Linearni splajn. Po dijelovima kubična interpolacija

Matea Novak Filip Novački

21. svibnja 2018.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Ovo je timski projektni zadatak napravljen je u sklopu kolegija Odabrana poglavlja matematike na Fakultetu organizacije i informatike u Varaždinu Sveučilišta u Zagrebu. Cijeli projekt razvijan je na `git` repozitoriju koji je dostupan na: `https://github.com/filipnovacki/linearni-splajn`.

Poglavlje 2

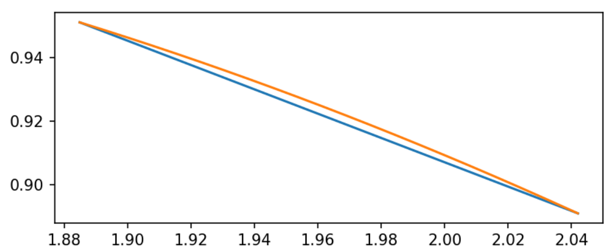
Zadaci

2.1 Opis glavne ideje po dijelovima polinomne interpolacije

Kod raznih mjerenja, istraživanja i sl. se događa da rezultati nekog testiranja budu podaci koji su diskretni, odnosno izmjereni su za neke vrijednosti. Kako bi nam te vrijednosti bile korisne i primjenjive, moramo na neki način odrediti koje su vrijednosti između dviju diskretnih vrijednosti. Tu u priču dolazi interpolacija.

Jedna je opcija napraviti interpolaciju linijama prvog reda, dakle, pravcima, odnosno dužinama koje jednostavno povučemo između dviju točaka. Takva aproksimacija je vrlo jednostavna za izračunati, međutim, takvo mjerenje ne daje baš zadovoljavajuće rezultate [5]. Drugi je problem što mjesta gdje se ti pravci spajaju su *oštri*, odnosno ne postoji glatki prijelaz.

Kao što vidimo na slici 2.1, plava linija dosta je dosta blizu narančastoj, no za razne primjene bi ta greška mogla biti prevelika.



Slika 2.1: Usporedba linearne interpolacije na isječku funkcije $f(x) = \sin x$. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

Bolja opcija je povezati točke krivuljama višeg reda. Kako bismo dobili glatki prijelaz, moramo paziti da derivacija u točkama uvijek bude jednaka. Kvadratični splajn ima jedan nedostatak. Nedostatak je u tome što je zakrivljen uvijek u jednu stranu, odnosno u obliku parabole. Kubična interpolacija je po tom pitanju mnogo bolja jer može imati oblik parabole, ali ne mora [4].

Mogu se koristiti i polinomi još višeg reda, međutim oni se nešto teže računaju te funkcije polinoma višeg reda imaju tendenciju na nekim mjestima jako *divljati*, što ponekad može predstavljati problem [5].

2.1.1 Newtonov oblik

Newtonova forma [1] nam je korisna jer lako dodajemo nove točke interpolacije i na taj način povećavamo stupanj interpolacijskog polinoma.

Neka je p_{n-1} interpolira neku funkciju f u točkama $x_k, k = 0, \dots, n-1$. Neka polinom p_n interpolira funkciju f u istim točkama i još u točki x_n. Tada polinom p_n možemo napisati:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c(x) \tag{2.1}$$

U takvom zapisu, $c(x)$ predstavlja korekciju koja je polinom stupnja n. Nadalje, točke x_k moraju biti nultočke polinoma c. Stoga vrijedi:

$$c(x) = a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \tag{2.2}$$

Iz jednadžbi 2.1 i 2.2 zaključujemo:

$$f(x_n) = p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) + a_n(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) \tag{2.3}$$

U ovoj jednadžbi a_n je vodeći koeficijent polinoma c. To možemo zapisati još i

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \tag{2.4}$$

Na kraju, polinom za stupanj veći od prethodnog možemo definirati kao:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x_n) + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n] \tag{2.5}$$

Rekurzivo, iz izraza 2.5 dobivamo napokon Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji glasi:

$$\begin{aligned} P_i(x) =& f[x_0] \\ & + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ & + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom stupnja 0 je zapravo točka koja interpolira funkciju f u točki x_0.

$$P_0(x) = f_0$$

Nadalje, interpolacijski polinom stupnja 1 nastaje tako da prethodnom polinomu stupnja 0 dodamo korekciju c_1.

$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x)$$

Za f_0 korekcija c_1 mora biti $c_1(x_0) = 0$.

Interpolacijski polinom stupnja 2 nastaje tako da dodamo još jedan čvor interpolacije x_2. Sada polinom p_2 dobijemo tako da polinomu p_1 dodamo korekciju c_2 [2].

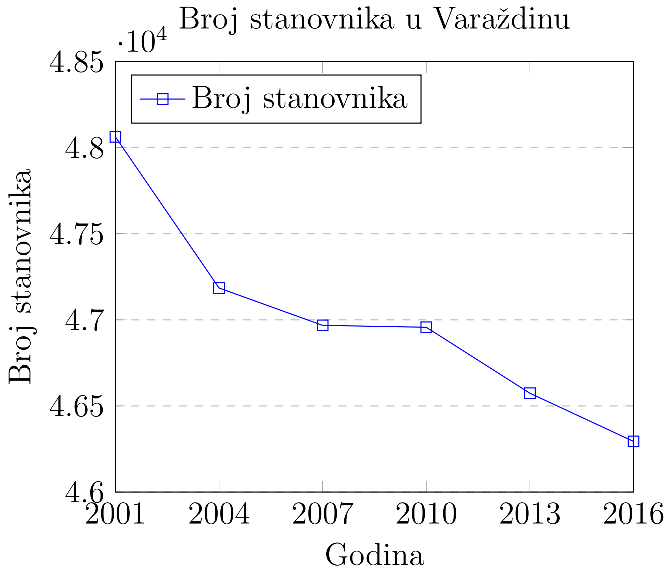
$$p2(x) = p_1(x) + c_2(x)$$

2.2 Opis linearnog splajna

Kao što smo već objasnili spajn ranije, on nam služi za dobivanje vrijednosti koji su između dviju izmjerenih vrijednosti.

Godina	Broj stanovnika
2001	48068
2004	47185
2007	46968
2010	46957
2013	46574
2016	46294

Tablica 2.1: Izvor: `www.dzs.hr`



Pogledajmo tablicu 2.1 i pripadni graf. U ovim podacima vidimo popise stanovništa za svaku treću godinu. Linearni splajn bi nam ovdje pomogao da prepostavimo koliko je moglo biti stanovnika između dvaju izmjerenih razdoblja.

Prednosti linearnog splajna su što vrlo jednostavne za izračunati za bilo koju točku, kao što ćemo vidjeti u primjerima. Glavni nedostatak linearne interpolacije je to što može doći do značajnih odstupanja kod nelinearnih funkcija koji su česti u fizici, kemiji i sl.

2.3 Primjeri

2.3.1 Algoritam za traženje linearnog splajna

Neka je zadana neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i neka je segment $[a, b]$ podijeljen na n jednakih dijelova, tj. neka su

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Algoritam koji računa linearni splajn izmađu dvaju ekvidistantnih čvorova x_i započinje pronalaženjem točaka.

$$\begin{gathered} y_i = f(x_i) \\ y_{i+1} = f(x_{i+1}) \\ \downarrow \\ T_i(x_i, y_i) \\ T_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{gathered}$$

Zatim moramo pronaći pravac koji je razapet između tih dviju točaka. To možemo napraviti po formuli koja je opće poznata [3]:

$$y = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (x - x_i) + y_i \tag{2.6}$$

2.3.2 $f(x) = \sin x$

Ovaj ćemo zadatak riješiti za $i = 1, 2, \ldots, 40$. S obzirom da nema nekog smisla pisati za svaki interval pojedinačno, ovaj ćemo zadatak riješiti programskim putem, a ručno ćemo pokazati samo na jednom primjeru. Tablicu s rješenjima možemo vidjeti u tablici 4.1.

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, 2\pi] \\ n = 40 \\ a = 0 \\ b = 2\pi \end{aligned}$$

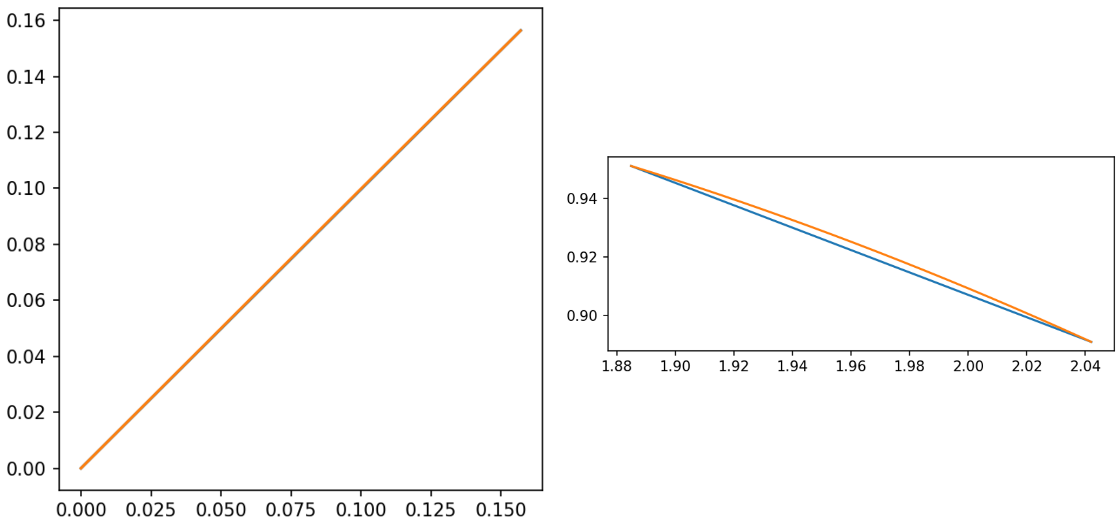
Pronađimo prva dva čvora.

$$\begin{aligned} x_0 =& 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = f(0) = 0 \\ x_1 =& a + ih \\ =& 0 + 1 \frac{2\pi - 0}{40} \\ =& 0.15707963267948966 \\ y_1 =& f\left(\frac{2\pi}{40} \right) \\ =& 0.15643446504023087 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ovih podataka u jednadžbu 2.6 dobivamo:

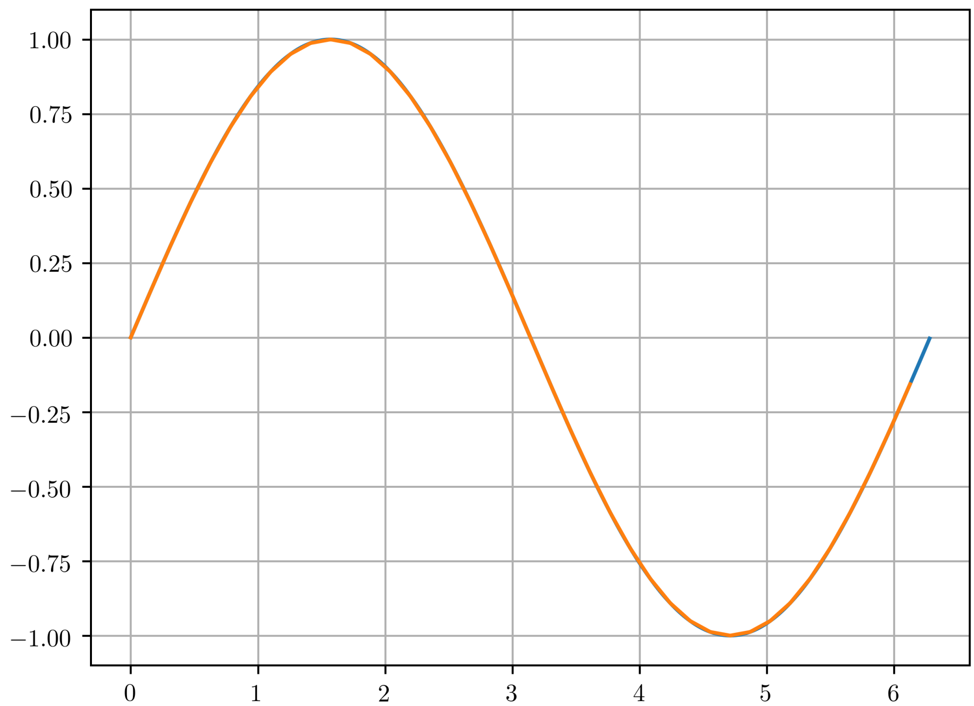
$$y = 1.0041242039539873x \tag{2.7}$$

Kad razmislimo o rješenju, vidimo da ono ima smisla jer prolazi kroz ishodište, a nagib je skoro jednak 1, što također ima smisla jer koordinate točke skoro jednake. Osim toga, i grafički rješenje ima smisla, što možemo vidjeti na slici 2.2.



Slika 2.2: Usporedba funkcije $f(x) = \sin(x)$ i linearne interpolacije po jednadžbi pravca iz jednadžbe 2.7 te na isječku za $i = 13$. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

Cijela funkcija s pripadnim linearnim interpolacijama izgleda ovako:



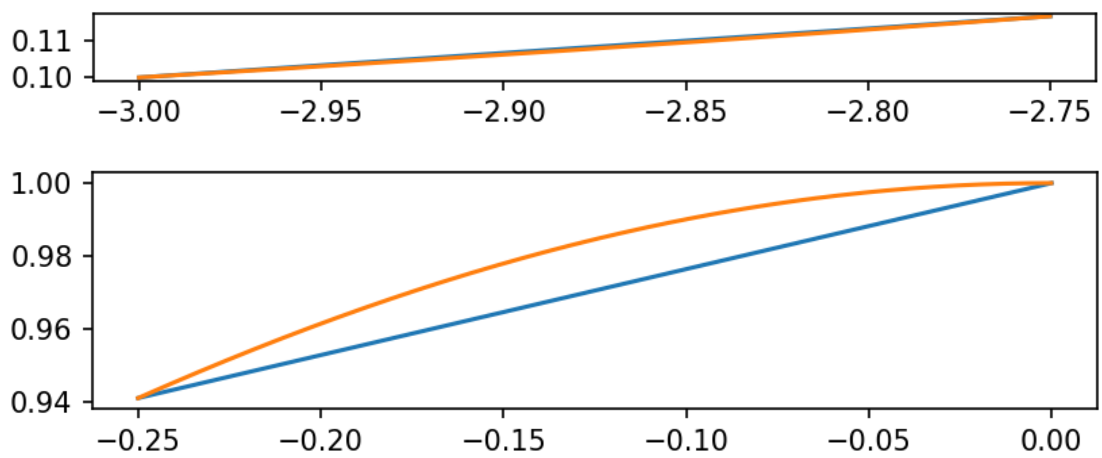
Slika 2.3: Prikaz funkcije $f(x) = \sin(x)$ i linearnih interpolacija. Izvor: autorska izrada

2.3.3 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Ovaj ćemo zadatak riješiti koristeći isti algoritam kao u prethodnom zadatku. Za početak bismo trebali provjeriti domenu funkcije s obzirom da varijabla x u nazivniku uvijek malo miriše na nevolje i dijeljenje s nulom. Stoga zaključujemo da imamo uvjet $x^2 + 1 \neq 0$, zaključujemo da $x^2 \neq -1$ te smo sretni jer nam je domena $\mathbb{R}$.

Sad nećemo pokazivati ručne korake, nego ćemo jednostavno programskim putem izračunati ono što nas zanima za navedenu funkciju. Početne postavke su pokazane u nastavku, a rezultati su pokazani u tablici 4.2. Grafički prikaz možemo vidjeti na slici 2.4.

$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in [-5, 5]$$
$$n = 40$$
$$a = -5$$
$$b = 5$$



Slika 2.4: Usporedba funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i linearne interpolacije po jednadžbi pravca iz tablice 4.2 za $i = 9$ te $i = 20$. Plavom bojom je prikazana interpolacija, a narančastom funkcija. Izvor: autorska izrada

2.4 Opis nedostataka linearnih splajnova

2.5 Opis po dijelovima kubične interpolacije

2.6 Primjeri

2.6.1 Algoritam za traženje po dijelovima kubične interpolacije

Postoje dva načina na koje možemo izračunati kubičnu interpolaciju. Prvi je pomoću standardnog oblika (Newtonovog oblika), a drugi pomoću Hermiteove polinomne interpolacije.

Hermiteova polinomna interpolacija izgleda ovako:

$$P_i(x) = C_{0,i} + C_{1,i}(x - x_{i-1}) + C_{2,i}(x - x_{i-1})^2 + C_{3,i}(x - x_{i-1})^3$$
$$x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, ..., n$$

$$\begin{aligned} P_i(x_i) &= f_i & P_i'(x_i) &= S_i \\ P_i(x_{i-1}) &= f_{i-1} & P_i'(x_{i-1}) &= S_{i-1} \\ h_i &= x_i - x_{i-1} & f[x_i, x_i] &= f'(x_i) = s_i \end{aligned}$$

2.6.2 $f(x) = \sin x$

Sad ćemo na primjeru pokazati kako izračunati kubičnu interpolaciju. Primjer je zadan ovako:

$$f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi], \quad n = 1, ..., 40.$$

Za početak, tražimo rješenje za $n = 1$. Tada nam je $h = 2\pi$. Očekivano, $x_0 = 0$, a $x_1 = 2\pi$.

Nadalje,

$$\begin{aligned} C_{0,1} &= \frac{P_1(x_0)}{0!} = f(x_0) = \sin(x_0) = \sin(0) = 0 \\ C_{1,1} &= \frac{P_k'(x_0)}{1!} = f'(x_0) = \sin(x_0)' = \cos(0) = 1 \\ C_{2,1} &= \frac{P_k''(x_0)}{2!} = \frac{(\sin(x_0))''}{2} = \frac{-\sin(0)}{2} = 0 \\ C_{3,1} &= \frac{P_k'''(x_0)}{3!} = \frac{(\sin(x_0))'''}{6} = \frac{-\cos(0)}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Izračunate vrijednosti uvrštavamo u gornju jednadžbu te dobivamo polinom:

$$P_i = 0 + 1(x - 0) + 0(x - 0)^2 - \frac{1}{6}(x - 0)^3 = 1 - \frac{1}{6}x^3$$

2.6.3 $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Poglavlje 3

Zaključak

Poglavlje 4

Dodatak

U ovom poglavlju se nalaze tablice koje bi svojom veličinom kvarile ugodnost čitanja te su stavljene na kraj. Na mjestima gdje su pozvane su napravljene poveznice do njih tako da su jednostavno pristupačne klikom na njih.

i	x_1	y_1	x_2	y_2	Interpolacija	Razlika
1	0.0000	0.0000	0.1571	0.1564	$y = 0.9959x + 0.0000$	-0.84
2	0.1571	0.1564	0.3142	0.3090	$y = 0.9714x + 0.0039$	-0.69
3	0.3142	0.3090	0.4712	0.4540	$y = 0.9229x + 0.0191$	-0.53
4	0.4712	0.4540	0.6283	0.5878	$y = 0.8518x + 0.0526$	-0.39
5	0.6283	0.5878	0.7854	0.7071	$y = 0.7596x + 0.1105$	-0.25
6	0.7854	0.7071	0.9425	0.8090	$y = 0.6488x + 0.1976$	-0.13
7	0.9425	0.8090	1.0996	0.8910	$y = 0.5220x + 0.3171$	-0.03
8	1.0996	0.8910	1.2566	0.9511	$y = 0.3823x + 0.4707$	0.05
9	1.2566	0.9511	1.4137	0.9877	$y = 0.2332x + 0.6580$	0.11
10	1.4137	0.9877	1.5708	1.0000	$y = 0.0784x + 0.8769$	0.15
11	1.5708	1.0000	1.7279	0.9877	$y = -0.0784x + 1.1231$	0.16
12	1.7279	0.9877	1.8850	0.9511	$y = -0.2332x + 1.3906$	0.15
13	1.8850	0.9511	2.0420	0.8910	$y = -0.3823x + 1.6717$	0.11
14	2.0420	0.8910	2.1991	0.8090	$y = -0.5220x + 1.9569$	0.05
15	2.1991	0.8090	2.3562	0.7071	$y = -0.6488x + 2.2358$	-0.03
16	2.3562	0.7071	2.5133	0.5878	$y = -0.7596x + 2.4969$	-0.13
17	2.5133	0.5878	2.6704	0.4540	$y = -0.8518x + 2.7285$	-0.25
18	2.6704	0.4540	2.8274	0.3090	$y = -0.9229x + 2.9185$	-0.39
19	2.8274	0.3090	2.9845	0.1564	$y = -0.9714x + 3.0555$	-0.53
20	2.9845	0.1564	3.1416	0.0000	$y = -0.9959x + 3.1287$	-0.69
21	3.1416	0.0000	3.2987	-0.1564	$y = -0.9959x + 3.1287$	-0.84
22	3.2987	-0.1564	3.4558	-0.3090	$y = -0.9714x + 3.0478$	-1.00
23	3.4558	-0.3090	3.6128	-0.4540	$y = -0.9229x + 2.8804$	-1.15
24	3.6128	-0.4540	3.7699	-0.5878	$y = -0.8518x + 2.6233$	-1.30
25	3.7699	-0.5878	3.9270	-0.7071	$y = -0.7596x + 2.2759$	-1.43
26	3.9270	-0.7071	4.0841	-0.8090	$y = -0.6488x + 1.8406$	-1.55
27	4.0841	-0.8090	4.2412	-0.8910	$y = -0.5220x + 1.3227$	-1.65
28	4.2412	-0.8910	4.3982	-0.9511	$y = -0.3823x + 0.7303$	-1.73
29	4.3982	-0.9511	4.5553	-0.9877	$y = -0.2332x + 0.0746$	-1.79
30	4.5553	-0.9877	4.7124	-1.0000	$y = -0.0784x - 0.6307$	-1.83
31	4.7124	-1.0000	4.8695	-0.9877	$y = 0.0784x - 1.3693$	-1.84
32	4.8695	-0.9877	5.0265	-0.9511	$y = 0.2332x - 2.1233$	-1.83
33	5.0265	-0.9511	5.1836	-0.8910	$y = 0.3823x - 2.8727$	-1.79
34	5.1836	-0.8910	5.3407	-0.8090	$y = 0.5220x - 3.5967$	-1.73
35	5.3407	-0.8090	5.4978	-0.7071	$y = 0.6488x - 4.2740$	-1.65
36	5.4978	-0.7071	5.6549	-0.5878	$y = 0.7596x - 4.8834$	-1.55
37	5.6549	-0.5878	5.8119	-0.4540	$y = 0.8518x - 5.4044$	-1.43
38	5.8119	-0.4540	5.9690	-0.3090	$y = 0.9229x - 5.8180$	-1.30
39	5.9690	-0.3090	6.1261	-0.1564	$y = 0.9714x - 6.1072$	-1.15
40	6.1261	-0.1564	6.2832	-0.0000	$y = 0.9959x - 6.2574$	-1.00

Tablica 4.1: Prikaz svih čvorova funkcije $f(x) = \sin(x)$, jednadžbe pravca koja interpolira između dviju susjednih točaka te razlika između vrijednosti funkcije u točki $x = 1$ i interpolacije u istoj točki. U izračunu je korišten maksimalni broj decimala koliko podržava tip podataka `float` iz `Python` biblioteke `Numpy`. Radi preglednosti je prikazan manji broj decimala. Izvor: autorska izrada

i	x_1	y_1	x_2	y_2	Interpolacija	Razlika
1	-5.00	0.0385	-4.75	0.0424	$y = 0.0159x + 0.1180$	-0.37
2	-4.75	0.0424	-4.50	0.0471	$y = 0.0185x + 0.1302$	-0.37
3	-4.50	0.0471	-4.25	0.0525	$y = 0.0216x + 0.1443$	-0.36
4	-4.25	0.0525	-4.00	0.0588	$y = 0.0255x + 0.1607$	-0.36
5	-4.00	0.0588	-3.75	0.0664	$y = 0.0303x + 0.1799$	-0.35
6	-3.75	0.0664	-3.50	0.0755	$y = 0.0363x + 0.2026$	-0.34
7	-3.50	0.0755	-3.25	0.0865	$y = 0.0441x + 0.2297$	-0.33
8	-3.25	0.0865	-3.00	0.1000	$y = 0.0541x + 0.2622$	-0.32
9	-3.00	0.1000	-2.75	0.1168	$y = 0.0672x + 0.3015$	-0.31
10	-2.75	0.1168	-2.50	0.1379	$y = 0.0846x + 0.3494$	-0.29
11	-2.50	0.1379	-2.25	0.1649	$y = 0.1081x + 0.4081$	-0.27
12	-2.25	0.1649	-2.00	0.2000	$y = 0.1402x + 0.4804$	-0.24
13	-2.00	0.2000	-1.75	0.2462	$y = 0.1846x + 0.5692$	-0.21
14	-1.75	0.2462	-1.50	0.3077	$y = 0.2462x + 0.6769$	-0.16
15	-1.50	0.3077	-1.25	0.3902	$y = 0.3302x + 0.8030$	-0.10
16	-1.25	0.3902	-1.00	0.5000	$y = 0.4390x + 0.9390$	-0.02
17	-1.00	0.5000	-0.75	0.6400	$y = 0.5600x + 1.0600$	0.09
18	-0.75	0.6400	-0.50	0.8000	$y = 0.6400x + 1.1200$	0.23
19	-0.50	0.8000	-0.25	0.9412	$y = 0.5647x + 1.0824$	0.39
20	-0.25	0.9412	0.00	1.0000	$y = 0.2353x + 1.0000$	0.53
21	0.00	1.0000	0.25	0.9412	$y = -0.2353x + 1.0000$	0.59
22	0.25	0.9412	0.50	0.8000	$y = -0.5647x + 1.0824$	0.53
23	0.50	0.8000	0.75	0.6400	$y = -0.6400x + 1.1200$	0.39
24	0.75	0.6400	1.00	0.5000	$y = -0.5600x + 1.0600$	0.23
25	1.00	0.5000	1.25	0.3902	$y = -0.4390x + 0.9390$	0.09
26	1.25	0.3902	1.50	0.3077	$y = -0.3302x + 0.8030$	-0.02
27	1.50	0.3077	1.75	0.2462	$y = -0.2462x + 0.6769$	-0.10
28	1.75	0.2462	2.00	0.2000	$y = -0.1846x + 0.5692$	-0.16
29	2.00	0.2000	2.25	0.1649	$y = -0.1402x + 0.4804$	-0.21
30	2.25	0.1649	2.50	0.1379	$y = -0.1081x + 0.4081$	-0.24
31	2.50	0.1379	2.75	0.1168	$y = -0.0846x + 0.3494$	-0.27
32	2.75	0.1168	3.00	0.1000	$y = -0.0672x + 0.3015$	-0.29
33	3.00	0.1000	3.25	0.0865	$y = -0.0541x + 0.2622$	-0.31
34	3.25	0.0865	3.50	0.0755	$y = -0.0441x + 0.2297$	-0.32
35	3.50	0.0755	3.75	0.0664	$y = -0.0363x + 0.2026$	-0.33
36	3.75	0.0664	4.00	0.0588	$y = -0.0303x + 0.1799$	-0.34
37	4.00	0.0588	4.25	0.0525	$y = -0.0255x + 0.1607$	-0.35
38	4.25	0.0525	4.50	0.0471	$y = -0.0216x + 0.1443$	-0.36
39	4.50	0.0471	4.75	0.0424	$y = -0.0185x + 0.1302$	-0.36
40	4.75	0.0424	5.00	0.0385	$y = -0.0159x + 0.1180$	-0.37

Tablica 4.2: Prikaz svih čvorova funkcije $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$, jednadžbe pravca koja interpolira između dviju susjednih točaka te razlika između vrijednosti funkcije u točki $x = 1.2$ i interpolacije u istoj točki. U izračunu je korišten maksimalni broj decimala koliko podržava tip podataka `float` iz `Python` biblioteke `Numpy`. Radi preglednosti je prikazan manji broj decimala. Izvor: autorska izrada

Bibliografija

[1] Zlatko Drmač, Vjeran Hari, Miljenko Marušić, Mladen Rogina, Sanja Singer, and Saša Singer. *Numerička analiza.* Sveučilište u Zagrebu, PMF - Matematički odjel, 2003.

[2] Luka Grubišuć. Numerička matematika, predavanja 09/10, treće poglavlje (interpolacija), 2010.

[3] Miljenko Marušić. Aproksimacija splajnovima.

[4] James H. Steiger. An introduction to splines.

[5] James C. Sutherland. Interpolation, 2014.