy wybrać bazę:
  - w dziedzinie: $e_1, \dots, e_n$ (V)
  - w przeciwdziedzinie: $f_1, \dots, f_m$ (W)

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 0 f_1 + 1 f_2 \\ \varphi(e_2) = 5 f_1 - 1 f_2 \end{cases}$$

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2)) = (f_1, f_2)\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[ODWZOROWANIE WEKTORÓW ZE STAREJ BAZY (WEKTORY BAZOWE)] = [WEKTORY Z NOWEJ BAZY (WEKTORY BAZOWE)] · [MACIERZ ODWZOROWANIA] $(M = M_F^E)$

[ODWZOROWANIE WEKTORÓW Z DZIEDZINY] = [JEST ZAWSZE KOMBINACJĄ LINIOWĄ WEKTORÓW Z KONTRDZIEDZINY]

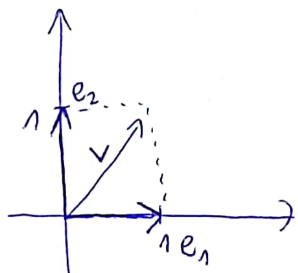
* z kolei mając współrzędne konkretnego wektora, a nie wektory bazowe

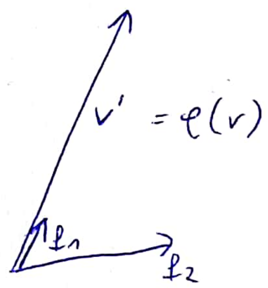
$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

wsp. wektora w przeciwdziedzinie

wsp. wektora w dziedzinie

KONKRETNEGO WEKTORA !!!!!!





np. $\underbrace{1 e_1 + 1 e_2}$

$$v \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad v' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 f_1 + 0 f_2$$

---

tzn. że licząc na wektorach bazowych:

mnożę (wektory przeciwdziedziny) razy macierz ~~przejścia~~ odwzorowania i dostaję (odwzorowane wektory z dziedziny)

licząc na wsp. konkretnego wektora:

mnożę (wsp. konkretnego wektora w dziedzinie) razy m. odwzorowania i dostaję (wsp. wektora z przeciwdziedziny)

na wektorach bazowych:

mnożę wektory bazy starej razy macierz przejścia (STARA → NOWA) i otrzymuję (wektory bazy nowej)

mnożę wektory bazy nowej razy odwrotność macierzy przejścia (NOWA → STARA) i dostaję (wektory bazy starej)

na wsp. konkretnego wektora:

mnożę wsp. konkretnego wektora (ale taki który mnożę wymnożyć przez $(e_1 e_2)$) z starej bazy razy odwrotność macierzy przejścia (~~STARA → NOWA~~) (NOWA → STARA) i dostaję (wsp. wektora nowej bazy)

Odwzorowanie + zmiana baz w dziedzinie i w przeciwdziedzinie.

mam wektor x: $1e_1 + 1e_2 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ (inny zapis)

DZIEDZINA: baza e, nowa baza e', macierz odwzorowania $M_f^e \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

PRZECIWDZIEDZINA: baza f, nowa baza f'

zmiana baz:

$(e_1' \ e_2') = (e_1 \ e_2) P_1$, macierz przejścia $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, wektor powstały po odwzorowaniu $y = \varphi(x)$

$(f_1' \ f_2') = (f_1 \ f_2) P_2$, macierz przejścia $P_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Liczę wynik odwzorowania na starych bazach

$$y \Rightarrow M_f^e \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e}_{\text{wsp } x \text{ w dziedzinie oznaczam jako } X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}_f}_{\text{wynik odwzorowania oznaczam jako } Y}$$

$\rightsquigarrow$ szukam macierzy odwzorowania na nowych bazach $M_{f'}^{e'} = ?$ $\longrightarrow$ również Y' (wsp y w nowej bazie f')

$$Y = M_f^e X \iff Y' = M_{f'}^{e'} X' \longrightarrow X' = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

rozpisuję macierze przejścia...

$$X' = P_1^{-1} X \iff X = P_1 X'$$

(analogicznie) $Y = P_2 Y'$

podstawiam

$$P_2 Y' = M_f^e P_1 X' \quad | \cdot P_2^{-1}$$

pozbywam się P_2 aby zostało Y' którego szukam

$$Y' = \underbrace{P_2^{-1} M_f^e P_1}_{} X'$$

$$Y' = M_{f'}^{e'} X'$$

stąd mam wz. na macierz odwzorowania (w nowych bazach)

$$M_{f'}^{e'} = \underbrace{P_2^{-1}}_{\text{odwrotność macierzy przejścia w przeciwdziedzinie}} \underbrace{M_f^e}_{\text{m. odwzorowania w starych bazach}} \underbrace{P_1}_{\text{macierz przejścia w dziedzinie}}$$

Podstawiając liczę sobie tę macierz.
znam też X' (wsp. X w nowych bazach).

$$Y' = M_{f'}^{e'} X' \quad \text{i już mam } Y' = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}_{f'} \rightarrow y = -5f_1' + 0f_2'$$

Scanned with CamScanner

* mnożenie macierzy nie jest przemienne

$$E = E' \cdot P^{-1} \quad \Big| \cdot P$$

(jeśli to co mnożysz (odwrotność) było po prawej to do drugiej strony też wymnażaj po prawej i na odwrót)

$$\boxed{E \cdot P = E'}$$

DOBRZE

$$\boxed{\cancel{P \cdot E = E'}}$$

ŹLE

---

* zmiana bazy

$$E = E' \cdot P^{-1}$$

* konkretny wektor

$$\underset{}{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\text{(STARY)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix}}_{\text{(NOWY)}}$$

* macierz odwzorowania w bazach starych i nowych dwóch przestrzeni

$$M_{f'}^{e'} = \underbrace{P_2^{-1}}_{\substack{\text{MACIERZ} \\ \text{PRZEJŚCIA} \\ \text{W PRZECIWDZIEDZINIE} \\ \text{(ODWROTNOŚĆ)}}} \cdot M_f^e \cdot \underbrace{P_1}_{\substack{\text{MACIERZ} \\ \text{PRZEJŚCIA} \\ \text{W DZIEDZINIE}}}$$

* wynik odwzorowania jako wektor

$$\underbrace{Y}_{\substack{\text{WEKTOR} \\ \text{WYNIKU} \\ \text{(PO ODWZOROWANIU)}}} = M_f^e \underbrace{X}_{\substack{\text{WEKTOR} \\ \text{(ARGUMENT} \\ \text{ODWZOROWANIA)}}}$$

LAMBDY!
(UZALEŻNIONE OD WEKTORÓW BAZOWYCH)

* zapis odwzorowania

$$(p(e_1), p(e_2)) = (f_1, f_2)\, M_f^e$$

* Wartości własne macierzy 2×2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

sama na przekątnej

$\det(A - \lambda I) = 0$ ← gotowy wzór ale tylko na wartości własne

$\lambda^2 - \mathrm{tr}A\,\lambda + \det A = 0$, $\det A = -12$

$\mathrm{tr}A = -4$

$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$

$\Delta = 8^2$

$\underbrace{\lambda_1 = \frac{-4+8}{2} = 2 \quad \lambda_2 = -6}_{\text{WARTOŚCI WŁASNE}}$

wektory własne jak poniżej

---

* OGÓLNIE : O CO SIĘ ROZCHODZI ?

kiedy A - macierz odwzorowania to

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w}$$

jakiś tam wektor razy macierz odwzorowania = ten wektor oryginalny razy jakaś stała lambda

po przekształceniu ...

$$A\vec{w} - \lambda I\vec{w} = 0$$

↑ dodaję wektor jednostkowy

Ale to nie może być zerem, więc (wzór na wartości/wektory własne)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

czyli np mogę dodać ujemną lambdę po przekątnej tj.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

i liczę wyznacznik tego

z tego mi wyjdzie $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = -1$

podstawiam 1° $\lambda = 1$ i z tego liczę

wektory własne

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$w_1 = \{(2z, -1z, z)\}$ $\mathrm{Lin}(2,-1,1)$

i tak samo dla $\lambda = 2$, $\lambda = -1$ ....

Macierz diagonizowalna - istnieje komplet wektorów własnych

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ (λ_1, λ_2)

* łatwiej potęgować niż tą wejściową

dzięki temu łatwo potęgować $J^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{bmatrix}$

macierz przejścia to $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

wektor własny 1, wektor własny 2

$$\boxed{J = P^{-1} \cdot A \cdot P}$$

$A^m = P \cdot J^m \cdot P^{-1}$ możliwe

np. $A^{51} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

przekształcenie $g^{51}(x,y) = (x, \frac{3}{2}x)$

$f(2,3) = 1(2,3)$

$f(0,2) = 0(0,0)$

jest własne

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner