

Kolokwium

1. Charakterystyki Bodego, Nyquista, zapas stabilności

Char. Nyquista

Char. Bodego

2. MGP

3. Kompensatory

4. Regulatory PID

Regulator PI

Regulator PD

Regulator PID

Kryterium MGP

Kryterium stabilności aperiodycznej

Kryterium zapasu fazy

OPTYMALNA synteza

Przydatne wzory

Kolokwium

1. Bode, Nyquist, analityczny zapas stabilności

2. MGP, wzmocnienia do określonych położień

3. Kompensatory

4. PID, dobór optymalny i suboptimalny w oparciu o T_s

1. Charakterystyki Bodego, Nyquista, zapas stabilności

Char. Nyquista

- Mamy transmitancję z rów. char. w mianowniku
- Wszystko się dzieje w **Układzie otwartym**
- Zamiast s podstawiamy $i\omega$ i obliczamy taką postać transmitancji. Będzie to wymagać mnożenia przez sprzężenie żeby się pozbyć z mianownika tego urojonego
- Trzeba wyłuskać z tego $Im(\omega)$ i $Re(\omega)$
- Następnie budujemy sobie tabelę z charakterystycznymi omegami - 0, kiedy Re i Im są równe zero (miejsca przecięcia z osiami), nieskończoność i sprawdzamy w tych ω jakie są wartości Im i Re
- Te miejsca posłużą nam do narysowania wykresu. Po prostu prowadzimy wykres przez odpowiednie punktu
- Następnie by zbadać zapas fazy i zapas wzmocnienia badamy ten wykres
 - Zapas fazy to kąt jaki tworzy punkt przecięcia wykresu z kołem jednostkowym z osią Im
 - Zapas wzmocnienia to miejsce przecięcia wykresu z osią Re .

$$2 \leq K_d \leq 4$$

- Zapas stabilności

$$6dB \leq \Delta L_M \leq 12db$$

$$30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$$

Char. Bodego

- Transmitancje musimy przekształcić do postaci $\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
 - Jest to bardzo istotne, bo najczęściej transmitancja jest w postaci z biegunami a nie stałymi czasowymi. Jak będziemy kombinować z taką formą, to Bode nie wyjdzie, bo wyciąganie przed nawias odpowiednich współczynników doprowadzi do K , które jest bardzo istotne
- Z postaci tej transmitancji znamy też bieguny układu. $p_1 = \frac{1}{T_1}$ itd. Te bieguny są ważne, bo Bodego rysujemy biorąc pod uwagę tabelkę

W każdej transmitemji operatorowej mogą występować 4 różne elementy

1. State wzmacnianie
2. Biegun w początku zakresu częstotliwości
3. Biegun lubi 0 reszty
4. Para sprzężonych zespolonnych bieguniów utworzonych przez

czynnik	$L_m(j\omega)$	$\varphi(j\omega)$
state dodatnie zw.	$20 \log K$	0°
state ujemne zw.	$-20 \log K$	-180°
Biegun w pocz. zak.	-20 dB/decade	-90°
Biegun rezonansowy dla ω_c	0 dB/decade	0°
Biegun rezonansowy dla ω_{cr}	-20 dB/decade	-90°
Zera rezonansowe dla ω_c	0 dB/decade	0°
Zera rezonansowe dla ω_{cr}	$+20 \text{ dB/decade}$	$+90^\circ$
Para sprzężonych, sprzężonych bieguniów dla $\frac{\omega}{\omega_r} \ll 1$	0 dB/decade	0°
— II — dla $\frac{\omega}{\omega_r} \gg 1$	-40 dB/decade	-180°
Para sprzężonych, sprzężonych zera dla $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$	0 dB/decade	0°
— II — dla $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1$	$+40 \text{ dB/decade}$	$+180^\circ$

gdzie n to

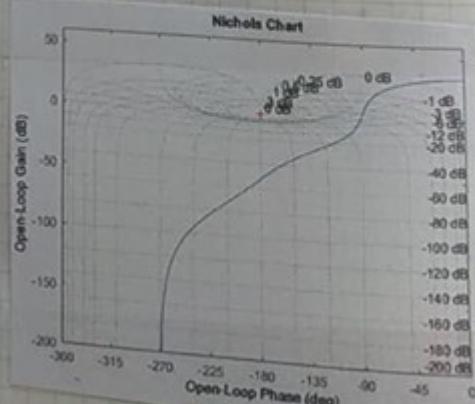
Trzecim sposobem przedstawiania transmitemji operatorowej w zakresie częstotliwości jest wykres charakterystycznej amplitudy zakadu L_m w funkcji fazowego φ

slab:

'nichols'

'angrid'

Wykres Nicholsa



krotność bieguna

2. MGP

- Wykres MGP dotyczy pętli zamkniętej, ale wykreślamy go dla układu otwartego.
- W przeciwnieństwie do bodego tu chcemy mieć inną formę transmitancji
- $\frac{K_o(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)}$
- K_o to współczynnik czułości statycznej. Jego zmiana generuje właśnie linie pierwiastkowe
- Algorytm MGP
 1. Zera i bieguny
 2. Liczba odgałęzień - liczba gałęzi jest równa liczbie biegunów układu otwartego
 3. MGP na Re - patrzymy na ilość biegunów i zer po prawej stronie punktu próbnego. Jeśli jest nieparzysta to pkt należy do MGP
 4. Punkty początkowe i końcowe - MGP zaczyna się w biegunach a kończy w zerach. Gdy mamy mniej zer to wtedy MGP dąży do ∞ wzduż Re lub jakiś asymptot
 5. Asymptoty MGP
 - Jeżeli MGP posiada asymptoty to ich kąt nachylenia:
$$\gamma_a = \frac{(2m+1)\pi}{u+n-v}$$
 gdzie $u + n = \text{liczba biegunów}$ $v = \text{liczba zer}$
Asymptoty te przecinają się w punkcie:
$$\sigma_a = \frac{\sum p_k - \sum z_k}{u+n-v}$$
Gdzie $\sum p_k$ to suma **wartości** biegunów a $\sum z_k$ to **suma wartości** zer. Reszta jak wyżej
 6. Punkt rozejścia i **zejścia** MGP
 - Są 2 sposoby na wyznaczenie tego. Sposób 1 polega na sprawdzeniu warunku argumentów, ale ta metoda **nie działa gdy mamy bieguny sprzężone**
$$-\frac{1}{r_{p0}} + \frac{1}{r_{p1}} - \frac{1}{r_{z1}} = 0$$
Równanie to rozwiązuje metodą prób i błędów dla spodziewanego punktu rozgałęzienia
 - Sposób 2 polega na tym, że w punkcie rozgałęzienia **musi** wystąpić podwójny pierwiastek rzeczywisty. Istnieje twierdzenie, które mówi, że jeśli występuje podwójny pierwiastek, to pochodna równania też się zeruje. Finalnie:
$$L'M - LM' = 0$$
To równanie także metodą prób i błędów na zasadzie wyliczenia tego równania na s i podstawianiu konkretnych wartości i sprawdzaniu czy jesteśmy blisko czy daleko. Z dokładnością do 2 miejsc po przecinku
 7. Kąty wyjścia MGP z **pary biegunów sprzężonych**
 - Przepisujemy warunek argumentu by wyizolować ten konkretny kąt
$$\phi_{wj} = \sum \psi_{ij} - \sum \phi_{ij} + (2m + 1)\pi$$
Gdzie $\sum \psi_{ij}$ to suma **kątów** między danym biegunem a zerami, a $\sum \phi_{ij}$ to suma **kątów** między danym biegunem a innymi biegunami. Ten **kąt** to chodzi o kąt, który tworzony jest z osią Re.
 8. Kąty wejścia do **zer**
 - Analogicznie, przepisujemy ten warunek
$$\psi_{wj} = \sum \phi_{kj} - \sum \psi_{kj} - (2m + 1)\pi$$
 9. Pkt. przecięcia MGP z Im.

- Wartość K_o w tym punkcie określa **granicę stabilności**. By to znaleźć należy wyznaczyć kryterium Routha.
- Zamykamy pętle sprzężenia zwrotnego **wraz z dodatkowym parametrem K**
- Wypełniamy tablicę Routha dla rów. char.
- Dla s^1 szukamy takiej wartości tego K, dla której wyzeruje się cały wiersz.
- Tą wartość K wstawiamy do s^2 dzięki czemu wyznaczmy pierwiastki, gdzie MGP przetnie oś urojonych
- Dzięki czemu rysujemy ostateczny MGP, a jak chcemy poznać wzmacnienie w tym pkt. przecięcia to warunek modułu.
- Warunek modułu

$$K_o = r_{p0}^n \frac{\prod r_{pk}}{\prod r_{zi}}$$

Jeśli nie ma zer, to w mianowniku 1

3. Kompensatory

- Kompensator to taki element, który łączymy szeregowo z układem w celu poprawy jego odpowiedzi
 - Kompensator posiada jedno zero i jeden biegum
 - Wzór:

$$C(s) = K \frac{(s+z_k)}{(s+p_k)}$$
 - Kompensator wyprzedzający $|z| < |p|$
 - Kompensator opóźniający $|z| > |p|$
-

- **Kompensator wyprzedzający**

- Przyspiesza działanie układu
- $C(s) = \frac{Ts+1}{T\alpha s+1}$ gdzie $\alpha < 1$
- Parametry α i T dobiera się tak aby uzyskać dla układu **otwartego** określony zapas fazy.
- Dla układów z trzema biegunami rzeczywistym zero umiejscawia się jak najbliższy środkowego bieguna
- Biegum obiektu sterowania przesuwa się na maxa w lewo, ale nie więcej niż 10 razy. Wtedy $\alpha = 0.1$
- *Maksymalne przesunięcie fazy w przód*

$$\phi_m = \arcsin \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

dla częstotliwości

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- Maksymalne wzmacnienie dla częstotliwości ω_m jest połową wzmacnienia początkowego i końcowego:

$$G_m(\omega_m) = -20 \log(\sqrt{\alpha}) = -10 \log \alpha$$

- Do odczytu własności można użyć takiej tabeli:

α	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10
ϕ_m	19,5	30	38,9	41,8	45,6	51,1	54,9
$G_m [dB]$	3,01	4,77	6,02	6,99	7,78	9,03	10

- Projektowanie w oparciu o Bodego**

Kompensator wyprzedzający – projektowanie w oparciu o charakterystyki Bodego

Procedura projektowania dla zadanego zapasu fazy φ :

- Wyznacz zapas fazy ϕ układu bez kompensatora ale ze wzmacnieniem gwarantującym spełnienie warunków dotyczących uchybu statycznego,
- Uwzględniając margines bezpieczeństwa ε , określ wymagany zapas fazy do uzyskania przez kompensator:

$$\phi_m = \varphi - \phi + \varepsilon$$

gdzie: $\varepsilon = 5 \div 18$ dla obiektów względnego stopnia 2,
 $\varepsilon = 12 \div 18$ dla obiektów względnego stopnia 3,

- Dobierz parametr α z odpowiednich równań lub tabeli,
- Wyznacz wartość $10\log \alpha$ (albo odczytaj z tabeli) i określ częstotliwość, gdzie wzmacnienie układu bez kompensatora wynosi $10 \log \alpha$ (dla $\alpha < 1$, będzie to wartość ujemna). Ponieważ kompensator wyprzedzający ma wzmacnienie $-10 \log \alpha$ w częstotliwości ω_m , będąc to nowa częstotliwość ω_{gc} .
- Wykreśl charakterystyki Bodego i ewentualnie powtórz całą procedurę.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Dalej znając ω i α wyznaczamy sobie T. TADAM mamy wzór

- Projektowanie w oparciu o MGP**

Kompensator wyprzedzający – projektowanie w oparciu o mgp

- Na podstawie wymagań stawianych układowi sterowania, określ położenie biegunów dominujących.
- Wykreśl mgp dla układu bez kompensatora i sprawdź, czy założone położenie biegunów dominujących jest osiągalne bez kompensacji.
- Jeżeli kompensator jest niezbędny, umieść jego zero dokładnie poniżej wymaganego położenia biegunów dominujących (lub na lewo od dwóch pierwszych biegunów rzeczywistych).
- Wyznacz położenie bieguna kompensatora tak, aby spełniony był warunek argumentu dla biegunów dominujących.
- Wyznacz wartość współczynnika czułości statycznej dla biegunów dominujących i dalej wzmacnienie kompensatora. Następnie zbadaj uchyb statyczny układu (wyznacz stałe uchybu).
- Powtórz procedurę jeżeli stałe uchybu będą miały nieodpowiednie wartości.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad. 3. Zero ma być dokładnie tam gdzie bieguny dominujące w sensie te co sobie określmy na podstawie wymagań
- Ad.4. Zakładamy że biegun dominujący to nasz pkt próbny i liczymy warunek argumentu. Z tego warunku argumentu otrzymamy kąt jaki musi wychodzić z tego bieguna kompensatora i potem policzymy jego położenie na osi Re.
- Ad.5. Wzmocnienie z warunku modułu

- **Kompensator opóźniający**

- Stosuje się by poprawić własności układu w stanie statycznym - zmniejszyć uchyb statyczny
- $C(s) = \frac{Ts+1}{T\alpha s+1}$ gdzie $\alpha > 1$
- Kompensator zmniejsza zapas fazy co oznacza że destabilizuje układ, więc nie może być stosowany do układów niestabilnych
- Zwiększa też czas ustalania
- Praktycznie ten kompensator projektuje się ustalając biegun jak najbliżej początku układu współrzędnych a zero tak jak w wyprzedzającym - nie dalej niż $\alpha = 10$
- **Projektowanie w oparciu o MGP**

Kompensator opóźniający – projektowanie w oparciu o *mgp*

1. Wykreśl *mgp* dla układu bez kompensatora.
2. Na podstawie wymagań stawianych układowi sterowania, określ położenie biegunów dominujących na wykreślonym *mgp*, które spełnią te zakładane wymagania.
3. Wyznacz współczynnik czułości statycznej dla położenia biegunów dominujących i dalej wzmocnienie układu zamkniętego. Znając wzmocnienie możemy wyznaczyć błędy układu w stanie ustalonym.
4. Porównaj wartości błędów układu w stanie ustalonym zadane i dla układu bez kompensatora z wartościami wynikającymi z przyjętych wymagań stawianych układowi i wylicz niezbędny przyrost, który musi wynikać ze stosunku zero – biegun (parametr α) kompensatora.
5. Znając stosunek zero – biegun α kompensatora, określ odpowiednie położenie dla zera i bieguna kompensatora tak aby *mgp* układu skompensowanego przechodził przez wybrane położenie biegunów dominujących. Umieść biegun i zero kompensatora w pobliżu początku płaszczyzny s w odniesieniu do ω_n .

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.2. Położenie na już obecnym MGP
- Ad.3. Błędy układu w stanie ustalonym to K_p , K_v , K_a . Wsp. czuł. stat. to chodzi o warunek modułu, a wzmocnienie ukł. zamkniętego to chodzi o ten wsp. pomnożony przez obecne już wzmocnienie.
- Ad.4. Wyznaczamy stosunek tego błędu, na podstawie obecnego K , do błędu, który chcemy mieć z warunków zadania. Ten iloraz to będzie nasze alfa
- Ad.5. Umieszczamy zero np. w 0.1 no i biegun tak jak alfa mówi. Chodzi tu o to, że umieszczenie tego bieguna i zera zmieni nam MGP. Jak umieścimy je blisko zera, to wtedy mgp zmieni się nieznacznie i dzięki temu osiągniemy te bieguny co chcemy.
- **Projektowanie w oparciu o Bodego**

Kompensator opóźniający – projektowanie w oparciu o charakterystyki Bodego

1. Wykreśl charakterystyki Bodego układu bez kompensatora z c wzmocnieniem dobranym tak, aby spełnić wymogi odnośnie uchybów w stanie ustalonym.
2. Określ zapas fazy układu bez kompensatora i jeżeli jest niedostateczny wykonaj kolejne punkty.
3. Wyznacz częstotliwość, dla której zapas fazy byłby odpowiedni (uwzględnij 5° opóźnienia fazowego od kompensatora opóźniającego wyznaczając tę nową częstotliwość ω_{gc})
4. Umieść zero kompensatora o jedną dekadę poniżej nowej częstotliwości ω_{gc} .
5. Zmierz niezbędnie wzmocnienie w wyznaczonej nowej ω_{gc} tak, aby charakterystyka amplitudowa osiągnęła tam wartość 0.
6. Wylicz parametr α pamiętając, że wzmocnienie wprowadzane przez kompensator opóźniający wynosi $-20\log \alpha$ w ω_{gc} .
7. Policz położenie bieguna $\omega_p = 1/(\alpha T) = \omega_z/\alpha$.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.1. Chodzi o błędy właśnie Kp, Kv, Ka
- Ad.3. 180-Faza jaką chcę - 5 stopni. Patrzę w jakim ω_{gc} to jest
- Ad.4. Po prostu na osi poziomej tam będzie moje zero
- Ad.5. W tej ω_{gc} sprawdzam na wykresie jakie jest wzmocnienie. Na podstawie tego wzmocnienia wyliczam alfa i dalej na tej podstawie położenie bieguna

4. Regulator PID

- Regulator można dobierać optymalnie (kryterium ITAE i znane wzory), albo metodą parametryczną. Metoda parametryczna to także metoda Zieglera - Nicholsa, ale szanujmy się
- **Funkcje poszczególnych regulatorów**

Wybór typu funkcji przejścia regulatora

Wyjście regulatora może składać się z trzech komponentów:

$$U(s) = U_P(s) + U_I(s) + U_D(s)$$

U_p

-dla układów z dużym zapasem wzmocnienia, zmniejszenie uchybu statycznego, skrócenie czasu ustalania

o

-dla układów z małym zapasem wzmocnienia, zwiększenie uchybu statycznego, skrócenie czasu ustalania, minimalizacja przeregulowania

U_i

-minimalizacja (lub likwidacja) uchybu statycznego, wydłużenie czasu ustalania

U_d

-skrócenie czasu ustalania

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Działanie regulatora polega na założeniu, że chcemy przykryć dominujące bieguny układu poprzez położenie na nich zer regulatora. Dlatego tutaj komfortowa jest postać funkcji przejścia jak przy Bode:

$$G(s) = \frac{K}{\Pi(T_{di}s+1)}$$

- Dominujące bieguny - małe wartości na osi Re - duże wartości stałych czasowych

$$(s + p) = p(\frac{1}{p}s + 1)$$

$$T_d = \frac{1}{p}$$

- Zatem clou tej metody: $T_{max \ mianownika \ obiektu} = T_{licznika \ regulatora}$
-

Regulator PI

- Funkcja przejścia regulatora PI

$$G_{rid} = K_e \frac{T_i s + 1}{s}$$

$$G_{rrz} = K_e \frac{T_i s + 1}{s(Ts + 1)}$$

W obu wersjach $T_i = T_{max \ mian. \ obiektu}$

Regulator PD

- Funkcja przejścia

$$G_{rid} = K_e (T_d s + 1)$$

$$G_{rrz} = K_e \frac{\frac{\alpha_d + 1}{\alpha_d} T_d s + 1}{\frac{T_d}{\alpha_d} s + 1}$$

Dla idealnego mamy:

$$T_d = T_{max \ mian.}$$

Dla rzeczywistego:

$$\frac{\alpha_d + 1}{\alpha_d} T_d = T_{max \ mian.}$$

α_d przeważnie przyjmuje wartość 10. T_d wyliczymy sobie z równania

- Idealny jest nierealizowalny fizycznie, bo stopień licznika jest większy niż stopień mianownika. Ale komu by to przeszkadzało
-

Regulator PID

- Funkcja przejścia:

$$G_{rid} = K_e \frac{(3.62T_d s + 1)(1.38T_d s + 1)}{s}$$

$$G_{rrz} = K_e \frac{(3.55T_d s + 1)(1.55T_d s + 1)}{s(0.1T_d s + 1)}$$

Dla pierwszego przypadku:

$$3.62T_d = T_{max \ mian.}$$

Dla drugiego:

$$3.55T_d = T_{max \ mian.}$$

Dla obu przypadków:

$$T_i = 5T_d; \alpha_d = 10$$

- Jak już określmy funkcję przejścia regulatora, to musimy teraz dobrać jego odpowiednie wzmocnienie. Do tego mamy 4 kryteria
 - **Kryterium MGP**
 - **Kryterium stabilności aperiodycznej**
 - **Kryterium zapasu fazy**
 - **Kryterium amplitudy rezonansowej**

Kryterium MGP

Dobór wzmocnienia przy pomocy *mgp*

Procedura doboru wzmocnienia regulatora PID w oparciu o *mgp*:

1. Na podstawie wymagań projektowych dobierz wartość współczynnika tłumienia bieguna dominującego układu zamkniętego.
2. Wykreśl *mgp* układu z regulatorem z dobranymi stałymi czasowymi i wzmocnieniem 1.
- 3. Narysuj na *mgp* linię stałego tłumienia dla dobranego współczynnika tłumienia.
4. W miejscu przecięcia *mgp* układu z regulatorem i wrysowanej linii odczytaj wartość współczynnika czułości statycznej i wylicz wynikające z niego wzmocnienie regulatora.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.2. Regulator ma mieć wzmocnienie 1. Układ całkowicie ma mieć wzmocnienie tak jak układ bez regulatora - w zależności od zadania

Kryterium stabilności aperiodycznej

- Generalnie podwójny pierwiastek rzeczywisty gwarantuje najkrótszą możliwą odpowiedź skokową o charakterze aperiodycznym (cokolwiek to znaczy)
- Twierdzenie o wielokrotnym pierwiastku mówi, że dana liczba jest k-krotnym pierwiastkiem gdy zarówno funkcja w tym miejscu = 0 oraz wszystkie pochodne do k-1 są równe zero. K-ta pochodna ma być różna od zera
- Zatem jak chcemy, by pojawił się podwójny pierwiastek rzeczywisty, to funkcja musi być równa zero oraz jej pierwsza pochodna = 0 w tym punkcie.
- Dobieramy sobie regulator i jego stałą czasową
- Tworzymy równanie char. układu zamkniętego z regulatorem i wzmocnieniem równym K
- Wyznaczamy sobie pochodną rów. char. z czego uzyskujemy biegony, gdzie ta pochodna się zeruje
- Z tymi biegunami wędrujemy do rów. char., podstawiamy te biegony za s dzięki czemu mamy równanie z jedną niewiadomą K. Obliczamy dla jakiego K to się wyzeruje

- Profit

Kryterium zapasu fazy

-

Dobór regulatora w oparciu o charakterystyki *Bodego*

Metoda polega na doborze wzmacnienia w oparciu o kryterium zapasu fazy (dobór typu funkcji przyciącia i stałych czasowych realizowany jest tak jak poprzednio) i odbywa się w następujących krokach:

1. Wykreśl charakterystyki *Bodego* układu z regulatorem z dobranymi stałymi czasowymi i wzmacnieniem 1.
2. Sprawdź zapas fazy układu i jeżeli różni się on od wartości założonej, określ wartość częstotliwości ω_{gc} , dla której zapas fazy będzie odpowiedni.
3. Określ wartość wzmacnienia, które przesunięcie wykres amplitudowy tak, aby w ω_{gc} miał wartość 0 dB.

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.2 i 3. Podobnie jak z kompensatorem. Na wykresie zapasu fazy szukam miejsca z dobrym zapasem, przenoszę pionowo na wykres wzmacnienia i sprawdzam jakie tam aktualnie jest wartość amplitudy. Jak amplituda jest <0 (np. -13dB) to wtedy wzmacnienie (wyrażone w logarytmie) musi być dodatnie. Jak amplituda byłaby >0 (np. 13dB) to wtedy wzmacnienie (także w logarytmie) musi być ujemne. Oznacza to, że $0 < K < 1$. Żeby obliczyć K to np. $20\log K = 13\text{dB}$ i rozwiązuje to równanie
- No i oczywiście rysuje drugiego Bodego bo jakże mógłbym zaufać samemu sobie że dobrze to policzyłem

OPTYMALNA synteza

-

Synteza optymalna regulatorów PID

W oparciu o wskaźnik ITAE opracowano zestawy optymalnych współczynników wielomianów charakterystycznych układu zamkniętego przy wejściu w postaci sygnału skokowego:

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

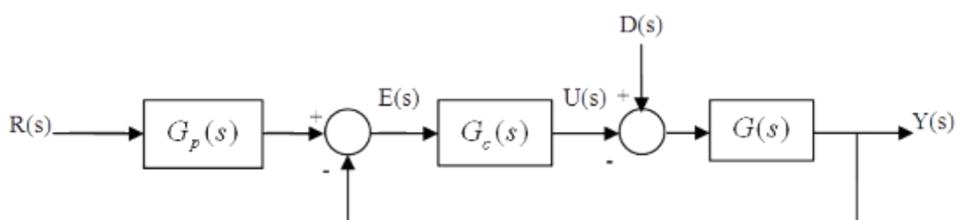
$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- W oparciu o ITAE tutaj mamy optymalnie dobrane współczynniki w równaniu charakterystycznym **Układu zamkniętego**
- Współczynniki te dobrane są do regulatora **PID**
- ISTOTNY JEST **PREFILTR**
-

Synteza optymalna regulatorów PID

Oba zestawy optymalnych wskaźników równań charakterystycznych zostały przygotowane dla funkcji przejścia układu zamkniętego bez zer (przypadek dla skoku jednostkowego) lub z jednym zera (przypadek dla rampy). Dlatego konieczne jest zastosowanie tzw. prefiltra, czyli transmitancji wpiętej przed układem sterowania o mianowniku równym licznikowi transmitancji układu zamkniętego, a liczniku tak dobranym, aby wzmacnienie układu wynosiło 1.



Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- **Algorytm postępowania**
-

Synteza optymalna regulatorów PID

Procedura projektowania regulatorów PID w oparciu o wskaźnik jakości ITAE realizowana jest w następujących krokach:

1. Dobierz ω_n układu zamkniętego określając czas ustalania i przeregulowanie.
2. Dobierz trzy współczynniki regulatora korzystając z równań optymalnych dla metody ITAE i częstości ω_n z kroku 1.
3. Dobierz prefiltr $G_p(s)$ tak, aby układ zamknięty $T(s)$, nie posiadał zer.

Podobne zestawy optymalnych równań charakterystycznych są dostępne dla innych wskaźników jakości (ISE, ITSE, IAE) i są stosowane analogicznie jak opisano powyżej

Teoria sterowania, Krzysztof Mendrok

- Ad.1. Na podstawie [tego](#) ustalamy sobie wstępna ω_n . ζ wynika z przeregulowania
- Ad.2.

Synteza optymalna regulatorów PID - przykład

Dobieramy regulator PID o transmitancji:

$$G_{PID}(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Następnie obliczamy równanie układu zamkniętego z tymi parametrami i przyrównujemy do optymalnego równania ITAE

- Jeżeli wyjdzie, że ω_n musi być konkretnej wartości, to nic. Po prostu przyjmujemy tą konkretną omegę i koniec
- Ad.3.

Synteza optymalna regulatorów PID - przykład

Po podstawieniu transmitancja układu zamkniętego ma postać:

$$G_z(s) = \frac{29,5s^2 + 99,6s + 127,5}{s^4 + 7,05s^3 + 38,33s^2 + 102,4s + 127,5}$$

Dobieramy więc prefiltr, aby układ nie miał zer:

$$G_p(s) = \frac{127,5}{29,5s^2 + 99,6s + 127,5} = \frac{4,32}{s^2 + 3,38s + 4,32}$$

Skąd to 127.5 w liczniku? Ponieważ $s \rightarrow 0$ gdy liczymy błąd statyczny, to wtedy wyzerują nam się wszystkie pozostałe s. Gdybyśmy zostawili w liczniku 1, to 127.5 w mianowniku spowodowałoby zmianę wzmacnienia całego układu co jest niepożądane.

Przydatne wzory

- Czas ustalania

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4 \Rightarrow \zeta \omega_n \geq 1$$

- Współczynnik tłumienia a wartość przeregulowania i zapas fazy

ζ	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
$\kappa, \%$	72.9	52.7	37.2	25.4	16.3	9.5	4.6	1.5
$\eta_{z, \circ}$	84.3	78.5	72.5	66.4	60.0	53.1	45.6	36.9

- Przeregulowanie i wsp. tłumienia

$$\zeta = \sqrt{\frac{\left(\ln \frac{PO}{100}\right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{PO}{100}\right)^2}}$$

- Stałe uchybu

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$$