Linearni splajn i po dijelovima kubična interpolacija

Odabrana poglavlja matematike

Matea Novak   Filip Novački

12. lipnja 2018.

Uvod

Glavna ideja

Predviđanje vrijednosti između dviju izmjerenih diskretnih vrijednosti

Glavna ideja

Motivacija Predviđanje vrijednosti između dviju izmjerenih diskretnih vrijednosti

Tipovi interpolacija:

Linearna Svojstva:

- Jednostavna za računati
- Nije uvijek dovoljno precizna

Kvadratna Svojstva:

- Nema fizikalne podloge
- Kontrola derivacije nedovoljno dobra

Kubična Svojstva:

- Glatka (neprekidna u čvorovima)
- Relativno precizna
- Dovoljno jednostavna za računati

Višeg reda Svojstva:

- Teške za računati
- Imaju tendenciju divljati u ekstremnim točkama

Algoritam za linearnu interpolaciju

Zadavanje zadataka:

Pravac između čvorova za x_i i x_{i+1}

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$y = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i) + y_i \tag{1}$$

Primjer izračuna

Čvor za točku u $x = 0$, funkcija $f(x) = \sin x$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = f(0) = 0 \\
x_1 &= a + ih \\
&= 0 + 1\frac{2\pi - 0}{40} \\
&= 0.15707963267948966 \\
y_1 &= f\left(\frac{2\pi}{40}\right) \\
&= 0.15643446504023087
\end{aligned}
$$

Interpolacijski pravac

$$y = 1.0041242039539873x \tag{2}$$

Algoritam za kubičnu interpolaciju

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$C_{k,i} = \frac{f^{i'}(x_0)}{i!}, \quad k \in [0, 3]$$

$$\begin{aligned} P_i(x) = & C_{0,i} + \\ & C_{1,i}(x - x_{i-1}) + \\ & C_{2,i}(x - x_{i-1})^2 + \\ & C_{3,i}(x - x_{i-1})^3 \\ x \in & [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Primjer izračuna

Čvor za točku u $x = 0$ u funkciji $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$C_{0,1} = \frac{g(x_0)}{0!} = \frac{\frac{1}{x_o^2+1}}{0!} = 1$$

$$C_{1,1} = \frac{g'(x_0)}{1!} = \frac{-\frac{2x_0}{(x_0^2+1)^2}}{1!} = 0$$

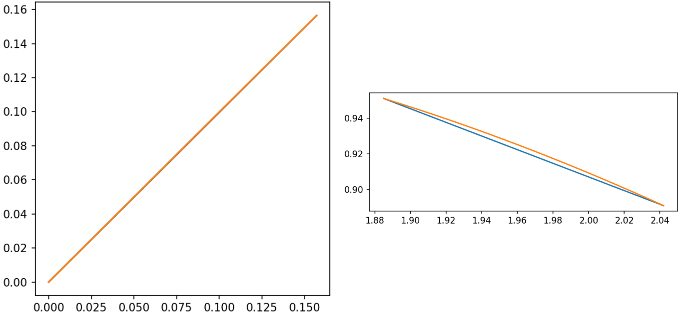
$$C_{2,1} = \frac{g''(x_0)}{2} = \frac{\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}}{2!} = -2$$

$$C_{3,1} = \frac{g'''(x_0)}{3!} = \frac{-\frac{24x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}}{6} = 0$$

Interpolacijski polinom

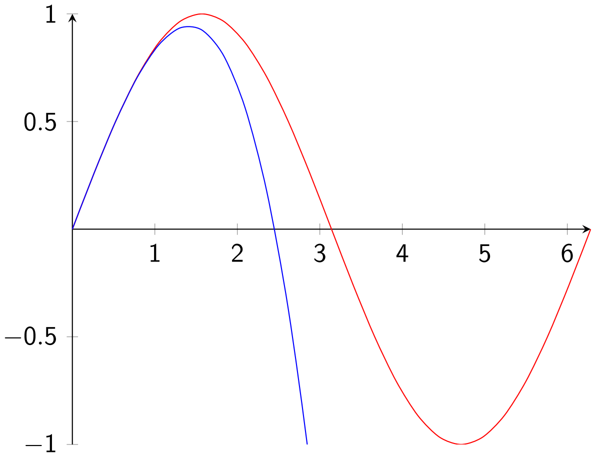
$$P_0 = 0 - 2(x-0) + 0(x-0)^2 + 0(x-0)^3 = 1 - 2x^2$$

$f(x) = \sin x$ - linearna interpolacija



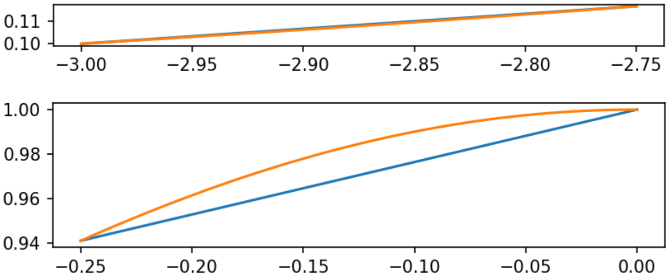
Slika: Usporedba funkcije $f(x) = \sin(x)$ i linearne interpolacije. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

$f(x) = \sin x$ - kubična interpolacija



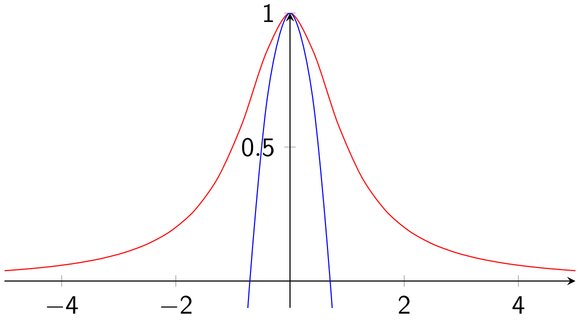
Slika: Prikaz funkcije $f(x) = \sin x$ (crveno) i interpolacije te funkcije polinomom trećeg stupnja $P_0(x) = 1x - \frac{1}{6}x^3$ (plavo)

$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ - linearna interpolacija



Slika: Usporedba funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i linearne interpolacije za $i = 9$ te $i = 20$. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ - kubična interpolacija



Slika: Prikaz funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (crveno) i interpolacije te funkcije polinomom trećeg stupnja $P(x) = 1 - 2x^2$ (plavo)

Zaključak

Hvala! Pitanja?