Markovljevi lanci

Vježbe

Zadaci i rješenja

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Rudi Mrazović, Hrvoje Planinić

Sadržaj

1 Ponavljanje vjerojatnosti

U ovom uvodnom poglavlju kratko ćemo ponoviti pojmove nezavisnosti i uvjetne nezavisnosti, te funkcije izvodnice vjerojatnosti. Uvjetna nezavisnost se javlja u definiciji *Markovljevih lanaca* – intuitivno, to su slučajni procesi u kojima prošlost i budućnost, iako općenito zavisni, postaju uvjetno nezavisni uz danu vrijednost procesa u sadašnjem trenutku. Funkcije izvodnice vjerojatnosti su analitički alat koji ćemo koristiti u analiziranju jednog standardnog primjera Markovljevog lanca, a to su tzv. *procesi grananja.*

1.1 Nezavisnost i uvjetna nezavisnost

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnostni prostor. Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su **nezavisni** ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

Ako je $C \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(C) > 0$, kažemo da su A i B **uvjetno nezavisni uz dano** C ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\,\mathbb{P}(B|C)\,.$$

tj. A i B su nezavisni, ali u odnosu na vjerojatnost $\mathbb{P}_C(\,\cdot\,) := \mathbb{P}(\,\cdot\,|C)$.

U svakom od sljedećih zadataka odgovorite na sljedeća pitanja:

(a) Jesu li događaji A i B nezavisni?

(b) Jesu li događaji A i B nezavisni uz dano C?

Zadatak 1.1 Bacamo dvije simetrične kocke te neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{na 1. kocki pala trojka}\} \\ B &= \{\text{na 2. kocki pala četvorka}\} \\ C &= \{\text{zbroj dobivenih brojeva je 7}\}\,. \end{aligned}$$

Rješenje.

(a) Odgovor je očito DA! (Formalno, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.)

(b) Ako znamo da je zbroj na kockama jednak 7, ishod bacanja jedne od kocki ipak nešto govori o mogućem ishodu na drugoj kocki pa bismo intuitivno rekli da je odgovor NE. Formalno, lako se provjeri da je $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(\{(3,4)\}|C) = \frac{1}{6}$. Nadalje, ako znamo da je zbroj 7 te dodatno da je na prvoj kocki pala trojka, odmah znamo da je na drugoj kocki morala pasti četvorka, tj. $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap B|C) = \frac{1}{6}$, i slično $\mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A \cap B|C) = \frac{1}{6}$. Dakle, A i B zaista nisu uvjetno nezavisni uz dano C.

□

Zadatak 1.2 Imamo dva (nesimetrična) novčića na kojima je vjerojatnost pojave pisma jednaka 9/10, odnosno 3/10. Slučajno izaberemo jedan od novčića i bacimo ga dva puta. Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{na 1. novčiću palo pismo}\} \\ B &= \{\text{na 2. novčiću palo pismo}\} \\ C &= \{\text{izabran je 1. novčić}\}\,. \end{aligned}$$

Rješenje.

(a) Ako je na prvom novčiću palo pismo, vjerojatnije je da samo u početku izabrali prvi novčić, pa je i vjerojatnost pojave pisma u 2. bacanju veća – dakle, intuitivno, odgovor bi trebao biti NE. Formalno, po formuli potpune vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(C^c)\mathbb{P}(A|C^c) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{9}{10} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{10} = \tfrac{3}{5} = \mathbb{P}(B)\,.$$

Nadalje,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{9}{10} \cdot \tfrac{9}{10} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{10} \cdot \tfrac{3}{10} = \tfrac{9}{20}\,.$$

Dakle, $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{9}{25} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$, tj. A i B su zaista zavisni.

(b) Odgovor je očito DA! (Formalno, $\mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C) = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \mathbb{P}(A \cap B|C)$.)

□

Dakle, nezavisnost općenito ne povlači uvjetnu nezavisnost, i obratno!

Prisjetimo se (intutivnijih) karakterizacija nezavisnosti i uvjetne nezavisnosti:

(i) Ako je $\mathbb{P}(B) > 0$, A i B su nezavisni akko $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, tj. to što se B dogodio nam ništa ne govori o vjerojatnosti za A.

(ii) Ako je $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$, A i B su uvjetno nezavisni uz dano C akko

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A|C)\,.$$

Uočite da ova tvrdnja slijedi iz (i) budući da je $\mathbb{P}_C(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)$.

Na primjer, u Zadatku 1.1(b) očito imamo $\mathbb{P}(A|B \cap C) = 1$, a pokazali smo da je $\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{6}$. Dakle, $\mathbb{P}(A|B \cap C) \neq \mathbb{P}(A|C)$, tj. A i B su zavisni uz dano C. Također, u Zadatku 1.2(a) se lako izračuna da je $\mathbb{P}(B|A) = \frac{3}{4}$ što je zaista veće nego $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}$ pa, specijalno, A i B nisu nezavisni.

Zadaci za vježbu

Zadatak 1.3 Bacamo simetričnu kocku te neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{palo je 1, 2, 3 ili 4}\} \\ B &= \{\text{palo je 2, 4 ili 6}\} \\ C &= \{\text{palo je 3 ili 6}\}\,. \end{aligned}$$

(Što biste intuitivno rekli, jesu li A i B nezavisni?)

Zadatak 1.4 Imamo dvije kutije. U prvoj se nalazi 10 crvenih kuglica, a u drugoj 5 crvenih i 5 bijelih kuglica. Slučajno izaberemo jednu kutiju, pogledamo njenu boju te je zatim vratimo u kutiju. Nakon toga izvučemo još jednu kuglicu iz iste kutije. Neka je

$$\begin{aligned} A &= \{\text{1. izvučena kuglica je crvena}\} \\ B &= \{\text{2. izvučena kuglica je crvena}\} \\ C &= \{\text{izabrana je 2. kutija}\}\,. \end{aligned}$$

Rješenja zadataka: **Zad 1.3** (a) Da, (b) Ne. **Zad 1.4** (a) Ne, (b) Da.

1.2 Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Napomena: Dokazi svih rezultata navedenih u ovom poglavlju, i više o funkcijama izvodnicama, može se naći u [SV19, Poglavlja 7.1 i 7.2], vidi također [Von09, Poglavlje 13.3].

Neka je X nenegativna cjelobrojna slučajna varijabla (dakle, poprima vrijednosti u $\mathbb{N}_0$) te neka je

$$p_n = \mathbb{P}(X = n)\,, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Tada funkciju

$$P_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

definiranu za sve $s \in \mathbb{R}$ za koje gornji red apsolutno konvergira, nazivamo **funkcijom izvodnicom vjerojatnosti** slučajne varijable X.

primijetimo da funkcija izvodnica vjerojatnosti konvergira barem na segmentu $[-1,1]$. Doista, prema usporednom kriteriju za $s \in [-1,1]$ imamo

$$|P_X(s)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n\right| \le \sum_{n=0}^{\infty} |p_n s^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1\,.$$

Štoviše, uočimo da će za slučajne varijable X sa konačnim nosačem (dakle, one koje poprimaju konačno mnogo vrijednosti) $P_X(s)$ biti dobro definirano za svaki realan s (P_X je u tom slučaju polinom).

Iz definicije funkcije izvodnice odmah slijedi

- $P_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, $P_X(0) = p_0 = \mathbb{P}(X=0)$;
- $P_X(s) = \mathbb{E}\big[s^X\big]$.

Propozicija 1.5 (Svojstva funkcija izvodnica)

(i) *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$p_n = P_X^{(n)}(0)/n!\,,$$

pri čemu je $P_X^{(n)}$ n-ta derivacija funkcije P_X. Specijalno, funkcija izvodnica vjerojatnosti P_X jedinstveno određuje distribuciju slučajne varijable X.

(ii) *Ako su X i Y nezavisne nenegativne cjelobrojne slučajne varijable, tada je*

$$P_{X+Y}(s) = P_X(s)P_Y(s)$$

za sve $s \in [-1,1]$.

(iii) *Neka je $P_X^{(n)}(1^-) := \lim_{s\to 1^-} P_X^{(n)}(s)$ za sve $n \ge 1$. Vrijedi*

$$\mathbb{E}[X] = P_X'(1^-) \in [0,\infty],$$

i općenitije

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)] = P_X^{(n)}(1^-).$$

Primjer 1.6 Prepostavimo da je X slučajna varijabla s distribucijom

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix},$$

tj. $p_0 = 1/2, p_1 = 1/3, p_2 = 1/6$ te $p_n = 0$ za $n \ge 3$. Tada je

$$P_X(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s^2\,,$$

za sve $s \in \mathbb{R}$. Nadalje, budući da je

$$P'_X(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}s\,,\ s \in \mathbb{R}\,,$$

imamo

$$\mathbb{E}[X] = P'_X(1^-) = [P'_X \text{ dobro definirana i neprekidna u } 1] = P'_X(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Također, iz $P''_X(s) = \frac{1}{3}$ za sve $s \in \mathbb{R}$ slijedi da je

$$\mathbb{E}\big[X^2\big] - \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X(X-1)] = P''_X(1) = \frac{1}{3}\,,$$

tj. $\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{3} + \mathbb{E}[X] = 1$, iz čega dobijemo da je $\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{5}{9}$. $\square$

Primjer 1.7 (Funkcije izvodnice nekih poznatijih razdioba)

(i) Neka je X Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom uspjeha $p \in (0,1)$. Dakle,

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},$$

pri čemu je $q = 1 - p$. Tada je

$$P_X(s) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot s^0 + \mathbb{P}(X = 1) \cdot s^1 = q + ps.$$

(ii) Neka je $X \sim B(n,p)$ binomna slučajna varijabla s parametrima $n \geq 1$ i $p \in (0,1)$. Dakle, za $i = 0, 1, \ldots n$ je

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}.$$

Tada je

$$P_X(s) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)s^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} s^i = (q + ps)^n,$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz binomnog teorema.

Alternativno, znamo da X predstavlja broj uspjeha u n ponavljanja istog pokusa. Zato možemo pisati

$$X = X_1 + \cdots + X_n,$$

gdje su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable takve da $X_i = 1$ ako je u i-tom pokusu zabilježen uspjeh. Dakle,

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Uzastopnim korištenjem svojstva (ii) iz prethodne propozicije sada imamo

$$P_X(s) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(s) = \prod_{i=1}^{n}(q+ps) = (q+ps)^n.$$

(iii) Neka je $X \sim P(\lambda)$ Poissonova slučajna varijabla sa parametrom $\lambda > 0$. Dakle, za svaki $n \geq 0$ je

$$\mathbb{P}(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} P_X(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}. \end{aligned}$$

(iv) Neka je $X \sim G_0(p)$ geometrijska slučajna varijabla na $\{0,1,2,\dots\}$ s parametrom uspjeha $p \in (0,1)$, tj. za svaki $n \geq 0$ je

$$\mathbb{P}(X=n) = (1-p)^n p = q^n p.$$

Tada je

$$\begin{aligned} P_X(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n p \cdot s^n \\ &= p\sum_{n=0}^{\infty}(qs)^n = \frac{p}{1-qs}. \end{aligned}$$

□

Propozicija 1.8 (Slučajne sume) *Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih nenegativnih cjelobrojnih slučajnih varijabli koji je nezavisan od nenegativne cjelobrojne slučajne varijable N. Ako je*

$$S_N := X_1 + \cdots + X_N \ \ (\text{uz } S_0 := 0)\,,$$

tada je

$$P_{S_N}(s) = P_N(P_{X_1}(s))\,,\ s \in [-1,1]\,.$$

Nadalje, vrijedi[1]

$$\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]\,.$$

[1]Obje strane mogu biti $+\infty$. Za $\mathrm{Var}\,(S_N)$ vidi Zadatak 2.11.

Zadaci za vježbu (opcionalno)

Napomena: Rješenja svih zadataka kao i još dodatnih zadataka iz teme funkcija izvodnica možete pronaći u [Mra19, Poglavlje 7.1]

Zadatak 1.9 Bacamo simetričnu kocku i neka je X slučajna varijabla koja označava broj koji se pojavio na kocki. Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X, a onda koristeći nju, nađite $\mathbb{E}[X]$.

Zadatak 1.10 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne slučajne varijable. Odredite distribuciju od $X + Y$.

Zadatak 1.11 Bacamo simetričnu kocku. Neka je T slučajna varijabla koja označava prvo vrijeme kada su pojavile dvije uzastopne šestice. Odredite funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable T, a zatim, koristeći nju, odredite $\mathbb{E}[T]$.

Zadatak 1.12 Luigi vodi restoran s dostavom pizza. Budući da se u petak navečer previše prepustio svome prijatelju alkoholu, u subotu je imao poteškoća sa zapisivanjem narudžbi.

Broj narudžbi tijekom subote je Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$, a Luigi za jednu narudžbu točno zapiše sve podatke s vjerojatnošću $p \in (0, 1)$ (nezavisno od ostalih narudžbi). Odredite razdiobu broja uspješno dostavljenih pizza.

2 Jednostavni proces grananja

Funkcije izvodnice vjerojatnosti posebno su korisne pri analiziranju tzv. procesa grananja, kojima posvećujemo ovo poglavlje.

Promatramo populaciju u kojoj broj djece svake jedinke slijedi istu fiksnu razdiobu. Pretpostavimo da populacija starta sa jednom jedinkom. Prvu generaciju čine sva njena djeca. Drugu generaciju čine djeca te djece, i tako dalje. Zanimat će nas pitanja poput – koja je razdioba broja jedinki u n-toj generaciji? Hoće li populacija dugoročno opstati?

Prije svega formalizirajmo matematički model koji će opisivati prethodno opisanu populaciju. Neka je $(Z_{n,i} \colon n, i \geq 1)$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih nenegativnih cjelobrojnih slučajnih varijabli. **Jednostavni proces grananja** $(Z_n \colon n \geq 0)$ (ili Galton-Watsonov proces) je definiran na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
Z_0 &= 1 \\
Z_1 &= Z_{1,1} \\
Z_2 &= Z_{2,1} + Z_{2,2} + \cdots + Z_{2,Z_1} \\
&\dots \\
Z_n &= Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,Z_{n-1}}
\end{aligned}
$$

pri čemu $Z_n = 0$ povlači $Z_{n+k} = 0$ za sve $k \geq 1$. Slučajnu varijablu Z_n interpretiramo kao broj jedinki u $n-$toj generaciji, a $Z_{n,i}$ kao broj potomaka u $n-$toj generaciji nastalih od $i-$tog potomka iz $(n-1)-$generacije.

Uočimo da je zbog pretpostavke o jednakoj distribuiranosti broja djece za sve jedinke, distribucija jednostavnog procesa grananja potpuno određena distribucijom slučajne varijable $Z_{n,i} \sim Z_{1,1} = Z_1$ (zovemo je „distribucija potomaka" ili „distribucija grananja"). Neka je P njena funkcija izvodnica vjerojatnosti, te neka je $P_n = P_{Z_n}$ funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable Z_n.

Za vjerojatnosnu analizu procesa grananja ključno je iskoristiti da je Z_n zapravo suma slučajnog broja nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli kao u Propoziciji 1.8. Preciznije,

$$
Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Z_{n,i}\,, \tag{2.1}
$$

pa je, uz $N = Z_{n-1}$ i $X_i = Z_{n,i}$, slučajna suma S_N jednaka Z_n. Ovdje je bitno za uočiti da za svaki $n \geq 1$, broj sumanada $N = Z_{n-1}$ ovisi samo o slučajnim varijablama $Z_{k,i}$ za $k = 0, \dots, n-1$ i $i \geq 1$, pa je po pretpostavci nezavisan od niza $(X_i,\ i \geq 1) = (Z_{n,i},\ i \geq 1)$.

Propozicija 2.1 *Za sve $n \geq 1$ vrijedi*

$$P_n = \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{n}.$$

Specijalno, za sve $n \geq 1$ i sve $s \in [-1, 1]$

$$P_n(s) = P_{n-1}(P(s)) = P(P_{n-1}(s)).$$

Dokaz. Dokazujemo indukcijom. Tvrdnja je za $n = 1$ trivijalna. Pretpostavimo zato da je $n \geq 2$ te da je tvrdnja istinita za $n - 1$. Imamo da je

$$P_n = P_{Z_{n-1}} \circ P_{Z_{n,1}} = P_{n-1} \circ P = \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{n-1} \circ P = \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{n} = P \circ P_{n-1}.$$

U prvoj jednakosti smo koristili (2.1) i Propoziciju 1.8, u drugoj činjenicu da $Z_{n,1}$ ima istu distribuciju kao i Z_1, a u trećoj i zadnjoj jedankosti pretpostavku indukcije. □

Činjenicu da je $P_n = P \circ P_{n-1}$ mogli smo dokazati i na drugi, intuitivniji, način. Naime, proces grananja (Z_n) od trenutka $n = 1$ pa nadalje možemo rastaviti na Z_1 nezavisnih procesa grananja generiranih jedinkama iz prve generacije – označimo s $(Z_m^{(i)})_{m \in \mathbb{N}_0}$ proces generiran od i-te jedinke – pri čemu svaki od njih starta s jednom jedinkom ($Z_0^{(i)} = 1$) i ima istu distribuciju grananja kao i početni proces. Budući da je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_1} Z_{n-1}^{(i)},$$

tvrdnja $P_n = P \circ P_{n-1}$ slijedi iz Propozicije 1.8 uz $N = Z_1$ i $X_i = Z_{n-1}^{(i)}$.

Najbitniji događaj kod analize procesa grananja je izumiranje populacije – uočimo da je to upravo događaj $\cup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}$. Njegovu vjerojatnost označavat ćemo sa π, tj.

$$\pi = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}),$$

te ćemo je nazivati **vjerojatnost izumiranja procesa grananja**. Zanimat će nas pod kojim uvjetima je $\pi = 1$, odnosno $\pi < 1$, te kako pronaći π u potonjem slučaju.

Označimo očekivani broj djece pojedinih jedinki sa m. Dakle, zbog pretpostavke o jednakoj distribuiranosti imamo $m = \mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E}[Z_{n,i}]$ i pretpostavimo nadalje da je to očekivanje konačno.

Lema 2.2 *Za sve $n \geq 1$ vrijedi*

$$\mathbb{E}[Z_n] = m^n.$$

Dokaz. Iz Propozicije 1.8 i (2.1) slijedi da je za sve $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_{n-1}]m = \mathbb{E}[Z_{n-2}]m^2 = \cdots = \mathbb{E}[Z_0]m^n = m^n\,.$$

□

Uočimo da

- $\mathbb{E}[Z_n] = m^n \to 0$ ako $m < 1$,
- $\mathbb{E}[Z_n] = 1$ za sve $n \geq 1$ ako $m = 1$,
- $\mathbb{E}[Z_n] = m^n \to \infty$ ako $m > 1$,

što daje neku intuiciju za drugi dio sljedećeg fundamentalnog teorema.

Teorem 2.3

(i) Vjerojatnost izumiranja π je najmanje rješenje jednadžbe

$$P(s) = s \;\; na \;\; [0,1]\,.$$

(ii) Ako je $m \leq 1$, onda je $\pi = 1$ (osim u slučaju $\mathbb{P}(Z_1 = 1) = 1$).

Ako je $m > 1$, onda je $\pi < 1$.

Dokaz gornjeg teorema nalazi se na kraju ovog poglavlja.

Zadatak 2.4 Neka inicijalna krvna kultura starta s jednom crvenom stanicom. U danoj jedinici vremena, crvena krvna stanica odumire i biva zamijenjena s dvije crvene krvne stanice s vjerojatnošću $\frac{1}{4}$, s jednom crvenom i jednom bijelom s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$ i s dvije bijele stanice s vjerojatnošću $\frac{1}{12}$. Svaka crvena stanica reproducira se na opisani način, dok svaka bijela stanica odumire u danoj vremenskoj jedinici bez reprodukcije. Odredite vjerojatnost odumiranja kulture, te pronađite očekivani broj crvenih krvnih stanica u n-toj generaciji.

Rješenje.

Uočimo najprije da je dovoljno promatrati samo crvene krvne stanice. Neka je Z_n broj crvenih stanica u n-toj generaciji. Slijedi da je $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ proces grananja takav da je $Z_0 = 1$, a distribucija potomaka

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Uz oznake uvedene prije Teorema 2.3 imamo

$$m = \mathbb{E}[Z_1] = 0 \cdot \tfrac{1}{12} + 1 \cdot \tfrac{2}{3} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{6}.$$

Dakle, $m > 1$, pa po Teoremu 2.3 vrijedi da je $\pi < 1$, a konkretnu vrijednost π-a možemo naći rješavajući jednadžbu

$$P(s) = s,$$

odnosno

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{2}{3}s + \tfrac{1}{4}s^2 = s.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $s_1 = 1$ i $s_2 = \frac{1}{3}$, pa je $\pi = \frac{1}{3}$.

Na kraju, koristeći Lemu 2.2 imamo da je $\mathbb{E}[Z_n] = m^n = (\frac{7}{6})^n$. $\square$

Zadatak 2.5 Promatrajmo populaciju gljiva koje su razmnožavaju nespolno. Svaka plodna gljiva ima dva potomka, a svaki od njih bit će sterilan ili plodan sa jednakom vjerojatnošću. Pokažite da populacija gljiva sigurno izumire, pod pretpostavkom da na početku imamo samo jednu plodnu gljivu. Nadalje, pronađite vjerojatnost izumiranja populacije gljiva ako svaka plodna gljiva ima tri umjesto dva potomka te odredite i očekivani ukupni broj plodnih gljiva do uključivo 10-te generacije.

Rješenje.

Za razmatranja o izumiranju očito je dovoljno promatrati samo plodne gljive. Neka je Z_n broj plodnih gljiva u n-toj generaciji. Pretpostavimo najprije da svaka plodna gljiva ima dva potomka. Tada je $Z_1 \sim B(2, \frac{1}{2})$, odnosno

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Kako je[2] $\mathbb{E}[Z_1] = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \leq 1$, po Teoremu 2.3 ne moramo rješavati jednadžbu $P(s) = s$ jer znamo da je $\pi = 1$, odnosno da će populacija gljiva gotovo sigurno izumrijeti.

Promotrimo sada drugi slučaj, tj. kada svaka plodna gljiva ima tri potomka. Tada je $Z_1 \sim B(3, \frac{1}{2})$, odnosno

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mathbb{E}[Z_1] = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1$, znamo da je $\pi < 1$ te tražimo minimalno rješenje jednadžbe

$$s = P(s) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8}s + \tfrac{3}{8}s^2 + \tfrac{1}{8}s^3$$

na $[0, 1]$. Budući da je $P(1) = 1$, tj. 1 je uvijek rješenje gornje jednadžbe, faktoriziranjem dobivamo

$$(s-1)(s^2 + 4s - 1) = 0.$$

Minimalno rješenje je $\pi = \sqrt{5} - 2 \approx 0.24$ pa je to tražena vjerojatnost izumiranja.

Na kraju, ukupan broj plodnih gljiva do uključivo 10-te generacije je $Z_0 + \cdots + Z_{10}$ te

[2]Prisjetite se formule za očekivanje slučajne varijable s binomnom razdiobom.

imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_0+\cdots+Z_{10}] &= \mathbb{E}[Z_0]+\cdots+\mathbb{E}[Z_{10}] = 1+m+\cdots+m^{10}\\ &= [m\neq 1] = \frac{1-m^{11}}{1-m} = 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{11}-2\,.\end{aligned}$$

□

Proces grananja u kojem je osnovna distribucija

$$Z_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1\\ q & p\end{pmatrix}, \quad q=1-p, p\in(0,1)\,,$$

nazivamo **binomnim procesom grananja**. Drugim riječima, svaka jedinka može imati samo jednog ili niti jednog potomka. Uočimo da je $\mathbb{E}[Z_1]=p<1$ pa ovakav proces grananja sigurno izumire.

Zadatak 2.6 Neka je (Z_n) binomni proces grananja i $T=\min\{n\geq 1\colon Z_n=0\}$ vrijeme izumiranja populacije. Izračunajte $\mathbb{P}(T=n)$ za svaki $n\geq 1$.

Rješenje.

Budući da u svakoj generaciji imamo najviše jednu jedinku i ona zatim ima najviše jednog potomka, populacija će izumrijeti u točno n-toj generaciji, tj. bit će $T=n$, ako i samo ako svaka od prvih $n-1$ jedinki ima jednog potomka, a jedinka iz $(n-1)-$ve generacije nema niti jednog potomka. Zbog nezavisnosti, vjerojatnost tog događaja je upravo $p^{n-1}q$. Formalno, za sve $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \{Z_1=1,\dots,Z_{n-1}=1,Z_n=0\} = \mathbb{P}(Z_{1,1}=1,\dots,Z_{n-1,1}=1,Z_{n,1}=0)\\ &= \mathbb{P}(Z_1=1)^{n-1}\mathbb{P}(Z_1=0) = p^{n-1}q.\end{aligned}$$

Dakle, T ima geometrijsku distribuciju na $\mathbb{N}$ s parametrom q ($X\sim \mathrm{G}(q)$).

□

Zadatak 2.7 Promatramo dva nezavisna procesa grananja, prvi s binomnom distribucijom grananja $B(3,\frac{2}{3})$, a drugi s distribucijom grananja zadanom funkcijom izvodnicom vjerojatnosti

$$P(s) = 0.2+0.4s+0.3s^2+0.1s^3.$$

Kolika je vjerojatnost da će proces koji u nultoj generaciji starta sa po jednom jedinkom iz svake populacije izumrijeti?

Rješenje.

Neka su (U_n) i (V_n) procesi grananja iz teksta zadatka, te neka je $Z_n=U_n+V_n$ sveukupna populacija. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Z_n)\text{ izumire}) &= \mathbb{P}(Z_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1)\\ &= \mathbb{P}(U_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1,\, V_m = 0 \text{ za neki } m \geq 1)\\ &= [(U_n) \text{ i } (V_m) \text{ nezavisni}]\\ &= \mathbb{P}(U_n = 0 \text{ za neki } n \geq 1)\mathbb{P}(V_m = 0 \text{ za neki } m \geq 1) = \pi_1\pi_2\,,\end{aligned}$$

pri čemu su π_1 i π_2 pripadne vjerojatnosti izumiranja procesa (U_n) i (V_m).

Budući da je $\mathbb{E}[U_1] = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 > 1$, $\pi_1 < 1$ te rješavamo

$$s = P_{U_1}(s) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s\right)^3 = \frac{1}{27} + \frac{2}{9}s + \frac{4}{9}s^2 + \frac{8}{27}s^3.$$

Faktoriziranjem dobivamo

$$(s-1)(8s^2 + 20s - 1) = 0.$$

Rješavanjem dobivamo da je $\pi_1 = (-5 + 3\sqrt{3})/4 \approx 0.049$.

Sada radimo isto za drugi proces grananja. Imamo da je $\mathbb{E}[V_1] = P'_{V_1}(1^-) = 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 1.3 > 1$, pa je $\pi_2 < 1$ te rješavamo

$$s = P_{V_1}(s) = 0.2 + 0.4s + 0.3s^2 + 0.1s^3.$$

Faktoriziranjem dobivamo

$$(s-1)(0.1s^2 + 0.4s - 0.2) = 0.$$

Rješavanjem dobivamo da je $\pi_2 = \sqrt{6} - 2 \approx 0.449$.

Konačno,

$$\mathbb{P}((Z_n)\text{ izumire}) = \pi_1\pi_2 \approx 0.022.$$

□

Iz rješenja prethodnog zadatka specijalno slijedi da ako je $(Z_n)_{n\geq 0}$ proces grananja koji kreće s $Z_0 = k \geq 2$ jedinki i svaka se razmnožava na isti način nezavisno od drugih, tada je

$$\mathbb{P}((Z_n)\text{ izumire}) = \pi^k\,,$$

pri čemu je π vjerojatnost izumiranja pripadajućeg procesa grananja koji kreće s **jednom** jedinkom u 0-toj generaciji.

Zadaci za vježbu

Zadatak 2.8 Žuti časopis *Stardust* svaki tjedan objavljuje tračeve. Svaki trač je istinit s vjerojatnošću $\frac{1}{10}$. Za svaki neistinit trač oklevetana osoba tužit će časopis s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$. Ako redakcija nije bila tužena za neki objavljeni neistinit trač, novinar će za sljedeći broj iz tog trača pripremiti nove i to jedan novi s vjerojatnošću $\frac{2}{7}$, dva nova s vjerojatnošću $\frac{2}{7}$, odnosno tri nova s vjerojatnošću $\frac{3}{7}$. Ako je trać bio istinit ili je redakcija bila tužena, novinari iz tog trača neće stvarati nove. Ako je *Stardust* u prvom broju krenuo s pet tračeva, izračunajte vjerojatnost da *Stardust* nikad ne ostane bez tračeva.

Zadatak 2.9 Neka je $(Z_n)_{n\geq 0}$ proces grananja uz $Z_0 = 1$ te $m = \mathbb{E}[Z_1]$. Ako je $T_n = \sum_{k=0}^{n} Z_k$ broj jedinki u populaciji do uključivo n-te generacije, u ovisnosti o m odredite $\mathbb{E}[T_n]$ za sve $n \geq 0$, te $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T_n]$. *Napomena:* Uočite da je $\lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n =: T_\infty$ ukupan broj jedinki u populaciji u svim generacijama. Koristeći tzv. teorem o monotonoj konvergenciji slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} T_n] = \mathbb{E}[T_\infty]$, dakle očekivanje ukupnog broja jedinki u populaciji u svim generacijama.

Zadatak 2.10 Ako je $(Z_n)_{n\geq 0}$ binomni proces grananja uz $Z_0 = 1$, odredite distribuciju od Z_n za sve $n \geq 0$ i to (i) direktno, kao u 2.6; (ii) tako da izračunate $P_n(s) = P_{Z_n}(s)$ koristeći činjenicu da je $P_n(s) = P(P_{n-1}(s)) = q + pP_{n-1}(s)$ za sve $n \geq 2$.

Zadatak 2.11

(a) Uz oznake kao u Propoziciji 1.8, pokažite da je

$$\mathrm{Var}\,(S_N) = \mathrm{Var}\,(N)\,\mathbb{E}[X_1]^2 + \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}\,(X_1)\ .$$

Napomena: Ovu formulu najlakše je pamtiti tako da se vidi što se događa kada je N ili X_1 konstanta.

(b) Pokažite da za jednostavni proces grananja $(Z_n)_{n\geq 0}$ (uz $Z_0 = 1$) vrijedi

$$\mathrm{Var}\,(Z_n) = \begin{cases} \sigma^2 n, & \text{ako je } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1} \cdot \frac{1-m^n}{1-m}, & \text{ako je } m \neq 1\,, \end{cases}$$

pri čemu je $\sigma^2 := \mathrm{Var}\,(Z_1) < \infty$.

(c) Ako Z_1 ima geometrijsku distribuciju na $\mathbb{N}_0$ s parametrom $p \in (0,1)$, usporedite $\mathrm{Var}\,(Z_{10})$ za $p = 0.3$ i $p = 0.5$.

Zadatak 2.12 Neka je $(Z_n)_{n\geq 0}$ proces grananja takav da je $Z_0 = 1$ te neka π vjerojatnost izumiranja. Uvjetovanjem na vrijednost od Z_1 (broj potomaka jedinke iz 0-te generacije) pokažite da je $\pi = P(\pi)$. *Uputa:* Uvjetno na $Z_1 = k$, proces $(Z_n)_{n\geq 1}$ je proces grananja s istom distribucijom potomaka, ali koji kreće s k jedinki koje se onda granaju nezavisno.

Rješenja zadataka: **Zad 2.8** $\pi \approx 0.8683$; **Zad 2.9** $\mathbb{E}[T_n] = \frac{1-m^{n+1}}{1-m}$ ako $m \neq 1$, $\mathbb{E}[T_n] = n+1$ ako $m = 1$; **Zad 2.11(c)** $\mathrm{Var}\,(Z_{10}) = 20$ ako $p = 0.5$ ($m = 1$), $\mathrm{Var}\,(Z_{10}) \approx 57198537$ ako $p = 0.3$ ($m = 2.33333$).

Dokaz Teorema 2.3

Neka je $p_n = \mathbb{P}(Z_1 = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ distribucija grananja. Specijalno,

$$P(s) = P_{Z_1}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \, .$$

Funkcija P je kao red potencija klase C^∞ na $(-1,1)$ te vrijedi

$$P^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} p_n s^{n-k} \, , \; s \in (-1,1) \, .$$

Dokaz provodimo u tri koraka – prva dva koraka dokazuju tvrdnju (i), a treći tvrdnju (ii).

1. korak Pokazujemo da je $\pi \in [0,1]$ uvijek jedno rješenje jednadžbe $P(s) = s$, tj. da je $P(\pi) = \pi$.

Uočimo da je $(\{Z_n = 0\})_n$ neopadajući niz događaja, tj. $Z_n = 0$ nužno povlači $Z_{n+1} = 0$ za sve n. Zbog neprekidnosti vjerojatnosti sada je

$$\pi = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\} \right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0).$$

Stavimo sada $\pi_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ i uočimo da je $\pi_n = P_n(0)$. Nadalje, po Propoziciji 2.1 za sve $n \geq 1$ i $s \in [0,1]$ vrijedi $P_{n+1}(s) = P(P_n(s))$. Specijalno, za $s = 0$ dobivamo da je

$$\pi_{n+1} = P_{n+1}(0) = P(P_n(0)) = P(\pi_n) \, , \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Budući da je P neprekidna na $[-1,1]$ slijedi da je

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} P(\pi_{n-1}) = P(\lim_{n\to\infty} \pi_{n-1}) = P(\pi) \, .$$

2. korak Pokazujemo da je π najmanje rješenje jednadžbe $P(s) = s$ na $[0,1]$.

Pretpostavimo da je $q \in [0,1]$ te $P(q) = q$. Budući da je $p_n \geq 0$ za sve n, imamo da je

$P'(s) \geq 0$ za sve $s \in [0,1)$ pa je P neopadajuća na $[0,1]$. Sada imamo da je

$$\pi_1 = P_1(0) = P(0) \underbrace{\leq}_{0 \leq q} P(q) = q\,,$$
$$\pi_2 = P(\pi_1) \underbrace{\leq}_{\pi_1 \leq q} P(q) = q\,,$$

i općenito

$$\pi_n = P(\pi_{n-1}) \leq P(q) = q\,,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Specijalno, $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n \leq q$, što smo i htjeli pokazati.

3. korak Pokazujemo tvrdnju (ii) teorema.

Geometrijski, $q \in [0,1]$ zadovoljava $P(q) = q$ akko se grafovi funkcija

$$y = P(s) \;\text{ i }\; y = s \;\text{ za } s \in [0,1]\,,$$

sijeku u $s = q$.

Pretpostavimo radi jednostavnosti da je $p_n > 0$ za neki $n \geq 2$. U tom slučaju je $P''(s) > 0$ za sve $s \in (0,1)$ pa slijedi da je funkcija P strogo konveksna na $[0,1]$. Budući da je i $P(0)?p_0 \in [0,1), P(1) = 1$ te P (strogo) rastuća, imamo dva slučaja koja ovise o nagibu funkcije P točki $s = 1$ s lijeva, tj. o $P'(1^-) = m$ (nacrtajte sliku!):

- Ako je $m \leq 1$, postoji samo jedno rješenje jednadžbe $P(s) = s$ na $[0,1]$ u $s = 1$, pa iz prva dva koraka slijedi da je nužno $\pi = 1$.
- Ako je $m > 1$, uz $s = 1$ postoji još jedno točno jedno rješenja jednadžbe $P(s) = s$ i to u $[0,1)$, pa iz prva dva koraka slijedi da je nužno $\pi < 1$.

3 Markovljevo svojstvo

U ovom ćemo poglavlju krenuti proučavati Markovljeve lance. Neka je S neki prebrojiv skup kojeg ćemo nazivati **skup stanja**. Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ **slučajni proces** na skupu stanja S – drugim riječima, svaki X_n je slučajna varijabla (ili, preciznije, slučajni element) koja poprima vrijednosti u skupu S.

Reći ćemo da je $(X_n)_n$ **Markovljev lanac na skupu stanja** S ako budućnost ovisi o prošlosti samo kroz sadašnjost, drugim riječima ako vrijedi tzv. **Markovljevo svojstvo**:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{3.1}$$

za sve $n \geq 0$ i $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Nas će zanimati **vremenski homogeni** Markovljevi lanci, tj. oni kojima vjerojatnosti u (3.1) ne ovise o vremenskom trenutku n. Zato ćemo za vjerojatnosti iz (3.1) moći koristiti oznaku p_{ij}, te ju nazivati **prijelaznom vjerojatnosti** iz stanja i u stanje j. Matricu $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ nazivat ćemo **matricom prijelaza** Markovljevog lanca $(X_n)_n$. Uočimo da vrijedi $p_{ij} \geq 0$ za sve $i, j \in S$ te $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$ za sve $i \in S$. Takve matrice nazivamo **stohastičkim** matricama.

Ako je $P = (p_{ij} : i, j \in S)$ stohastička matrica na S, da bi slučajan proces $(X_n)_{n\geq 0}$ bio vremenski homogen Markovljev lanac s prijelaznom matricom P dovoljno je da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{i,j}$$

za sve $n \geq 0$ i $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ za koje gornja uvjetna vjerojatnost dobro definirana (vidi [Von09, Poglavlje 1]). Ako još s $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ označimo početnu distribuciju procesa $(X_n)_{n\geq 0}$, tj. $\lambda_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$, skraćeno kažemo da je $(X_n)_n$ (λ, P)-Markovljev lanac (vidi [Von09, Definicija 1.4]). Od sada pa nadalje vremenski homogene Markovljeve lance ćemo jednostavno zvati Markovljevi lanci.

Zadatak 3.1 Pretpostavimo da se neka obitelj nalazi u srednjoj klasi (stanje 2) u nultoj generaciji. Kolika je vjerojatnost da će u prvoj generaciji obitelj biti u gornjoj klasi (stanje 3) i da će u drugoj generaciji pasti u nižu klasu (stanje 1). Matrica prijelaza među društvenima klasama dana je matricom

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Rješenje.

Ako je X_n klasa u kojoj je obitelj u n-toj generaciji, zadano je da je $(X_n)_n$ Markovljev lanac s prijelaznom matricom P uz početni uvjet $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$. Trebamo izračunati $\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 3, X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 3, X_0 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 3, X_0 = 2) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 3, X_0 = 2) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 3) \\
&= 1 \cdot p_{23} \cdot p_{31} = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04,
\end{aligned}$$

pri čemu prva jednakost vrijedi jer je $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$, dok četvrta slijedi korištenjem Markovljevog svojstva. $\square$

Na isti način kao u prethodnom zadatku dokaže se općenitija tvrdnja, da za (λ, P)-Markovljev lanac $(X_n)_n$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$$

za sve $n \geq 0$ i sva stanja $i_0, i_1, \ldots i_n \in S$. Gornje vjerojatnosti nazivamo *konačnodimenzionalnim distribucijama* procesa (X_n).

Zadatak 3.2 Neka je $(X_n)_n$ Markovljev lanac na S s prijelaznom matricom P te neka je $i \in S$ neko stanje takvo da je $p_{ii} > 0$. Neka je $\eta_i = \min\{n \geq 1 \colon X_n \neq i\}$ prvo vrijeme izlaska iz stanja i. Odredite distribuciju slučajne varijable η_i ako lanac kreće iz stanja i, tj. u odnosu na uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}_i(\,\cdot\,) = \mathbb{P}(\cdot\,| X_0 = i)$.

Riješenje.

Za $n \geq 1$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_i(\eta_i = n) &= \mathbb{P}_i(X_0 = i, X_1 = i, \ldots, X_{n-1} = i, X_n \neq i) \\
&= \mathbb{P}_i(X_n \neq i | X_{n-1} = i, \ldots, X_0 = i)\mathbb{P}_i(X_{n-1} = i, \ldots, X_0 = i) \\
&= (1 - \mathbb{P}_i(X_n = i | X_{n-1} = i, \ldots, X_0 = i))\mathbb{P}_i(X_{n-1} = i, \ldots, X_0 = i) \\
&= (1 - p_{ii}) \underbrace{\mathbb{P}_i(X_0 = i)}_{=1} \underbrace{p_{ii} p_{ii} \cdots p_{ii}}_{(n-1)\text{-puta}} = (1 - p_{ii}) p_{ii}^{n-1}.
\end{aligned}$$

U predzadnjoj jednakosti smo koristili jednostavnu činjenicu da je u odnosu na $\mathbb{P}_i$, $(X_n)_n$ ponovno Markovljev lanac i to s istom prijelaznom matricom P, ali uz početnu distribuciju koncentriranu u stanju i. Uočimo, pokazali smo da u odnosu na $\mathbb{P}_i$, η_i ima geometrijsku distribuciju na $\mathbb{N}$ s parametrom $1 - p_{ii}$. $\square$

Zadatak 3.3 U kutiji A nalaze se dvije bijele kuglice, a u kutiji B nalaze se tri crne kuglice. Iz svake kutije izvlači se po jedna kuglica i potom se izvučena kuglica iz kutije A stavlja u kutiju B i obratno. Ako je X_n broj crnih kuglica u kutiji A u n-tom koraku, tj. nakon n-tog izvlačenja (prebacivanja), proces $(X_n)_{n\geq 0}$ je Markovljev lanac na $S = \{0, 1, 2\}$ (Zašto?). Odredite mu matricu prijelaza i odredite vjerojatnost da se nakon tri prebacivanja u kutiji A nalaze dvije crne kuglice.

Rješenje.

Uočimo da u svakom koraku u kutiji A imamo 2, a u kutiji B 3 kuglice, pa je raspored kuglica po kutijama jedinstveno određen sa brojem X_n. Odredimo sada matricu prijelaza. Na primjer, odredimo za početak $p_{10} = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)$. Uočimo da je jedina mogućnost da iz situacije u kojoj imamo jednu crnu kuglicu u kutiji A nakon jednog izvlačenja dođemo do toga da u kutiji A nemamo niti jednu crnu kuglicu, ta da iz kutije A izvučemo crnu kuglicu, a iz kutije B bijelu kuglicu. Budući da je $X_0 = 1$, to znači da u kutiji A imamo jednu crnu i jednu bijelu kuglicu, pa je vjerojatnost da ćemo izvući crnu $\frac{1}{2}$. S druge strane, budući da je $X_0 = 1$, slijedi da su preostale dvije crne kuglice u kutiji B. Kako kutija B ima ukupno 3 kuglice, vjerojatnost da ćemo izvući bijelu je $\frac{1}{3}$. Zaključujemo da je $p_{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Pokažimo kako izračunati još jednu prijelaznu vjerojatnost, npr. $p_{11} = \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)$. Neka je $X_0 = 1$. Tada, kao i prije, u kutiji A imamo po jednu crnu i jednu bijelu kuglicu, a u kutiji B jednu bijelu i dvije crne kuglice. Dva su scenarija u kojima nakon jednog koraka imamo i dalje $X_1 = 1$, tj. jednu crnu kuglicu u kutiji A. Prvi je da smo i iz kutije A i iz kutije B izvadili bijelu kuglicu (za što je vjerojatnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$), a drugi da i iz kutije i iz kutije B izvučemo crnu kuglicu (za što je vjerojatnost $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$). Dakle, $p_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

Sada odmah možemo izračunati i $p_{12} = 1 - p_{10} - p_{11} = \frac{1}{3}$.

Na sličan način određujemo i ostale prijelazne vjerojatnosti pa dobivamo da je matrica prijelaza

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Prije nastavka, komentirajmo zašto je $(X_n)_{n\geq 0}$ (vremenski homogen) Markovljev lanac. Intuitivno, to je zato što ako za neki $n \geq 0$ znamo X_n (a time i raspored kuglica u kutijama), X_{n+1} ovisi samo o izvlačenju kuglica koje je nezavisno od svega što se događalo do trenutka n, a sve skupa ne ovisi o trenutku n u kojem se nalazimo. Formalno, na isti način i istu prijelaznu matricu P kao gore zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{i,j}$$

za sve $n \geq 0$ i $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$.

Odredimo sada $\mathbb{P}(X_3 = 2)$. Pokazat ćemo dva načina kako to možemo učiniti. Prije svega, budući da lanac kreće iz stanja 0, u sljedećem će trenutku sigurno biti u stanju 1, a kada je $X_3 = 2$, X_2 može biti 1 ili 2. Dakle

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 2) &= \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2) + \mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 2)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = 0)p_{01}p_{11}p_{12} + \mathbb{P}(X_0 = 0)p_{01}p_{12}p_{22} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{18}.\end{aligned}$$

Istu vjerojatnost možemo izračunati i rutinski koristeći [Von09, formula (1.10)]. Prema toj je formuli tražena vjerojatnost jednaka $(\lambda P^3)_2$, pri čemu je $\lambda = (1, 0, 0)$ vektor koji odgovara početnoj distribuciji. Budući da je u našem slučaju $(\lambda P^3)_2 = (P^3)_{02}$, ne moramo računati cijelu matricu P^3. Dobivamo

$$P^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{P^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{P},$$

odnosno

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = (P^3)_{02} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{18}.$$

□

Primjer 3.4 Neka je $(X_n)_n$ Markovljev lanac na skupu stanja S, T još jedan skup stanja, te neka je $f\colon S \to T$ neka funkcija. Neka je $Y_n = f(X_n)$ za sve $n \geq 0$. Je li (Y_n) nužno Markovljev lanac na T?

Prije svega, probajmo intuitivno naslutiti što bi mogao biti odgovor. O činjenici da je $(X_n)_n$ Markovljev lanac možemo razmišljati na način da su nam sve, za iduće korake, bitne informacije dostupne iz prošlosti i sadašnjosti, sadržane već u samoj sadašnjosti. Drugim riječima, ako i postoje neke korisne informacije iz prošlosti, iste te informacije imamo prisutne i u sadašnjosti pa nam stoga ne pridonose ništa novo. Međutim, ako na X_n primjenimo funkciju f (i tako dobijemo Y_n), moguće je da će se neke informacije izgubiti (ako f nije injekcija). Drugim riječima, moguće je da se dogodi da djelovanjem funkcije f taman *pobrišemo* informacije koje smo donijeli iz prošlosti, što znači da bi nam možda moglo biti korisno da sada opet znamo prošlost kako bismo povratili izgubljene informacije. Dakle, naslućujemo da (Y_n) ne mora nužno biti Markovljev lanac. To doista i je slučaj, kao što ćemo sada pokazati na primjeru.

Neka je $(X_n)_n$ jednostavna simetrična slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$ (vidi [Von09, Primjer 2.2]), odnosno neka je (Z_i) niz nezavisnih jednakodistribuiranih simetričnih Bernoullijevih slučajnih varijabli na $\{-1, 1\}$ (dakle $\mathbb{P}(Z_i = 1) = \mathbb{P}(Z_i = -1) = 1/2$), te neka je $X_0 = 0$ i za $n \geq 1$

$$X_n = Z_1 + \cdots + Z_n.$$

Prema [Von09, Primjer 2.2] znamo da je $(X_n)_n$ Markovljev lanac. Neka je $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te neka je $Y_n = f(X_n)$. Odredimo $\mathbb{P}(Y_3 = 0 | Y_2 = 0)$, a u tu svrhu odredimo najprije $\mathbb{P}(Y_2 = 0)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 \leq 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -2) \\
&= \mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = -1) + \mathbb{P}(Z_1 = -1, Z_2 = 1) + \mathbb{P}(Z_1 = -1, Z_2 = -1) \\
&= \mathbb{P}(Z_1 = 1)\mathbb{P}(Z_2 = -1) + \mathbb{P}(Z_1 = -1)\mathbb{P}(Z_2 = 1) + \\
&\quad + \mathbb{P}(Z_1 = -1)\mathbb{P}(Z_2 = -1) \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_3 = 0, Y_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_3 \leq 0, X_2 \leq 0) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = -1) + \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -2, X_3 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -2, X_3 = -3) \\
&= \mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = -1, Z_3 = -1) + \mathbb{P}(Z_1 = -1, Z_2 = 1, Z_3 = -1) + \\
&\quad + \mathbb{P}(Z_1 = -1, Z_2 = -1, Z_3 = 1) + \mathbb{P}(Z_1 = -1, Z_2 = -1, Z_3 = -1),
\end{aligned}$$

a ovo je, slično kao prije, $4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Zaključujemo da je

$$\mathbb{P}(Y_3 = 0 | Y_2 = 0) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

S druge strane, odredimo npr. $\mathbb{P}(Y_3 = 0 | Y_2 = 0, Y_1 = 1)$. Kao i prije, računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_3 = 0, Y_2 = 0, Y_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_3 \leq 0, X_2 \leq 0, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_3 = -1, X_2 = 0, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z_3 = -1, Z_2 = -1, Z_1 = 1) \\
&= \tfrac{1}{8},
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_2 = 0, Y_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 \leq 0, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(X_2 = 0, X_1 = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z_2 = -1, Z_1 = 1) \\
&= \tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(Y_3 = 0 | Y_2 = 0, Y_1 = 1) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} = \mathbb{P}(Y_3 = 0 | Y_2 = 0),$$

pa proces (Y_n) ne zadovoljava Markovljevo svojstvo.

Međutim, treba napomenuti da se uz dodatnu pretpostavku da je f injekcija može (i nije teško) pokazati da je $Y_n = f(X_n)$ Markovljev lanac - vidi Zadatak 3.12. □

Zadatak 3.5 Neka je $(X_n)_n$ Markovljev lanac na skupu stanja S. Dokažite da za sve $i, j \in S$ te $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \subseteq S$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Rješenje.

Raspisivanjem lijeve strane gornje jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)} \\
&= \frac{\sum_{i_0 \in A_0, \ldots, i_{n-1} \in A_{n-1}} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)} \\
&= \frac{\sum_{i_0 \in A_0, \ldots, i_{n-1} \in A_{n-1}} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, \ldots, X_0 = i_0) \mathbb{P}(X_n = i, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \sum_{i_0 \in A_0, \ldots, i_{n-1} \in A_{n-1}} \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \frac{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)}{\mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \in A_{n-1}, \ldots, X_0 \in A_0)} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i),
\end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtoj jednakosti iskoristili Markovljevo svojstvo lanca (X_n). □

Uočimo da tvrdnja prethodnog zadatka vrijedi za općenite Markovljeve lance, a ne samo za vremenski homogene, budući da smo u dokazu koristili samo Markovljevo svojstvo.

Primjer 3.6 Vezano uz prethodni zadatak prirodno se nameće pitanje vrijedi li jača tvrdnja, točnije, možemo li za proizvoljne $j \in S$ te $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ zaključiti da vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n \in A_n, \ldots, X_0 \in A_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n \in A_n) \, ? \tag{3.2}$$

U tu svrhu pogledajmo ponovno jednostavnu simetričnu slučajnu šetnju $(X_n)_n$ iz Primjera 3.4. Definirajmo podskup stanja $A_2 = \{-2, 0, 2\}$ i uočimo da će u drugom koraku šetnja sigurno biti u nekom stanju iz A_2, tj. $\{X_2 \in A_2\} = \Omega$. Dakle, informacija da se lanac u drugom koraku nalazi u nekom stanju iz A_2 zapravo ništa novog ne donosi. Zato je

$$\mathbb{P}(X_3 = 3 | X_2 \in A_2) = \mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 1, Z_3 = 1) = \frac{1}{8},$$

a budući da, ako prvi korak šetnje bude prema "dolje" u trećem koraku šetnja ne može doći u stanje 3, imamo da je

$$\mathbb{P}(X_3 = 3 | X_2 \in A_2, X_1 = -1) = 0,$$

pri čemu je zadnja uvjetna vjerojatnost dobro definirana jer je $\mathbb{P}(X_2 \in A_2, X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} > 0$. Dakle, (3.2) općenito ne mora vrijediti. □

Zadatak 3.7 Pretpostavimo da vjerojatnost da danas kiši iznosi 0.3 ako je i jučer i prekjučer bilo sunčano, odnosno 0.6 inače. Neka V_n označava vrijeme u danu n, pri čemu K označava kišu, a S sunce. Proces $(V_n)_{n\geq 0}$ nije Markovljev lanac (!), ali proces $(X_n)_{n\geq 1}$ definiran s $X_n = (V_{n-1}, V_n)$ jest Markovljev lanac na prostoru stanja $\{KK, KS, SK, SS\}$.

(a) Nađite matricu prijelaza Markovljevog lanca $(X_n)_{n\geq 1}$.

(b) Izračunajte vjerojatost da će kišiti u srijedu ako je i u nedjelju i u ponedjeljak bilo sunčano.

Rješenje.

Odredimo prvo npr. prijelazne vjerojatnosti iz stanja KK. Pretpostavimo da se lanac $(X_n)_n$ nalazi u stanju KK, dakle i danas i jučer je kišilo. Budući da vrijeme današnjega dana sutra postaje "jučerašnje" vrijeme, slijedi da prva koordinata stanja u koje lanac prelazi mora biti K, dakle sigurno je $p_{KK,SK} = p_{KK,SS} = 0$. Nadalje, po pretpostavci zadatka, vjerojatnost da i sutra pada kiša je 0.6, odnosno 0.4 da će biti sunčano pa je dakle $p_{KK,KK} = 0.6$ i $p_{KK,KS} = 0.4$.

Na sličan način odredimo i ostale prijelazne vjerojatnosti te dobijemo da je matrica prijelaza lanca $(X_n)_n$ jednaka

$$P = \begin{array}{c} \\ KK \\ KS \\ SK \\ SS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} KK & KS & SK & SS \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pretpostavimo da je nedjelja "nulti" dan. Za (b) dio potrebno je izračunati $\mathbb{P}(V_3 = K | V_1 = S, V_0 = S)$.

Imamo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(V_3 = K | V_1 = S, V_0 = S) = [V_2 = K \text{ ili } S] \\
&= \mathbb{P}(V_3 = K, V_2 = K | V_1 = S, V_0 = S) + \mathbb{P}(V_3 = K, V_2 = S | V_1 = S, V_0 = S) \\
&= \mathbb{P}(X_3 = KK, X_2 = SK | X_1 = SS) + \mathbb{P}(X_3 = SK, X_2 = SS | X_1 = SS) \\
&= p_{SS,SK} p_{SK,KK} + p_{SS,SS} p_{SS,SK} \\
&= 0.3 \cdot 0.6 + 0.7 \cdot 0.3 = 0.39.
\end{aligned}
$$

□

Iz prethodnog zadatka slijedi da povećavanjem prostora stanja teorija Markovljevih lanaca pokriva i procese u kojima za neki fiksan $m \in \mathbb{N}$ „budućnost ovisi o posljednjih m stanja". Za proces (V_n) s vrijednostima u $\{K, S\}$ iz prethodnog zadatka imali smo $m = 2$, tj. proces $\{(V_{n-1}, V_n)\}_{n \geq 1}$ je Markovljev lanac na $\{K, S\}^2$.

Zadatak 3.8 Ako je $(X_n)_{n \geq 0}$ Markovljev lanac na S s prijelaznom matricom P, pokažite da je onda za svaki $d \in \mathbb{N}$ proces $(Y_n)_{n \geq 0}$ definiran s $Y_n = X_{nd}$ također Markovljev lanac i odredite mu matricu prijelaza.

Rješenje.

Uočimo da proces $(Y_n)_{n \geq 0}$ također poprima vrijednosti u S. Neka su $n \geq 0$ te $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$ proizvoljni takvi da je

$$
\mathbb{P}(Y_0 = i_0, \ldots, Y_{n-1} = i_{n-1}, Y_n = i) > 0 \,.
$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i, Y_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, Y_0 = i_0) \\
&= \mathbb{P}\big(X_{(n+1)d} = j \big| X_{nd} = i, X_{(n-1)d} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\big) \\
&= \mathbb{P}(X_{nd+d} = j | X_{nd} = i, X_{nd-d} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
&= \mathbb{P}(X_d = j | X_0 = i) = p_{ij}^{(d)} \,,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili [Von09, Teorem 1.6] (popćenje Markovljevog svojstva) uz $m = nd$. Dakle, $(Y_n)_{n \geq 0}$ je Markovljev lanac s prijelaznom matricom P^d.

□

Zadatak 3.9 Neka su $(Z_i)_{i \geq 0}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable takve da je $\mathbb{P}(Z_i = 1) = p \in (0,1)$ i $\mathbb{P}(Z_i = 0) = q := 1 - p$. Neka je $S_0 = 0$ te $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ za $n \geq 1$. U svakom od sljedećih slučajeva odredite je li $(X_n)_{n \geq 0}$ Markovljev lanac. U slučajevima kada je $(X_n)_{n \geq 0}$ Markovljev lanac, pronađite mu prostor stanja i prijelazne vjerojatnosti.

(a) $X_n = Z_n$,

(b) $X_n = S_n$,

(c) $X_n = S_0 + \cdots + S_n$,

(d) $X_n = (S_n, S_0 + \cdots + S_n)$.

Rješenje.

(a) i (b) Ovo su [Von09, Primjeri 2.1 i 2.2] - odgovor je očito DA. Uočite da u oba slučaja postoji funkcija f takva da je $X_n = f(X_{n-1}, Z_n)$ za sve $n \geq 1$ pri čemu je $(Z_n)_{\geq 1}$ nezavisan od X_0, pa tvrdnja slijedi direktno iz [Von09, Teorem 2.8] te su prijelazne vjerojatnosti dane s

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(f(i, Z_1) = j)\,,\ i, j \in S\,.$$

U prvom slučaju prostor stanja je $S = \{0, 1\}$, a matrica prijelaza

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} \end{array}.$$

U drugom slučaju prostor stanja je $S = \{0, 1, 2, \dots\}$, a prijelazne vjerojatnosti zadovoljavaju

$$p_{i,i+1} = p\,,\ p_{i,i} = q\,,$$

za sve $i \in S$ (ostale prijelazne vjerojatnosti su jednake 0).

(c) Primijetimo da je

$$X_{n+1} = X_n + S_{n+1} = X_n + S_n + Z_{n+1}\,. \tag{3.3}$$

Budući da, uz X_n i Z_{n+1}, X_{n+1} ovisi i o slučajnoj varijabli S_n koja nije nezavisna od slučajnih varijabli $X_1, \dots, X_{n-1}$ ($S_n = X_n - X_{n-1}$), naslućujemo da $(X_n)_{n\geq 0}$ možda ne zadovoljava Markovljevo svojstvo. Pokažimo da je to zaista istina.

Najprije, korisno je zapisati ovaj proces kao

$$X_n = nZ_1 + (n-1)Z_2 + \cdots + Z_n\,,\ n \geq 0\,.$$

Nakon kraćeg razmišljanja vidimo da $X_3 = 3$ možemo dobiti na dva načina:

1. ako je $Z_1 = 1, Z_2 = Z_3 = 0$ (ili ekvivalentno $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$), ili

2. ako je $Z_1 = 0, Z_2 = Z_3 = 1$ (ili ekvivalentno $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 3$).

Nadalje, distribucija od X_4 bitno ovisi o tome na koji smo od ta dva načina došli do $X_3 = 3$. U prvom slučaju je $S_3 = 1$ pa iz (3.3) slijedi da je

$$X_4 = \begin{cases} 4, & \text{s vjerojatnošću } q\,, \\ 5, & \text{s vjerojatnošću } p\,, \end{cases}$$

U drugom slučaju je $S_3 = 2$, pa je

$$X_4 = \begin{cases} 5, & \text{s vjerojatnošću } q\,, \\ 6, & \text{s vjerojatnošću } p\,, \end{cases}$$

Odavde slijedi da

$$\mathbb{P}(X_4 = 4 | X_3 = 3, X_2 = 2, X_1 = 1) = 1 - p \neq 0 = \mathbb{P}(X_4 = 4 | X_3 = 3, X_2 = 1, X_1 = 0),$$

pa zaključujemo da $(X_n)_n$ ne zadovoljava Markovljevo svojstvo jer bi u suprotnom te dvije vjerojatnosti trebale biti jednake.

(d) Uočimo da proces poprima vrijednosti u skupu $S := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Ako s $X'_n = S_0 \cdots + S_n$, $n \geq 0$, označimo proces iz prethodnog dijela za sve $n \geq 0$ imamo

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (S_{n+1}, X'_{n+1}) = (S_n + Z_{n+1}, X'_n + S_n + Z_{n+1}) \\ &= f((S_n, X'_n), Z_{n+1}) = f(X_n, Z_{n+1})\,, \end{aligned}$$

za funkciju

$$f((s, x'), k) = (s + k, x' + s + k)\,,\ s, x' \geq 0,\ k \in \{0, 1\}\,.$$

Budući da je $X_0 = (0, 0)$ očito nezavisna od niza $(Z_n)_{n\geq 1}$, iz [Von09, Teorem 2.8] slijedi je $(X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanas na S (zapravo na nekom podskupu, ali to nije toliko bitno) čije prijelazne vjerojatnosti zadovoljavaju

$$p_{(s,x'),(s,x'+s)} = q\,,\ p_{(s,x'),(s+1,x'+s+1)} = p\,,$$

za sve $s, x' \geq 0$ (sve ostale prijelazne vjerojatnosti su 0). $\square$

Zadaci za vježbu

Zadatak 3.10 Neka su $(X_n)_n$ i (Y_n) **nezavisni** Markovljevi lanci s istim skupom stanja S i matricom prijelaza P te početnim distribucijama $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$, odnosno $\mu = (\mu_i :$

$i \in S$). Definirajmo novi proces (Z_n) na prostoru stanja $S \times S$ sa $Z_n = (X_n, Y_n)$. Pokažite da je (Z_n) Markovljev lanac i odredite mu početnu distribuciju i matricu prijelaza.

Zadatak 3.11 Neka je $(Y_n)_{n \geq 1}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_1 = 2)$. Neka je $X_0 = 1$ te

(a) $X_n = Y_1 Y_2 \cdots Y_n$ za $n \geq 1$, ili

(b) $X_n = X_1 X_2 \cdots X_{n-1} Y_n$ za $n \geq 1$.

U oba slučaja odredite je li $(X_n)_n$ Markovljev lanac? Ako je odgovor da, odredite prostor stanja i matricu prijelaza.

Zadatak 3.12 Neka je $(X_n)_{n \geq 0}$ (λ, P)-Markovljev lanac na S, $f : S \to T$ funkcija, i $(Y_n)_{n \geq 0}$ proces definiran s $Y_n = f(X_n)$ za sve $n \geq 0$.

(a) Ako je f injekcija, pokažite da je $(Y_n)_{n \geq 0}$ također vremenski homogen Markovljev lanac i odredite mu matricu prijelaza.

(b) Postoje li S, λ i P takvi da je $(Y_n)_{n \geq 0}$ vremenski homogen Markovljev lanac za sve funkcije f?

Rješenja zadataka: **Zad 3.10** Početna distribucija je $\tilde{\lambda}_{(i,j)} = \lambda_i \mu_j$, $i, j \in S$, a prijelazne vjerojatnosti $p_{(i,j),(k,l)} = p_{ik} p_{jl}$ za sve $i, j \in S$; **Zad 3.11** (a) Da, $S = \{1, 3, 5, \dots\}$, $p_{i,i} = p = 1 - p_{i,2i}$ za sve $i \in S$ (b) Ne; **Zad 3.12** (a) $p_{k,l} = p_{f^{-1}(k), f^{-1}(l)}$ za sve $k, l \in T$. (b) To vrijedi na primjer ako je $(X_n)_n$ njd niz.

4 Dekompozicija prostora stanja

Neka je (X_n) Markovljev lanac na prostoru stanja S i matricom prijelaza P. Za proizvoljan podskup stanja $B \subseteq S$ definiramo **prvo vrijeme pogađanja** skupa B s

$$T_B = \min \{n \geq 0 : X_n \in B\},$$

uz konvenciju da je $\min \emptyset = +\infty$. U slučaju $B = \{j\}$ za neko $j \in S$ pišemo $T_j = T_{\{j\}}$.

Nadalje, kažemo da je stanje j **dostižno** iz stanja i, u oznaci $i \longrightarrow j$, ako će lanac polazeći iz stanja i s pozitivnom vjerojatnošću u nekom trenutku doći u stanje j, tj. ako je

$$\mathbb{P}_i(T_j < \infty) > 0.$$

Uočimo da je po definiciji $i \longrightarrow i$ za sve $i \in S$ jer je $\mathbb{P}_i(T_i = 0) = 1$.

Nije teško za pokazati da je j dostižno iz i ako i samo ako je $\mathbb{P}_i(X_n = j) = p_{ij}^{(n)} > 0$ za neko $n \geq 0$, odnosno ako i samo ako je $\mathbb{P}_i(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j) = p_{ii_1} \ldots p_{i_{n-1}j} > 0$ za neko $n \geq 0$ i neka stanja $i_1, \ldots, i_{n-1}$.

Na kraju, kažemo da stanja i i j **komuniciraju**, u oznaci $i \longleftrightarrow j$, ako vrijedi $i \longrightarrow j$ i $j \longrightarrow i$, tj. ako lanac polazeći stanja i s pozitivnom vjerojatnošću u nekom trenutku dolazi stanje j i potom se vraća u stanje i.

Budući da je relacija komuniciranja "$\longleftrightarrow$" relacija ekvivalencije, prostor stanja S možemo rastaviti na pripadne klase ekvivalencije. Uzmemo neko stanje $i \in S$ i stavimo njega i sva stanja koja komuniciraju s njim u jednu klasu, npr. C_1. Zatim uzmemo neko stanje koje nije u C_1 te stavimo njega i sva stanja koja komuniciraju s njim u drugu klasu, npr. C_2. Na taj način nastavimo dok nismo sva stanja rasporedili u klase. Skupove $C_1, C_2, \ldots$ nazivamo **klase komuniciranja**.

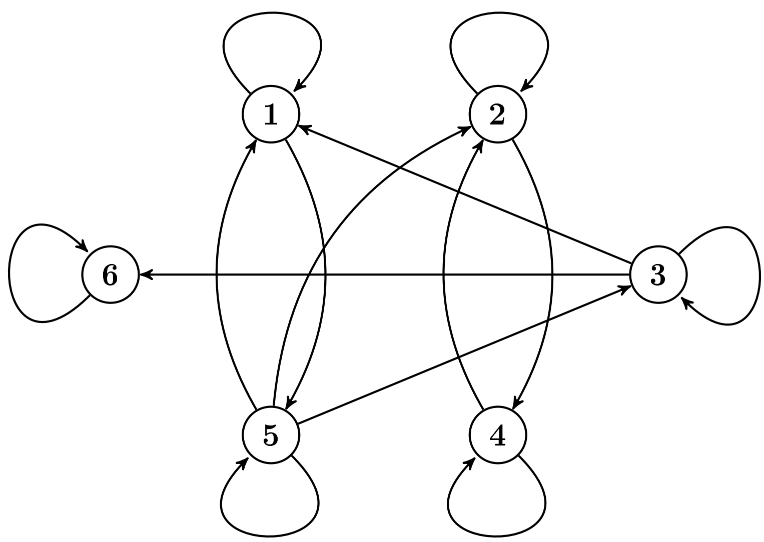
Zadatak 4.1 Odredite klase komuniciranja Markovljevog lanca (X_n) s prostorom stanja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje.

Pri određivanju klasa često je korisno (barem u slučaju konačnog prostora stanja) matrici prijelaza pridružiti usmjereni graf kojemu su vrhovi stanja iz S te su dva vrha $i, j \in S$

spojena usmjerenim bridom ako je $\mathbb{P}_i(X_1 = j) = p_{ij} > 0$, tj. ako lanac u jednom koraku može prijeći iz stanja i u stanje j.



Iz grafa je očito da su klase komuniciranja $C_1 = \{1, 3, 5\}$, $C_2 = \{2, 4\}$, $C_3 = \{6\}$.

□

Primjer 4.2 Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $\mathbb{N}_0$ koji kreće iz 0, tj. $X_0 = 0$, s prijelaznim vjerojatnostima $p_{ii+1} = 1$, te $p_{ij} = 0$ za $j \neq i + 1$, $i \geq 1$. Uočimo da se ovaj lanac u svakom koraku pomakne za jedno mjesto na desno, dakle $X_n = n$. Zato se ovaj lanac naziva *determinističkim monotonim Markovljevim lancem* na $\mathbb{N}_0$ (vidi [Von09, Primjer 2.6]).

Odredimo klase komuniciranja ovog lanca. Uočimo da polazeći iz stanja i lanac može (i sigurno hoće) u točno $j - i$ koraka prijeći u stanje j za sve $j \geq i + 1$, tj. $p_{ij}^{(j-i)} = 1 > 0$ pa vrijedi $i \longrightarrow j$ za sve $j \geq i + 1$. Ipak, budući da se lanac uvijek kreće nadesno, ne postoji mogućnost da za stanja i, j takva da je $j \geq i + 1$ vrijedi $j \longrightarrow i$. Dakle, vrijedi $i \longrightarrow j$ ako i samo ako je $j \geq i$ (po definiciji uvijek imamo $i \longrightarrow i$) i nadalje, $i \longleftrightarrow j$ ako i samo ako je $i = j$. Dakle klase komuniciranja su $C_i = \{i\}$ za $i \geq 0$. □

Kažemo da je Markovljev lanac **ireducibilan** ako sva stanja međusobno komuniciraju, tj. ako postoji samo jedna klasa komuniciranja. Primijetimo da lanci iz Zadatka 4.1 i Primjera 4.2 nisu ireducibilni.

Za podskup stanja $B \subseteq S$ kažemo da je **zatvoren** ako za sve $i \in B$ vrijedi

$$\mathbb{P}_i(T_{B^c} = \infty) = 1,$$

tj. ako lanac, kada se nalazi u skupu B, iz njega ne može izaći. Stanje $j \in S$ je **apsorbi-**

rajuće ako je $\{j\}$ zatvoren skup. Tvrdnja sljedećeg zadatak je intuitivno očita.

Zadatak 4.3 Dokažite da je skup $B \subseteq S$ zatvoren ako i samo ako

$$p_{ij} = 0\,, \text{ za sve } i \in B, j \in B^c\,.$$

Specijalno, $j \in S$ je apsorbirajuće ako i samo ako $p_{jj} = 1$.

Rješenje.

Ako je B zatvoren skup onda za svaki $i \in B$ vrijedi

$$0 = \mathbb{P}_i(T_{B^c} < \infty) \geq \mathbb{P}_i(T_{B^c} = 1) = \sum_{j \in B^c} p_{ij}\,,$$

pa je $p_{ij} = 0$ za sve $j \in B^c$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $p_{ij} = 0$ za sve $i \in B, j \in B^c$. Neka je $i \in B$ proizvoljan. Imamo

$$\mathbb{P}_i(T_{B^c} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(T_{B^c} = n)\,,$$

a za svaki $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(T_{B^c} = n) &= \mathbb{P}_i(X_1 \in B, \ldots, X_{n-1} \in B, X_n \in B^c) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1} \in B, i_n \in B^c} p_{ii_1} \cdots \underbrace{p_{i_{n-1}i_n}}_{=0} = 0\,. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}_i(T_{B^c} < \infty) = 0$, tj. B je zatvoren.

Druga tvrdnja slijedi iz prve za $B = \{j\}$. $\square$

Na primjer, u Zadatku 4.1 klasa C_1 nije zatvoren skup, dok su klase C_2 i C_3 zatvoreni skupovi. Specijalno, stanje 6 je apsorbirajuće.

Zadaci za vježbu

Zadatak 4.4 Za $B \subseteq S$ definiramo **zatvarač** od B, u oznaci $Cl(B)$, kao najmanji zatvoreni skup stanja koji sadrži B.

(a) Dokažite da je $Cl(\{j\}) = \{k \in S : j \longrightarrow k\}$ za svaki $j \in S$. *Uputa:* Dovoljno je pokazati da je skup $\{k \in S : j \longrightarrow k\}$ zatvoren te sadržan u $Cl(\{j\})$.

(b) Odredite $Cl(\{j\})$ za svaki $j \in \mathbb{N}_0$ slučaju determinističkog monotonog Markovljevog lanca na $\mathbb{N}_0$.

5 Apsorpcijske vjerojatnosti

Zadatak 5.1 Fabijanov posao s restoranom fluktuira između tri stanja: bankrot (stanje 0), na rubu bankrota (stanje 1), solventnost (stanje 2). Prijelaz iz stanja u stanje dan je sljedećom matricom

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}.$$

(a) Kolika je vjerojatnost da Fabijan, krenuvši iz solventnosti, ikada bankrotira?

(b) Ako je Fabijan krenuo iz solventnosti, odredite očekivano vrijeme do bankrota.

Rješenje.

Neka je (X_n) pripadni Markovljev lanac. Primijetimo da je 0 apsorpcijsko stanje.

(a) Zanima nas $\mathbb{P}_2(T_0 < \infty)$. U tu svrhu definiramo $h_i = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$ za $i = 0, 1, 2$.

Uočimo najprije da je trivijalno $h_0 = 1$. Nadalje, uvjetovanjem na prvi korak lanca, po formuli potpune vjerojatnosti dobivamo da h_1 zadovoljava

$$\begin{aligned} h_1 = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(X_1 = 0)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty | X_1 = 0) + \mathbb{P}_1(X_1 = 1)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty | X_1 = 1) \\ + \mathbb{P}_1(X_1 = 2)\mathbb{P}_1(T_0 < \infty | X_1 = 2). \end{aligned}$$

Koristeći Markovljevo svojstvo i vremensku homogenost procesa (X_n), tj. intuitivno, lanac znajući svoju trenutnu poziciju, zaboravlja prošlost i kreće ispočetka, imamo da je $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty | X_1 = i) = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty) = h_i$. Dakle, h_1 zadovoljava

$$\begin{aligned} h_1 &= p_{10}h_0 + p_{11}h_1 + p_{12}h_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}h_1 + \frac{1}{4}h_2. \end{aligned}$$

Na isti način dobijemo da h_2 zadovoljava

$$\begin{aligned} h_2 &= p_{20}h_0 + p_{21}h_1 + p_{22}h_2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}h_1 + \frac{1}{4}h_2. \end{aligned}$$

Sada primijetimo da je $h_1 = h_2$ pa lako dobijemo da je $h_1 = h_2 = 1$. Dakle, $\mathbb{P}_2(T_0 < \infty) = h_2 = 1$, tj. Fabijan će gotovo sigurno bankrotirati.

(b) Sada želimo odrediti $\mathbb{E}_2[T_0]$. Postupamo slično kao i u dijelu (a). Najprije definiramo $g_i = \mathbb{E}_i[T_0]$ za $i = 0, 1, 2$.

Trivijalno imamo da je $g_0 = 0$. Nadalje, analizom prvog koraka lanca dobivamo da g_1 zadovoljava

$$\begin{aligned} g_1 = \mathbb{E}_1[T_0] &= \mathbb{P}_1(X_1 = 0)\mathbb{E}_1[T_0|X_1 = 0] + \mathbb{P}_1(X_1 = 1)\mathbb{E}_1[T_0|X_1 = 1] \\ &\quad + \mathbb{P}_1(X_1 = 2)\mathbb{E}_1[T_0|X_1 = 2]. \end{aligned}$$

Sada koristeći Markovljevo svojstvo i vremensku homogenost procesa (X_n) imamo da je $\mathbb{E}_1[T_0|X_1 = i] = 1 + \mathbb{E}_i[T_0] = 1 + g_i$. Dakle, g_1 zadovoljava

$$\begin{aligned} g_1 &= p_{10}(1 + g_0) + p_{11}(1 + g_1) + p_{12}(1 + g_2) \\ &= \underbrace{p_{10} + p_{11} + p_{12}}_{=1} + p_{10}g_0 + p_{11}g_1 + p_{12}g_2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}g_1 + \frac{1}{4}g_2. \end{aligned}$$

Na isti način dobijemo da g_2 zadovoljava

$$\begin{aligned} g_2 &= 1 + p_{20}g_0 + p_{21}g_1 + p_{22}g_2 \\ &= 1 + \frac{1}{4}g_1 + \frac{1}{4}g_2. \end{aligned}$$

Konačno, primijetimo da je $g_1 = g_2$ i lako dobijemo da je $g_1 = g_2 = 2$. Dakle, očekivano vrijeme do bankrota je $\mathbb{E}_2[T_0] = g_2 = 2$.

$\square$

Poopćimo sada račun iz prethodnog zadatka. Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja S s prijelaznom matricom P te neka je $B \subseteq S$. Definiramo za $i \in S$ vjerojatnosti pogađanja skupa B

$$h_i^B = \mathbb{P}_i(T_B < \infty).$$

U prethodnom zadatku smo imali $B = \{0\}$.

Teorem 5.2 *Vektor vjerojatnosti pogađanja $h^B = (h_i^B : i \in S)$ je minimalno nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} h_i^B = 1 & , \ i \in B \\ h_i^B = \sum_{j \in S} p_{ij} h_j^B & , \ i \notin B. \end{cases}$$

Minimalnost u prethodnom teoremu znači da ako je $x = (x_i : i \in S)$ neko drugo nenegativno rješenje gornjeg sustava, onda je $x_i \geq h_i^B$ za sve $i \in S$.

Nadalje, označimo s $g_i = \mathbb{E}_i[T_B]$ za $i \in S$, očekivano vrijeme pogađanja skupa B.

Teorem 5.3 *Vektor očekivanih vremena pogađanja $g^B = (g_i^B : i \in S)$ je minimalno* *nenegativno rješenje sustava linearnih jednadžbi*

$$\begin{cases} g_i^B = 0 & , \ i \in B \\ g_i^B = 1 + \sum_{j \in S} p_{ij} g_j^B & , \ i \notin B. \end{cases}$$

Sada ćemo riješiti Zadatak 1.11 na nešto elegantiji način koristeći prikladan Markovljev lanac i apsorpcijske vjerojatnosti.

Zadatak 5.4 Baca se simetrična kocka dok ne padnu dvije uzastopne šestice. Odredite očekivani broj bacanja dok se to ne dogodi.

Rješenje.

Definiramo Markovljev lanac (X_n) na skupu stanja $S = \{0, 1, 2\}$ koji *pamti* koliko je uzastopnih šestica palo. Preciznije, stavimo $X_0 = 0$ te za $n \geq 1$

$$X_n = \begin{cases} 0 & , \text{ u } n\text{-tom bacanju nije pala šestica} \\ 1 & , \text{ u } n\text{-tom bacanju pala šestica, a u } (n-1)\text{-vom nije} \\ 2 & , \text{ u } n\text{-tom i } (n-1)\text{-vom bacanju pala šestica,} \end{cases}$$

pri čemu stanje 2 npr. proglasimo apsorpcijskim budući da nas zanima samo ponašanje lanca do trenutka kada se pojave dvije uzastopne šestice. Matrica prijelaza lanca (X_n) dana je s

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Zanima nas $\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}_0[T_2]$. Stavimo $g_i = \mathbb{E}_i[T_2]$ za $i = 0, 1, 2$ pa po Teoremu 5.3 dobivamo sustav

$$\begin{cases} g_2 & = 0 \\ g_0 & = 1 + \frac{5}{6} g_0 + \frac{1}{6} g_1 \\ g_1 & = 1 + \frac{5}{6} g_0 + \frac{1}{6} g_2, \end{cases}$$

čije je rješenje $g_0 = 42, g_1 = 36, g_2 = 0$. Dakle, $\mathbb{E}_0[T_2] = g_0 = 42$. $\square$

Zadatak 5.5 Iva i još četvoro djece stoje na vrhovima pravilnog peterokuta te se dodaju loptom tako da dodaju s jednakom vjerojatnošću svakom od dvoje djece koja stoje na najbliža dva vrha. Kolika je vjerojatnost da, ako lopta krene od Ive, obiđe svu ostalu djecu prije nego se vrati Ivi?

Rješenje.

Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ koji opisuje kretanje lopte, pri čemu stanja predstavljaju vrhove peterokuta. Stavimo da je 0 vrh na kojem se nalazi Iva. Matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Neka je A događaj čiju vjerojatnost trebamo izračunati. Analizom prvog koraka lanca dobivamo da je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_0(A) &= \mathbb{P}_0(X_1 = 1)\mathbb{P}_0(A|X_1 = 1) + \mathbb{P}_0(X_1 = 4)\mathbb{P}_0(A|X_1 = 4) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(T_4 < T_0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_4(T_1 < T_0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathbb{P}_1(T_4 < T_0) \\ &= \mathbb{P}_1(T_4 < T_0), \end{aligned}$$

pri čemu druga jednakost slijedi iz Markovljevog svojstva (i vremenske homogenosti) procesa $(X_n)_{n\geq 0}$, dok $\mathbb{P}_1(T_4 < T_0) = \mathbb{P}_4(T_1 < T_0)$ slijedi zbog simetrije.

Ako stavimo $h_i = \mathbb{P}_i(T_4 < T_0)$ za $i \in S$, analizom prvog koraka dobijemo da h_i-evi zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} h_0 &= 0 \\ h_1 &= \frac{1}{2}h_0 + \frac{1}{2}h_2 \\ h_2 &= \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2}h_3 \\ h_3 &= \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{2}h_4 \\ h_4 &= 1. \end{cases}$$

Rješenje sustava je $h_0 = 0, h_1 = \frac{1}{4}, h_2 = \frac{2}{4}, h_3 = \frac{3}{4}, h_4 = 1$. Dakle tražena vjerojatnost je $\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}_1(T_4 < T_0) = h_1 = \frac{1}{4}$.

Alternativno, mogli smo stanje 0 "proglasiti" apsorpcijskim, tj. promatrati lanac s matricom prijelaza $\tilde{P}$ u kojoj je $\tilde{p}_{00} = 1$, a svi ostali retci jednaki retcima matrice P. U tom slučaju je

$$h_i = \mathbb{P}_i(T_4 < T_0) = \mathbb{P}_i\left(\tilde{T}_4 < \tilde{T}_0\right) = \mathbb{P}_i\left(\tilde{T}_4 < \infty\right),\ i \in S\,.$$

Dakle, možemo iskoristiti Teorem 5.2 – dobije se isti sustav kao gore uz $h_0 = h_0$ umjesto $h_0 = 0$, ali $h_0 = 0$ onda slijedi iz minimalnosti (ili jednostavno zaključimo da je $h_0 = 0$

jer je 0 apsorpcijsko za $\tilde{P}$). $\square$

U slučaju beskonačnog skupa stanja, minimalnost rješenja u prethodnim teoremima može biti korisna.

Zadatak 5.6 ("Kockareva propast") Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac na $\mathbb{N}_0$ s prijelaznim vjerojatnostima

$$\begin{aligned} &p_{00} = 1 \\ &p_{i,i-1} = q, p_{i,i+1} = p\,, \text{ za } i \geq 1\,, \end{aligned}$$

gdje je $0 < p = 1 - q < 1$. Izračunajte $h_i = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$ (rješenje ovisi o parametru p).

(**Uputa:** Koristeći jako Markovljevo svojstvo pokažite da vrijedi $h_i = h_1^i$.)

Rješenje.

Po teoremu, h_i-evi su minimalno nenegativno rješenje sustava

$$\begin{cases} h_0 &= 1 \\ h_i &= qh_{i-1} + ph_{i+1}\,,\ i \geq 1\,. \end{cases} \tag{5.1}$$

Ključno je ovdje primijetiti da, ukoliko krećemo iz stanja $i \geq 2$, da bismo došli u stanje 0, prvo moramo posjetiti sva stanja $1 \leq k \leq i-1$. Pokažimo prvo da je $h_2 = h_1^2$:

$$\begin{aligned} h_2 = \mathbb{P}_2(T_0 < \infty) &= \mathbb{P}_2(T_0 < \infty, T_1 < \infty) \\ &= \mathbb{P}_2(T_1 < \infty)\mathbb{P}_2(T_0 < \infty | T_1 < \infty)\,. \end{aligned}$$

Iz oblika lanca slijedi da je $\mathbb{P}_2(T_1 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = h_1$. S druge strane, ako krećemo iz 2 te je $T_1 < \infty$ (u tom slučaju je očito $X_{T_1} = 1$), događaj $\{T_0 < \infty\}$ ovisi samo o tome je li proces $X_{T_1}, X_{T_1+1}, X_{T_1+2}, \ldots$ posjetio stanje 0. Budući da je T_1 vrijeme zaustavljanja, koristeći jako Markovljevo svojstvo ([Von09, Teorem 5.4]) slijedi da je $\mathbb{P}_2(T_0 < \infty | T_1 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = h_1$. Dakle, $h_2 = h_1^2$. Indukcijom se na sličan način lako pokaže da je $h_i = h_1^i$ za sve $i \geq 2$.

Na kraju, iz jednadžbe

$$h_1 = q + ph_2 = q + ph_1^2\,,$$

slijedi da je $h_1 = 1$ ili $h_1 = \frac{q}{p}$, odnosno $h_i = 1$ za sve $i \geq 0$ ili $h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i$ za sve $i \geq 0$. Lako se vidi da oba niza zadavoljavaju sustav (5.1) pa Teorem 5.2 kaže da trebamo uzeti manje od ta dva rješenja.

1. Ako je $q \geq p$ (što je inače slučaj u kockarnicama), tj. $\frac{q}{p} \geq 1$, minimalnost povlači

da je $h_i = 1$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$. Uočite da ovo zapravo slijedi i direktno jer znamo da $h_i \in [0, 1]$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$.

2. Ako je $q < p$, tj. $\frac{q}{p} < 1$ tada je $h_i = (\frac{q}{p})^i$ za sve $i \in \mathbb{N}_0$.

Dakle, čak i ako nađete pošten kasino ($p = q = 1/2$) gotovo sigurno ćete bankrotirati. Ovaj fenomen često se naziva "Kockareva propast".

Alternativno, mogli smo primijetiti da je (5.1) homogena linearna rekurzija reda 2 pa koristeći znanje iz kolegija Diskretna matematika naći sva rješenja ove jednadžbe i uzeti minimalno. $\square$

Zadaci za vježbu

Zadatak 5.7 Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ i s matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Ako je početna distribucija lanca $\lambda = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$, izračunajte vjerojatnost da lanac posjeti stanje 1 prije stanja 3. Koliko je očekivano vrijeme do prvog posjeta lanca skupu stanja $\{1, 3\}$?

Zadatak 5.8 Jedan zatvorenik ima 2 kune, a potrebno mu je 10 kuna za platiti jamčevinu. Čuvar mu se smilovao i ponudio sljedeću igru. U svakom koraku zatvorenik stavlja ulog i bira jednu od dvije strane novčića. Zatim čuvar baci simetričan novčić – ako je zatvorenik pogodio stranu dobiva natrag svoj ulog i još toliko koliko je uložio (dakle, udvostruči ulog), a ako promaši stranu gubi ulog. Zatvorenik se odlučio za sljedeću hrabru strategiju:

- Ako ima 5 ili manje kuna, ulaže sve što ima;
- Ako ima između 6 i 9 kuna, ulaže točno koliko mu je potrebno da, u slučaju pogotka, ima ukupno 10 kuna (npr. ako ima 6 kuna, ulaže 4 kune).

Odredite vjerojatnost da zatvorenik dostigne željenih 10 kuna (prije nego bankrotira).

(*Uputa:* Dovoljno je promatrati samo ona stanja koja pripadni lanac može posjetiti.)

Zadatak 5.9 Neka je (X_n) niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli koje označavaju ishod bacanja simetrične kocke. Neka je $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ za $n \geq 1$

te $T = \inf\{n \geq 1 : S_n$ je djeljiv s $3\}$. Odredite $\mathbb{E}[T]$. (*Uputa:* Promatrajte prikladan Markovljev lanac na $\{0,1,2\}$ i napravite analizu prvog koraka.)

Zadatak 5.10 Neka su (X_n) i (Y_n) **nezavisni** Markovljevi lanci s istim skupom stanja $S = \{0,1\}$ i matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $X_0 = 0$ i $Y_0 = 1$. Neka je T prvo vrijeme kada se lanci *spare*, tj. $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}$. Odredite $\mathbb{E}[T]$. (*Uputa:* Iskoristite Zadatak 3.10.)

Zadatak 5.11 Za lanac iz Zadatka 5.6 izračunajte očekivana vremena do bankrota $g_i = \mathbb{E}_i[T_0]$ za sve $i \in \mathbb{N}$ u ovisnosti o parametru p.

(**Napomena:** U Teoremu 5.3 je dopušteno da je $g_i^B = \infty$ za neki $i \in S$.)

Zadatak 5.12 (*) Neka je $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ Markovljev lanac na skupu stanja $\{0,1,2,\dots\}$ takav da je $p_{01} = 1$ i

$$p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, \quad p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad \text{za } i \geq 1.$$

Ako je $X_0 = 0$, odredite vjerojatnost da je $X_n \geq 1$ za sve $n \geq 1$.

Rješenja zadataka: **Zadatak 5.7** $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; **Zadatak 5.8** $\frac{1}{5}$; **Zadatak 5.9** 3; **Zadatak 5.10** 2; **Zadatak 5.11** Ako $p \geq q$, $g_i = \infty, i \in \mathbb{N}$, u suprotnom je $g_i = i \cdot (q-p)^{-1}, i \in \mathbb{N}$; **Zadatak 5.12** $\frac{6}{\pi^2}$.

6 Povratnost i prolaznost

Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja S i s matricom prijelaza P. Definiramo **prvo vrijeme povratka** u stanje $i \in S$ s

$$T_i^{(1)} = \min\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

uz konvenciju $\min \emptyset = +\infty$.

Za stanje $i \in S$ kažemo da je **povratno** ako vrijedi $\mathbb{P}_i\left(T_i^{(1)} < \infty\right) = 1$, dok u suprotnom, tj. ako je $\mathbb{P}_i\left(T_i^{(1)} < \infty\right) < 1$, kažemo da je stanje i **prolazno**.

Zadatak 6.1 Zadan je Markovljev lanac (X_n) na skupu stanja $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom prijelaza

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(a) Odredite $\mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} = k\right)$ za $k \geq 1$ te ispitajte povratnost stanja 1.

(b) Izračunajte $\mathbb{E}_i\left[T_1^{(1)}\right]$ za $i \in S$.

Rješenje.

(a) Prvo primijetimo da je $\mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} = 1\right) = \mathbb{P}_1(X_1 = 1) = p_{11} = \frac{1}{3}$. Nadalje, budući da je 3 apsorbirajuće stanje, za $k \geq 2$ vrijedi da će se lanac koji kreće iz stanja 1 u točno k-tom koraku prvi puta vratiti u 1 ako i samo ako je u prvom koraku prešao u stanje 2, zatim sljedećih $k-2$ koraka ostao u stanju 2 te zatim prešao u stanje 1. Dakle, za $k \geq 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} = k\right) &= \mathbb{P}_1(X_1 = 2, X_2 = 2, \ldots, X_{k-1} = 2, X_k = 1) \\ &= p_{12}(p_{22})^{k-2}p_{21} = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}. \end{aligned}$$

Budući da je $\left\{T_1^{(1)} < \infty\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{T_1^{(1)} = k\right\}$ i da su prethodni događaji međusobno disjunktni, vrijedi

$$\mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} < \infty\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} = k\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Dakle, $\mathbb{P}_1\left(T_1^{(1)} < \infty\right) < 1$ pa zaključujemo da je stanje 1 prolazno.

(b) Iz dijela (a) dobivamo da je $\mathbb{P}_1\Big(T_1^{(1)} = \infty\Big) = 1 - \mathbb{P}_1\Big(T_1^{(1)} < \infty\Big) = \frac{1}{3} > 0$. Također, budući da je 3 apsorbirajuće stanje slijedi da je $\mathbb{P}_3\Big(T_1^{(1)} = \infty\Big) = 1 > 0$. Dakle[3],

$$\mathbb{E}_1\Big[T_1^{(1)}\Big] = \mathbb{E}_3\Big[T_1^{(1)}\Big] = +\infty.$$

Nadalje, kako bismo izračunali $\mathbb{E}_2\Big[T_1^{(1)}\Big]$ potrebno je odrediti distribuciju slučajne varijable $T_1^{(1)}$ uz vjerojatnost $\mathbb{P}_2(\cdot)$. Sličnim zaključivanjem kao u dijelu (a) dobivamo da za $k \geq 1$ vrijedi

$$\mathbb{P}_2\Big(T_1^{(1)} = k\Big) = \mathbb{P}_2(X_1 = 2, \ldots, X_{k-1} = 2, X_k = 1) = (p_{22})^{k-1}\, p_{21} = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}_2\Big(T_1^{(1)} < \infty\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_2\Big(T_1^{(1)} = k\Big) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1$$

pa je[4]

$$\mathbb{E}_2\Big[T_1^{(1)}\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}_2\Big(T_1^{(1)} = k\Big) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = 4.$$

□

Budući da nije uvijek jednostavno po definiciji odrediti je li stanje povratno ili prolazno, sljedećih nekoliko rezultata mogu biti od pomoći.

Propozicija 6.2 (Vidi [Von09])

(a) Povratnost i prolaznost su svojstva klase komuniciranja, tj. ako je jedno stanje u klasi povratno (prolazno), tada su povratna (prolazna) i sva druga stanja iz te klase.

(b) Svaka povratna klasa je zatvorena, tj. obratno, svaka klasa koja nije zatvorena je prolazna.

(c) Ako je prostor stanja S konačan, tada S sadrži barem jedno povratno stanje.

Lema 6.3 *Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac na (moguće beskonačnom) skupu stanja S. Pokažite da je **konačna** klasa komuniciranja C povratna ako i samo ako je zatvorena.*

Rješenje.

[3] Ako za (proširenu) nenegativnu cjelobrojnu slučajnu varijablu $X \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ vrijedi $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ stavljamo $\mathbb{E}[X] = +\infty$, a inače je $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) \in [0, \infty]$.

[4] Vrijedi $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$ za $|s| < 1$ pa deriviranjem dobivamo $\sum_{k=0}^{\infty} ks^{k-1} = \frac{1}{(1-s)^2}$ za $|s| < 1$.

Potrebno je samo dokazati da zatvorenost i konačnost povlači povratnost. Budući da je C zatvoren skup tada možemo promatrati (X_n) kao Markovljev lanac na manjem skupu stanja C[5], a budući da je C konačan znamo da postoji barem jedno povratno stanje lanca u C, pa je C povratna klasa. $\square$

Specijalno, prethodna lema daje jednostavan način za određivanje povratnosti/prolaznosti stanja Markovljevog lanca na **konačnom** skupu stanja. Naime, prvo odredimo klase komuniciranja, klase koje nisu zatvorene sadrže prolazna, a klase koju su zatvorene povratna stanja.

Zadatak 6.4 Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odredite klase komuniciranja te ispitajte povratnost i prolaznost svakog stanja ako je matrica prijelaza lanca dana s

(a)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

(b)

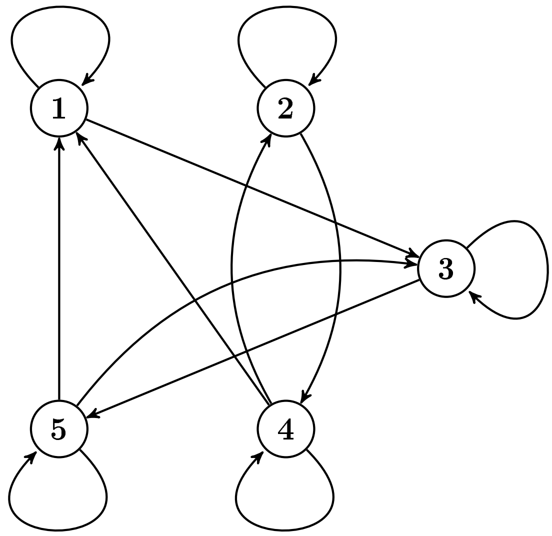
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Rješenje.

Klase komuniciranja najlakše odredimo ako Markovljevom lancu pridružimo usmjereni graf, a budući da je skup stanja konačan možemo koristiti prethodnu lemu.

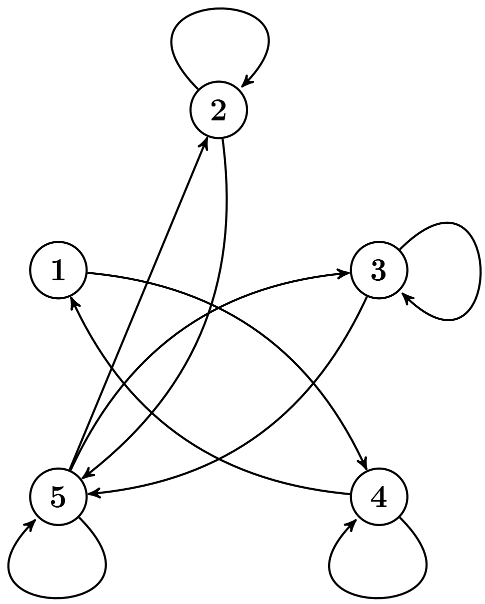
(a) Lako se vidi da su klase komuniciranja $C_1 = \{1, 3, 5\}$ i $C_2 = \{2, 4\}$.

[5] Zaista, budući da je C zatvorena vrijedi $p_{ij} = 0$ za sve $i \in C, i \notin C$, pa je $\sum_{j\in C} p_{ij} = \sum_{j\in S} p_{ij} = 1$ za sve $i \in C$, tj. $(p_{ij}, i, j \in C)$ je dobro definirana stohastička matrica na C.



Primijetimo da klasa C_2 nije zatvorena pa je prolazna, tj. da su stanja 2 i 4 prolazna. Klasa C_1 je zatvorena pa je stoga i povratna, tj. stanja $1, 3$ i 5 su povratna.

(b) Ponovno, lako se vidi da su klase komuniciranja $C_1 = \{1, 4\}$ i $C_2 = \{2, 3, 5\}$.



Budući da su klase C_1 i C_2 zatvorene, obje su povratne, tj. sva stanja lanca su povratna.

□

Na beskonačnom skupu stanja, ispitivanje povratnosti/prolaznosti u pravilu je puno teže.

Primjer 6.5 ("Success runs") Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $S =$

$\{0, 1, 2, \ldots\}$ s matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \ldots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix},$$

pri čemu je $0 < p_i = 1 - q_i < 1$ za sve $i \geq 0$. Možemo zamišljati da ovaj lanac modelira broj uzastopnih uspjeha u nizu pokusa pri čemu je vjerojatnost uspjeha nakon i uzastopnih uspjeha jednaka p_i. Ispitajmo povratnost/prolaznost lanca.

Budući da je $p_i, q_i > 0$ za sve $i \geq 0$, lanac je ireducibilan pa je dovoljno provjeriti povratnost stanja 0. Zbog neprekidnosti vjerojatnosti u odnosu na padajući niz događaja

$$\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} = \infty\Big) = \mathbb{P}_0\Big(\cap_{n=1}^{\infty}\{T_0^{(1)} > n\}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} > n\Big).$$

Budući da u svakom koraku lanac ide za jedno mjesto udesno ili se vraća u 0, za sve n je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} > n\Big) &= \mathbb{P}_0(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_n \neq 0) \\ &= \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, \ldots, X_n = n) \\ &= p_0 p_1 p_2 \ldots p_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-1} p_i \,. \end{aligned}$$

Budući da je niz $\prod_{i=0}^{n-1} p_i$, $n \in \mathbb{N}$, (strogo) padajući, postoji $\prod_{i=0}^{\infty} p_i = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i$ i nije teško pokazati (bitno je da vrijedi $p_i > 0$ za sve i) da je taj limes strogo pozitivan ako i samo ako je $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = \sum_{i=0}^{\infty}(1 - p_i) < \infty$.

Dakle, $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} = \infty\Big) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i = 0$ (tj. 0 je povratno stanje) ako i samo ako je $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = \infty$[6]. Na primjer

- Ako je $q_i \sim \frac{1}{i}$ kada $i \to \infty$, lanac je povratan. Specijalno, lanac posjećuje stanje 0 je beskonačno mnogo puta gotovo sigurno iako $p_i \sim 1 - \frac{1}{i} \to 1$ kada $i \to \infty$, vidi [Von09, Teorem 6.4].
- Ako je $q_i \sim \frac{1}{i^2}$ kada $i \to \infty$, lanac je prolazan[7].

[6] Alternativno, probajte izračunati $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} = n\Big)$ za sve $n \geq 1$ i onda odrediti $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} = n\Big)$

[7] Uočimo da je u ovom slučaju $\mathbb{N}_0$ primjer zatvorene klase koja je prolazna. Vidi također primjer nesimetrične slučajne šetnje na $\mathbb{Z}$ dolje.

□

Zadatak 6.6 Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$, tj.

$$p_{i,i+1} = p\,,\ p_{i,i-1} = q = 1 - p$$

za sve $i \in \mathbb{Z}$. Koristeći rezultat Zadataka 5.6 izračunajte $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big)$ u ovisnosti o parametru $p \in (0,1)$ te zaključite kada je lanac povratan/prolazan.

Rješenje.

Analizom prvog koraka dobijemo da vrijedi

$$\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big) = q\mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty) + p\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)\,.$$

Kako bismo izračunali $\mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty)$, odnosno $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$ koristimo Zadatak 5.6 za parametre $\tilde{q} = p, \tilde{p} = q$, odnosno $\tilde{q} = q, \tilde{p} = p$.

- Ako je $p = q = \frac{1}{2}$ (simetričan slučaj), onda je

  $$\mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = 1$$

  te $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big) = q + p = 1$. Specijalno, 0 je povratno stanja te je zbog ireducibilnosti cijeli lanac povratan.

- Neka je $p \neq q$. Dovoljno je riješiti npr. slučaj $p > q$. Tada je

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}_1(T_0 < \infty) &= \frac{q}{p} \\ \mathbb{P}_{-1}(T_0 < \infty) &= 1\,. \end{aligned}$$

  Dakle,

  $$\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big) = q + p \cdot \frac{q}{p} = 2q < 1.$$

  U slučaju da je $q > p$ imamo $\mathbb{P}_0\Big(T_0^{(1)} < \infty\Big) = 2p < 1$. Specijalno, ako je $p \neq q$ slučajna šetnja je prolazna .

□

Zadaci za vježbu

Vidi zadatake s prijašnjih kolokvija.

7 Pozitivna povratnost i stacionarna distribucija

Neka je, kao i dosad, $X = (X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac na prebrojivom skupu stanja S i s matricom prijelaza P. Za vjerojatnosnu distribuciju $\pi = (\pi_i : i \in S)$ na S kažemo da je **stacionarna distribucija** Markovljevog lanca X (tj. prijelazne matrice P) ako je

$$\pi = \pi P,$$

tj. za svaki $j \in S$

$$\pi_j = \sum_{k\in S} \pi_k p_{kj}.$$

Primjer 7.1 Nađimo stacionarnu distribuciju $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ za matricu prijelaza

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Rješavamo sustav

$$\begin{cases} \pi_1 &= 0 \cdot \pi_1 + 0 \cdot \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_2 &= 1 \cdot \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + 0 \cdot \pi_3 = \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_3 &= 0 \cdot \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \,, \end{cases}$$

uz uvjet $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Iz prve dvije jednažbe dobivamo da je $\pi_3 = 2\pi_1 = \pi_2$ (uočite da je zadnja jednažba suvišna) pa budući da π mora biti vjerojatnosna distribucija slijedi da je jedinstveno rješenje $\pi = (1/5, 2/5, 2/5)$. □

Općenitije, netrivijalnu mjeru $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$ na S (dakle, $\lambda_i \geq 0$ za sve $i \in S$ te postoji $j \in S$ takav da je $\lambda_j > 0$) nazivamo **invarijantnom mjerom** Markovljevog lanca X (tj. matrice prijelaza P) ako je

$$\lambda = \lambda P.$$

Uočimo, ako je $\sum_{i\in S} \lambda_i < \infty$, tada je $\pi := \lambda / \sum_{i\in S} \lambda_i$ stacionarna distribucija.

Prisjetimo se definicije prvog vremena povratka u stanje $i \in S$:

$$T_i^{(1)} = \min \{n \geq 1 : X_n = i\} \,,$$

uz konvenciju $\min\emptyset = +\infty$. Za sve $i, j \in S$ definiramo

$$\begin{aligned}\nu_j^{(i)} &= \text{očekivani broj posjeta stanju } j \text{ prije prvog povratka u } i \\ &= \mathbb{E}_i\left[\sum_{n=0}^{T_i^{(1)}-1} 1_{\{X_n=j\}}\right].\end{aligned}$$

Očito je $\nu_i^{(i)} = 1$. Ako je pripadni lanac **ireducibilan** i **povratan**, tada za sve $i \in S$ vrijedi

(i) $0 < \nu_j^{(i)} < \infty$ za sve $j \in S$ i $(\nu_j^{(i)} : j \in S)$ je invarijatna mjera,

(ii) Ako je $(\lambda_j : j \in S)$ neka druga invarijanta mjera, tada postoji $c > 0$ takav da je $\lambda_j = c\nu_j^{(i)}$ za sve $j \in S$.

Za stanje $i \in S$ kažemo da je **pozitivno povratno** ako je

$$\mathbb{E}_i\left[T_i^{(1)}\right] < +\infty.$$

Jasno, svako pozitivno povratno stanje je ujedno i povratno. Ipak, obrat općenito ne vrijedi, a povratna stanja koja nisu pozitivno povratna zovemo **nul-povratnima**. Ispostavlja se da su pozitivna povratnost i nul-povratnost svojstva klase komuniciranja (vidi Zadatak 7.8).

Za **ireducibilan** lanac postoji stacionarna distribucija π ako i samo ako su sva stanja pozitivno povratna, i u tom slučaju stacionarna distribucija je jedinstvena i dana s

$$\pi_i = \frac{1}{\mathbb{E}_i\left[T_i^{(1)}\right]} > 0\,,\ i \in S\,. \tag{7.1}$$

Nadalje, iz dijela (ii) gore slijedi (Dokažite!)

$$\nu_j^{(i)} = \frac{\pi_j}{\pi_i}\,,\ i, j \in S\,. \tag{7.2}$$

Na primjer, za lanac iz Primjera 7.1 vrijedi

$$\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right] = \frac{1}{\pi_1} = 5\,,\quad \nu_2^{(1)} = \frac{\pi_2}{\pi_1} = 2\,.$$

Napomenimo još da je ireducibilan i **konačan** Markovljev lanac nužno pozitivno povratan pa u tom slučaju stacionarna distribucija uvijek postoji i jedinstvena je (vidi Zadatak 7.8).

Zadatak 7.2 Baca se simetričan novčić. Koliko bacanja očekujemo između dva pojavljivanja kombinacije pismo-glava?

Rješenje.

Promatramo Markovljev lanac (X_n) na skupu stanja $S = \{PP, PG, GP, GG\}$ takav da X_n označava što je palo u $(n-1)$-vom i n-tom bacanju $(n \geq 1)$. Sada lako zaključujemo da je matrica prijelaza lanca

$$P = \begin{array}{c} \\ PP \\ PG \\ GP \\ GG \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} PP & PG & GP & GG \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Problem postaje izračunati $\mathbb{E}_{PG}\left[T_{PG}^{(1)}\right]$. Budući da je lanac ireducibilan i konačan, tražimo njegovu jedinstvenu stacionarnu distribuciju π. Dakle, tražimo vjerojatnosnu distribuciju $\pi = (\pi_{PP}, \pi_{PG}, \pi_{GP}, \pi_{GG})$ takvu da je

$$\begin{cases} \pi_{PP} &= \frac{1}{2}\pi_{PP} + \frac{1}{2}\pi_{GP} \\ \pi_{PG} &= \frac{1}{2}\pi_{PP} + \frac{1}{2}\pi_{GP} \\ \pi_{GP} &= \frac{1}{2}\pi_{PG} + \frac{1}{2}\pi_{GG} \\ \pi_{GG} &= \frac{1}{2}\pi_{PG} + \frac{1}{2}\pi_{GG} \end{cases}.$$

Uočavamo da je $\pi_{PP} = \pi_{PG} = \pi_{GP} = \pi_{GG}$ pa budući da je π vjerojatnosna distribucija imamo da je

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Iz (7.1) sada slijedi da je[8]

$$\mathbb{E}_{PG}\left[T_{PG}^{(1)}\right] = \frac{1}{\pi_{PG}} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

□

Kada lanac nije ireducibilan, ako postoji stacionarna distribucija, ona ne mora biti jedinstvena, vidi Zadatak 7.9.

Zadatak 7.3 Neka je (X_n) Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3, 4\}$ s matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

[8]Alternativno, ovo se očekivanje može računati kao u Zadatku 5.9, analizom prvog koraka te računanjem očekivanih vremena pogađanja $g_i = \mathbb{E}_i[T_{PG}]$.

Izračunajte $\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right]$.

Rješenje.

Primijetimo da postoje dvije zatvorene klase komuniciranja $C_1 = \{1,3\}$ i $C_2 = \{2,4\}$, dakle lanac nije ireducibilan. Ipak, budući da je C_1 zatvoren skup stanja, možemo promatrati restrikciju Markovljevog lanca (X_n) na C_1. To je ponovno Markovljev lanac, ali na skupu stanja $\tilde{S} = C_1 = \{1,3\}$ i s matricom prijelaza

$$\tilde{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Uočimo da je ovaj lanac ireducibilan, a budući da je konačan, postoji jedinstvena stacionarna distribucija $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_3)$ takva da je

$$\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right] = \mathbb{E}_1\left[\tilde{T}_1^{(1)}\right] = \frac{1}{\tilde{\pi}_1}.$$

Dakle, tražimo vjerojatnosnu distribuciju $\tilde{\pi}$ takvu da je $\tilde{\pi}\tilde{P} = \tilde{\pi}$, tj.

$$\begin{cases} \tilde{\pi}_1 & = \frac{1}{4}\tilde{\pi}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\pi}_3 \\ \tilde{\pi}_3 & = \frac{3}{4}\tilde{\pi}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\pi}_3 \end{cases}.$$

Rješenje je $\tilde{\pi} = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ pa je

$$\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right] = \frac{1}{\tilde{\pi}_1} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}.$$

□

Na beskonačnom skupu stanja stacionarna distribucija ne mora postojati.

Primjer 7.4 Za (ireducibilan) lanac iz Primjera 6.5 imamo da je

$$\mathbb{E}_0\left[T_0^{(1)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_0\left(T_0^{(1)} > n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i\,.$$

Dakle, lanac je pozitivno povratan ako i samo ako je $\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i < \infty$. Na primjer,

(i) Ako je $q_i = \frac{1}{i+2}$ za sve $i \geq 0$, imamo $p_i = 1 - q_i = \frac{i+1}{i+2}$ te

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty\,.$$

Dakle, u ovom slučaju lanac nije pozitivno povratan pa stacionarna distibucija ne postoji. Budući da je lanac povratan ($\sum_{i=0}^{\infty} q_i = \infty$), sva stanja su nul-povratna.

(ii) Ako je $p_i = p \in (0,1)$ i $q_i = 1 - p =: q$ za sve $i \geq 0$, imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} p_i = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} < \infty \, .$$

Dakle, u ovom slučaju lanac je pozitivno povratan te postoji jedinstvena stacionarna distribucija π. Odredimo je:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{k0} = q \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = q \\
\pi_i &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_{ki} = \pi_{i-1} p = \cdots = p^i \pi_0 = p^i q \, , \; i \geq 1 \, .
\end{aligned}$$

Alternativno, $T_0^{(1)}$ ima geometrijsku razdiobu na $\mathbb{N}$ s parametrom q (bez obzira na početno stanje). Specijalno, $\mathbb{E}_0\left[T_0^{(1)}\right] = 1/q < \infty$ iz čega slijedi da je lanac pozitivno povratan te da je $\pi_0 = 1/q^{-1} = q$.

□

U dijelu (ii) prethodnog primjea prvo smo pokazali da je lanac pozitivno povratan te onda zaključili da postoji i jedinstvena je stacionarna distribucija. Općenito, ako je lanac ireducibilan te nađemo neku stacionarnu distribuciju, lanac je nužno pozitivno povratan te je nađena distribucija jedinstvena (specijalno, zadovoljava (7.1) i (7.2)).

Pokažimo sada da za jednu važnu klasu Markovljevih lanaca stacionarnu distribuciju možemo odrediti bez da svaki put ponovno rješavamo sustav $\pi = \pi P$.

7.1 Slučajne šetnje na grafovima

Neka je $G = (V, E)$ neusmjeren povezan graf sa skupom vrhova V (pretpostavimo radi jednostavnosti da je V konačan skup) i skupom bridova[9] E. Za vrhove $i, j \in V$ kažemo da su susjedi, oznaka $i \sim j$, ako postoji brid između i i j (tj. $(i,j) \in E$). Za svaki $i \in V$ neka je d_i broj susjeda vrha i.[10]

Jednostavna slučajna šetnja na G je Markovljev lanac sa skupom stanja V i prijelaznim vjerojatnostima

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{ako } j \sim i \, , \\ 0 & \text{inače} \, . \end{cases}$$

[9]Na skup bridova E gledamo kao na podskup Kartezijevog produkta $V \times V$ koji ima svojstvo da je $(i,j) \in E$ ako i samo ako je $(j,i) \in E$

[10]Zbog pretpostavke o povezanosti je nužno $d_i > 0$.

Riječima, šetnja u svakom koraku prelazi u neki od susjednih vrhova i to s jednakom vjerojatnosti. Neka je $d = \sum_{i \in V} d_i$.[11]

Propozicija 7.5 *Gore opisana jednostavna slučajna šetnja na grafu je ireducibilna, a (jedinstvena) stacionarna distribucija je*

$$\pi_i = \frac{d_i}{d}\,,\ i \in V\,.$$

Dokaz. Iz povezanosti grafa slijedi da je promatrana slučajna šetnja ireducibilna. Pokažimo da je dana mjera π doista i stacionarna distribucija. Prije svega, π je očito vjerojatnosna mjera budući da je

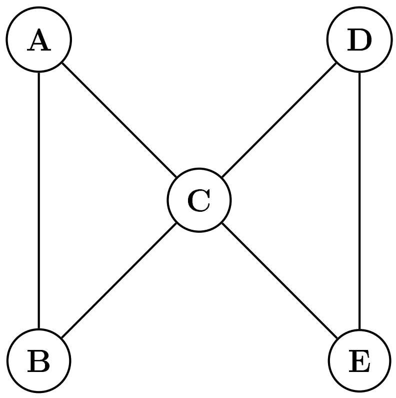
$$\sum_{i \in V} \pi_i = \frac{\sum_{i \in V} d_i}{d} = 1.$$

S druge strane, za svaki $j \in V$ imamo

$$\sum_{k \in V} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in V, k \sim j} \frac{d_k}{d} \frac{1}{d_k} = \frac{1}{d} \sum_{k \in V, k \sim j} 1 = \frac{d_j}{d} = \pi_j.$$

□

Zadatak 7.6 Promatrajmo slučajnu šetnju na donjem grafu koja kreće iz vrha A i u svakom koraku iz trenutnog vrha prelazi u svaki od njemu susjednih vrhova sa jednakom vjerojatnošću.



(i) Odredite očekivano vrijeme prvog povratka u vrh A.

(ii) Odredite očekivani broj posjeta stanju C prije povratka u stanje A.

Rješenje.

[11] Ukoliko nema petlji, po lemi o rukovanju d je 2 puta ukupan broj bridova

(i) Graf je očito povezan, a budući da je $d_A = 2$, a $d_A + d_B + d_C + d_D + d_E = 2 + 2 + 4 + 2 + 2 = 12$, imamo da je $\pi_A = \frac{2}{12}$.[12] Prema (7.1) slijedi da je očekivano vrijeme povratka u vrh A jednako

$$\mathbb{E}_A\left[T_A^{(1)}\right] = \frac{1}{\pi_A} = 6.$$

(ii) Budući da je $d_C = 4$, prema (7.2) vidimo da je

$$\mathbb{E}_A\left[\sum_{n=0}^{T_A^{(1)}-1} 1_{\{X_n=C\}}\right] = \frac{\pi_C}{\pi_A} = \frac{4/12}{2/12} = 2.$$

□

Zadatak 7.7 Muha se kreće po vrhovima pravilnog n-terokuta tako da iz svakog vrha ide u neki od dva susjeda s jednakom vjerojatnosti. Odredite:

(a) Očekivani broj koraka do prvog povratka muhe u vrh iz kojeg je krenula.

(b) Za bilo koji vrh različit od početnoga, odredite očekivani broj posjeta tom vrhu prije prvog povratka u početni vrh.

Rješenje.

Kretanje muhe je zapravo jednostavna slučajna šetnja na (povezanom) grafu pri čemu je V skup vrhova n-terokuta te u kojem je stupanj svakog vrha jednak 2. Dakle, stacionarna distribucija je

$$d_i = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}\,,\ i \in V$$

tj. uniformna distribucija. Sada imamo da su rješenja jednaka (a) $\mathbb{E}_i\left[T_i^{(1)}\right] = n$ bez obzira na početni vrh i, te (b) $\nu_j^{(i)} = 1$ za sve vrhove $i \neq j$[13]. □

Zadaci za vježbu

Zadatak 7.8 Koristeći rezultate s predavanja, pokažite sljedeće tvrdnje:

(i) Pozitivna povratnost (pa dakle i nul-povratnost) je svojstvo klase.

(ii) Ako je S konačan, svako povratno stanje je ujedno i pozitivno povratno. Specijalno, ireducibilan i konačan Markovljev lanac je nužno pozitivno povratan pa stacionarna distribucija postoji i jedinstvena je.

---

[12] Stacionarna distribucija je dana s $\pi_i = \frac{1}{6}$ za $i \neq C$ te $\pi_C = \frac{1}{3}$.

[13] Ovo dakle vrijedi bez obzira koliki je n te koja dva vrha izaberemo!

(*Uputa:* Iskoristite [Von09, Teorem 7.14], odnosno [Von09, Propozicija 7.8])

Zadatak 7.9 Odredite sve stacionarne distribucije za lanac iz Zadatka 7.3. Možete li objasniti rezultat?

Zadatak 7.10 Promatramo lanac iz Primjera 6.5

(i) Ako je lanac prolazan, pokažite da ne postoji invarijantna mjera.

(ii) Ako je lanac povratan, odredite sve invarijante mjere.

(iii) Ako je lanac pozitivno povratan, odredite stacionarnu distribuciju.

U slučaju kada je lanac iz Primjera 6.5 prolazan, pokažite da ne postoji invarijantna mjera. Nadalje, odredite jednu invarijantnu mjeru u nul-povratnom slučaju te stacionarnu distribuciju u pozitivno povratnom slučaju.

(*Uputa:* Za prvi dio zadatka korisno će biti dokazati da je $\sum_{i=0}^{\infty} q_i p_0 p_1 \cdots p_{i-1} = 1 - \prod_{i=0}^{\infty} p_0 p_1 \cdots p_i$.)

Rješenja zadataka: **Zadatak 7.9** $\pi_\alpha = \alpha\pi^{(1)} + (1-\alpha)\pi^{(2)}, \alpha \in [0,1]$ pri čemu su $\pi^{(1)} = (\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0), \pi^{(2)} = (0, \frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7})$; **Zadatak 7.10** (ii) $\lambda_i = p_{i-1} \cdots p_0 \lambda_0$, $i \geq 1$ i $\lambda_0 > 0$ proizvoljan, (iii) $\lambda_0 = (\sum_{i=0}^{\infty} p_{i-1} \cdots p_0)^{-1}$.

8 Granična distribucija

Neka je X Markovljev lanac na skupu stanja S sa matricom prijelaza P. Za stanje $i \in S$ neka je $d(i)$ najveći zajednički djelitelj skupa $\{n \geq 1 \colon p_{ii}^{(n)} > 0\}$ iz zvat ćemo ga *period* stanja i. Reći ćemo da je i **aperiodičko** stanje ako je $d(i) = 1$, a u suprotnom da je stanje i periodičko. Period je svojstvo klase komuniciranja, tj. sva stanja u istoj klasi imaju isti period, vidi [Von09, Propozicija 8.7]. Uočimo da ako za stanje $i \in S$ vrijedi $p_{ii} > 0$, tada je i nužno aperiodičko stanje.

Primjer 8.1 Neka je X Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ (skup ostataka modulo N) za neki $N \geq 2$, takav da ako se trenutno nalazi u stanju i, tada će u idućem koraku sa jednakim vjerojatnostima biti u stanjima $i-1$ i $i+1$ mod N.[14] Odredimo periode svih stanja.

Prije svega, uočimo da za svaki $i \in S$ vrijedi $p_{0i}^{(i)} = p_{i0}^{(i)} \geq \frac{1}{2^i}$, pa je lanac očito ireducibilan. Iz prethodno spomenutog rezultata [Von09, Propozicija 8.7] slijedi da je dovoljno odrediti period stanja 0. Prije svega uočimo da je $p_{00}^{(2)} \geq p_{01}p_{10} > 0$, pa je onda $d(0)|2$, odnosno period stanja 0 je ili 1 ili 2.

- Pretpostavimo da je N neparan. Uočimo da je $p_{00}^{(N)} \geq p_{01}p_{12}\ldots p_{N-1,0} > 0$. Odavde zaključujemo da $d(0)$ mora dijeliti i 2 i N, a zbog neparnosti broja N to je moguće jedino ako je $d(0) = 1$. Dakle, u ovom slučaju lanac je aperiodičan.

- Pretpostavimo da je N paran. Ključno je za primijetiti da ćemo se krenuvši iz stanja 0 nakon neparno mnogo koraka uvijek nalaziti u nekom neparnom ostatku. Posebno, $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ za sve $n \geq 0$. Drugim riječima, 2 je zajednički djelitelj svih n za koje je $p_{00}^{(n)} > 0$ pa budući da je $p_{00}^{(2)} > 0$ zaključujemo da je $d(0) = 2$.

  Napomenimo da je posljedica periodičnosti tzv. *ciklička dekompozicija* skupa stanja S (vidi [Von09, Propozicija 8.11]). Ona je u ovom primjeru dana s $C_0 = \{0, 2, 4, \ldots N-2\}, C_1 = \{1, 3, \ldots, N-1\}$. Riječima, ako lanac kreće iz nekog parnog ostatka, tj. iz C_0, u parnim trenutcima će se nalaziti u C_0, a u neparnim trenutcima u C_1.

$\square$

Vjerojatnosnu distribuciju π na skupu stanja S nazivat ćemo **graničnom distribucijom** ako za sve $i, j \in S$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j.$$

Nije teško za dokazati da je svaka granična distribucija ujedno i stacionarna [Von09, Propozicija 8.3]. Od posebnog interesa su nam situacije u kojima vrijedi i obrat, a to je

[14] Ovaj lanac je zapravo jednostavna slučajna šetnja na N-terokutu.

sadržaj sljedećeg teorema.

Teorem 8.2 ([Von09, Teorem 8.9]) *Ako je X ireducibilan i* ***aperiodičan****, te ima stacionarnu distribuciju π, tada je neovisno o početnoj distribuciji lanca*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j, \quad \text{za sve } j \in S.$$

Posebno, π je ujedno i granična distribucija.

Zadatak 8.3

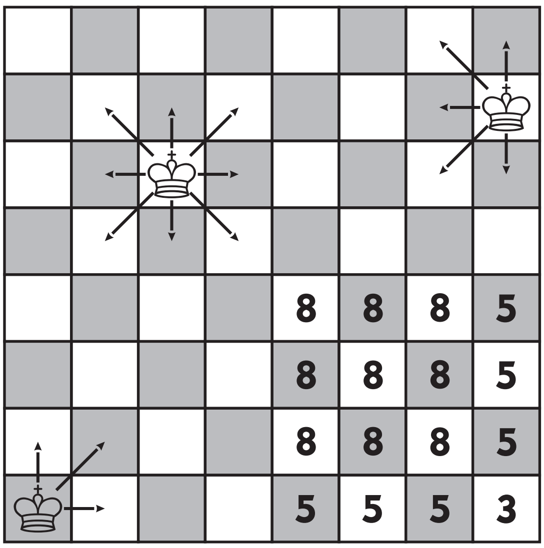
(i) U donjem lijevom kutu šahovske ploče nalazi se kralj. U svakom koraku on prelazi na neko od mogućih polja sa jednakom vjerojatnosti. Modelirajte kretanje kralja pomoću Markovljevog lanca te izračunajte očekivano vrijeme prvog povratka u donji lijevi kut ploče. Nadalje, provjerite ima li ovaj lanac graničnu distribuciju?

(ii) Odgovorite na ista pitanja ukoliko gledamo figuru konja umjesto kralja.

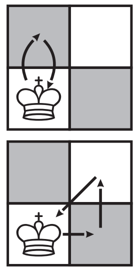
Rješenje.

(i) Ako je X_n pozicija kralja na ploči nakon n koraka, $(X_n)_n$ je jednostavna slučajna šetnja na grafu čiji vrhovi predstavljaju polja šahovske ploče, dakle imamo ukupno $|V| = 8^2 = 64$ vrha. Graf je očito povezan pa je pripadni lanac ireducibilan. Jedinstvenu stacionarnu distribuciju π lako odredimo koristeći Propoziciju 7.5 pa je očekivano vrijeme prvog povratka u donji lijevi kut

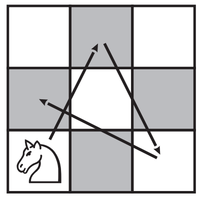
$$\mathbb{E}_{\text{kut}} T_{\text{kut}}^{(1)} = \frac{1}{\pi_{\text{kut}}} = \frac{\sum_{i\in S} d_i}{d_{\text{kut}}} = \frac{4\cdot(3+6\cdot 5+9\cdot 8)}{3} = 140.$$



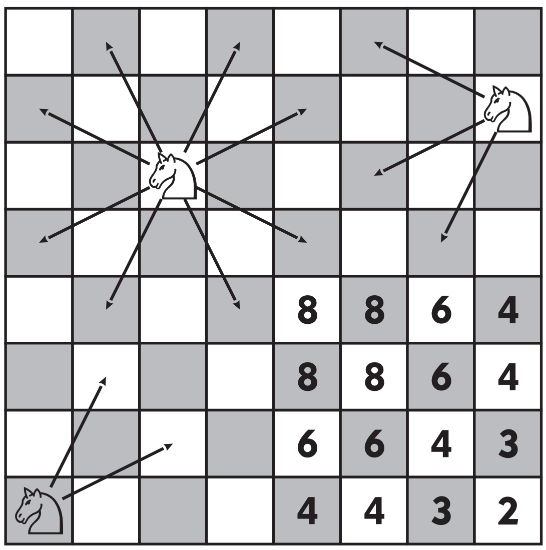
Budući da je lanac ireducibilan te da ima stacionarnu distribuciju, dovoljan uvjet za postojanje granične distribucije je aperiodičnost lanac. Da bismo to pokazali, uočimo da se je u svako stanje moguće vratiti i u 2 i u 3 poteza, vidi sliku desno. Dakle, za sve $i \in V$ imamo $d(i)|2$ i $d(i)|3$ pa je nužno $d(i) = 1$. Po teoremu o graničnoj distribuciji zaključujemo da je π ujedno i granična distribucija. Na primjer, neovisno o početnoj distribuciji vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = \text{kut}) = \pi_{\text{kut}} = \frac{1}{140}$, tj. $\mathbb{P}(X_n = \text{kut}) \approx \frac{1}{140}$ za velike n.



(ii) Promatramo Markovljev lanac analogno kao u (a). Da bismo dokazali da je lanac ireducibilan, dovoljno je pokazati da se iz svakog polja može doći u susjedno. Međutim, to se uvijek može učiniti u tri poteza, vidi npr. sliku desno. Sada kao i u dijelu (i) računamo



$$\mathbb{E}_{\text{kut}} T_{\text{kut}}^{(1)} = \frac{\sum_{i\in S} d_i}{d_{\text{kut}}} = \frac{4 \cdot (2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8)}{2} = 168.$$



Provjerimo vrijedi li i u ovom slučaju aperiodičnost. Uočimo da se pri svakom koraku boja polja na kojem se konj nalazi mijenja. To posebno znači da se konj jedino nakon parno mnogo poteza može vratiti u početno polje, a budući da se konj može u točno dva koraka vratiti u početno stanje, zaključujemo da je period lanca (tj. svakog stanja) jednak 2. Dakle, ne možemo iskoristiti teorem o graničnoj distribuciji.

Pokažimo da lanac ne konvergira prema nekoj fiksiranoj distribuciji. Pretpostavimo suprotno. Neka je C skup crnih polja[15]. Iz pretostavke o postanju granične distribucije slijedi i činjenice da je C konačan skup, slijedi da postoji

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\text{kut}}(X_n \in C) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in C} \mathbb{P}_{\text{kut}}(X_n = i)\,.$$

[15]Rastav skupa stanja na crna i bijela polja je zapravo *ciklička dekompozicija* lanca.

Međutim zbog argumenta kojeg smo već prije naveli, vrijedi

$$\mathbb{P}_{\text{kut}}(X_n \in C) = \begin{cases} 0, & n \text{ neparan}, \\ 1, & n \text{ paran}, \end{cases}$$

što je očita kontradikcija. Zapravo, na sličan način možemo pokazati da je u slučaju ireducibilnog i pozitivno povratnog lanca, postojanje granične distribucije ekvivalentno aperiodičnosti (Zadatak 8.7).

Napomenimo da iako granična distribuciju u ovom slučaju postoji, budući da je period 2 iz [Von09, Teorem 8.12] možemo odrediti granično ponašanje lanca $(X_{2n})_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\text{kut}}(X_{2n} = i) = 2 \cdot \pi_i$$

za sva crna polja $i \in C$.

□

Za matricu prijelaza P ćemo reći da je **dvostruko stohastička** ako je i suma elemenata u svakom stupcu jednaka 1, odnosno ako za svaki $j \in S$ vrijedi $\sum_{i\in S} p_{ij} = 1$. Takve su na primjer sve simetrične stohastičke matrice. Dvostruko stohastičke matrice su nam od posebnog interesa jer nam je kod njih iznimno jednostavno pronaći graničnu distribuciju.

Propozicija 8.4 *Neka je P prijelazna matrica na konačnom skupu stanja S te neka je $\pi_i = \frac{1}{|S|}, i \in S$ uniformna distribucija na S. Tada je π stacionarna distribucija za P ako i samo ako je P dvostruko stohastička matrica.*

Dokaz. Za svaki $i \in S$ neka je $\pi_i = \frac{1}{|S|}$. Ako je P dvostruko stohastička matrica imamo

$$\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \tfrac{1}{|S|} \textstyle\sum_{i\in S} p_{ij} = \tfrac{1}{|S|} = \pi_j,$$

pa je π stacionarna distribucija lanca. Obrat se pokazuje slično. □

Uočite da u prethodnom zadatku nismo pretpostavili da je lanac ireducibilan pa uniformna distribucija ne mora nužno biti jedina stacionarna distribucija lanca.

Zadatak 8.5 (Top-to-random shuffle) Na stolu se nalazi špil od 52 karte koje miješamo na sljedeći način. U svakom koraku uzmemo kartu koja se nalazi na vrhu špila te je sa jednakom vjerojatnošću stavljamo na dno, vraćamo na vrh ili guramo između neke dvije susjedne karte (dakle, ukupno 52 moguća poteza). Dokažite da će nakon dovoljno velikog broja miješanja, špil biti "dobro promiješan", tj. da će vjerojatnosti pojavljivanja svakog mogućeg rasporeda karata biti približno jednake.

Rješenje.

Neka je S skup od 52! elemenata koji predstavljaju moguće rasporede karata u špilu (tj. S

su sve permutacije skupa od 52 elemena). Opisano miješanje modeliramo kao Markovljev lanac $(X_n\colon n \geq 0)$ na skupu S, pri čemu X_n označava raspored karata nakon n-tog miješanja.

Opisanim postupkom možemo (*namještanjem*) od svakog rasporeda karata u 52 koraka dobiti svaki drugi raspored karata. Zaista, kartu s vrha stavimo da dno, sljedeću stavimo ispod ili ispod nje ovisno o tome je li ispod ili iznad u rasporedu koji želimo dobiti, i tako dalje. Posebno, lanac je ireducibilan.

Lanac je i aperiodičan jer iz svakog rasporeda možemo nakon jednog koraka opet imati taj isti raspored ako kartu koju smo podigli s vrha vratimo na vrh.

Budući da je lanac ireducibilan i konačan znamo da postoji i jedinstvena je stacionarna distribucija. Intuitivno naslućujemo da bi ona trebala biti jednaka uniformnoj distribuciji na S. Iz Propozicije 8.4 znamo da će to vrijediti akko je matrica prijelaza dvostruko stohastička.

Ukoliko promotrimo matricu prijelaza, očito je da se u svakom retku nalaze isključivo nule, osim 52 broja jednaka $\frac{1}{52}$. Uočimo da svaki raspored možemo direktno dobiti (dakle, u jednom potezu) iz točno 52 druga rasporeda (svaka od 52 karte je u prethodnom koraku mogla biti na vrhu špila), pa zaključujemo da u svakom stupcu postoji točno 52 broja veća od 0. Međutim, rekli smo da su svi brojevi u matrici prijelaza ili 0 ili $\frac{1}{52}$ pa je matrica zaista dvostruko stohastička.

Dakle, po Propoziciji 8.4 slijedi da je $\pi_i = \frac{1}{52!}$ za svaki raspored karata i. Nadalje, budući da je lanac ireducibilan i aperiodičan, slijedi da je to i granična distribucija. Budući da je skup stanja konačan, ta je konvergencija uniformna, tj. za svaki $\epsilon > 0$ postoji n_0 takav da za sve $n \geq n_0$,

$$\left|\mathbb{P}(X_n = i) - \frac{1}{52!}\right| < \epsilon, \quad \text{za svaki } i \in S\,,$$

tj. za dovoljno veliki n imamo $\mathbb{P}(X_n = i) \approx \frac{1}{52!}$ za svaki raspored i.[16] □

Zadatak 8.6 (Teorija obnavljanja) Neka je $(Y_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u skupu $\{1, 2, \dots\}$ i konačnim očekivanjem μ. Za svaki $n \in \{1, 2, \dots\}$ neka je $p_n = \mathbb{P}(Y_1 = n)$, te pretpostavite da je najveći zajednički djelitelj skupa $\{n : p_n > 0\}$ jednak 1. Neka je $S_0 = 0$ te $S_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i$, $k \geq 1$. Definiramo

$$N(n) = \max\{k \geq 0 : S_k \leq n\}\,, \, n \geq 0$$

te

$$X_n = S_{N(n)+1} - n\,, \, n \geq 0\,.$$

[16] Još zanimljivije pitanje je brzina te konvergencije, tj. koliki najmanji broj miješanja je potreban da bi špil s velikom vjerojatnosti bio dobro promiješan (tzv. *vrijeme miješanja* lanca ili engl. *mixing time*).

Vremena $(S_k)_{k\geq 0}$ zamišljamo kao trenutke u kojima se događa neki fenomen (npr. dolazak autobusa na stanicu ili kupaca u trgovinu) i zovemo ih vremena obnavljanja, a $Y_k = S_k - S_{k-1}$ vrijeme između $(k-1)$-vog i k-tog obnavljanja. Nadalje, $S_{N(n)}$ je vrijeme zadnjeg obnavljanja prije (i uključujući) trenutak n, a X_n je vrijeme preostalo do idućeg obnavljanja ako se nalazimo u trenutku n.

(i) Ispostavlja se da je proces $(X_n)_{n\geq 0}$ Markovljev lanac na $S = \{1, 2, \ldots, M\}$ pri čemu je $M = \sup\{n : p_n > 0\}$. Odredite mu matricu prijelaza.

(ii) Pokažite da (X_n) ima stacionarnu distribuciju i odredite je. Pokažite da je ona i granična distribucija i dokažite diskretnu verziju tzv. *Blackwellovog teorema obnavljanja*:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\text{dogodilo se obnavljanje u trenutku n}) = \frac{1}{\mu}\,.$$

(iii) Odredite stacionarnu distribuciju u slučaju kada Y_1 ima geometrijsku distribuciju na $\mathbb{N}$, tj. $\mathbb{P}(Y_1 = k) = q^{k-1}p$ za $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(i) Za sve $i \geq 2$ je očito

$$\mathbb{P}(X_n = i-1 | X_{n-1} = i) = 1\,,$$

a tvrdimo da je za sve $j \in S$,

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = j) = p_j.$$

Zaista, $X_{n-1} = 1$ akko i samo ako se dogodilo obnavljanje u trenutku n, tj. $S_k = n$ za neki $k \geq 1$, i u tom slučaju je $N(n) = k$ te

$$X_n = S_{N(n)+1} - n = S_{k+1} - S_k = Y_{k+1}\,.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} = 1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j, S_k = n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_{k+1} = j, S_k = n) \\ &= [\text{nez.}] = \mathbb{P}(Y_{k+1} = j) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) = \mathbb{P}(Y_1 = j)\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)\,.\end{aligned}$$

Ostale prijelazne vjerojatnosti su jednake 0. Dakle, matrica prijelaza je

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}.$$

(ii) Uočimo najprije da je lanac ireducibilan jer sva stanja komuniciraju s 1. Nadalje, ukoliko se lanac nalazi u stanju 1, tj. u sljedećem trenutku će se dogoditi obnavljanje, vrijeme prvog povratka u stanje 1 ima istu distribuciju kao i Y_1. Specijalno,

$$\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right] = \mathbb{E}[Y_1] = \mu < \infty\,,$$

pa je dakle lanac i pozitivno povratan te ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju. Znamo odmah da je

$$\pi_1 = \frac{1}{\mathbb{E}_1\left[T_1^{(1)}\right]} = \frac{1}{\mu}\,.$$

Ostatak stacionarne distribucije određujemo iz sustava $\pi P = \pi$, tj.

$$\begin{aligned} \pi_1 p_1 + \pi_2 &= \pi_1 \\ \pi_1 p_2 + \pi_3 &= \pi_2 \\ \pi_1 p_3 + \pi_4 &= \pi_3 \\ &\vdots\,, \end{aligned}$$

uz $\pi_M = p_M \pi_1$ ukoliko je $M < \infty$. Sumiranjem prvih $1 \leq n < M$ jednadžbi dobivamo $\pi_1(p_1 + \dots + p_n) + \pi_{n+1} = \pi_1$, odnosno

$$\pi_{n+1} = \pi_1(1 - p_1 - \dots - p_n) = \pi_1 \mathbb{P}(Y \geq n+1) = \frac{\mathbb{P}(Y \geq n+1)}{\mu}.$$

Uočimo da posljednja jednadžba vrijedi i za $n = 0$.

Provjerimo sada aperiodičnost. Budući da je za sve $n \geq 1$

$$p_{11}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1) \geq \mathbb{P}_1(X_1 = n, X_2 = n-1, \dots, X_n = 1) = \mathbb{P}_1(X_1 = n) = p_n\,,$$

iz uvjeta zadatka slijedi da je period stanja 1 (a onda i svih ostalih stanja) jednak

1. Dakle, granična distribucija postoji i jednaka je stacionarnoj. Specijalno

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{dogodilo se obnavljanje u trenutku n}) &= \mathbb{P}(S_k = n \text{ za neki } k \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) \to \pi_1 = 1/\mu\end{aligned}$$

kada $n \to \infty$.

(iii) U ovom slučaju je $\mu = 1/p$ pa je

$$\pi_n = p\mathbb{P}(Y \geq n) = pq^{n-1}\,,\ n \geq 1\,,$$

tj. stacionarna distribucija je ponovno ista geometrijska distribucija s parametrom p.[17]

□

Napomena* Uz notaciju i pretpostavke kao u prethodnom zadatku, ako je za sve $n \geq 0$, $D_n = S_{N(n)+1} - S_{N(n)}$ duljina intervala između dva obnavljanja koji sadrži trenutak n, može se pokazati da za sve $i = 1, 2, \ldots, M$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n = i) = \frac{i\mathbb{P}(Y_1 = i)}{\mu} =: \mathbb{P}(D_\infty = i)\,.$$

Na primjer, ako je $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \frac{1}{2}$ (tj. "tipični" interval između obnavljanja je duljine 1 ili 2 i to s jednakom vjerojatnosti), slijedi da je $\mathbb{P}(D_\infty = 1) = \frac{1}{3}$ i $\mathbb{P}(D_\infty = 2) = \frac{2}{3}$. Riječima, za velike n, dva puta je vjerojatnije da se u trenutku n nalazimo u intervalu duljine 2 nego 1, tj. taj interval je po distribuciji "duži" od tipičnog intervala. Ovaj fenomen naziva se *paradoks vremena čekanja* (engl. *waiting time paradox*). Intuitivno objašnjenje je sljedeće. Po zakonu velikih brojeva broj intervala duljina 1 i 2 asimptotski će biti podjednak, pa budući da intervali duljine 2 zauzimaju dva puta više vremenskih trenutaka, 2 puta je vjerojatnije da ćemo "upasti" u dulji interval.

Zadaci za vježbu

Zadatak 8.7 Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan i pozitivno povratan lanac. Pokažite da granična distribucija postoji ako i samo ako je lanac aperiodičan, i u tom slučaju je granična distribucija jednaka stacionarnoj (uočite da je jedan smjer dan Teoremom 8.2).

(*Uputa:* Ukoliko je lanac periodičan koristeći [Von09, Teorem 8.12] i činjenicu da je $\pi_i > 0$ za sve $i \in S$ pokažite da za sve i niz $(p_{ii}^{(n)})_{n\geq 0}$ ima barem dva gomilišta.)

Zadatak 8.8 Neka je $(X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan Markovljev lanac na beskonačnom skupu sta-

[17] Uočimo da je $X_0 = Y_1 \sim G(p) = \pi$, pa po [Von09, Teorem 7.4] slijedi da je $X_n \sim \pi = G(p)$ za sve $n \geq 0$, tj. $X_n \sim Y_1$ za sve $n \geq 0$. Na prvu je to kontraintuitivno, a povezano je s tzv. paradoksom vremena čekanja, vidi iduću napomenu.

nja S sa dvostruko stohastičkom matricom prijelaza P (npr. jednostavna slučajna šetnja na $\mathbb{Z}$). Pokažite da $(X_n)_{n\geq 0}$ ne može biti pozitivno povratan.

Zadatak 8.9 Bacamo simetričnu kocku te neka X_n označava zbroj prvih n bacanja za $n \geq 1$.

(a) Neka je $T = \inf\{n \geq 1 : X_n \text{ je djeljiv s } 13\}$. Odredite $\mathbb{E}[T]$.

(b) Odredite, ako postoji,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \text{ je djeljiv s } 13)\,.$$

Zadatak 8.10 (Move-to-front scheme) Svako jutro student uzima jednu od svoje tri knjige s police. Vjerojatnost da će izabrati knjigu i je α_i, pri čemu je $0 < \alpha_i < 1$ za $i = 1, 2, 3$, i svaki izbor je nezavisan od prethodnih dana. Na kraju dana, student vrati knjigu na krajnje lijevo mjesto na polici.

(a) Ako p_n predstavlja vjerojatnost da će student na n-ti dan naći knjige u poretku $1, 2, 3$, s lijeva na desno, pokažite da, bez obzira na početni raspored knjiga, p_n konvergira kada $n \to \infty$, i odredite limes. (*Uputa:* Pri računanju π_{123} račun se može skratiti ako se zaključi da je $\pi_{213} + \pi_{231} = \alpha_2$.)

(b)* Možete li naslutiti rješenje kada, umjesto 3, student ima $N \in \mathbb{N}$ knjiga koje bira s vjerojatnostima $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$? (vidi [Hen72])

Zadatak 8.11 (*) Neka je X ireducibilan Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja S. Pretpostavimo da za matricu prijelaza P vrijedi $P^2 = P$.

(i) Dokažite da je lanac aperiodičan. (*Uputa:* Pokažite prvo da je $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}$.)

(ii) Dokažite da je lanac pozitivno povratan i odredite njegovu stacionarnu distribuciju. (*Uputa:* Iskoristite [Von09, (6.3)].)

(iii) Dokažite da za sve $i, j \in S$ vrijedi $p_{ij} = p_{jj}$, tj. svi retci matrice prijelaza su isti.

Rješenja zadataka: **Zadatak 8.9** (a) 13, (b) $\frac{1}{13}$; **Zadatak 8.10** (a) $\frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}$, (b) $\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\alpha_{i_k}}{\sum_{j=k}^{N}\alpha_{i_j}}\right)$; **Zadatak 8.11** (ii) $\pi_j = p_{jj}$ za sve $j \in S$.

9 Ergodski teorem

Teorem 9.1 (Ergodski teorem [Von09, Teorem 9.3]) *Neka je $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan i pozitivno povratan Markovljev lanac sa stacionarnom distribucijom π. Nadalje, neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ nenegativna ili ograničena funkcija. Tada je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) \quad g.s.$$

Neka je za $j \in S$ i $n \in \mathbb{N}$

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}},$$

vrijeme koje lanac provede u stanju j prije trenutka n. Ako u prethodnom teoremu uzmemo funkciju $f = 1_{\{j\}}$ dobivamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j \quad \text{g.s.} \tag{9.1}$$

Dakle, prosječno asimptotsko vrijeme provedeno u stanju j je π_j, za sve $j \in S$.

Zadatak 9.2 Jedan košarkaš igra za lokalni košarkaški klub. Ako u nekoj utakmici zabije 20 ili više poena, onda mu zavidni suigrači u sljedećoj utakmici neće uopće dodavati loptu. Klupski statističar je zaključio da se košarkašev broj poena u utakmici može modelirati kao Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3\}$ s matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pri čemu stanje $1, 2$, odnosno 3 predstavlja utakmice u kojima je košarkaš zabio najviše 9, između 10 i 19, odnosno barem 20 poena.

(a) Odredite dugoročni postotak utakmica u kojima će košarkaš zabiti barem 20 poena.

(b) Košarkaš za utakmicu dobije 200 kn ako zabije barem 20, 150 kn ako zabije između 10 i 19 poena, te 100 kn ako zabije najviše 9 poena. Koliko će košarkaš prosječno zaraditi po utakmici kroz duži vremenski period?

Rješenje.

Neka je (X_n) pripadni Markovljev lanac. Lako se vidi da je lanac ireducibilan, a budući da je konačan, zaključujemo da je pozitivno povratan pa ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju koju možemo odrediti iz sustava

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{1}{3}\pi_2 + \pi_3 \\
\pi_2 &= \frac{1}{3}\pi_1 \\
\pi_3 &= \frac{2}{3}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_2.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo da je stacionarna distribucija $\pi = (\frac{9}{20}, \frac{3}{20}, \frac{8}{20})$.

(a) Budući da je lanac ireducibilan i pozitivno povratan, iz ergodskog teorema (tj. iz (9.1)) slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_3(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=3\}} = \pi_3 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \quad \text{g.s.}$$

Dakle, dugoročno, košarkaš će u 40% utakmica zabiti barem 20 poena.

(b) Definiramo $f : S \to \mathbb{R}$ funkciju zarade košarkaša s $f(1) = 100, f(2) = 150$ i $f(3) = 200$. Prema ergodskom teoremu slijedi da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \pi_1 f(1) + \pi_2 f(2) + \pi_3 f(3) = \frac{9}{20}\cdot 100 + \frac{3}{20}\cdot 150 + \frac{8}{20}\cdot 200 = 147.5 \quad \text{g.s.}$$

Dakle, nakon dužeg vremenskog perioda, košarkaševa prosječna zarada po utakmici će iznositi 147.5 kn.

□

Zadatak 9.3 Biatlonac vježba pogađanje mete. Pri svakom pucnju metu će pogoditi s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ ako je promašio posljednja dva pucnja, s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$ ako je pogodio točno jedan od posljednja dva pucnja, te s vjerojatnošću $\frac{3}{4}$ ako je pogodio oba posljednja pucnja. Izračunajte biatlončev postotak pogođenih meta nakon velikog broja pucnjeva.

Rješenje.

Situaciju iz teksta zadatka modelirat ćemo kao Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{$✓✓, ✓✗, ✗✓, ✗✗$\}$ gdje svako stanje predstavlja jedan od mogućih ishoda dva posljednja pucnja, pri čemu, naravno, ✓ označava pogodak, a ✗ promašaj. Tako na primjer, ako je $X_n =$ ✓✗, tada je biatlonac $(n-1)$-vi pucanj pogodio, a n-ti pucanj promašio.

Matrica prijelaza ovakvog Markovljevog lanca je

$$P = \begin{array}{c} \\ \checkmark\checkmark \\ \checkmark\times \\ \times\checkmark \\ \times\times \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \checkmark\checkmark & \checkmark\times & \times\checkmark & \times\times \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Lako je vidjeti da je lanac ireducibilan, a budući da je skup stanja konačan, zaključujemo da je pozitivno povratan pa ima jedinstvenu stacionarnu distribuciju koju možemo odrediti iz sustava

$$\begin{aligned} \pi_{\checkmark\checkmark} &= \tfrac{3}{4}\pi_{\checkmark\checkmark} + \tfrac{2}{3}\pi_{\times\checkmark}, \\ \pi_{\checkmark\times} &= \tfrac{1}{4}\pi_{\checkmark\checkmark} + \tfrac{1}{3}\pi_{\times\checkmark}, \\ \pi_{\times\checkmark} &= \tfrac{2}{3}\pi_{\checkmark\times} + \tfrac{1}{2}\pi_{\times\times}, \\ \pi_{\times\times} &= \tfrac{1}{3}\pi_{\checkmark\times} + \tfrac{1}{2}\pi_{\times\times}. \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo stacionarnu distribuciju $(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8})$. Uočimo da je ishod k-tog bacanja sadržan u varijablama X_k i X_{k+1}, pa ako uzmemo funkciju $f\colon S \to \mathbb{R}$ takvu da je

$$f = 1_{\times\checkmark} + 1_{\checkmark\checkmark},$$

slijedi da je postotak pogođenih meta nakon prvih n pucanja jednak $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)$, pa po ergodskom teoremu onda imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{3}{16}\cdot 0 + \tfrac{3}{16}\cdot 1 + \tfrac{1}{8}\cdot 0 = \tfrac{11}{16}.$$

Postoje i druge mogućnosti za funkciju f, na primjer

$$f = \tfrac{1}{2}1_{\times\checkmark} + \tfrac{1}{2}1_{\checkmark\times} + 1_{\checkmark\checkmark}$$

ili

$$f = 1_{\checkmark\checkmark} + 1_{\checkmark\times}.$$

□

Zadaci za vježbu

Zadatak 9.4 Operna diva odlučila je nastupiti na velikom nizu koncerata. Nakon svakog nastupa ona će se zbog svojeg umjetničkog temperamenta povući u osamu sa vjerojatnošću od $\frac{1}{2}$. Jednom kada se to dogodi, više neće nastupati sve dok je organizator koncerta ne uvjeri da je iznimno cijeni. On to čini na način da joj šalje cvijeće svaki dan dok ne dođe do njenog povratka. Cvijeće u vrijednosti od x tisuća kuna ($0 < x < 1$) će uspjeti uvjeriti opernu divu sa vjerojatnošću $\sqrt{x}$. Organizator koncerta zaradi 750 kuna od svakog koncerta. Koliko mu je najpametnije da troši na cvijeće?

Zadatak 9.5 Označite sa V skup vrhova potpunog binarnog stabla fiksne dubine $N \geq 1$: ako $\emptyset$ označava korijen stabla, možemo zapisati $V = \{\emptyset\} \cup \{i_1 \ldots i_k : k = 1, \ldots, N, i_j \in \{0,1\}\} = \{\emptyset, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots\}$. Jasno je da korijen stabla ima stupanj 2 (susjedni su mu vrhovi 0 i 1), listovi stabla imaju stupanj 1, a svi ostali vrhovi su, dakako, stupnja 3. Promotrite slučajnu šetnju na stablu koja u svakom trenutku iz vrha v u kojem se trenutno nalazi odlazi u jedan od susjednih vrhova. Pritom idući vrh biramo svaki puta nezavisno i uniformno između vrhova susjednih vrhu v.

(a) Za bilo koji vrh v koji nije korijen ili list, koliki je očekivani broj posjeta šetnje vrhu v između dvije posjete korijena $\emptyset$?

(b) Odredite period šetnje i zaključite postoji li $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{\emptyset,\emptyset}$.

(c) Koliki je dugoročni udio vremena koje šetnja provede u korijenu?

Rješenja zadataka: **Zadatak 9.4** 250 kn; **Zadatak 9.5** (a) $3/2$, (b) period je 2 pa limes ne postoji, (c) $2/(2^{N+2} - 4)$.

10 Markovljevi lanci unatrag

Neka je X Markovljev lanac na skupu stanja S i matricom prijelaza P, te neka je λ neka mjera na skupu S. Za matricu P i mjeru λ reći ćemo da su u **detaljnoj ravnoteži** ako za sve $i, j \in S$ vrijedi

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}.$$

Lema 10.1 ([Von09, Lema 10.2]) *Ako su P i λ u detaljnoj ravnoteži, tada je λ invarijantna mjera Markovljevog lanca X.*

Dokaz. Za proizvoljni $j \in S$ imamo

$$\sum_{i \in S} \lambda_i p_{ij} = \sum_{i \in S} \lambda_j p_{ji} = \lambda_j \sum_{i \in S} p_{ji} = \lambda_j.$$

□

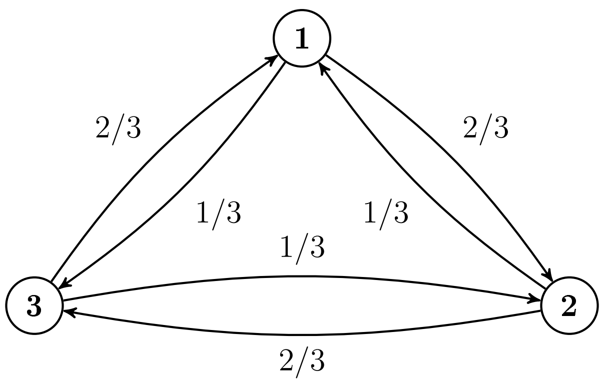
Idućim zadatkom pokazujemo da obrat ne mora nužno vrijediti.

Zadatak 10.2 Pokažite da Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{1, 2, 3\}$ s matricom prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

ima (jedinstvenu) stacionarnu distribuciju koja nije u detaljnoj ravnoteži s P. Postoji li mjera koja je u detaljnoj ravnoteži s P?

Rješenje.



Primijetimo da je matrica prijelaza dvostruko stohastička pa budući da je skup stanja konačan, koristeći Propoziciju 8.4 zaključujemo da je $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ jedna stacionarna distribucija za P. Budući da je lanac ireducibilan, ona je i jedinstvena.

Primijetimo da je, na primjer,

$$\pi_1 p_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \pi_2 p_{21}$$

pa π i P nisu u detaljnoj ravnoteži.[18]

Dokažimo sada da ne postoji niti neka druga mjera λ koja je u detaljnoj ravnoteži s P. Ako pretpostavimo suprotno, tada po Lemi 10.1 znamo da je onda λ ujedno i invarijanta mjera, a budući da je prijelazna matrica P ireducibilna i pozitivno povratna (pa posebno i povratna), koristeći [Von09, Teorem 7.11] zaključujemo da je nužno $\pi = \lambda/c$ za $c = \sum_{j \in S} \lambda_j$. To je kontradikcija jer bi u tom slučaju vrijedilo

$$\pi_i p_{ij} = \frac{1}{c} \lambda_i p_{ij} = \frac{1}{c} \lambda_j p_{ji} = \pi_j p_{ji}, \quad \text{za sve } i, j \in S,$$

tj. π bi bila u detaljnoj ravnoteži s P, što smo pokazali da nije slučaj. Alternativno, mogli smo i direktno pokazati da ne postoji netrivijalna mjera λ koja bi zadovoljavala uvjete detaljne ravnoteže (Zadatak 10.11). $\square$

Bitno je za napomenuti da je u slučaju kada rješenje jednadžbi uvjeta detaljne ravnoteže postoji, često ga je lakše odrediti nego rješiti sustav $\lambda = \lambda P$.

Sada ćemo dati vjerojatnosnu interpretaciju uvjeta detaljne ravnoteže. Za ireducibilan (λ, P)-Markovljev lanac $X = (X_n)_{n \geq 0}$ kažemo da je **reverzibilan**, ako je za svaki $N \geq 1$ proces $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} := (X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ također (λ, P)-Markovljev lanac.

Teorem 10.3 ([Von09, Teorem 10.3]) *Lanac X je reverzibilan ako i samo ako su P i λ u detaljnoj ravnoteži. U tom slučaju λ je nužno jedinstvena stacionarna distribucija lanca X.*

Budući da za ireducibilan lanac može postojati najviše jedna početna distribucija uz koju je lanac reverzibilan jednostavno kažemo da je lanac reverzibilan ako takva distribucija postoji. Uočite, ako znamo stacionarnu distribuciju (ireducibilnog) lanca, za provjeru reverzibilnosti dovoljno je provjeriti je li ona u detaljnoj ravnoteži s P.

Na primjer, lanac iz prethodnog zadatka nije reverzibilan. Intuitivno, lanac se "uglavnom" kreće u smjeru kazaljke na satu pa se pri okretanju vremena lanac "uglavnom" kreće u suprotnom smjeru.[19]

Zadatak 10.4 Provjerite jesu li sljedeća dva ireducibilna Markovljeva lanca reverzibilna.

[18] Budući da je π uniformna distribucija na S, uvjeti detaljne ravnoteže vrijede akko je matrica prijelaza simetrična što ovdje nije slučaj.

[19] Formalno, ukoliko je početna distribucija lanca uniformna na S (dakle, jednaka stacionarnoj distribuciji π), tada je proces $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} := (X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ $(\pi, \hat{P})$-Markovljev lanac pri čemu je $\hat{p}_{ij} = p_{ji}$, vidi [Von09, Teorem 10.1].

(a) Skup stanja je $S = \{1, 2, 3\}$, a matrica prijelaza

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

(b) Skup stanja S je konačan i matrica prijelaza P je simetrična, tj. $p_{ij} = p_{ji}$ za sve $i, j \in S$.

Rješenje.

(a) Tražimo vjerojatnosnu distribuciju π koja zadovoljava uvjete detaljne ravnoteže $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$, za sve $i, j \in S$. Dovoljno je provjeriti jednadžbe

$$\begin{aligned} \pi_1 p_{12} &= \pi_2 p_{21} \\ \pi_1 p_{13} &= \pi_3 p_{31} \\ \pi_2 p_{23} &= \pi_3 p_{32}, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot \frac{3}{5} &= \pi_2 \cdot \frac{1}{5} \\ \pi_1 \cdot 0 &= \pi_3 \cdot 0 \\ \pi_2 \cdot \frac{2}{5} &= \pi_3 \cdot \frac{3}{10}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Vidimo da je druga jednadžba uvijek zadovoljena. Stavimo da je $\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_2$ i $\pi_3 = \frac{4}{3}\pi_2$, a π_2 odredimo iz

$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3}\right) = \pi_2 \cdot \frac{8}{3}.$$

Slijedi da vjerojatnosna distribucija $\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ zadovoljava sve jednadžbe u (10.1), pa je u detaljnoj ravnoteži s P. Dakle, lanac je reverzibilan.

(b) Budući da je matrica prijelaza simetrična i S konačan, vjerojatnosna distribucija $\pi = (1/|S|, 1/|S|, \dots, 1/|S|)$, je jedinstvena stacionaran distribucija (P je specijalan slučaj dvostruko stohastičke matrice). Provjerimo zadovoljava li π uvjete detaljne ravnoteže. Za sve $i, j \in S$ imamo

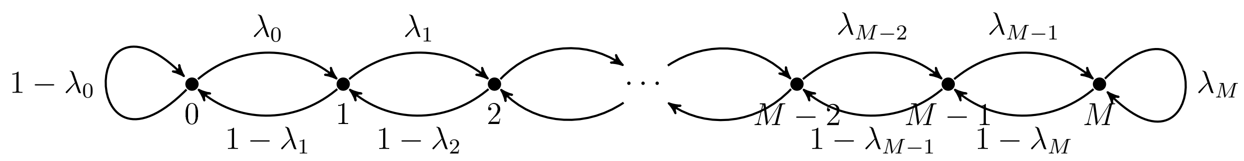
$$\pi_i p_{ij} = \frac{1}{|S|} p_{ij} = \frac{1}{|S|} p_{ji} = \pi_j p_{ji}.$$

Dakle, π je u detaljnoj ravnoteži s P pa je lanac reverzibilan.

□

Idući zadatak daje jednu klasu lanaca za koju stacionarnu distribuciju možemo odrediti iz uvjeta detaljne ravnoteže.

Zadatak 10.5 Markovljev lanac na $S = \{0, 1, \dots, M\}$ za $M \in \mathbb{N}$, zadan je slikom



pri čemu je $0 < \lambda_i < 1$ za sve $i = 1, \dots, M-1$, te $\lambda_0 > 0, 1 - \lambda_M > 0$. Pokažite da je ovaj lanac reverzibilan te mu odredite detaljno uravnoteženu distribuciju.

Rješenje.

Iz pretpostavki na brojeve $\lambda_i, i \in S$, slijedi da je lanac ireducibilan. Tražimo vjerojatnosnu distribuciju π na S koja je u detaljnoj ravnoteži s P, tj. za sve $i, j \in S$ mora vrijediti

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Budući da je $p_{ij} = 0$ za $|i - j| \geq 2$, jedine netrivijalne jednadžbe su

$$\pi_i p_{ii+1} = \pi_{i+1} p_{i+1i},$$

tj.

$$\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1}(1 - \lambda_{i+1}), \quad \text{za sve } i = 0, 1, ..., M-1. \tag{10.2}$$

Dakle, za svaki takav i mora vrijediti

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i+1}} \pi_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{i+1}} \frac{\lambda_{i-1}}{1-\lambda_i} \pi_{i-1} = \cdots = \frac{\lambda_i \cdot \lambda_{i-1} \cdots \lambda_0}{(1-\lambda_{i+1})(1-\lambda_i) \cdots (1-\lambda_1)} \pi_0 =: q_{i+1} \pi_0.$$

Dakle, ovako odabrani π_{i+1} i proizvoljan $\pi_0 > 0$ zadovoljavaju jednadžbe u (10.2). Budući da tražimo vjerojatnosnu distribuciju, mora vrijediti

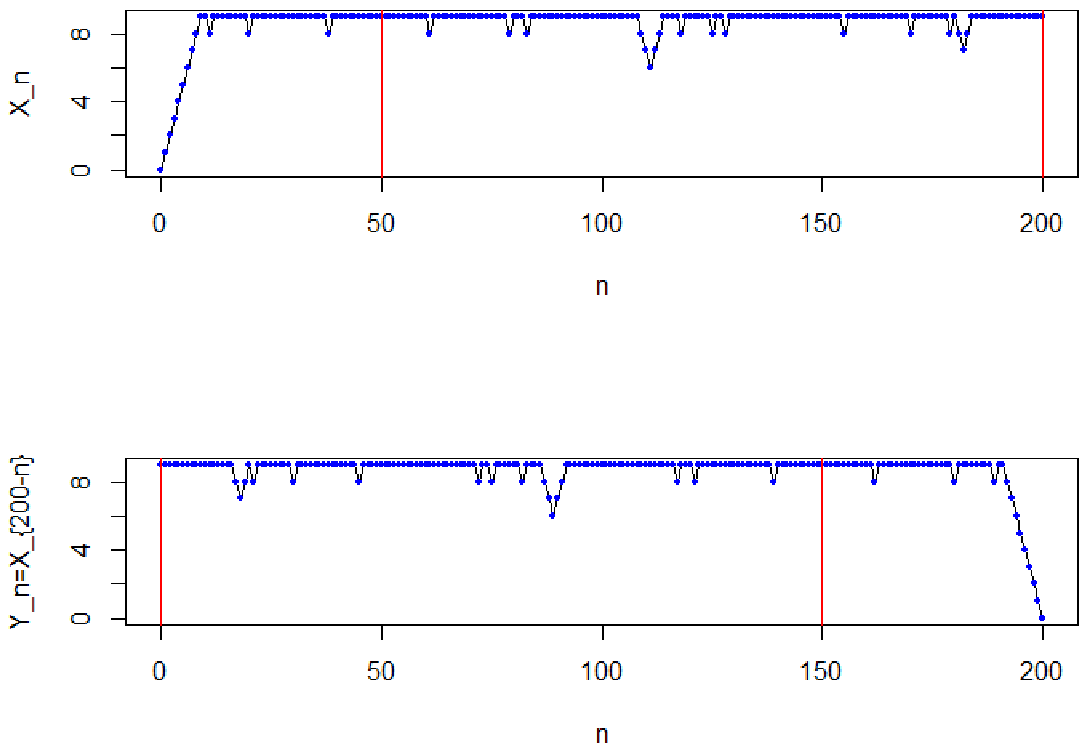
$$1 = \sum_{i=0}^{M} \pi_i = \pi_0(1 + q_1 + ... + q_M),$$

tj.

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + q_1 + ... + q_M}.$$

Dakle, postoji vjerojatnosna distribucija π koja je u detaljnoj ravnoteži s P pa je lanac reverzibilan i specijalno, π je jedinstvena stacionarna distribucija lanca. $\square$

Uočimo da je lanac iz prethodnog zadatka reverzibilan i u slučaju da je λ_i blizu 1 za sve $i \in S$. Na prvu to izgleda kontraintuitivno jer se čini da to znači da se i pri okretanju vremena lanac također kreće "uglavnom" udesno. Ipak, tu zanemarujemo činjenicu da je lanac reverzibilan uz stacionarnu početnu distribuciju koja je u tom slučaju koncentrirana blizu M. Ukoliko ne krećemo iz stacionarne razdiobe, lanac postaje reverzibilan tek nakon što njegova distribucija postane približno stacionarna, vidi sliku dolje.

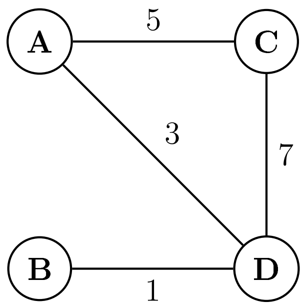


Gore: *simulacija jedne trajektorije* $X_0, X_1, \ldots, X_{200}$ *lanca iz Zadatka 10.5 uz* $X_0 = 0$ *i* $\lambda_i = 0.9$ *za sve* $i \in S$. ***Dolje:*** $Y_0, \ldots, Y_{200}$ *za* $Y_n = X_{200-n}$.

Primjer 10.6 Tipični primjer reverzibilnih Markovljevih lanaca su slučajne šetnje na težinskim grafovima, vidi [Von09, Primjer 10.4]. Naime, neka je $G = (V, E)$ povezan neusmjeren graf sa skupom vrhova V i skupom bridova E (dozvoljeno je da $|V| = \infty$ te da postoje petlje). Svakom bridu $(i, j) \in E$ pridružena je težina (ili provodljivost) $c_{ij} > 0$, a za uređene parove $(i, j) \notin E$ stavimo $c_{ij} = 0$. Za proizvoljni vrh $i \in V$ definiramo kapacitet vrha i s $c_i = \sum_{j \in V} c_{ij}$ i pretpostavljamo da je $c_i < \infty$ za sve $i \in V$. *Slučajna šetnja na* G je Markovljev lanac sa skupom stanja V i prijelaznim vjerojatnostima

$$p_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}, \quad i, j \in S.$$

Na primjer, za graf



imamo $c_A = 5 + 3 = 8, c_B = 1, c_C = 12, c_D = 11$ pa je matrica prijelaza pripadne slučajne šetnje dana s

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{5}{12} & 0 & 0 & \frac{7}{12} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{7}{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nadalje, zbog pretpostavke o povezanosti grafa slijedi da je šetnja ireducibilna. Ako vrijedi $c := \sum_{i \in V} c_i < \infty$ (npr. ako je $|V| < \infty$),

$$\pi_i = \frac{c_i}{c}, \ \ i \in S$$

je dobro definirana vjerojatnosna distribucija na V i lako se pokaže da je u detaljnoj ravnoteži s P. Dakle, u tom slučaju šetnja je reverzibilan Markovljev lanac. Na kraju, uočimo da slučaj jednostavne slučajne šetnje iz Poglavlja 7.1 dobijemo kao specijalan slučaj ukoliko stavimo $c_{ij} = 1$ za sve $(i, j) \in E$. $\square$

Ispostavlja se da se svaki reverzibilan Markovljev lanac može prikazati kao slučajna šetnja na težinskom grafu.

Zadatak 10.7 Neka je (X_n) ireducibilan Markovljev lanac na S. Pokažite da je (X_n) reverzibilan (tj. postoji distribucija koja zadovoljava uvjete detaljne ravnoteže) ako i samo ako se može prikazati kao slučajna šetnja na težinskom grafu uz $c = \sum_{i \in V} c_i < \infty$.

Rješenje.

Pretpostavimo da je (X_n) reverzibilan Markovljev lanac s prijelaznom matricom P te pokažimo da se može prikazati kao slučajna šetnja na težinskom grafu (drugi smjer je pokazan u prethodnom primjeru).

Znamo da postoji jedinstvena stacionarna distribucija π te da zadovoljava $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ za sve $i, j \in S$. Budući da je $\pi_i > 0$ za sve i, slijedi da je $p_{ij} > 0$ akko $p_{ji} > 0$ za sve $i, j \in S$. Sada definiramo $V := S$ te stavimo $(i, j) \in E$ ako $p_{ij} > 0$ (zbog prethodnog je zaista $(i, j) \in E$ akko $(j, i) \in E$, tj. graf je neusmjeren). Uočimo da ireducibilnost povlači da je ovaj graf povezan.

Nadalje, definiramo

$$c_{ij} := \pi_i p_{ij} \, , \, i, j \in S \, .$$

Ključan korak je primijetiti da budući da π zadovoljava uvjete detaljne ravnoteže zaista vrijedi $c_{ij} = c_{ji}$, tj. zaista imamo dobro definiran težinski graf.

Iz konstrukcije odmah slijedi da je slučajna šetnja na ovom grafu Markovljev lanac s prijelaznom matriom P. Zaista, $c_i = \sum_{j \in V} \pi_i p_{i,j} = \pi_i < \infty$, pa su prijelazne vjerojatnosti

$$p'_{i,j} = \frac{c_{i,j}}{c_i} = p_{i,j} \, , \, i, j \in S \, .$$

Na kraju, uočimo da je $c = \sum_{i \in V} c_i = \sum_{i \in S} \pi_i = 1 < \infty$. $\square$

Na primjer, lako se vidi da se lanac iz Zadatka 10.2 ne može prikazati kao slučajna šetnja na težinskom grafu pa to daje alternativan dokaz nereverzibilnosti (Zadatak 10.11).

Zadatak 10.8 Profesor ukupno ima $M \geq 2$ kišobrana od kojih se neki nalaze u njegovom uredu, a neki kod kuće. Svaki dan profesor putuje na posao i s njega se isti dan vraća kući. Vjerojatnost da će na nekom putovanju pasti kiša jednaka je p (neovisno od toga kakvo je prije bilo vrijeme), i jedino će u tom slučaju profesor ponijeti kišobran (ako ima bar jedan kišobran na mjestu na kojem se trenutno nalazi). Koji je dugoročno udio putovanja u kojima profesor pokisne?

Rješenje.

Nije loše zadatk prvo riješiti za neki manji M, npr. $M = 3$, iz čega će biti jasno kako dobiti rezultat u općenitom slučaju.

Neka je $X = (X_n \colon n \geq 1)$ Markovljev lanac na skupu stanja $S = \{0, 1, \ldots, M - 1, M', M''\}$. U ovom lancu je $X_n = i$ ako uoči n-tog putovanja na mjestu na kojem se profesor nalazi postoji i kišobrana, uz izuzetak da je situacija sa M kišobrana podijeljena na dva stanja – M' i M'' ovisno o tome je li profesor na posljednjem putovanju pokisnuo ili ne. Matrica prijelaza ovog Markovljevog lanca je $(q = 1 - p)$

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & M-2 & M-1 & M' & M'' \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M-2 \\ M-1 \\ M' \\ M'' \end{array} & \begin{pmatrix} & & & & & & p & q \\ & & & & & q & & p \\ & & & & q & p & & \\ & & & \iddots & & & & \\ & & q & & & & & \\ & q & p & & & & & \\ q & p & & & & & & \\ q & p & & & & & & \end{pmatrix} \end{array} .$$

Može se provjeriti da je

$$\pi = \frac{1}{M+q}(q, 1, 1, \ldots, 1, pq, q^2+p),$$

stacionarna distribucija promatranog Markovljevog lanca. Budući da je naš Markovljev lanac ireducibilan, traženi udio lako računamo pomoću ergodskog teorema za Markovljeve lance:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{\{X_n = M'\}} = \pi_{M'} = \frac{pq}{M+q} \quad \text{g.s.}^{20}$$

Pokažimo sada jedan način na koji smo mogli doći do stacionarne distribucije π. Promatramo lanac u kojem su stanja M' i M'' objedinjena u jedno stanje M (koje se onda definira na isti način kao i sva ostala) – jednostavno pratimo koliko profesor ima kišobrana na raspolaganju prije svakog putovanja. Dakle, prijelazna matrica je

$$\tilde{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ M-2 \\ M-1 \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & M-2 & M-1 & M \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & q & p \\ & & & & q & p & \\ & & & \iddots & & & \\ & & q & & & & \\ & q & p & & & & \\ q & p & & & & & \end{pmatrix} \end{array}.$$

Pretpostavimo radi jednostavnosti zapisa da je M paran. Ako se ovom lancu pridruži graf vidimo da je lanac specijalan slučaj reverzibilnih lanaca iz Zadatka 10.5 pa stacionarnu distribuciju $\tilde{\pi}$ možemo odrediti iz (jedinih netrivijalnih) uvjeta detaljne ravnoteže:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_0 \cdot 1 &= \tilde{\pi}_M \cdot q \\ \tilde{\pi}_1 \cdot p &= \tilde{\pi}_M \cdot p \\ \tilde{\pi}_1 \cdot q &= \tilde{\pi}_{M-1} \cdot q \\ &\vdots \\ \tilde{\pi}_{\frac{M}{2}} \cdot p &= \tilde{\pi}_{\frac{M}{2}+1} \cdot p \\ \tilde{\pi}_{\frac{M}{2}} \cdot q &= \tilde{\pi}_{\frac{M}{2}} \cdot q. \end{aligned}$$

Dakle, mora vrijediti $\tilde{\pi}_1 = \cdots = \tilde{\pi}_M$ i $\tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_M \cdot q$ te $1 = \sum_{k=0}^{M} \tilde{\pi}_k = \tilde{\pi}_M(M+q)$. Odmah slijedi da vjerojatnosna distribucija $\tilde{\pi} = \frac{1}{M+q}(q, 1, 1, \ldots, 1)$ zadovoljava uvjete detaljne ravnoteže pa je to i stacionarna distribucija za $\tilde{P}$.[21]

[20] Na primjer, za $M = 3$ maksimum se postiže za $p \approx 0.536$ te iznosi $\pi_{M'} \approx 0.072$, a za $M = 100$ maksimum se postiže za $p \approx 0.501$ te iznosi $\pi_{M'} \approx 0.002$.

[21] Alterativno, lanac možemo prikazati kao slučajnu šetnju na težinskom grafu iz Primjera 10.6 i onda

Vratimo se na originalni lanac. Po Ergodskom teoremu znamo da je masa koju stacionarna distribucija daje stanju i zapravo asimptotsko prosječno vrijeme koje lanac provede u stanju i. Dakle, intuitivno očekujemo da će stacionarna distribucija originalnog lanca biti slična distribuciji $\tilde{\pi}$, tj. preciznije, da će se masa koja se nalazila u stanju M podijeliti na mase u stanjima M' i M'', a da će mase u ostalim stanjima ostati nepromijenjene.

Zaista, ako uzmemo $\pi_i = \tilde{\pi}_i$ za $i = 0, 1, \ldots, M-1$, a $\pi_{M'}$ i $\pi_{M''}$ odredimo iz uvjeta za stacionarnu distribuciju[22]

$$\begin{aligned}\pi_{M'} &= p \cdot \pi_0 = p \cdot \tilde{\pi}_0 = \frac{pq}{M+q}\,,\\ \pi_{M''} &= q \cdot \pi_0 + p \cdot \pi_1 = q \cdot \tilde{\pi}_0 + p \cdot \tilde{\pi}_1 = \frac{q^2+p}{M+q}.\end{aligned}$$

Budući da je $\pi_{M'} + \pi_{M''} = \tilde{\pi}_M$, π je uistinu vjerojatnosna distribucija, a iz $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}\tilde{P}$ lako slijedi da je to stacionarna distribucija za P. $\square$

Markov Chain Monte Carlo

Pretpostavimo da je X slučajna varijabla na prebrojivom skupu S te $(\alpha_i : i \in S)$ pozitivni brojevi takvi da

$$\pi_i := \mathbb{P}(X = i) \propto \alpha_i,\ i \in S \qquad (\text{tj. } \pi_i = \alpha_i / \sum_{j\in S} \alpha_j) \tag{10.3}$$

Pretpostavimo da ne znamo konstatu $c := \sum_{j\in S} \alpha_j < \infty$ (npr. preteško ju je izračunati numerički jer je S jako velik)[23], ali bismo htjeli procijeniti π, ili općenitije $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{i\in S} \pi_i f(i)$ za $f : S \to \mathbb{R}$ koja je ograničena.

Osnovna ideja tzv. **Markov Chain Monte Carlo** (MCMC) metode je konstruirati ireducibilan Markovljev lanac $(X_n)_{n\geq 0}$ čija je stacionarna distribucija upravo π. Ergodski teorem tada garantira da je gotovo sigurno

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \approx \mathbb{E}[f(X)]\,, \text{ za "velike" } n\,,$$

bez obzira na početnu distribuciju lanca. Jedan od najpoznatijih MCMC algoritama dan je u sljedećem zadatku, a ključno je primijetiti da za njegovu provedbu nije potrebno znati konstantu c.

Metropolis-Hastings algoritam: Neka su $(\alpha_i)_{i\in S}$ iz (10.3) te pretpostavimo da je $\alpha_i > 0$ za sve $i \in S$. Neka je P proizvoljna ireducibilna prijelazna matrica na S takva da

iskoristiti gotovu formulu za stacionarnu distribuciju.

[22] Možemo li intutivno objasniti zašto je $\pi_{M'} = p \cdot \tilde{\pi}_0$?

[23] Vidi npr. tzv. *Isingov model.*

je $p_{ij} > 0$ ako i samo ako je $p_{ji} > 0$, za sve $i, j \in S$, te neka je λ proizvoljna vjerojatnosna distribucija na S.

1. Neka X_0 ima distribuciju λ te neka je $n := 0$.
2. Ako je $X_n = i$, za iduće stanje lanca "predlažemo" stanje $j \in S$ s vjerojatnošću p_{ij}.
3. Računamo

$$\alpha_{ij} = \min\left\{1, \frac{\alpha_j p_{ji}}{\alpha_i p_{ij}}\right\}$$

   i stavljamo $X_{n+1} := j$ s vjerojatnošću α_{ij}, odnosno $X_{n+1} := i = X_n$ s vjerojatnošću $1 - \alpha_{ij}$.
4. Stavi $n := n + 1$ i vrati se na korak 2.

Zadatak 10.9 Neka je Q prijelazna matrica Markovljevog lanca $(X_n)_{n\geq 0}$.

(i) Odredite Q.

(ii) Pokažite je da je $(X_n)_{n\geq 0}$ ireducibilan.

(iii) Pokažite da je mjera $(\alpha_i)_{i\in S}$ u detaljnoj ravnoteži s Q te zaključite da je $(X_n)_{n\geq 0}$ reverzibilan i da mu je stacionarna distribucija upravo $\pi_i = \mathbb{P}(X = i)$, $i \in S$.

Rješenje.

(i) Fiksirajmo $i \in S$. Uočimo najprije da je $q_{ij} = 0$ za sve $j \neq i$ takve da je $p_{ij} = 0$ (u tom slučaju ne možemo niti "predložiti" stanje j za sljedeće stanje). Nadalje, ako je $p_{ij} > 0$ i $j \neq i$ iz konstrukcije slijedi da je

$$q_{ij} = p_{ij} \cdot \alpha_{ij}$$

Na kraju, $q_{ii} = 1 - \sum_{j\neq i} q_{ij}$ ili direktno

$$q_{ii} = p_{ii} \cdot \underbrace{\alpha_{ii}}_{=1} + \sum_{j\neq i} p_{ij}(1 - \alpha_{ij})\,.$$

Zaista, ostajemo u stanju i ukoliko smo odmah "predložili" stanje i ili smo predložili ali nismo prihvatili stanje $j \neq i$.

(ii) Ako je $p_{ij} > 0$ za $i \neq j$, iz $p_{ji}, \alpha_i, \alpha_j > 0$ slijedi da je $\alpha_{ij} > 0$ te stoga i $q_{ij} > 0$. Budući da je P ireducibilna prijelazna matrica, slijedi da je i Q ireducibilna.

(iii) Pokazujemo da vrijedi

$$\alpha_i q_{ij} = \alpha_j q_{ji} \, , \; i \neq j \in S \, . \tag{10.4}$$

Već smo pokazali da je za sve $i \neq j \in S$ vrijedi $q_{ij} > 0$ ako i samo ako $p_{ij} > 0$. Nadalje, budući da samo pretpostavili da je $p_{ij} > 0$ ako i samo ako $p_{ji} > 0$, za sve $i, j \in S$, isto vrijedi i za matricu Q. Specijalno, ako je $q_{ij} = 0$ za neke $i \neq j \in S$, imamo i $q_{ji} = 0$ pa u tom slučaju vrijedi (10.4).

Nadalje, ako je $i \neq j$ te $q_{ij} > 0$ (tj. $p_{ij} > 0$) imamo

$$\begin{aligned} \alpha_i q_{ij} &= \alpha_i p_{ij} \min\{1, \alpha_j p_{ji}/p_{ij}\alpha_i\} = \min\{\alpha_i p_{ij}, \alpha_j p_{ji}\} \\ &= \alpha_j p_{ji} \min\{\alpha_i p_{ij}/\alpha_j p_{ji}, 1\} = \alpha_j q_{ji} \, . \end{aligned}$$

Dakle, $(\alpha_i)_{i \in S}$ je u detaljnoj ravnoteži s Q pa je

$$\pi_i := \alpha_i / \sum_{j \in S} \alpha_j = \mathbb{P}(X = i) \, , \; i \in S$$

vjerojatnosna distribucija koja je u detaljnoj ravnoteži s Q. Dakle, Q je reverzibilna i π je njena stacionarna distribucija.

□

Primjer 10.10 Pretpostavimo da je $\pi_i = q^i p$, $i \geq 0$, za $p = 1 - q \in (0, 1)$, tj. X ima geometrijsku razdiobu na $\mathbb{N}_0$. Ako stavimo $\alpha_i = q^i$, očito vrijedi (10.3) (u ovom slučaju je konstatnu $c = 1/p$ trivijalno izračunati). Neka je P prijelazna matrica jednostavne simetrične slučajne šetnje na $\mathbb{N}_0$, tj.

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= p_{i,i-1} = \frac{1}{2} \, , \; i \geq 1 \, , \\ p_{0,0} &= p_{0,1} = \frac{1}{2} \, . \end{aligned}$$

Odredimo prijelaznu matricu Q dobivenu Metropolis-Hastings algoritmom.

Za $i \geq 1$ vjerojatnosti prihvaćanja su

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i+1} &= \min\left\{1, \frac{\alpha_{i+1} p_{i+1,i}}{\alpha_i p_{i,i+1}}\right\} = \min\left\{1, \frac{q^{i+1}}{q^i}\right\} = \min\{1, q\} = q \, , \\ \alpha_{i,i-1} &= \min\left\{1, q^{-1}\right\} = 1 \, , \end{aligned}$$

te $\alpha_{0,1} = q$, $\alpha_{0,0} = 1$ (ostali $\alpha_{i,j}$ nam ne trebaju jer je $p_{i,j} = 0$). Dakle, za $i \geq 1$ prijelazne vjerojatnosti su

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= p_{i,i+1}\alpha_{i,i+1} = \frac{1}{2}q \\ q_{i,i-1} &= \frac{1}{2}\,, \\ q_{i,i} &= 1 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-q) = \frac{1}{2}p\,, \end{aligned}$$

te $q_{0,1} = \frac{1}{2}q$ i $q_{0,0} = 1 - \frac{1}{2}q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$. Riječima, svaki put kada bi šetnja napravila korak udesno, algoritam je s vjerojatnošću p ostavi na istom mjestu. □

Na kraju napomenimo da se MCMC metode u praksi često koriste npr. pri rješavanju problema u tzv. *Bayesovoj statistici*, ali za to je potrebno znanje teorije Markovljevih lanaca na općenitom (dakle, ne nužno prebrojivom) skupu stanja. Ipak, osnovna ideja MCMC metoda i Metropolis-Hastings algoritma je potpuno ista.

Zadaci za vježbu

Zadatak 10.11 Promatramo lanac iz Zadatka 10.2.

(i) Direktno po definiciji pokažite da prijelazna matrica lanca nije u detaljnoj ravnoteži niti s jednom mjerom.

(ii) Pokažite da lanac nije reverzibilan tako što ćete pokazati da se ne može prikazati kao slučajna šetnja na težinskom grafu.

Zadatak 10.12 Odredite detaljno uravnoteženu (pa dakle i stacionarnu) distribuciju lanca iz Zadatka 10.5 u slučaju kada je $\lambda_i = p \in (0,1)$ za sve $i \in S$.

Zadatak 10.13 Objasnite zašto lanac iz Zadatka 10.5 uvijek možemo prikazati kao slučajnu šetnju na težinskom grafu (točne vrijednosti težina bridova nije potrebno računati) te time dati alternativan dokaz reverzibilnosti.

Rješenja zadataka: **Zadatak 10.12** $\pi_i = \left(\frac{p}{q}\right)^i \cdot \pi_0$, $i \in S$, pri čemu je $\pi_0 = \frac{1-p/q}{1-(p/q)^{M+1}}$ ukoliko je $p \neq q$ te $\pi_0 = \frac{1}{M+1}$ ukoliko je $p = q = \frac{1}{2}$.

Literatura

[Hen72] W. J. Hendricks. The stationary distribution of an interesting markov chain. *Journal of Applied Probability*, 9(1):231–233, 1972.

[Mra19] R. Mrazović. *Vjerojatnost – vježbe*. 2019. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_vjezbe.pdf.

[SV19] N. Sandrić and Z. Vondraček. *Vjerojatnost – predavanja*. 2019. https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vjer/files/vjer_predavanja.pdf.

[Von09] Z. Vondraček. *Markovljevi lanci – predavanja*. 2009. https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml12-predavanja.html.