

Linearni splajn i po dijelovima kubična interpolacija

Odabrana poglavlja matematike

Matea Novak Filip Novački

13. lipnja 2018.

Uvod

Glavna ideja

Algoritmi

Linearna interpolacija

Kubična interpolacija

Primjer na funkciji

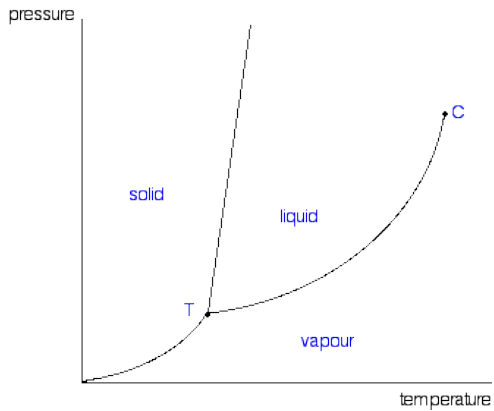
$$f(x) = \sin x$$

Primjer na funkciji

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Bonus

Uvod



Glavna ideja

Motivacija Predviđanje vrijednosti između dviju izmjerenih diskretnih vrijednosti

Glavna ideja

Motivacija: Predviđanje vrijednosti između dviju izmjerenih diskretnih vrijednosti

Tipovi interpolacija:

Linearna Svojstva:

- Jednostavna za računati
- Nije uvijek dovoljno precizna

Kvadratna Svojstva:

- Nema fizikalne podloge
- Kontrola derivacije nedovoljno dobra

Kubična Svojstva:

- Glatka (neprekidna u čvorovima)
- Relativno precizna
- Dovoljno jednostavna za računati

Višeg reda Svojstva:

- Teške za računati
- Imaju tendenciju divljati u ekstremnim točkama

Algoritam za linearnu interpolaciju

Zadavanje
zadataka:

Pravac između
čvorova za x_i i
 x_{i+1}

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b - a}{n}$$

$$y = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (x - x_i) + y_i \quad (1)$$

Primjer izračuna

Čvor za točku u
 $x = 0$, funkcija
 $f(x) = \sin x$

$$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = f(0) = 0$$

$$x_1 = a + ih$$

$$= 0 + 1 \frac{2\pi - 0}{40}$$

$$= 0.15707963267948966$$

$$y_1 = f\left(\frac{2\pi}{40}\right)$$

$$= 0.15643446504023087$$

$$y = 1.0041242039539873x \quad (2)$$

Interpolacijski
pravac

Algoritam za kubičnu interpolaciju

Zadavanje
zadataka

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Računanje C

$$C_{k,i} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in [0, 3]$$

Hermitova
jednadžba
polinoma

$$\begin{aligned} P_i(x) = & C_{0,i} + \\ & C_{1,i}(x - x_{i-1}) + \\ & C_{2,i}(x - x_{i-1})^2 + \\ & C_{3,i}(x - x_{i-1})^3 \\ & x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Primjer izračuna

Čvor za točku u
 $x = 0$ u funkciji
 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$$C_{0,1} = \frac{g(x_0)}{0!} = \frac{\frac{1}{x_0^2+1}}{0!} = 1$$

$$C_{1,1} = \frac{g'(x_0)}{1!} = \frac{-\frac{2x_0}{(x_0^2+1)^2}}{1!} = 0$$

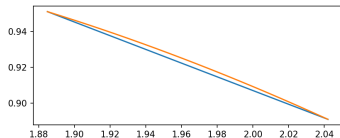
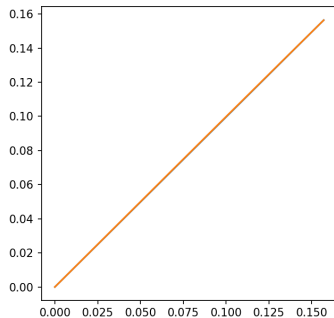
$$C_{2,1} = \frac{g''(x_0)}{2} = \frac{\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}}{2!} = -2$$

$$C_{3,1} = \frac{g'''(x_0)}{3!} = \frac{-\frac{24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}}{6} = 0$$

Interpolacijski
polinom

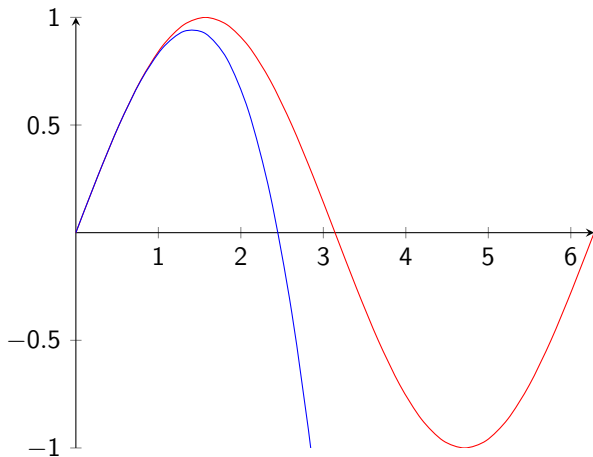
$$P_0 = 1 + 0(x-0) - 2(x-0)^2 + 0(x-0)^3 = 1 - 2x^2$$

$f(x) = \sin x$ - linearna interpolacija



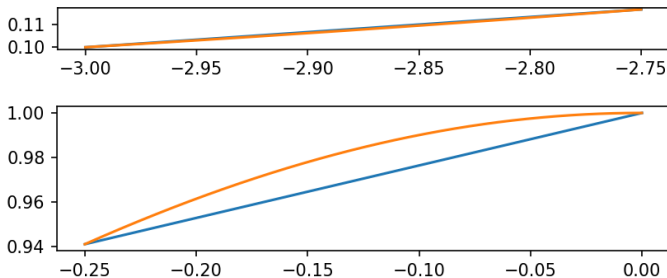
Slika: Usporedba funkcije $f(x) = \sin(x)$ i linearne interpolacije. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

$f(x) = \sin x$ - kubična interpolacija



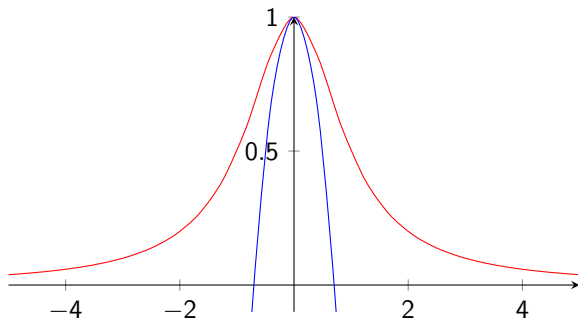
Slika: Prikaz funkcije $f(x) = \sin x$ (crveno) i interpolacije te funkcije polinomom trećeg stupnja $P_0(x) = 1x - \frac{1}{6}x^3$ (plavo)

$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ - linearna interpolacija



Slika: Usporedba funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i linearne interpolacije za $i = 9$ te $i = 20$. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ - kubična interpolacija



Slika: Prikaz funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (crveno) i interpolacije te funkcije polinomom trećeg stupnja $P(x) = 1 - 2x^2$ (plavo)

Šećer na kraju

Šećer na kraju

Prikaz interpolacija