

## Kolokwium

1. Charakterystyki Bodego, Nyquista, zapas stabilności
  - Char. Nyquista
  - Char. Bodego
2. MGP
3. Kompensatory
- Przydatne wzory

# Kolokwium

---

1. Bode, Nyquist, analityczny zapas stabilności
2. MGP, wzmocnienia do określonych położen
3. Kompensatory
4. PID, dobór optymalny i suboptymalny w oparciu o  $T_s$

## 1. Charakterystyki Bodego, Nyquista, zapas stabilności

### Char. Nyquista

- Mamy transmitancję z rów. char. w mianowniku
- Wszystko się dzieje w **Układzie otwartym**
- Zamiast s podstawiamy  $i\omega$  i obliczamy taką postać transmitancji. Będzie to wymagać mnożenia przez sprzężenie żeby się pozbyć z mianownika tego urojonego
- Trzeba wyłuskać z tego  $Im(\omega)$  i  $Re(\omega)$
- Następnie budujemy sobie tabelę z charakterystycznymi omegami - 0, kiedy  $Re$  i  $Im$  są równe zero (miejsca przecięcia z osiami), nieskończoność i sprawdzamy w tych  $\omega$  jakie są wartości  $Im$  i  $Re$
- Te miejsca posłużą nam do narysowania wykresu. Po prostu prowadzimy wykres przez odpowiednie punktu
- Następnie by zbadać zapas fazy i zapas wzmocnienia badamy ten wykres
  - Zapas fazy to kąt jaki tworzy punkt przecięcia wykresu z kołem jednostkowym z osią  $Im$
  - Zapas wzmocnienia to miejsce przecięcia wykresu z osią  $Re$ .

$$2 \leq K_d \leq 4$$

- Zapas stabilności

$$6dB \leq \Delta L_M \leq 12db$$

$$30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$$

### Char. Bodego

- Transmitancje musimy przekształcić do postaci  $\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

- Jest to bardzo istotne, bo najczęściej transmitancja jest w postaci z biegunami a nie stałymi czasowymi. Jak będziemy kombinować z taką formą, to Bode nie wyjdzie, bo wyciąganie przed nawias odpowiednich współczynników doprowadzi do  $K$ , które jest bardzo istotne
- Z postaci tej transmitancji znamy też bieguny układu.  $p_1 = \frac{1}{T_1}$  itd. Te bieguny są ważne, bo Bodego rysujemy biorąc pod uwagę tabelkę

W każdej transmitemji operatorowej mogą występować 4 różne elementy

1. State wzmacnianie
2. Biegun w początku zakresu częstotliwości
3. Biegun lubi 0 reszty
4. Para sprzężonych zespolonnych bieguniów utworzonych przez

czynnik	$L_m(j\omega)$	$\varphi(j\omega)$
state dodatnie zw.	$20 \log K$	$0^\circ$
state ujemne zw.	$-20 \log K$	$-180^\circ$
Biegun w pocz. zak.	$-20 \text{ dB/decade}$	$-90^\circ$
Biegun rezonansowy dla $\omega_c$	$0 \text{ dB/decade}$	$0^\circ$
Biegun rezonansowy dla $\omega_{cr}$	$-20 \text{ dB/decade}$	$-90^\circ$
Zera rezonansowe dla $\omega_c$	$0 \text{ dB/decade}$	$0^\circ$
Zera rezonansowe dla $\omega_{cr}$	$+20 \text{ dB/decade}$	$+90^\circ$
Para sprzężonych, sprzężonych bieguniów dla $\frac{\omega}{\omega_r} \ll 1$	$0 \text{ dB/decade}$	$0^\circ$
— II — dla $\frac{\omega}{\omega_r} \gg 1$	$-40 \text{ dB/decade}$	$-180^\circ$
Para sprzężonych, sprzężonych zera dla $\frac{\omega}{\omega_r} \ll 1$	$0 \text{ dB/decade}$	$0^\circ$
— II — dla $\frac{\omega}{\omega_r} \gg 1$	$+40 \text{ dB/decade}$	$+180^\circ$

gdzie n to

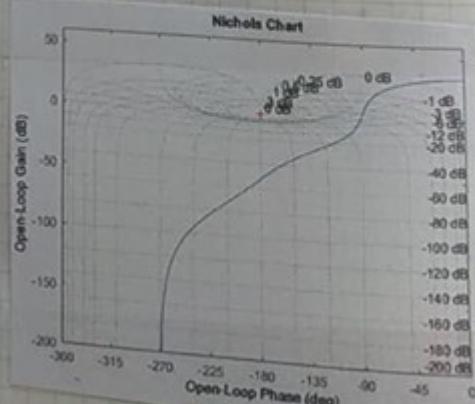
Trzecim sposobem przedstawiania transmitemji operatorowej w zakresie częstotliwości jest wykres charakterystycznej amplitudy zakresu  $L_m$  w funkcji fazowego  $\varphi$

slab:

'nichols'

'angrid'

Wykres Nicholsa



krotność bieguna

## 2. MGP

- Wykres MGP dotyczy pętli zamkniętej, ale wykreślamy go dla układu otwartego.
- W przeciwnieństwie do bodego tu chcemy mieć inną formę transmitancji
- $\frac{K_o(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)}$
- $K_o$  to współczynnik czułości statycznej. Jego zmiana generuje właśnie linie pierwiastkowe
- Algorytm MGP
  1. Zera i bieguny
  2. Liczba odgałęzień - liczba gałęzi jest równa liczbie biegunów układu otwartego
  3. MGP na Re - patrzymy na ilość biegunów i zer po prawej stronie punktu próbnego. Jeśli jest nieparzysta to pkt należy do MGP
  4. Punkty początkowe i końcowe - MGP zaczyna się w biegunach a kończy w zerach. Gdy mamy mniej zer to wtedy MGP dąży do  $\infty$  wzduż Re lub jakiś asymptot
  5. Asymptoty MGP
    - Jeżeli MGP posiada asymptoty to ich kąt nachylenia:
$$\gamma_a = \frac{(2m+1)\pi}{u+n-v}$$
 gdzie  $u + n = \text{liczba biegunów}$   $v = \text{liczba zer}$   
Asymptoty te przecinają się w punkcie:
$$\sigma_a = \frac{\sum p_k - \sum z_k}{u+n-v}$$
Gdzie  $\sum p_k$  to suma **wartości** biegunów a  $\sum z_k$  to **suma wartości** zer. Reszta jak wyżej
  6. Punkt rozejścia i **zejścia** MGP
    - Są 2 sposoby na wyznaczenie tego. Sposób 1 polega na sprawdzeniu warunku argumentów, ale ta metoda **nie działa gdy mamy bieguny sprzężone**
$$-\frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{z1}} = 0$$
Równanie to rozwiązuje metodą prób i błędów dla spodziewanego punktu rozgałęzienia
    - Sposób 2 polega na tym, że w punkcie rozgałęzienia **musi** wystąpić podwójny pierwiastek rzeczywisty. Istnieje twierdzenie, które mówi, że jeśli występuje podwójny pierwiastek, to pochodna równania też się zeruje. Finalnie:
$$L'M - LM' = 0$$
To równanie także metodą prób i błędów na zasadzie wyliczenia tego równania na  $s$  i podstawianiu konkretnych wartości i sprawdzaniu czy jesteśmy blisko czy daleko. Z dokładnością do 2 miejsc po przecinku
  7. Kąty wyjścia MGP z **pary biegunów sprzężonych**
    - Przepisujemy warunek argumentu by wyizolować ten konkretny kąt
$$\phi_{wj} = \sum \psi_{ij} - \sum \phi_{ij} + (2m + 1)\pi$$
Gdzie  $\sum \psi_{ij}$  to suma **kątów** między danym biegunem a zerami, a  $\sum \phi_{ij}$  to suma **kątów** między danym biegunem a innymi biegunami. Ten **kąt** to chodzi o kąt, który tworzony jest z osią Re.
  8. Kąty wejścia do **zer**
    - Analogicznie, przepisujemy ten warunek
$$\psi_{wj} = \sum \phi_{kj} - \sum \psi_{kj} - (2m + 1)\pi$$
  9. Pkt. przecięcia MGP z Im.

- Wartość  $K_o$  w tym punkcie określa **granicę stabilności**. By to znaleźć należy wyznaczyć kryterium Routha.
- Zamykamy pętle sprzężenia zwrotnego **wraz z dodatkowym parametrem K**
- Wypełniamy tablicę Routha dla rów. char.
- Dla  $s^1$  szukamy takiej wartości tego K, dla której wyzeruje się cały wiersz.
- Tą wartość K wstawiamy do  $s^2$  dzięki czemu wyznaczmy pierwiastki, gdzie MGP przetnie oś urojonych
- Dzięki czemu rysujemy ostateczny MGP, a jak chcemy poznać wzmacnienie w tym pkt. przecięcia to warunek modułu.
- Warunek modułu

$$K_o = r_{p0}^n \frac{\prod r_{pk}}{\prod r_{zi}}$$

Jeśli nie ma zer, to w mianowniku 1

---

### 3. Kompensatory

- Kompensator to taki element, który łączymy szeregowo z układem w celu poprawy jego odpowiedzi
- Kompensator posiada jedno zero i jeden biegum
- Wzór:

$$C(s) = K \frac{(s+z_k)}{(s+p_k)}$$

- Kompensator wyprzedzający  $|z| < |p|$
- Kompensator opóźniający  $|z| > |p|$

- **Kompensator wyprzedzający**

- Przyspiesza działanie układu
- $C(s) = \frac{Ts+1}{T\alpha s+1}$  gdzie  $\alpha < 1$
- Parametry  $\alpha$  i  $T$  dobiera się tak aby uzyskać dla układu **otwartego** określony zapas fazy.
- Dla układów z trzema biegunami rzeczywistymi zero umiejscawia się jak najbliżej środkowego bieguna
- Biegum obiektu sterowania przesuwa się na maxa w lewo, ale nie więcej niż 10 razy.  
Wtedy  $\alpha = 0.1$
- *Maksymalne przesunięcie fazy w przód*

$$\phi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

dla częstotliwości

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- Maksymalne wzmacnienie dla częstotliwości  $\omega_m$  jest połową wzmacnienia początkowego i końcowego:  
 $G_m(\omega_m) = -20\log(\sqrt{\alpha}) = -10\log\alpha$
- Do odczytu własności można użyć takiej tabeli:

$\alpha$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10
$\phi_m$	19,5	30	38,9	41,8	45,6	51,1	54,9
$G_m [dB]$	3,01	4,77	6,02	6,99	7,78	9,03	10

- Projektowanie w oparciu o Bodego

## Kompensator wyprzedzający – projektowanie w oparciu o charakterystyki Bodego

Procedura projektowania dla zadanego zapasu fazy  $\varphi$ :

1. Wyznacz zapas fazy  $\phi$  układu bez kompensatora ale ze wzmacnieniem gwarantującym spełnienie warunków dotyczących uchybu statycznego,
  2. Uwzględniając margines bezpieczeństwa  $\varepsilon$ , określ wymagany zapas fazy do uzyskania przez kompensator:
- $$\phi_m = \varphi - \phi + \varepsilon$$
- gdzie:  $\varepsilon = 5 \div 18$        $\varepsilon = 5 - 11$  dla obiektów względnego stopnia 2,  
 $\varepsilon = 12 - 18$  dla obiektów względnego stopnia 3,
3. Dobierz parametr  $\alpha$  z odpowiednich równań lub tabeli,
  4. Wyznacz wartość  $10\log \alpha$  (albo odczytaj z tabeli) i określ częstotliwość, gdzie wzmacnienie układu bez kompensatora wynosi  $10 \log \alpha$  (dla  $\alpha < 1$ , będzie to wartość ujemna). Ponieważ kompensator wyprzedzający ma wzmacnienie  $-10 \log \alpha$  w częstotliwości  $\omega_m$ , będąc to nowa częstotliwość  $\omega_{gc}$ .
  5. Wykreśl charakterystyki Bode'go i ewentualnie powtórz całą procedurę.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Dalej znając  $\omega$  i  $\alpha$  wyznaczamy sobie T. TADAM mamy wzór

- Projektowanie w oparciu o MGP

## Kompensator wyprzedzający – projektowanie w oparciu o $mgp$

1. Na podstawie wymagań stawianych układowi sterowania, określ położenie biegunów dominujących.
2. Wykreśl  $mfp$  dla układu bez kompensatora i sprawdź, czy założone położenie biegunów dominujących jest osiągalne bez kompensacji.
3. Jeżeli kompensator jest niezbędny, umieść jego zero dokładnie poniżej wymaganego położenia biegunów dominujących (lub na lewo od dwóch pierwszych biegunów rzeczywistych).
4. Wyznacz położenie bieguna kompensatora tak, aby spełniony był warunek argumentu dla biegunów dominujących.
5. Wyznacz wartość współczynnika czułości statycznej dla biegunów dominujących i dalej wzmacnienie kompensatora. Następnie zbadaj uchyb statyczny układu (wyznacz stałe uchybu).
6. Powtórz procedurę jeżeli stałe uchybu będą miały nieodpowiednie wartości.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad. 3. Zero ma być dokładnie tam gdzie bieguni dominujące w sensie te co sobie określmy na podstawie wymagań

- Ad.4. Zakładamy że biegun dominujący to nasz pkt próbny i liczymy warunek argumentu. Z tego warunku argumentu otrzymamy kąt jaki musi wychodzić z tego bieguna kompensatora i potem policzymy jego położenie na osi Re.
- Ad.5. Wzmocnienie z warunku modułu

- **Kompensator opóźniający**

- Stosuje się by poprawić własności układu w stanie statycznym - zmniejszyć uchyb statyczny
- $C(s) = \frac{T_s+1}{T_{\alpha s}+1}$  gdzie  $\alpha > 1$
- Kompensator zmniejsza zapas fazy co oznacza że destabilizuje układ, więc nie może być stosowany do układów niestabilnych
- Zwiększa też czas ustalania
- Praktycznie ten kompensator projektuje się ustalając biegun jak najbliżej początku układu współrzędnych a zero tak jak w wyprzedzającym - nie dalej niż  $\alpha = 10$
- **Projektowanie w oparciu o MGP**

### Kompensator opóźniający – projektowanie w oparciu o *mgp*

1. Wykreśl *mgp* dla układu bez kompensatora.
2. Na podstawie wymagań stawianych układowi sterowania, określ położenie biegunów dominujących na wykreślonym *mgp*, które spełnią te zakładane wymagania.
3. Wyznacz współczynnik czułości statycznej dla położenia biegunów dominujących i dalej wzmocnienie układu zamkniętego. Znając wzmocnienie możemy wyznaczyć błędy układu w stanie ustalonym.
4. Porównaj wartości błędów układu w stanie ustalonym zadane i dla układu bez kompensatora z wartościami wynikającymi z przyjętych wymagań stawianych układowi i wylicz niezbędny przyrost, który musi wynikać ze stosunku zero – biegun (parametr  $\alpha$ ) kompensatora.
5. Znając stosunek zero – biegun  $\alpha$  kompensatora, określ odpowiednie położenie dla zera i bieguna kompensatora tak aby *mgp* układu skompensowanego przechodził przez wybrane położenie biegunów dominujących. Umieść biegun i zero kompensatora w pobliżu początku płaszczyzny  $s$  w odniesieniu do  $\omega_n$ .

*Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok*

- Ad.2. Położenie na już obecnym MGP
- Ad.3. Błędy układu w stanie ustalonym to  $K_p$ ,  $K_v$ ,  $K_a$ . Wsp. czuł. stat. to chodzi o warunek modułu, a wzmocnienie ukł. zamkniętego to chodzi o ten wsp. pomnożony przez obecne już wzmocnienie.
- Ad.4. Wyznaczamy stosunek tego błędu, na podstawie obecnego  $K$ , do błędu, który chcemy mieć z warunków zadania. Ten iloraz to będzie nasze alfa
- Ad.5. Umieszczamy zero np. w 0.1 no i biegun tak jak alfa mówi. Chodzi tu o to, że umieszczenie tego bieguna i zera zmieni nam MGP. Jak umieścimy je blisko zera, to wtedy mgp zmieni się nieznacznie i dzięki temu osiągniemy te bieguny co chcemy.

- **Projektowanie w oparciu o Bodego**

## Kompensator opóźniający – projektowanie w oparciu o charakterystyki Bodego

1. Wykreśl charakterystyki Bodego układu bez kompensatora z c wzmocnieniem dobranym tak, aby spełnić wymogi odnośnie uchybów w stanie ustalonym.
2. Określ zapas fazy układu bez kompensatora i jeżeli jest niedostateczny wykonaj kolejne punkty.
3. Wyznacz częstotliwość, dla której zapas fazy byłby odpowiedni (uwzględnij 5° opóźnienia fazowego od kompensatora opóźniającego wyznaczając tę nową częstotliwość  $\omega_{gc}$ )
4. Umieść zero kompensatora o jedną dekadę poniżej nowej częstotliwości  $\omega_{gc}$ .
5. Zmierz niezbędne wzmocnienie w wyznaczonej nowej  $\omega_{gc}$  tak, aby charakterystyka amplitudowa osiągnęła tam wartość 0.
6. Wylicz parametr  $\alpha$  pamiętając, że wzmocnienie wprowadzane przez kompensator opóźniający wynosi  $-20\log \alpha$  w  $\omega_{gc}$ .
7. Policz położenie bieguna  $\sigma_p = 1/(\alpha T) = \omega_z/\alpha$ .

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.1. Chodzi o błędy właśnie Kp, Kv, Ka
- Ad.3. 180-Faza jaką chcę - 5 stopni. Patrzę w jakim  $\omega_{gc}$  to jest
- Ad.4. Po prostu na osi poziomej tam będzie moje zero
- Ad.5. W tej  $\omega_{gc}$  sprawdzam na wykresie jakie jest wzmocnienie. Na podstawie tego wzmocnienia wyliczam alfa i dalej na tej podstawie położenie bieguna

## Przydatne wzory

- Czas ustalania

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4 \Rightarrow \zeta \omega_n \geq 1$$

-