Integrali funkcija više varijabli

Ilja Gogić, Pavle Pandžić i Josip Tambača

25. svibnja 2020.

Osnovne informacije

Ocjenjivanje

- 5 bliceva, na vježbama i predavanjima - 10%
- 2 kolokvija, svaki po - 30%
- završni ispit - 30%

Za pozitivnu ocjenu i potpis nužno je sakupiti ukupno 50% bodova.

Literatura:

- S. Mardešić, Matematička analiza, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- Š. Ungar, Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.
- S. Lang, Calculus of Several Variables, Springer Verlag, 1993.
- S. Kurepa, Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw - Hill,1964.
- V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, II, Springer Verlag, 2003.
- J. E. Marsden, M. J. Hoffman, Elementary Classical Analysis, W. H. Freeman and Company, New York, 1974, 1993.
- C. H. Edwards, Jr., Advanced Calculus of Several Variables, Dover Publications Inc., New York, 1994.

1 Uvod

Kao što znamo, poslije deriviranja na red dolazi integriranje.

U $\mathbb{R}$ smo integrirali po intervalima ili unijama intervala, dok je u $\mathbb{R}^n$ izbor mnogo veći.

Najprije ćemo integrirati skalarne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ po izvjesnim n-dimenzionalnim podskupovima $\mathbb{R}^n$, počevsi sa slučajem $n = 2$. Područja integracije u $\mathbb{R}^2$ mogu biti pravokutnici, ali i npr. kompaktna područja omeđena grafovima neprekidnih funkcija.

Zatim ćemo prijeći na integriranje skalarnih i vektorskih funkcija po glatkim krivuljama i plohama u $\mathbb{R}^3$.

2 Riemannov integral omeđene funkcije na segmentu (pregled poznatih činjenica)

Prisjetimo se definicije Riemannovog integrala ograničene funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Za subdiviziju

$$P : \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

segmenta $[a, b]$ definiramo donju i gornju Darbouxovu sumu

$$s = s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}); \qquad S = S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

gdje je m_i infimum a M_i supremum funkcije f na $[x_{i-1}, x_i]$. Za $f \geq 0$, te sume aproksimiraju površinu ispod grafa funkcije f odozdo odnosno odozgo.

• slika

Funkcija f je integrabilna na $[a, b]$ (u Riemannovom smislu) ako je supremum donjih Darbouxovih suma po svim mogućim subdivizijama P jednak infimumu gornjih Darbouxovih suma po svim mogućim subdivizijama P. U tom slučaju integral funkcije f na $[a, b]$ definiramo kao

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P s = \inf_P S.$$

Za $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ je površina ispod grafa funkcije f i iznad segmenta $[a, b]$. To je ideja vodilja gornje definicije. U jednostavnim slučajevima, gdje površinu možemo odrediti elementarnim metodama, to je istinita tvrdnja (lako provjeriva); u ostalim slučajevima, to je naprosto definicija površine.

Sjetimo se također da je svaka neprekidna funkcija na $[a, b]$ integrabilna; to slijedi iz činjenice da na segmentu neprekidnost povlači uniformnu neprekidnost. Štoviše, vrijedi sljedeći precizniji rezultat.

Teorem 2.1 (Lebesgue) *Ograničena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna je na $[a, b]$ ako i samo ako skup njezinih prekida S ima (Lebesgueovu) mjeru nula.*

Pri tome za skup $S \subset \mathbb{R}$ kažemo da ima (Lebesgueovu) mjeru nula ako se za bilo koji $\varepsilon > 0$ skup S može pokriti sa najviše prebrojivo mnogo otvorenih intervala čija je ukupna duljina (tj., suma njihovih duljina) manja od ε.

Primjer 2.2 Primjeri skupa mjere nula u $\mathbb{R}$ uključuju točku, konačnu uniju točka, prebrojivu uniju točaka. S druge strane segment $[0, 1]$ nije skup mjere 0. Naime, kad bi bio mjere 0, za $\varepsilon = 1/2$ mogli bi ga pokriti otvorenim intervalima ukupne duljine manje od $1/2$ što nije moguće.

Lebesgueov ćemo teorem poopćiti na slučaj više varijabli, i on će nam biti glavni izvor primjera integrabilnih funkcija.

Napomena 2.3 Sada i iz Lebesgueovog teorema slijedi da su neprekidne funkcije na segmentu integrabilne jer je skup njihovih prekida prazan skup.

Pitanje integrabilnosti neograničenih funkcija vodi nas na neprave integrale, a kojima se ovdje nećemo baviti.

Obratite pažnju i na to da je definicija Riemannovog integrala dana na segmentu, a i da se Lebesgueov teorem odnosi na funkcije definirane na segmentu. Inače pojam integrala se može proširiti i na ograničene funkcije kojima domena nije segment, što uključuje proširenje nulom do nekog segmenta, no time ćemo se baviti kasnije u okviru integrala funkcija više varijabli.

Primjer 2.4 Karakteristična funkcija skupa $C \subset \mathbb{R}$ definirana je sa

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash C \end{cases} .$$

Sada su funkcije $\chi_{[0,1]}$ i $\chi_{\langle 0,1 \rangle}$ integrabilne na $[0, 2]$.

Primjer 2.5 Korištenjem Lebesgueovog teorema sada slijedi i da je funkcija $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ integrabilna na svakom segementu $[a, b]$.

Primjer 2.6 Iz Lebesgueovog teorema možemo zaključiti i da Dirichletova funkcija na $[0, 1]$, tj. funkcija $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ nije integrabilna. Naime njen skup točaka prekida je $[0, 1]$, a to nije skup mjere 0.

Ostale dobro poznate činjenice o integralu funkcija na segmentu skupljene su u sljedećem teoremu:

Teorem 2.7 1° *Svaka donja Darbouxova suma manja je od svake gornje Darbouxove sume. Uspoređujemo ih pomoću zajedničkog profinjenja subdivizija: ako je $P = P' \cup P''$, onda je*

$$s(P') \leq s(P) \leq S(P) \leq S(P'').$$

2° *Ograničena funkcija f integrabilna je na $[a, b]$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdiviziju P takva da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$.*

3° *Ako su f i g integrabilne na $[a, b]$ i ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $\alpha f + \beta g$ integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

4° *Ako su f i g integrabilne na $[a, b]$ i ako je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in [a, b]$, onda je*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Nadalje, funkcija $|f|$ je integrabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

5° *Ako je $c \in [a, b]$, tada je f integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je integrabilna na $[a, c]$ i na $[c, b]$. U tom slučaju vrijedi*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

6° *Teorem srednje vrijednosti za integrale: Ako je f neprekidna na $[a, b]$, onda postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je*

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

7° *Zamjena varijabli (supstitucija): ako je* $\phi : [a, b] \to [c, d]$ *diferencijabilna strogo rastuća bijekcija, i ako je* $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ *integrabilna, onda je funkcija* $x \mapsto f(\phi(x))\phi'(x)$ *integrabilna na* $[a, b]$ *i vrijedi*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_c^d f(u)du.$$

Cilj nam je poopćiti pojam integrabilnosti i integrala na funkcije više varijabli te dokazati analogone gornjih svojstava. Radi jednostavnosti notacije uglavnom ćemo proučavati slučaj funkcije 2 varijable.

Primijetimo da nismo spomenuli vrlo važan splet činjenica vezan uz Newton-Leibnizovu formulu, koji je bio apsolutno ključan za računanje integrala. Te činjenice nećemo poopćavati u kontekstu višestrukih integrala, nego ćemo integrale računati tako da ih svedemo na (uzastopno) integriranje funkcija jedne varijable. (Poopćenja Newton-Leibnizove formule proučavat ćemo u kontekstu integrala po krivuljama i plohama.)

3 Riemannov integral omeđene funkcije na pravokutniku

Neka je $f : A = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Subdivizijom P pravokutnika A zvat ćemo izbor točaka

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b; \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Te točke određuju subdiviziju pravokutnika A na mn pravokutnika

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$$

• slika

Formalnije rečeno, subdivizija P je uređen par subdivizija $P_{[a,b]}$ segmenta $[a, b]$ i $P_{[c,d]}$ segmenta $[c, d]$: $P = (P_{[a,b]}, P_{[c,d]})$.

Neka m_{ij}, M_{ij} označavaju redom infimum i supremum funkcije f na pravokutniku A_{ij}. Donju i gornju Darbouxovu sumu pridruženu subdiviziji P definiramo kao

$$s = s(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}); \qquad S = S(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Budući da je $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ površina pravokutnika A_{ij}, te da je (u slučaju $f \geq 0$) m_{ij} visina upisanog kvadra iznad A_{ij} i ispod grafa funkcije f, vidimo da je $s(P)$ volumen upisan ispod grafa funkcije f i iznad pravokutnika A. Taj je volumen (za integrabilnu funkciju f i za dovoljno finu subdiviziju P) aproksimacija odozdo za volumen ispod grafa funkcije f i iznad pravokutnika A. Analogno, $S(P)$ je opisani volumen grafu funkcije f iznad A, koji aproksimira volumen ispod grafa i iznad A odozgo.

• slika

Ako označimo sa m odnosno M infimum odnosno supremum funkcije f na čitavom pravokutniku A, onda očito za bilo koju particiju P vrijedi

$$m(b - a)(d - c) \leq s(P) \leq S(P) \leq M(b - a)(d - c).$$

Slijedi da je skup svih donjih Darbouxovih suma ograničen, pa ima supremum. Skup svih gornjih Darbouxovih suma je također ograničen pa ima infimum. Kažemo da je funkcija f integrabilna na A ako je $\sup_P s(P) = \inf_P S(P)$. U tom slučaju taj broj nazivamo integralom funkcije f po A i označavamo sa

$$\int_A f = \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

Za $\int_A f$ koriste se i oznake $\iint_A f$ ili $\iint_A f(x, y)dxdy$.

Na ovom mjestu formuliramo Lebesgueov teorem za funkcije 2 varijable; dokaz odgađamo za §7. Za skup $S \subset \mathbb{R}^2$ kažemo da ima (Lebesgueovu) mjeru nula ako se za bilo koji $\varepsilon > 0$ skup S može pokriti sa najviše prebrojivo mnogo otvorenih pravokutnika čija je ukupna površina (tj. suma njihovih površina) manja od ε.

Teorem 3.1 (Lebesgue) *Ograničena funkcija $f : A = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ integrabilna je na A (u Riemannovom smislu) ako i samo ako skup njezinih prekida S ima (Lebesgueovu) mjeru nula. Posebno, svaka je neprekidna funkcija na A integrabilna.*

Ovaj teorem rješava problem nalaženja primjera integrabilnih funkcija (pod uvjetom da dobro razumijemo kada podskup od A ima mjeru 0; tim ćemo se pitanjem pozabaviti u §6). Ostaje pitanje računanja integrala. Ono je riješeno Fubinijevim teoremom koji nam je sljedeća tema.

4 Fubinijev teorem

Promotrimo sljedeći jednostavan primjer: neka je funkcija $f : A = [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ dana sa $f(x,y) = y$.

• slika

U ovom se primjeru integral može izračunati iz definicije (učinite to; vidjet ćete da ne želite koristiti definiciju čak ni u jednostavnim slučajevima). Moguće je međutim uz pomoć slike direktno odrediti volumen ispod grafa i iznad A, s obzirom da je riječ o prizmi, kojoj je baza jednakokračni pravokutni trokut u yz ravnini s katetama 2, i čija je visina jednaka 1. Dakle

$$\int_A f = 2.$$

S druge strane, izračunajmo "iterirani" integral

$$\int_0^1 (\int_0^2 y dy) dx = \int_0^1 (\frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2}) dx = \int_0^1 2dx = 2x \Big|_0^1 = 2.$$

Iterirani integral u drugom poretku također daje isti rezultat:

$$\int_0^2 (\int_0^1 y dx) dy = \int_0^2 (yx \Big|_{x=0}^{x=1}) dy = \int_0^2 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

Teorem 4.1 (Fubini) *Neka je $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Pretpostavimo da je funkcija sa $[c,d]$ u $\mathbb{R}$ dana sa $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$ za svaki (fiksirani) $x \in [a,b]$. Tada je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dana sa*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y) dy$$

integrabilna na $[a,b]$, i vrijedi

$$\int_A f = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y) dy) dx.$$

Analogno, ako pretpostavimo da je funkcija sa $[a,b]$ u $\mathbb{R}$ dana sa $x \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[a,b]$ za svaki (fiksirani) $y \in [c,d]$, tada je funkcija $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ dana sa $h(y) = \int_a^b f(x,y) dx$ integrabilna na $[c,d]$, i vrijedi

$$\int_A f = \int_c^d h(y) dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y) dx) dy.$$

Primijetimo da su pretpostavke teorema očito ispunjene ako je f neprekidna funkcija na A. Dokaz teorema nije težak, ali ga odgađamo dok ne dokažemo osnovna svojstva Darbouxovih suma. Intuitivno, volumen ispod grafa funkcije $f \geq 0$ možemo podijeliti na "beskonačno tanke odreske" u smjeru y-osi. Volumen odreska kroz točku x jednak je produktu površine $\int_c^d f(x,y) dy$ i debljine dx. To treba integrirati po x da dobijemo čitav volumen.

• slika

Za (još jedan) primjer primjene Fubinijevog teorema, integrirajmo funkciju $f(x,y) = e^{2x+3y}$ po kvadratu $A = [0,1] \times [0,1]$:

$$\int_A f = \int_0^1 (\int_0^1 e^{2x+3y} dy)dx = \int_0^1 (\frac{1}{3}e^{2x+3y} \,\Big|_{y=0}^{y=1})dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (e^{2x+3} - e^{2x})dx =$$
$$\frac{1}{6}(e^{2x+3} - e^{2x}) \,\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}(e^5 - e^3 - e^2 + 1).$$

Za primjene nije dovoljno znati integrirati samo po pravokutnicima. Sljedeći korolar pokazuje kako integrirati po općenitijim područjima. Primijetimo prvo da se svaki ograničen skup $C \subset \mathbb{R}^2$ može pokriti nekim pravokutnikom A. Ako je $f : C \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, proširimo je nulom do funkcije $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$. Tada kažemo da je f integrabilna na C ako je $\tilde{f}$ integrabilna na A i definiramo

$$\int_C f = \int_A \tilde{f}.$$

S obzirom da je integral funkcije 0 jednak 0 po bilo kojem pravokutniku, lako se vidi da gornja definicija ne ovisi o izboru pravokutnika A.

Korolar 4.2 *Neka su $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije takve da je $\phi(x) \leq \psi(x)$ za svako $x \in [a,b]$. Neka je C područje u xy ravnini u pruzi $a \leq x \leq b$ i između grafova funkcija ϕ i ψ; drugim riječima, $(x,y) \in C$ ako i samo ako vrijedi $a \leq x \leq b$ i $\phi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Neka je $f : C \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f integrabilna na C i vrijedi*

$$\int_C f = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx.$$

• slika

Dokaz. Pokrijmo C pravokutnikom $A = [a,b] \times [c,d]$ i proširimo f nulom do funkcije $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$. Tada je skup prekida funkcije $\tilde{f}$ sadržan u uniji grafova funkcija ϕ i ψ. U §6 ćemo pokazati da je taj skup mjere nula (Primjer 6.10). Dakle Lebesgueov teorem povlači da je f integrabilna na C (odnosno da je $\tilde{f}$ integrabilna na A).

Za fiksirani x, funkcija $y \mapsto \tilde{f}(x,y)$ je nula na $[c, \phi(x)\rangle$ i na $\langle \psi(x), d)$, a jednaka je $y \mapsto f(x,y)$, dakle je neprekidna, na $[\phi(x), \psi(x)]$. Odavde odmah slijedi da je ta funkcija integrabilna na $[c,d]$ i da vrijedi

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Sada zadnja tvrdnja korolara slijedi direktno iz Fubinijevog teorema. □

Dakako, moguće je zamijeniti ulogu varijabli x i y u korolaru pa integrirati neprekidne funkcije po području koje je u pruzi $c \leq y \leq d$ i između krivulja $x = \phi(y)$ i $x = \psi(y)$, gdje su ϕ i ψ neprekidne funkcije sa $[c,d]$ u $\mathbb{R}$.

• slika

Sada smo spremni za rješavanje mnoštva konkretnih zadataka.

5 Osnovna svojstva Darbouxovih suma

Subdivizija $P = (P_{[a,b]}, P_{[c,d]})$ je profinjenje subdivizije $P' = (P'_{[a,b]}, P'_{[c,d]})$ ako je $P_{[a,b]}$ profinjenje $P'_{[a,b]}$ i $P_{[c,d]}$ profinjenje $P'_{[c,d]}$. Drugim riječima, $P_{[a,b]} \supseteq P'_{[a,b]}$ i $P_{[c,d]} \supseteq P'_{[c,d]}$. To znači da je svaki od pravokutnika A_{ij} određenih subdivizijom P sadržan u nekom od pravokutnika B_{pq} određenih subdivizijom P'. U nastavku dokazujemo narednu lemu, koja je poznata jošiz slučaja funkcija jedne varijable.

Lema 5.1 *Svaka donja Darbouxova suma manja je od svake gornje Darbouxove sume. Drugim riječima, za bilo koje dvije particije P' i P'' pravokutnika A vrijedi $s(P') \leq S(P'')$.*

Dokaz. Dokazat ćemo prvo tvrdnju da profinjenje subdivizije dodavanjem jednog čvora ima isti efekt na Darbouxove sume. Neka je $P = (P_{[a,b]}, P_{[c,d]})$ subdivizija pravokutnika $A = [a, b] \times [c, d]$ dana sa

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b; \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Te točke određuju subdiviziju pravokutnika A na mn pravokutnika

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m,$$

te brojeve

$$m_{ij} = \inf f(A_{ij}), \qquad M_{ij} = \sup f(A_{ij}).$$

Bez smanjenja općenitosti dodat ćemo točku x^* u $P_{[a,b]}$. Tada postoji $i_* \in \{1, n\}$ takav da je $x^* \in \langle x_{i_*-1}, x_{i_*}\rangle$. Novu subdiviziju označimo sa $P^* = (P^*_{[a,b]}, P_{[c,d]})$. Sada je

$$A_{i_*j} = A^1_{i_*j} \cup A^2_{i_*j},$$

gdje su

$$A^1_{i_*,j} = [x_{i_*-1}, x^*] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad A^2_{i_*,j} = [x^*, x_{i_*}] \times [y_{j-1}, y_j], \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Sada je

$$s(P^*) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_*}}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + m^1_{i_*,j}(x_* - x_{i_*-1})(y_j - y_{j-1}) + m^2_{i_*,j}(x_{i_*} - x_*)(y_j - y_{j-1}),$$

$$S(P^*) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_*}}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + M^1_{i_*,j}(x_* - x_{i_*-1})(y_j - y_{j-1}) + M^2_{i_*,j}(x_{i_*} - x_*)(y_j - y_{j-1}),$$

gdje su

$$m^1_{i_*j} = \inf f(A^1_{i_*j}), \quad m^2_{i_*j} = \inf f(A^2_{i_*j}), \qquad M^1_{i_*j} = \inf f(A^1_{i_*j}), \quad M^2_{i_*j} = \inf f(A^2_{i_*j}).$$

Budući da je infimum funkcije f po podskupu veći (ili jednak) nego po nadskupu, dok je supremum manji (ili jednak) po podskupu nego po nadskupu, vidimo da vrijedi

$$m_{i_*j} \leq m^1_{i_*j}, m^2_{i_*j}, \qquad M^1_{i_*j}, M^2_{i_*j} \leq M_{i_*j},$$

pa je

$$\begin{aligned}
s(P^*) &\geq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_*}}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) + m_{i_*,j}(x_*-x_{i_*-1})(y_j-y_{j-1}) + m_{i_*,j}(x_{i_*}-x_*)(y_j-y_{j-1})\\
&\geq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_*}}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) + m_{i_*,j}(x_{i_*}-x_{i_*-1})(y_j-y_{j-1}) = s(P)\\
S(P^*) &\leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_*}}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) + M_{i_*,j}(x_*-x_{i_*-1})(y_j-y_{j-1}) + M_{i_*,j}(x_{i_*}-x_*)(y_j-y_{j-1})\\
&\leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_*}}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) + M_{i_*,j}(x_{i_*}-x_{i_*-1})(y_j-y_{j-1}) = S(P).
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$s(P^*) \leq s(P) \leq S(P) \leq S(P^*). \tag{5.1}$$

Sada induktivno zaključujemo da za dodanih konačno mnogo točaka u subdiviziju vrijede iste nejednakosti (5.1).

Da bismo usporedili s i S za dvije različite subdivizije P', P'', poslužimo se njihovim zajedničkim profinjenjem

$$P = P' \cup P'' = (P'_{[a,b]} \cup P''_{[a,b]}, P'_{[c,d]} \cup P''_{[c,d]}).$$

Iz (5.1) zaključak je

$$s(P') \leq s(P) \leq S(P) \leq S(P'').$$

□

Iz ove leme odmah slijedi da je “donji integral”, $I_* = \sup_P s(P)$, manji ili jednak “gornjem integralu” $I^* = \inf_P S(P)$. Štoviše, iz definicije supremuma odnosno infimuma, slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje P' i P'' takvi da je

$$I_* - s(P') < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad S(P'') - I^* < \frac{\varepsilon}{2}.$$

U slučaju da je f integrabilna, tj. $I_* = I^*$, odavde zbrajanjem nejednakosti slijedi da je $S(P'') - s(P') < \varepsilon$, pa prelaskom na $P = P' \cup P''$ vidimo da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Obratno, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P takva da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$, onda slijedi

$$I^* - I_* \leq S(P) - s(P) < \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

pa je $I^* - I_* = 0$ dakle je f integrabilna (primijetimo da je čitavo ovo rezoniranje potpuno analogno kao u slučaju jedne varijable). Dokazali smo:

Teorem 5.2 (Kriterij integrabilnosti) *Ograničena funkcija $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ je integrabilna na A ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P pravokutnika A takva da je*

$$S(P) - s(P) < \varepsilon.$$

Sada smo spremni dokazati Fubinijev teorem:

Teorem 5.3 (Fubini) *Neka je $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Pretpostavimo da je funkcija sa $[c,d]$ u $\mathbb{R}$ dana sa $y \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[c,d]$ za svaki (fiksirani) $x \in [a,b]$. Tada je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dana sa*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

integrabilna na $[a,b]$, i vrijedi

$$\int_A f = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.$$

Analogno, ako pretpostavimo da je funkcija sa $[a,b]$ u $\mathbb{R}$ dana sa $x \mapsto f(x,y)$ integrabilna na $[a,b]$ za svaki (fiksirani) $y \in [c,d]$, tada je funkcija $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ dana sa $h(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ integrabilna na $[c,d]$, i vrijedi

$$\int_A f = \int_c^d h(y)dy = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

Dokaz. Za particiju $P = (P_{[a,b]}, P_{[c,d]})$ pravokutnika A, usporedit ćemo Darbouxove sume $s_f(P), S_f(P)$ za funkciju f s Darbouxovim sumama $s_g(P_{[a,b]})$, $S_g(P_{[a,b]})$ za funkciju g. Ako je $P_{[a,b]}$ dana s točkama $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, a $P_{[c,d]}$ s točkama $c = y_0 < \cdots < y_m = d$, onda je

$$s_f(P) = \sum_{i,j} m_{ij}(f)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

gdje je $m_{ij}(f)$ infimum funkcije f na pravokutniku A_{ij}. S druge strane, ako označimo sa f_x funkciju $y \mapsto f(x,y)$, a sa $m_j(f_x)$ infimum funkcije f_x na $[y_{j-1}, y_j]$, onda za $x \in [x_{i-1}, x_i]$ vrijedi $m_{ij}(f) \leq m_j(f_x)$, pa je

$$\sum_j m_{ij}(f)(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_j m_j(f_x)(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f_x(y)dy = g(x).$$

To vrijedi za svaki $x \in [x_{i-1}, x_i]$, pa je $\sum_j m_{ij}(f)(y_j - y_{j-1}) \leq m_i(g)$, gdje je $m_i(g)$ infimum funkcije g na $[x_{i-1}, x_i]$. Slijedi

$$s_f(P) \leq \sum_i m_i(g)(x_i - x_{i-1}) = s_g(P_{[a,b]}).$$

Potpuno analogno vidi se da je $S_f(P) \geq S_g(P_{[a,b]})$, dakle vrijedi

$$s_f(P) \leq s_g(P_{[a,b]}) \leq S_g(P_{[a,b]}) \leq S_f(P). \tag{5.2}$$

Budući da je f integrabilna na A, odavde i iz kriterija integrabilnosti (Teorem 5.2) odmah slijedi da je g integrabilna na $[a,b]$. Također je jasno da vrijedi

$$\int_A f = \int_a^b g(x)dx. \tag{5.3}$$

Naime, nejednakost (5.2) povlači da za svaku particiju P vrijedi $S_f(P) \geq S_g(P_{[a,b]}) \geq I^*(g)$, pa je $I^*(f) \geq I^*(g)$. Analogno, (5.2) povlači da za svaku particiju P vrijedi $s_f(P) \leq s_g(P_{[a,b]}) \leq I_*(g)$, pa je $I_*(f) \leq I_*(g)$. Stoga smo dobili

$$I_*(f) \leq I_*(g) \leq I^*(g) \leq I^*(f).$$

Kako je $I_*(f) = I^*(f)$ slijedi (5.3).

Druga je tvrdnja potpuno analogna prvoj, uz zamjenu uloga koordinata x i y. □

Za kraj ove točke dokažimo da su neprekidne funkcije integrabilne na svakom pravokutniku. Taj je rezultat poseban slučaj Lebesgueovog teorema i logički ga nije potrebno posebno dokazivati. Dokaz je međutim bitno jednostavniji (isti je kao za jednu varijablu), a korisno ga je razumjeti prije nego što krenemo dokazivati Lebesgueov teorem.

Teorem 5.4 *Neka je $A = [a,b] \times [c,d]$ pravokutnik i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f integrabilna na A.*

Dokaz. S obzirom da je A kompaktan skup, znamo da je f uniformno neprekidna na A. Zato za proizvoljni $\varepsilon' > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta$ povlači $d(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)) < \varepsilon'$.

Ako je P subdivizija pravokutnika A takva da je dijagonala svakog pravokutnika A_{ij} manja od δ, onda s obzirom da f postiže svoj infimum i supremum na A_{ij} slijedi da je $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon'$. Zato je

$$S(P)-s(P) = \sum_{i,j}(M_{ij}-m_{ij})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) < \varepsilon' \sum_{i,j}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1}) = \varepsilon'(b-a)(d-c).$$

Neka je sada $\varepsilon > 0$ zadan. Uzmimo $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$. Za subdiviziju P kao gore dobivamo $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Dakle, f je integrabilna po Teoremu 5.2. □

6 Površina skupova u $\mathbb{R}^2$. Skupovi površine nula i skupovi mjere nula

Prije nego definiramo površinu ograničenog podskupa od $\mathbb{R}^2$, dokazat ćemo da je definicija integrabilnosti i integrala po ograničenom $C \subset \mathbb{R}^2$ neovisna o izboru pravokutnika A koji sadrži C.

Prisjetimo se te definicije.

Definicija 6.1 *Za ograničen $C \subset \mathbb{R}^2$ i ograničenu funkciju $f : C \to \mathbb{R}$, neka je $A \supseteq C$ pravokutnik i neka je $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ proširenje nulom funkcije f na A. Tada kažemo da je f integrabilna na C ako je $\tilde{f}$ integrabilna na A, i u tom slučaju definiramo*

$$\int_C f = \int_A \tilde{f}.$$

Ako je $A' \supseteq C$ neki drugi pravokutnik, i f' proširenje nulom funkcije f na A', želimo pokazati da je integrabilnost $\tilde{f}$ na A ekvivalentna integrabilnosti f' na A', te da je

$$\int_{A'} f' = \int_A \tilde{f}.$$

Budući da je $A \cap A'$ pravokutnik koji sadrži C te da su $\tilde{f}$ i f' proširenja nulom funkcije $\bar{f}$ na $A \cap A'$ koja je proširenje nulom funkcije f, dovoljno je dokazati sljedeću lemu:

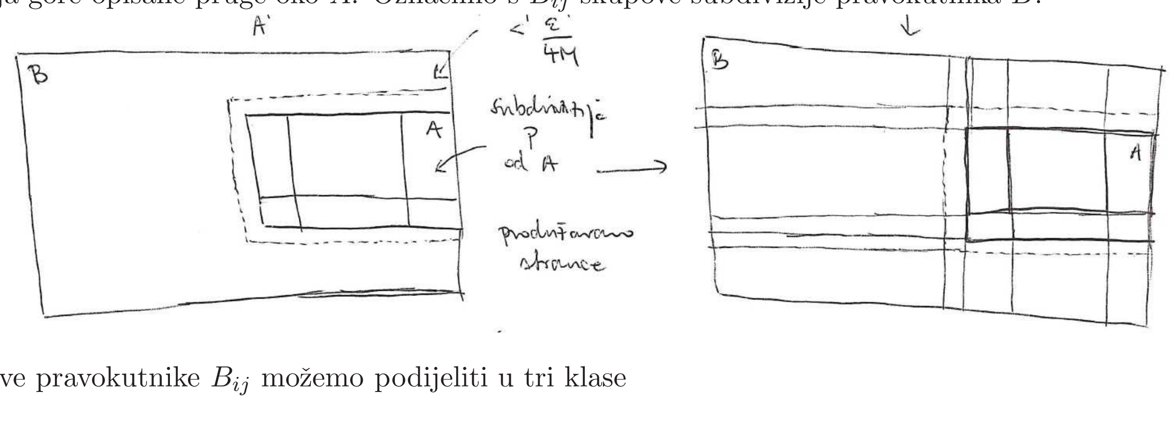
Lema 6.2 *Neka su $B \supseteq A$ pravokutnici, neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija, te neka je $\tilde{f} : B \to \mathbb{R}$ proširenje funkcije f nulom. Tada je f integrabilna na A ako i samo ako je $\tilde{f}$ integrabilna na B, i u tom slučaju vrijedi*

$$\int_A f = \int_B \tilde{f}.$$

Dokaz. Za dokaz leme najprije za zadani $\varepsilon > 0$ promotrimo prugu izvan onih bridova pravokutnika A koji nisu sadržani u bridovima pravokutnika B, dovoljno tanku da čitava bude sadržana u B, te takvu da joj je površina manja od $\frac{\varepsilon}{4M}$, gdje je M supremum funkcije $|f|$ na A.

Pretpostavimo da je f integrabilna na A. Tada postoji subdivizija P pravokutnika A takva da je $S_f(P) - s_f(P) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Promotrimo subdiviziju Q pravokutnika B koja je dobivena produženjem linija subdivizije P i linija gore opisane pruge oko A. Označimo s B_{ij} skupove subdivizije pravokutnika B.



Sve pravokutnike B_{ij} možemo podijeliti u tri klase

I) B_{ij} koji sadržani u A,

II) B_{ij} u pruzi,

III) B_{ij} ostali.

Stoga je

$$S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q) = \sum_{B_{ij}\in I}(M_{ij} - m_{ij})\nu(B_{ij}) + \sum_{B_{ij}\in II}(M_{ij} - m_{ij})\nu(B_{ij}) + \sum_{B_{ij}\in III}(M_{ij} - m_{ij})\nu(B_{ij}).$$

Sada vidimo da je $\tilde{f} = 0$ na svakom pravokutniku B_{ij} koji nije u A niti u pruzi, pa su sumandi od $S_{\tilde{f}}(Q)$, $s_{\tilde{f}}(Q)$ i $S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q)$ pridruženi tim pravokutnicima jednaki 0, tj.

$$\sum_{B_{ij}\in III}(M_{ij} - m_{ij})\nu(B_{ij}) = 0.$$

Nadalje, za B_{ij} unutar pruge vrijedi $-M \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$, pa su dijelovi od $S_{\tilde{f}}(Q)$, $s_{\tilde{f}}(Q)$ i $S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q)$ pridruženi tim pravokutnicima, po apsolutnoj vrijednosti manji od $\frac{\varepsilon}{2}$, tj.

$$\sum_{B_{ij}\in II}(M_{ij} - m_{ij})\nu(B_{ij}) \leq \sum_{B_{ij}\in II} 2M\nu(B_{ij}) \leq 2M\nu(pruga) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Napokon, dijelovi od $S_{\tilde{f}}(Q)$, $s_{\tilde{f}}(Q)$ i $S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q)$ pridruženi pravokutnicima B_{ij} koji su unutar A, jednaki su redom $S_f(P)$, $s_f(P)$ i $S_f(P) - s_f(P)$.

Zaključujemo da je

$$S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q) < S_f(P) - s_f(P) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

pa je $\tilde{f}$ integrabilna na B.

Nadalje, iz gornjeg je vidljivo da se $s_{\tilde{f}}(Q)$ i $s_f(P)$ razlikuju za manje od $\frac{\varepsilon}{2}$. S druge strane, $s_f(P)$ se od $\int_A f$ razlikuje za manje od $\frac{\varepsilon}{2}$, a $s_{\tilde{f}}(Q)$ se razlikuje od $\int_B \tilde{f}$ za manje od ε. Stoga je

$$\int_B \tilde{f} - \int_A f \leq \left|\int_A f - s_f(P)\right| + \left|s_f(P) - s_{\tilde{f}}(Q)\right| + \left|s_{\tilde{f}}(Q) - \int_B \tilde{f}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Zbog proizvoljnosti ε, slijedi jednakost dvaju integrala.

Obratno, ako pretpostavimo da je $\tilde{f}$ integrabilna na B, tada za zadani ε postoji subdivizija Q pravokutnika B sa $S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q) < \varepsilon$. Ako sa P označimo subdiviziju pravokutnika A induciranu s Q, tada je $S_f(P) - s_f(P) \leq S_{\tilde{f}}(Q) - s_{\tilde{f}}(Q) < \varepsilon$, pa je f integrabilna na A. Sada već dokazano povlači da je $\int_A f = \int_B \tilde{f}$, pa je dokaz završen. □

Iz ove leme slijedi da je

$$\tilde{f} \text{ integrabilna na } A \Leftrightarrow \overline{f} \text{ integrabilna na } A \cap A',$$

te da je

$$f' \text{ integrabilna na } A' \Leftrightarrow \overline{f} \text{ integrabilna na } A \cap A'.$$

Stoga je

$$\tilde{f} \text{ integrabilna na } A \Leftrightarrow f' \text{ integrabilna na } A'.$$

Za vrijednosti integrala vrijede analogne tvrdnje. Stoga smo dokazali

Lema 6.3 *Definicija integrabilnosti na ograničenom skupu ne ovisi o izboru pravokutnika A.*

Sada ćemo definirati površinu ograničenog skupa. Za bilo koji ograničen $C \subset \mathbb{R}^2$ označimo sa $\chi_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ njegovu karakterističnu funkciju, tj.

$$\chi_C(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in C \\ 0, & (x,y) \notin C. \end{cases}$$

Definicija 6.4 *Kažemo da C ima površinu ako je funkcija χ_C integrabilna na C. U tom slučaju, površinu skupa C definiramo sa*

$$\nu(C) := \int_C \chi_C.$$

Površina se ponekad naziva i Jordanovom mjerom. Definicija je u skladu s intuicijom: površina skupa C jednaka je volumenu prizme s bazom C i visinom 1. Iz Definicije 6.1 sada slijedi da je χ_C ima površinu ako i samo ako je proširenje nulom funkcije χ_C, što je opet funkcija χ_C integrabilna na nekom pravokutniku $A \supseteq C$.

- slika.

Primjer 6.5 Pravokutnik $A = [a,b] \times [c,d]$ ima površinu, i ona je jednaka $(b-a)(d-c)$. Naime χ_A je konstantna funkcija na pravokutniku, pa je po Lebesgueovom teoremu ona integrabilna, pa po definiciji A ima površinu. Fubinijev teorem sada daje $\nu(A) = (b-a)(d=c)$.

Alternativno, možemo promatrati Darbouxove sume. Za svaku subdiviziju P

$$s_{\chi_A}(P) = S_{\chi_A}(P) = (b-a)(d=c),$$

pa odmah sijedi integrabilnost od χ_A i iznos integrala.

Primjer 6.6 I otvoreni pravokutnik $A = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ također ima površinu i jednaka je površini zatvorenog pravokutnika, tj $\nu(A) = (b-a)(d-c)$. I za dokaz ove tvrdnje možemo argumentirati na više načina.

Prvi način je primijeniti Lebesgueov teorem za funkciju χ_A na zatvorenom pravokutniku $\overline{A}$ i zaključiti njenu integrabilnost. Za odrediti vrijednost integrala opet možemo primijeniti Fubinijev teorem uz pažljiviju provjeru pretpostavki jer funkcija koju integriramo sada nije neprekidna.

Drugi način je razmatrati Drbouxove sume. Neka je P proizvoljna subdivizija pravokutnika $\overline{A}$. Tada je

$$S_{\chi_A}(P) = (b-a)(d-c).$$

Stoga ako znamo da je funkcija integrabilna slijedi da smo odredili vrijednost integrala jer je

$$\int_A \chi_A = \int_{\overline{A}} \chi_A = \inf\{S_{\chi_A}(P), P\} = I^* = (b-a)(d-c).$$

Ako ne znamo da je funkcija integrabilna dovoljno je pokazati da je

$$I_* (= \sup\{s_{\chi_A}(P), P\}) = (b-a)(d-c).$$

Iz svojstva supremuma za to je dovoljno naći niz subdivizija $(P^n)_n$ takvih da je

$$\lim_{n\to\infty} s_{\chi_A}(P_n) = (b-a)(d-c).$$

Provjerite sami da ovo svojstvo vrijedi za niz subdivizija danih sa

$$P_n = (\{a, a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}, b\}, \{c, c + \frac{1}{n}, d - \frac{1}{n}, d\})$$

Treći način za dokazati integrabilnost χ_A na A bi bio u primjeni kriterija integrabilnosti koristeći upravo subdivizije P_n za odgovarajući ε.

Daljnje ćemo primjere dobiti upotrebom Lebesgueovog teorema. Prije toga, proučit ćemo uvjete pod kojima skup ima površinu nula. U daljnjem ćemo pod pojmom "pravokutnik" uvijek podrazumijevati pravokutnik čije su stranice paralelne koordinatnim osima. Jedna korisna tvrdnja dana je u narednom zadatku.

Zadatak 6.7 Neka je C ograničen skup i $A \supseteq C$ pravokutnik. Za bilo koju subdiviziju P pravokutnika A tada vrijedi

i) gornja Darbouxova suma $S_{\chi_C}(P)$ jednaka je sumi površina onih pravokutnika A_{ij} iz subdivizije koji sijeku C,

$$S_{\chi_C}(P) = \sum_{A_{ij} \cap C \neq \emptyset} \nu(A_{ij}).$$

ii) donja Darbouxova suma $s_{\chi_C}(P)$ jednaka je sumi površina onih pravokutnika A_{ij} iz subdivizije koji sadrže C, tj.

$$s_{\chi_C}(P) = \sum_{A_{ij} \subseteq C} \nu(A_{ij}).$$

Lema 6.8 *Ograničen skup $C \subset \mathbb{R}^2$ ima površinu jednaku 0 ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ skup C možemo pokriti s konačno mnogo otvorenih pravokutnika čija je ukupna površina manja od ε. Ekvivalentno, C možemo pokriti s konačno mnogo zatvorenih pravokutnika čija je ukupna površina manja od ε.*

Dokaz. Dokažimo najprije da je tvrdnja o otvorenim pravokutnicima ekvivalentna tvrdnji o zatvorenim pravokutnicima. Jasno je da ako C pokrijemo otvorenim pravokutnicima ukupne površine manje od ε, onda smo C pokrili i zatvaračima tih pravokutnika, čija je površina ista kao za otvorene pravokutnike. S druge strane, ako je C pokriven zatvorenim pravokutnicima $A_1, \ldots, A_N$ ukupne površine $\sum_i \nu(A_i) < \varepsilon$, možemo "napuhati" svaki A_i do otvorenog pravokutnika $B_i \supset A_i$ tako da je

$$\nu(B_i) = \nu(A_i) + \frac{1}{2N}(\varepsilon - \sum_i \nu(A_i)).$$

Slijedi da je

$$\sum_i \nu(B_i) = \sum_i \nu(A_i) + N\frac{1}{2N}(\varepsilon - \sum_i \nu(A_i)) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \sum_i \nu(A_i)) < \varepsilon.$$

Dakle, C smo uspjeli pokriti i otvorenim pravokutnicima ukupne površine manje od ε.

Ako je $\nu(C) = \int_C \chi_C = 0$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija P takva da je $S(P) < \varepsilon$. Tada svi A_{ij} koji sijeku C čine pokrivač za C, i prema Zadatku 20.6 njihova ukupna površina je $S(P) < \varepsilon$. Dakle, pokrili smo C zatvorenim pravokutnicima ukupne površine manje od ε.

Obratno, pretpostavimo da se za svaki $\varepsilon > 0$ skup C može pokriti s konačno mnogo otvorenih pravokutnika $B_1, \dots, B_m$ ukupne površine manje od ε. Označimo sa $\bar{B}_k$ zatvarač pravokutnika B_k, $k = 1, \dots, m$.

Neka je P particija pravokutnika A dobivena koristeći sve pravce koji sadrže neku stranicu nekog pravokutnika $\bar{B}_k$. Sada je svaki pravokutnik A_{ij} ili sadržan u nekom $\bar{B}_k$, ili ne siječe nijedan $\bar{B}_k$ osim eventualno na rubu; u potonjem slučaju ne može sijeći C. Slijedi da za Darbouxovu sumu funkcije χ_C vrijedi $S(P) \leq \sum_{k=1}^{m} \nu(B_k) < \varepsilon$.

Dakle za svaki $\varepsilon > 0$ postoji particija P takva da je

$$0 \leq s(P) \leq S(P) < \varepsilon.$$

Slijedi da je χ_C integrabilna i da joj je integral 0. □

Zadatak 6.9 Pokažite da konačno točaka čini skup površine nula.

Lema 6.10 *Neka je $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna (dakle i ograničena) funkcija. Tada ja njezin graf*

$$\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) \,\big|\, x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

skup površine nula.

Posebno, Γ_ϕ je skup površine nula za svaku neprekidnu funkciju $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji subdivizija P segmenta $[a, b]$ takva da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Drugim riječima,

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon,$$

gdje su $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ točke koje čine subdiviziju P, a M_i odnosno m_i su supremum odnosno infimum funkcije ϕ na $[x_{i-1}, x_i]$.

Sada je jasno da je skup Γ_ϕ pokriven pravokutnicima $[x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$ čija je ukupna površina manja od ε. □

Prisjetimo se da za proizvoljan skup $C \subseteq \mathbb{R}^2$ kažemo da ima (Lebesgueovu) mjeru 0 ako se za svaki $\varepsilon > 0$ skup C može pokriti sa najviše prebrojivo mnogo otvorenih pravokutnika čija je ukupna površina manja od ε. Slično kao i kod površine nula imamo rezultat

Lema 6.11 *C je mjere nula ako i samo ako se može pokriti sa najviše prebrojivo mnogo zatvorenih pravokutnika čija je ukupna površina manja od ε.*

Dokaz. Dokažimo ekvivalenciju te dvije tvrdnje. Jasno je da ako smo C pokrili otvorenim pravokutnicima, onda smo ga pokrili i njihovim zatvaračima koji imaju istu površinu. Obratno, pretpostavimo da smo pokrili C zatvorenim pravokutnicima A_i, $i \in \mathbb{N}$, tako da je $\sum_i \nu(A_i) < \varepsilon$. Sada ćemo svaki A_i "napuhati" do otvorenog pravokutnika $B_i \supset A_i$, tako da je $\sum_i \nu(B_i)$ još uvijek manje od ε. Da to postignemo, možemo uzeti

$$\nu(B_i) = \nu(A_i) + \frac{1}{2^{i+1}}(\varepsilon - \sum_j \nu(A_j)).$$

Tada je

$$\sum_i \nu(B_i) = \sum_i \nu(A_i) + (\sum_i \frac{1}{2^{i+1}})(\varepsilon - \sum_j \nu(A_j))$$
$$= \sum_i \nu(A_i) + \frac{1}{2}(\varepsilon - \sum_j \nu(A_j)) = \frac{1}{2}(\varepsilon + \sum_i \nu(A_i)) < \varepsilon.$$

□

Jasno je da svaki skup površine nula ima mjeru nula. Obrat ne vrijedi; vidi Primjer 6.15 i Primjer 6.19. Posebno, prema Lemi 6.10 graf naprekidne funkcije na segmentu ima mjeru 0 kao podskup od $\mathbb{R}^2$. Tu smo činjenicu koristili u dokazu Korolara 4.2.

Također je jasno da svaki podskup skupa mjere nula i sam ima mjeru nula. Nadalje vrijedi sljedeći rezultat (koji ne vrijedi ako se pojam mjere zamijeni pojmom površine):

Propozicija 6.12 *Ako skupovi $C_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in \mathbb{N}$, imaju mjeru nula, onda i skup $\cup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ ima mjeru nula. Posebno, svaki prebrojiv skup ima mjeru 0.*

Dokaz. Za zadani $\varepsilon > 0$, pokrijmo svaki C_i s najviše prebrojivo mnogo pravokutnika ukupne površine manje od $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Svi ti pravokutnici zajedno pokrivaju $\cup_{i\in\mathbb{N}} C_i$, a ukupna površina im je manja od $\sum_i \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. □

Zadatak 6.13 Pokažite da konačna unija skupova površine nula je skup površine nula.

Zadatak 6.14 Pokažite da prebrojiva unija skupova površine nula ne mora biti skup površine nula.

Primijetimo da skup mjere nula ne mora biti ograničen, dok je za definiciju površine nužna ograničenost skupa.

Primjer 6.15 Skup $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, iako neograničen, ima mjeru 0. Naime, za svaki $\varepsilon > 0$, $\mathbb{R}$ možemo pokriti pravokutnicima

$$B_k = [-2^k, 2^k] \times [-\frac{\varepsilon}{2^{2k+3}}, \frac{\varepsilon}{2^{2k+3}}], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ukupne površine $\sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Primjer 6.16 ***Primjer 6.17*** *Pravac $y = x$ nije skup površine nula, ali je mjere nula.*

Oba ova primjera slijede iz narednog rezultata koji slijedi iz Leme 6.10 i Propozicije 6.12.

Zadatak 6.18 Neka je $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekdina. Tada je Γ_ϕ skup mjere 0.

Na kraju napomenimo da se analogno pojmu površine definira duljina ograničenog skupa $C \subset \mathbb{R}$. Neka je $\chi_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ karakteristična funkcija skupa C, dana sa

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C. \end{cases}$$

Tada je duljina skupa C integral funkcije χ_C po bilo kojem segmentu koji sadrži C. Nadalje, za proizvoljan skup $C \subset \mathbb{R}$ kažemo da ima mjeru 0 ako ga se za svaki $\varepsilon > 0$ može pokriti sa najviše prebrojivo mnogo intervala (otvorenih, ili ekvivalentno zatvorenih), ukupne duljine manje od ε. Tada vrijede analogoni Leme 6.8 i Propozicije 6.12.

Primjer 6.19 Skup $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ ima mjeru 0 jer je prebrojiv. S druge strane taj skup nema duljinu; njegova karakteristična funkcija je dobro poznata Dirichletova funkcija koja je tipičan primjer ograničene funkcije na segmentu koja nije integrabilna.

Navedimo još jednu posljedicu Lebesgueovog teorema koja će nam biti korisna za određivanje skupova koji imaju površinu, a i kod zamjene varijabli.

Lema 6.20 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen. Tada C ima površinu ako i samo ako njegova granica ∂C ima površinu nula.*

Dokaz. Neka je $A \supset C$ pravokutnik takav da je C sadržan u unutrašnjosti od A. Tada je skup prekida karakteristične funkcije $\chi_C : A \to \mathbb{R}$ upravo ∂C (znate li to argumentirati?). Dakle C ima površinu, odnosno χ_C je integrabilna na A, ako i samo ako ∂C ima mjeru nula. Budući da je ∂C očito ograničen skup, a također i zatvoren jer je $\partial C = \overline{C} \cap \overline{\mathbb{R}^2 \setminus C}$, vidimo da je ∂C kompaktan skup. Slijedi da ∂C ima površinu nula (obrat vrijedi uvijek). Naime za svaki $\varepsilon > 0$, ∂C se može pokriti s najviše prebrojivo mnogo otvorenih pravokutnika ukupne duljine manje od ε, a zbog kompaktnosti se taj pokrivač može reducirati na konačan, što znači da ∂C ima površinu nula. $\square$

U dokazu smo zapravo dokazali i tvrdnju narednog zadatka.

Zadatak 6.21 Kompaktan skup mjere nula ima površinu i ona je jednaka nula.

Primjer 6.22 Skup $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ ima mjeru 0 jer je prebrojiv. S druge strane taj skup nema površinu prema prethodnoj lemi.

Zadatak 6.23 Neka je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ i $C = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dokažite ili opovrgnite:

a) C je mjere 0.

b) Ako je niz ograničen onda C ima površinu.

c) Ako je niz konvergentan onda C ima površinu.

Je li u nekom od slučajeva a), b), c) skup C nužno površine 0? Dokažite.

Zadatak 6.24 Dokažite

a) Neka je C skup koji ima površinu i $\nu(C) < \nu$. Tada se C može pokriti pravokutnicima ukupne površine manje od ν.

b) Neka za svaki $\varepsilon > 0$ skup C možemo pokriti skupom površine manje od ε. Tada je skup C površine nula.

7 Dokaz Lebesgueovog teorema

Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ bilo koja funkcija. Oscilacija $O(f, c)$ funkcije f u točki $c \in A$ je infimum izraza $\sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \,\big|\, x_1, x_2 \in U \cap A\}$ po svim otvorenim okolinama $U \subset \mathbb{R}^2$ točke c. Drugim riječima,

$$O(f, c) = \inf_{U \ni c} \sup_{x_1, x_2 \in U \cap A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Očito je $O(f, c) \geq 0$ za sve f i c. Ako je f ograničena, $O(f, c) < +\infty$. Nadalje, vrijedi

Lema 7.1 *Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna u $c \in A$ ako i samo ako je $O(f, c) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna u c. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji okolina $U = K(c, \delta)$ točke c takva da $x \in U \cap A$ povlači $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$. U tom slučaju za $x_1, x_2 \in U \cap A$ vrijedi

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Slijedi da je $O(f, c) \leq \varepsilon$. To vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$, pa je $O(f, c) = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $O(f, c) = 0$ i neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Tada postoji okolina $U \ni c$ takva da je $\sup_{x_1, x_2 \in U \cap A} |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(c, \delta) \subseteq U$. Tada za svaki $x \in K(c, \delta)$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \sup_{x_1, x_2 \in U \cap A} |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Dakle, f je neprekidna u c. $\square$

Zadatak 7.2 Odredite oscilaciju funkcije $\chi_{[0,1]}$.

Zadatak 7.3 Odredite oscilaciju funkcije $\chi_{[0,2]} + 2\chi_{[1,3]}$.

Zadatak 7.4 Neka je $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcija zadana sa

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite oscilaciju funkcije f u svim točkama skupa $[0, 1] \times [0, 1]$.

Neka je D skup prekida funkcije f na A. Iz Leme 7.1 vidimo da je $D = \cup_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon$, gdje je

$$D_\varepsilon = \{x \in A \big| O(f, x) \geq \varepsilon\}.$$

Lema 7.5 *Neka je A zatvoren. Za svaki $\varepsilon > 0$, skup D_ε je zatvoren u $\mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Neka je $y \in \mathbb{R}^2$ gomilište skupa D_ε. Tada svaka okolina $U \ni y$ sadrži točku $x \in D_\varepsilon$. Dakle je U okolina točke x, pa slijedi da je $\sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \,\big|\, x_1, x_2 \in U \cap A\}$ veći ili jednak ε. Odavde pak slijedi da je $O(f, y) \geq \varepsilon$, odnosno $y \in D_\varepsilon$ (jer za svaku okolinu U od y to vrijedi). $\square$

Neka je sada $A = [a, b] \times [c, d]$ pravokutnik i neka $f : A \to \mathbb{R}$ ima skup prekida D mjere nula. To znači da se za svaki $\varepsilon > 0$ skup D može prekriti s najviše prebrojivo mnogo otvorenih pravokutnika B_i, $i \in \mathbb{N}$, ukupne površine manje od ε. Pravokutnici B_i prekrivaju i skup D_ε, koji je ograničen jer je sadržan u A, i zatvoren po Lemi 7.5. Dakle je D_ε kompaktan, i prema tome je pokriven već s konačno mnogo pravokutnika B_i, dakle sa $B_1, \dots, B_N$ za dovoljno veliki N.

Koristeći stranice pravokutnika $B_1, \dots, B_N$ možemo formirati particiju P pravokutnika A takvu da je svaki pravokutnik A_{ij} ili sadržan u nekom $\overline{B_i}$, $i = 1, \dots, N$, ili A_{ij} ne siječe D_ε, pa je u svakoj točki $x \in A_{ij}$ oscilacija funkcije f manja od ε. U potonjem slučaju, svaki $x \in A_{ij}$ ima okolinu, za koju možemo pretpostaviti da je pravokutna, na kojoj je razlika supremuma i infimuma funkcije f manja od ε. Skup A_{ij} je pokriven takvim okolinama, pa je zbog kompaktnosti pokriven već s konačno mnogo njih. Slijedi da možemo profiniti našu subdiviziju do subdivizije P' tako da je svaki pravokutnik A'_{ij} subdivizije P' ili sadržan u nekom B_i, $i = 1, \dots, N$, ili vrijedi $M'_{ij} - m'_{ij} < \varepsilon$. Dakle je

$$S(P') - s(P') < \varepsilon(b-a)(d-c) + 2M(\nu(B_1) + \dots \nu(B_N)) < \varepsilon(b-a)(d-c) + 2M\varepsilon,$$

gdje smo sa M označili $\sup_{x \in A} |f(x)|$.

Ako sada za proizvoljan zadani $\varepsilon' > 0$ uzmemo $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{(b-a)(d-c)+2M}$, vidimo da za subdiviziju P' kao gore vrijedi $S(P') - s(P') < \varepsilon'$, čime je dokazana integrabilnost funkcije f na A.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$ integrabilna, i neka je D skup prekida funkcije f. Treba dokazati da je D mjere nula. Budući da je $D = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_{1/n}$, dovoljno je dokazati da je $D_{1/n}$ mjere 0 za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Za zadani $\varepsilon > 0$ postoji particija P pravokutnika A takva da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Posebno, za one pravokutnike A_{ij} koji sijeku $D_{1/n}$ vrijedi $\sum(M_{ij} - m_{ij})\nu(A_{ij}) < \varepsilon$, a kako je za te A_{ij} $M_{ij} - m_{ij} > \frac{1}{n}$, vidimo da je suma površina tih pravokutnika manja od $n\varepsilon$. Jasno je da ti pravokutnici pokrivaju $D_{1/n}$.

Ako je sada $\varepsilon' > 0$ proizvoljan, vidimo da smo uz $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{n}$ pronašli konačno mnogo pravokutnika koji pokrivaju $D_{1/n}$ i čija je ukupna površina manje od $n\varepsilon = \varepsilon'$. Dakle je $D_{1/n}$ mjere nula (dapače, površine nula).

8 Svojstva dvostrukog integrala

U ovom ćemo poglavlju dokazati tvrdnje analogne do sada nedokazanim tvrdnjama Teorema 2.7 za dvostruki integral (osim zamjene varijabli kojom ćemo se pozabaviti kasnije). S obzirom da ćemo istovremeno proučavati nekoliko funkcija, koristit ćemo oznake $s_f(P)$, $S_f(P)$ za Darbouxove sume funkcije f pridružene particiji P. Također ćemo koristiti oznake $m_{ij}(f)$, $M_{ij}(f)$ za infimum odnosno supremum funkcije f na pravokutniku A_{ij} određenom s P.

Teorem 8.1 *Neka je $A = [a, b] \times [c, d]$ pravokutnik i neka su $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije. Tada*

1° *Ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $\alpha f + \beta g$ integrabilna na A i vrijedi*

$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g.$$

2° *Ako je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in A$, onda je $\int_A f \leq \int_A g$.*

3° *Funkcija $|f|$ je integrabilna na A i vrijedi*

$$|\int_A f| \leq \int_A |f|.$$

Dokaz.

1° Kao prvo, αf je integrabilna i vrijedi $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$. Naime, ako je $\alpha > 0$ onda za bilo koju particiju P pravokutnika A vrijedi $m_{ij}(\alpha f) = \alpha m_{ij}(f)$ i $M_{ij}(\alpha f) = \alpha M_{ij}(f)$, pa je

$$s_{\alpha f}(P) = \alpha s_f(P); \qquad S_{\alpha f}(P) = \alpha S_f(P).$$

Nadalje, $m_{ij}(-f) = -M_{ij}(f)$ i $M_{ij}(-f) = -m_{ij}(f)$, pa slijedi $s_{-f}(P) = -S_f(P)$, $S_{-f}(P) = -s_f(P)$. Iz toga se lako dobiva $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$.

Ostaje vidjeti da je $f+g$ integrabilna i da je $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$. Primijetimo prvo da je za svaku particiju P očito $M_{ij}(f+g) \leq M_{ij}(f) + M_{ij}(g)$, $m_{ij}(f+g) \geq m_{ij}(f) + m_{ij}(g)$, za svaki i, j. Slijedi da je

$$s_f(P) + s_g(P) \leq s_{f+g}(P) \leq S_{f+g}(P) \leq S_f(P) + S_g(P). \tag{8.1}$$

Za zadani $\varepsilon > 0$ postoji particija P takva da je $S_f(P) - s_f(P) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $S_g(P) - s_g(P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sada iz (8.1) slijedi da je

$$S_{f+g}(P) - s_{f+g}(P) \leq (S_f(P) + S_g(P)) - (s_f(P) + s_g(P)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

pa je $f + g$ integrabilna. Nadalje, iz (8.1) i iz $S_f(P) - s_f(P) < \frac{\varepsilon}{2}$, $S_g(P) - s_g(P) < \frac{\varepsilon}{2}$ vidimo da je

$$I^*(f+g) \leq S_{f+g}(P) \leq S_f(P) + S_g(P) < s_f(P) + s_g(P) + \varepsilon \leq I_*(f) + I_*(g) + \varepsilon.$$

to vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ pa je $\int_A (f+g) \leq \int_A f + \int_A g$. Analogno,

$$I_*(f+g) \geq s_{f+g}(P) \leq s_f(P) + s_g(P) > S_f(P) + S_g(P) - \varepsilon \geq I^*(f) + I^*(g) - \varepsilon$$

za svaki $\varepsilon > 0$ povlači $\int_A (f+g) \geq \int_A f + \int_A g$. Dakle $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

2° Za svaku particiju P i za svaki i,j očito vrijedi $m_{ij}(f) \leq m_{ij}(g)$, $M_{ij}(f) \leq M_{ij}(g)$. Slijedi $s_f(P) \leq s_g(P)$, $S_f(P) \leq S_g(P)$. Dakle vrijedi $s_f(P) \leq s_g(P) \leq I_*(g)$, za svaku subdiviziju P, pa je $I_*(f) = \int_A f \leq I_*(g) = \int_A g$.

3° Ako je f neprekidna u nekoj točki $c \in A$, onda je i funkcija $|f|$ neprekidna u c kao kompozicija f i neprekidne funkcije $|\ |$. Dakle je skup prekida funkcije $|f|$ sadržan u skupu prekida funkcije f. Budući da je f integrabilna, njezin skup prekida ima mjeru 0 po Lebesgueovom teoremu. Dakle i skup prekida funkcije $|f|$ ima mjeru 0, pa je $|f|$ integrabilna, opet po Lebesgueovom teoremu.

Sada $f \leq |f|$ i $-f \leq |f|$ povlače zbog 2° (i 1°) da je $\pm \int_A f \leq \int_A |f|$, pa je $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

□

Za bilo koji ograničen podskup C od $\mathbb{R}^2$, definirali smo integrabilnost i integral funkcije f na C promatrajući proširenje nulom $\tilde{f}$ na nekom pravokutniku $A \supseteq C$. Očito je da se sve tvrdnje iz gornjeg teorema dobro ponašaju s obzirom na proširenje nulom. Dakle vrijedi

Korolar 8.2 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen i neka su $f, g : C \to \mathbb{R}$ integrabilne funkcije. Tada:*

1° *Za bilo koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, funkcija $\alpha f + \beta g$ je integrabilna na C i vrijedi $\int_C (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$.*

2° *Ako je $f(x) \leq g(x)$ za svako $x \in C$, onda je $\int_C f \leq \int_C g$.*

3° *Funkcija $|f|$ je integrabilna na C i vrijedi $|\int_C f| \leq \int_C |f|$.*

Dokaz. Za primjer dokažimo prvu tvrdnju. Neka su f i g integrabilne na C. To povlači da za proizvoljni pravokutnik $A \supseteq C$ su proširenja $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ funkcija f i g nulom, redom, integrabilne na A. Onda je po Teoremu 8.1 integrabilna i funkcija $\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$ i vrijedi

$$\int_A \alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g} = \alpha \int_A \tilde{f} + \beta \int_A \tilde{g}.$$

No kako je proširenje nulom na A funkcije $\alpha f + \beta g$ upravo $\alpha\tilde{f} + \beta\tilde{g}$ slijedi da je $\alpha f + \beta g$ integrabilna, a iz gornje jednakosti slijedi

$$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g.$$

□

Napomena 8.3 Gornja smo svojstva iskazali samo za integrabilne funkcije, međutim postoje i varijante tvrdnji o donjim i gornjim integralima koje vrijede i u slučaju da funkcije nisu nužno integrabilne. Na primjer, iz dokaza je jasno da za bilo koje dvije ograničene funkcije $f, g : C \to \mathbb{R}$ vrijedi $I_*(f) \leq I_*(g)$ i $I^*(f) \leq I^*(g)$, gdje se I_* i I^* definiraju na očigledan način, tj. preko proširenja nulom na pravokutnik $A \supseteq C$. Ova će nam tvrdnja trebati u dokazu Teorema o zamjeni varijabli (§9).

Primjer 8.4 Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen skup mjere nula koji ima površinu. Tada je površina skupa C jednaka 0.

Naime, kako skup ima površinu nula tada po Lemi 6.20 ∂C ima površinu nula. Stoga skup $\overline{C} = C \cup \partial C$ ima površinu (prema Korolaru 8.2). Skup $\overline{C}$ je ograničen i zatvoren, pa je kompaktan. Za kompaktan skup ekvivalentno je da je skup mjere nula i da je skup površine nula.

Teorem 8.5 (Teorem srednje vrijednosti za dvostruki integral) *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ kompaktan i povezan i pretpostavimo da ima površinu veću od 0. Neka je $f : C \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji točka $c \in C$ takva da je $f(c)$ srednja vrijednost funkcije f na C, tj.*

$$f(c) = \frac{1}{\nu(C)} \int_C f.$$

Intuitivno govoreći, ako zamislimo graf funkcije f kao brdovit teren iznad skupa C, teorem kaže da se taj teren može izravnati, tako da dobijemo prizmu nad C. Visina te prizme je prosječna vrijednost funkcije f, i ona se postiže u nekom $c \in C$.

Dokaz. Skup $f(C) \subset \mathbb{R}$ je kompaktan i povezan, dakle to je segment $[m, M]$ gdje su m i M minimalna odnosno maksimalna vrijednost funkcije f na C. Iz $m \leq f \leq M$ po Korolaru 8.2 slijedi $\int_C m \leq \int_C f \leq \int_C M$, odnosno $m\nu(C) \leq \int_C f \leq M\nu(C)$, odnosno $m \leq \frac{1}{\nu(C)} \int_C f \leq M$. Dakle je $\frac{1}{\nu(C)} \int_C f$ u slici $f(C)$. □

Jasno je da je integral integrabilne funkcije po skupu C površine nula jednak nuli. Naime, $m \leq f \leq M$ povlači $0 = m\nu(C) \leq \int_C f \leq M\nu(C) = 0$. Nešto je teže dokazati analogno svojstvo za skup mjere nula:

Propozicija 8.6 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen skup mjere nula i neka je $f : C \to \mathbb{R}$ integrabilna (posebno, f je ograničena). Tada je $\int_C f = 0$.*

Obratno, ako je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen, ako je $f : C \to \mathbb{R}$ integrabilna i nenegativna, te ako je $\int_C f = 0$, onda skup $\{x \in C | f(x) \neq 0\}$ ima mjeru 0.

Dokaz. Neka je $A \supseteq C$ pravokutnik i neka je $\tilde{f}$ proširenje f nulom na A.

Za dokaz prve tvrdnje, uzmimo bilo koju particiju P pravokutnika A. Nijedan od pripadnih pravokutnika A_{ij} ne može biti sadržan u C, jer A_{ij} nije mjere 0. To znači da je $m_{ij} \leq 0$ za svaki i, j, pa je $s(\tilde{f}, P) \leq 0$. Isti se argument može primijeniti na funkciju $-f$, pa je $S(\tilde{f}, P) = -s(-\tilde{f}, P) \geq 0$. Kako je f integrabilna, $\int_C f = \int_A \tilde{f} = \sup_P s(\tilde{f}, P) = \inf_P S(\tilde{f}, P)$ mora biti 0.

Za dokaz druge tvrdnje, neka je $C_m = \{x \in C \,\big|\, f(x) \geq \frac{1}{m}\}$ za fiksirani $m \in \mathbb{N}$. Za zadani $\varepsilon > 0$, neka je P particija pravokutnika A takva da je $S(\tilde{f}, P) < \frac{\varepsilon}{m}$ (takva P postoji jer je $\int_A \tilde{f} = 0$ po pretpostavci). Za one i, j za koje A_{ij} siječe C_m vrijedi $M_{ij} \geq \frac{1}{m}$, pa je za te pravokutnike $M_{ij}\nu(A_{ij}) \geq \frac{1}{m}\nu(A_{ij})$. Slijedi da je suma površina tih A_{ij} manja ili jednaka od $mS(\tilde{f}, P) < \varepsilon$. Vidimo da je C_m pokriven pravokutnicima ukupne površine manje od ε. Dakle, dokazali smo da je C_m skup površine 0.

Dakle je C_m skup mjere nula za svaki $m \in \mathbb{N}$, pa je $\{x \in C | f(x) \neq 0\} = \cup_{m \in \mathbb{N}} C_m$ također mjere nula. □

Napomena 8.7 Tvrdnja u Primjeru 8.4 sada slijedi direktno iz Propozicije 8.6 za $f = \chi_C$.

Lema 8.8 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ skup površine nula i $f : C \to \mathbb{R}$ ograničena. Tada je f integrabilna i*

$$\int_C f = 0.$$

Dokaz. Neka je $A \supseteq C$ pravokutnik i $M = \sup |f|(C)$. Jer je C površine nula funkcija χ_C je integrabilna na A, pa za dani $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija od A takva da je

$$S_{\chi_C}(P) - s_{\chi_C}(P) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Kako je C skup površine 0 slijedi da niti jedan pravokutnik A_{ij} iz subdivizije nije sadržan u C. Stoga je $s_{\chi_C}(P) = 0$, pa je

$$\frac{\varepsilon}{2M} > S_{\chi_C}(P) = \sum_{A_{ij} \cap C \neq \emptyset} \nu(A_{ij})$$

Sada je

$$S_{\tilde{f}}(P) - s_{\tilde{f}}(P) = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})\nu(A_{ij}) = \sum_{A_{ij} \cap C \neq \emptyset} (M_{ij} - m_{ij})\nu(A_{ij}) \leq 2M \sum_{A_{ij} \cap C \neq \emptyset} \nu(A_{ij}) < \varepsilon,$$

pa je f integrabilna na C. Sada je po prethodnoj propoziciji (ili argumentu neposredno prije nje) integral jednak nuli. □

Sada smo spremni dokazati aditivnost integrala po području integracije:

Teorem 8.9 *Neka su C i E ograničeni podskupovi od $\mathbb{R}^2$ takvi da je $C \cap E$ mjere nula. Neka je $f : C \cup E \to \mathbb{R}$ funkcija koja je integrabilna na C, na E i na $C \cap E$. Tada je f integrabilna na $C \cup E$ i vrijedi*

$$\int_{C \cup E} f = \int_C f + \int_E f.$$

Dokaz. Neka je A pravokutnik koji sadrži $C \cup E$. Označimo proširenje funkcije f nulom sa $C \cup E$ na A sa $\tilde{f}$. Označimo sa χ_C, χ_E i $\chi_{C \cap E}$ karakteristične funkcije skupova C, E i $C \cap E$, promatrane kao funkcije na A. Neka je $f_1 = \tilde{f}\chi_C$, $f_2 = \tilde{f}\chi_E$ i $f_3 = \tilde{f}\chi_{C \cap E}$. Tada je f_1 proširenje nulom funkcije $f|_C$ na A, f_2 je proširenje nulom funkcije $f|_E$ na A, a f_3 je proširenje nulom funkcije $f|_{C \cap E}$ na A. Prema tome, f_1, f_2 i f_3 su integrabilne na A. Očito je $\chi_{C \cup E} = \chi_C + \chi_E - \chi_{C \cap E}$. Slijedi da je

$$\tilde{f} = f_1 + f_2 - f_3.$$

Prema tome, $\tilde{f}$ je integrabilna na A, i vrijedi $\int_A \tilde{f} = \int_A f_1 + \int_A f_2 - \int_A f_3$, a s obzirom da je $\int_A \tilde{f} = \int_{C \cup E} f$, $\int_A f_1 = \int_C f$, $\int_A f_2 = \int_E f$ i $\int_A f_3 = 0$, dobivamo tvrdnju teorema. □

Napomena 8.10 Ovaj Teorem zajedno s Lemom 8.8 također povlači da u integralu skupovi površine nula nemaju doprinos.

Napomena 8.11 Uz nešto jaču pretpostavku da $C \cap E$ ima površinu 0, nije teško poopćiti gornji teorem na tvrdnju o donjem odnosno gornjem integralu funkcije koja nije nužno integrabilna. Uz iste oznake kao u dokazu teorema, neka je P bilo koja subdivizija pravokutnika A, koju po potrebi profinimo tako da suma površina pravokutnika A_{ij} koji pokrivaju $C \cap E$ bude manja od $\frac{\varepsilon}{M}$, gdje je M supremum funkcije $|f|$ na $C \cup E$. Tada je

$$|s_{\tilde{f}}(P) - (s_{f_1}(P) + s_{f_2}(P))| < \varepsilon \qquad \text{i} \qquad |S_{\tilde{f}}(P) - (S_{f_1}(P) + S_{f_2}(P))| < \varepsilon.$$

Odavde se lako dobiva da je donji integral funkcije $\tilde{f}$ na A jednak sumi donjih integrala funkcija f_1 i f_2 na A, i analogno za gornje integrale. Drugim riječima, donji integral funkcije f na $C \cup E$ jednak je sumi donjih integrala funkcije f na C i na E, i analogno za gornje integrale.

9 Integralne sume i Darbouxov teorem

Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je P subdivizija pravokutnika A na pravokutnike A_{ij}. Za svaki i, j izaberimo točku $x_{ij} \in A_{ij}$. Izraz

$$\sigma(P; x_{ij}) = \sum_{i,j} f(x_{ij})\nu(A_{ij})$$

zove se integralna (ili Riemannova) suma funkcije f za subdiviziju P i izbor točaka x_{ij}. Očito je

$$s(P) \leq \sigma(P; x_{ij}) \leq S(P).$$

To sugerira da za integrabilnu funkciju f i za dovoljno finu subdiviziju P, integralna suma $\sigma(P; x_{ij})$ dobro aproksimira $\int_A f$ za bilo koji izbor točaka x_{ij}. Da je tome doista tako, vidi se iz sljedećeg teorema. U stvari, on kaže da se integral može definirati kao svojevrstan limes integralnih suma.

Teorem 9.1 (Darboux) *Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. Tada su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:*

1° *Funkcija f je integrabilna na A i $\int_A f = I$.*

2° *Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaku subdiviziju P takvu da su duljine stranica svih pravokutnika A_{ij} manje od δ, i za svaki izbor točaka $x_{ij} \in A_{ij}$, vrijedi*

$$|\sigma(P; x_{ij}) - I| < \varepsilon.$$

Dokaz. Dokažimo najprije da 2° povlači 1°. Neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Fiksirajmo $\delta > 0$ takav da za svaku subdiviziju P takvu da su duljine stranica svih pravokutnika A_{ij} manje od δ, i za svaki izbor točaka $x_{ij} \in A_{ij}$, vrijedi $|\sigma(P; x_{ij}) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$. Neka je P jedna takva fiksirana subdivizija.

Zbog definicije brojeva m_{ij} u donjoj Darbouxovoj sumi, postoji izbor točaka x_{ij} takav da je

$$\sigma(P; x_{ij}) - s(P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogno, postoji izbor točaka x'_{ij} takav da je

$$S(P) - \sigma(P; x'_{ij}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Sada vrijedi

$$|s(P) - I| \leq |s(P) - \sigma(P; x_{ij})| + |\sigma(P; x_{ij}) - I| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogno,

$$|S(P) - I| \leq |S(P) - \sigma(P; x'_{ij})| + |\sigma(P; x'_{ij}) - I| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Slijedi da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$, pa vidimo da je f integrabilna na A.

Štoviše, vrijedi $s(P) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, pa je $\int_A f \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$. Također vrijedi $S(P) > I - \frac{\varepsilon}{2}$, pa je $\int_A f \geq I - \frac{\varepsilon}{2}$. Kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, zaključujemo da je $\int_A f = I$.

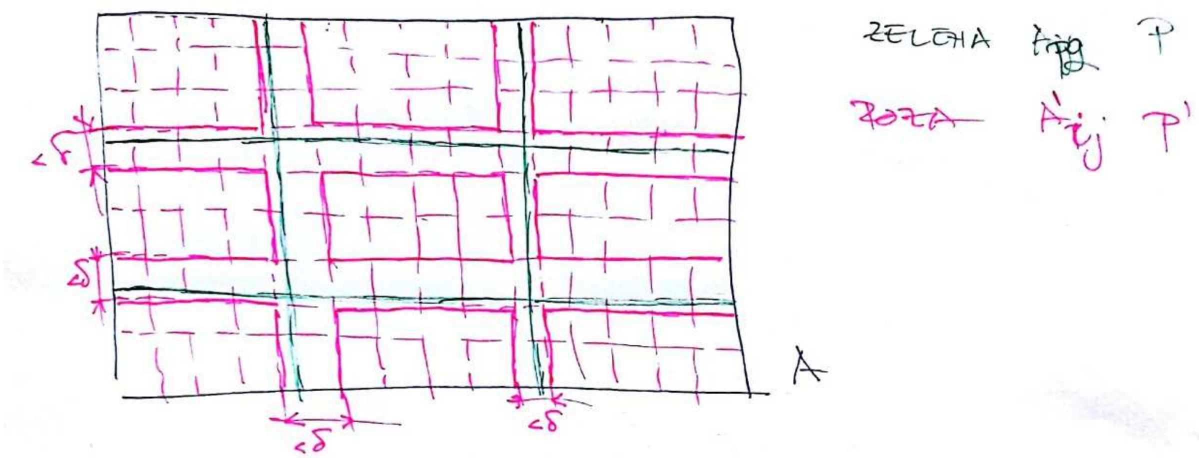
Dokažimo sada da 1° povlači 2°. Neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Tada postoji subdivizija P pravokutnika A takva da je

$$S(P) - I < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad I - s(P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je sada P' bilo koja subdivizija takva da su sve duljine stranica svih pripadnih pravokutnika A'_{ij} manje od nekog δ (kojeg ćemo specificirati kasnije). Tada pravokutnike A'_{ij} možemo podijeliti u dvije skupine. U prvoj su skupini oni A'_{ij} koji su sadržani u nekom pravokutniku A_{pq} subdivizije P. U drugoj su skupini oni A'_{ij} koji nisu sadržani ni u jednom pravokutniku A_{pq} subdivizije P. Ako je $x_{ij} \in A'_{ij}$ neki izbor točaka, vrijedi

$$\sigma(P'; x_{ij}) = \sum_{i,j} f(x_{ij})\nu(A'_{ij}) = \sum_{I} + \sum_{II},$$

gdje smo sa $\sum_I$ odnosno $\sum_{II}$ označili sume izraza $f(x_{ij})\nu(A'_{ij})$ po prvoj odnosno drugoj skupini pravokutnika A'_{ij}.



Druga je suma manja ili jednaka M puta suma površina svih A'_{ij} iz druge skupine, gdje je M supremum funkcije $|f|$ na A. Svi pravokutnici A'_{ij} iz druge skupine leže u uniji pruga širine δ oko svih stranica svih pravokutnika A_{pq}. Slijedi da je suma njihovih površina manja ili jednaka od $\delta\mathcal{O}$, gdje je $\mathcal{O}$ suma opsega svih pravokutnika A_{pq}. Dakle je

$$\sum_{II} \leq M\delta\mathcal{O}.$$

Analogno vrijedi

$$\sum_{II} \geq -M\delta\mathcal{O}.$$

Prvu sumu možemo napisati kao

$$\sum_{p,q}\sum_{i,j} f(x_{ij})\nu(A'_{ij}),$$

pri čemu unutarnja suma ide po onim i, j za koje je $A'_{ij} \subseteq A_{pq}$. Očito je

$$m_{pq} \leq f(x_{ij}) \leq M_{pq},$$

pa ako označimo sa ν'_{pq} površinu onog dijela pravokutnika A_{pq} koji nije ni u jednom A'_{ij} iz prve skupine, dobivamo

$$\sum_{p,q} m_{pq}(\nu(A_{pq}) - \nu'_{pq}) \leq \sum_{I} \leq \sum_{p,q} M_{pq}(\nu(A_{pq}) - \nu'_{pq}),$$

odnosno

$$s(P) - \sum_{p,q} m_{pq}\nu'_{pq} \le \sum_{I} \le S(P) - \sum_{p,q} M_{pq}\nu'_{pq}.$$

Budući da za svaki p, q vrijedi $m_{pq} \le M$ i $-M_{pq} \le M$, te da je $\sum_{p,q} \nu'_{pq} \le \delta\mathcal{O}$ jer su ν'_{pq} površine disjunktnih likova unutar unije pruga širine δ oko svih stranica svih pravokutnika A_{pq}, vidimo da je

$$s(P) - M\delta\mathcal{O} \le \sum_{I} \le S(P) + M\delta\mathcal{O}.$$

Zajedno sa ranije dobivenim ocjenama za $\sum_{II}$, to povlači

$$s(P) - 2M\delta\mathcal{O} \le \sigma(P'; x_{ij}) \le S(P) + 2M\delta\mathcal{O}.$$

Ako odaberemo $\delta = \frac{\varepsilon}{4M\mathcal{O}}$, onda slijedi

$$s(P) - \frac{\varepsilon}{2} \le \sigma(P'; x_{ij}) \le S(P) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Napokon, budući da je $s(P) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ i $S(P) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, vidimo da je

$$I - \varepsilon < \sigma(P'; x_{ij}) \le I + \varepsilon,$$

a to je i trebalo dokazati. $\square$

10 Zamjena varijabli u dvostrukom integralu

Svrha ovog poglavlja je dokazati sljedeći teorem i primijeniti ga u primjerima.

Teorem 10.1 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ otvoren ograničen skup koji ima površinu. Neka je $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ injekcija klase C^1. Pretpostavimo da je Jacobijeva determinanta $J_\varphi(x) = \det \nabla\varphi(x)$ različita od 0 za svaki $x \in C$ i da su $|J_\varphi(x)|$ i $\frac{1}{|J_\varphi(x)|}$ ograničene funkcije na C. Pretpostavimo da $D = \varphi(C)$ ima površinu.*

Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, tada je funkcija $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ integrabilna na C i vrijedi

$$\int_D f = \int_C (f \circ \varphi)|J_\varphi|.$$

Napomena 10.2 Teorem na prvi pogled nije u skladu sa dobro poznatom metodom supstitucije za integral funkcija jedne varijable, jer se tamo ne spominje apsolutna vrijednost. Naime, ako je $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ diferencijabilna bijekcija, i ako je $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrabilna, onda vrijedi

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

Stvar je u tome da φ mora biti strogo monotona, dakle može biti strogo rastuća u kom slučaju je $\varphi'(t) \geq 0$ i $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, ili strogo padajuća u kom slučaju je $\varphi'(t) \leq 0$ i $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$. Dakle, u svakom slučaju vrijedi

$$\int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\, dt = \int_c^d f(x)\, dx,$$

i to je u skladu s Teoremom 10.1.

Napomena 10.3 Dokaz Teorema o zamijeni varijabli zahtjeva delikatnu analizu. Međutim, intuitivnu ideju iza teorema možemo jednostavno objasniti. Neka je A "maleni" pravokutnik u C. Na tom pravokutniku je funkcija φ prbližno afina, pa joj je slika $\varphi(A)$ priblžno paralelogram. Stoga je površina $\varphi(A)$ približno $|\det \nabla\varphi|$ u nekoj točki pravokutnika A. Pa je

$$\sum_{A_{ij}} f(\varphi(x_{ij}))|\det \nabla\varphi(x_{ij})|\nu(A_{ij}) \approx \sum_{A_{ij}} f(\varphi(x_{ij}))\nu(\varphi(A_{ij})).$$

Izraz na lijevoj strani je integralna suma za $\int_C f \circ \varphi|J_\varphi|$, dok je izraz na desnoj strani blizak integralnoj sumi za $\int_{\varphi(C)} f$.

Prije nego prijeđemo na dokaz Teorema 10.1, primijenimo ga u jednom tipičnom primjeru. Prisjetimo se da u ravnini osim uobičajenih koordinata x i y možemo promatrati i polarne koordinate r, θ. Veza s x i y je dana sa

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Interpretirajmo to kao $(x, y) = \varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Tada je

$$J_\varphi(r, \theta) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Da bismo u ovoj situaciji primijenili Teorem 10.1, područje integracije C trebalo bi biti takvo da su na njemu funkcije r i $1/r$ ograničene, te da je φ injektivna funkcija. Na primjer, dovoljno bi bilo da C bude sadržano u skupu $\{(r,\theta)\,\big|\, r>\delta, 0<\theta<2\pi\}$ za neki $\delta>0$. Dio $\mathbb{R}^2$ koji smo ovdje isključili je zraka s početkom u ishodištu, a to je skup mjere 0 koji ne utječe na integraciju, zajedno s krugom oko 0 polumjera δ, čija površina teži k 0 za $\delta\to 0$.

Lema 10.4 *Neka je $C\subset\mathbb{R}^2$ ograničen skup koji ima površinu, te $g: C\to\mathbb{R}$ ograničena funkcija. Neka je $(C_\delta)_{\delta>0}\subset C$ familija skupova koji imaju površinu sa svojstvom $\lim_{\delta\to 0}\nu(C_\delta)=0$ i takva da je $g|_{C\backslash C_\delta}$ integrabilna na $C\backslash C_\delta$ za svaki $\delta>0$. Tada je g integrabilna na C i vrijedi*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C\backslash C_\delta} g=\int_C g.$$

Dokaz. Neka je $A\supseteq C$ pravokutnik $M=\sup|g|(C)$ i $\varepsilon>0$. Jer je $\lim_{\delta\to 0}\nu(C_\delta)=0$ postoji $\delta_0>0$ takav da je $\nu(C_{\delta_0})<\varepsilon/(4M)$. Onda prema Zadatku 6.24 postoji konačno otvorenih pravokutnika B_i, $i=1,\ldots,m$ koji pokrivaju C_{δ_0} i ukupne su površine manje od $\varepsilon/(4M)$. Jer je g integrabilna na $C\backslash C_{\delta_0}$ slijedi da postoji subdivizija P od A takva da je

$$S_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P)-s_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P)<\frac{\varepsilon}{2}; \tag{10.1}$$

ovdje $\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}$ označava proširenje nulom funkcije $g|_{C\backslash C_{\delta_0}}$ na A. Iz stranica pravokutnika B_i, $i=1,\ldots,m$ i stranica subdivizije P napravimo zajedničko profinjenje P'. Sada za svaki A'_{ij} iz subdivizije P slijedi da je u jednoj od dvije klase

I) $A'_{ij}\subset B_j$ za neki $j\in\{1,\ldots,m\}$,

II) inače.

Jer pravokutnici iz I pokrivaju skup C_{δ_0} slijedi da je

$$\sum_{A'_{ij}\in II}(M'_{ij}-m'_{ij})\nu(A'_{ij})\le S_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P')-s_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P')$$

jer u sumi na desnoj strani ima samo nešto više nenegativnih članova. Jer je P' profinjenje od P iz (10.1) sada vrijedi

$$\begin{aligned}S_g(P')-s_g(P')&=\sum_{A'_{ij}\in I}(M'_{ij}-m'_{ij})\nu(A'_{ij})+\sum_{A'_{ij}\in II}(M'_{ij}-m'_{ij})\nu(A'_{ij})\\&\le 2M\sum_{A'_{ij}\in I}\nu(A'_{ij})+S_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P')-s_{\widetilde{g|_{C\backslash C_{\delta_0}}}}(P')<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Stoga je g integrabilna na C. Dakle znamo da su integrabilne funkcije $g\chi_C$ i $g\chi_{C\backslash C_\delta}$ za svaki $\delta>0$. Kako je $\chi_{C_\delta}=\chi_C-\chi_{C\backslash C_\delta}$ po Teoremu 8.1 slijedi da je integrabilna i funkcija $g\chi_{C_\delta}$, te da vrijedi

$$\int_{C_\delta} g=\int_C g-\int_{C\backslash C_\delta} g.$$

Sada opet prema Teoremu 8.1 računamo

$$\left|\int_C g-\int_{C\backslash C_\delta} g\right|\le\int_{C_\delta}|g|\le M\nu(C_\delta)\to 0,$$

pa smo dokazali tvrdnju leme. $\square$

Zato u stvari možemo zaključiti da vrijedi uobičajena tvrdnja zamjene varijabli za krug.

Korolar 10.5 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ otvoren ograničen skup koji ima površinu. Neka je $D = \varphi(C)$ gdje je $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna (dakle i ograničena) funkcija, tada je funkcija $(f \circ \varphi)r$ integrabilna na C i vrijedi*

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_C f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta.$$

Ovaj će korolar biti vrlo koristan u situacijama kad funkcije treba integrirati po područjima koja je lakše opisati u polarnim nego u pravokutnim koordinatama. Takav je na primjer kružni isječak polumjera R sa središtem u ishodištu: u polarnim koordinatama on je naprosto dan sa $0 \le r \le R$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

Slična argumentacija vrijedit će i u sličnim situacijama, a i u više dimenzija, npr. za cilindar ili sferu u $\mathbb{R}^3$.

Dokazivanje Teorema o zamjeni varijabli započinjemo sljedećom lemom:

Lema 10.6 *Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ pravokutnik i neka je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator. Tada je površina skupa $L(A)$ dana sa*

$$\nu(L(A)) = |\det L|\nu(A).$$

Dokaz. Vrhovi pravokutnika $A = [a,b] \times [c,d]$ su (a,c), (b,c), (b,d) i (a,d), a stranice iz vrha (a,c) su dane vektorima $(b-a)e_1$ i $(d-c)e_2$. Možemo pretpostaviti da je L regularan; u protivnom, skup $L(A)$ je jednodimenzionalan segment pa je površine nula i tvrdnja vrijedi. Za regularan L, skup $L(A)$ je paralelogram čije su stranice iz vrha $L(a,c)$ dane vektorima $(b-a)Le_1 = (b-a)(\alpha e_1 + \gamma e_2)$ i $(d-c)Le_2 = (d-c)(\beta e_1 + \delta e_2)$, gdje je $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ matrica operatora L u kanonskoj bazi.

Budući da je površina paralelograma u $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ određenog s dva vektora jednaka duljini vektorskog produkta tih vektora (provjerite da je to u skladu s definicijom površine), vidimo da je

$$\begin{aligned}\nu(L(A)) &= \|(b-a)(\alpha e_1 + \gamma e_2) \times (d-c)(\beta e_1 + \delta e_2)\| = (b-a)(d-c)\|\alpha\delta e_1 \times e_2 + \gamma\beta e_2 \times e_1\| \\ &= (b-a)(d-c)\|(\alpha\delta - \gamma\beta)e_3\| = (b-a)(d-c)|\det L| = |\det L|\nu(A),\end{aligned}$$

kao što se i tvrdilo. $\square$

Sada nije teško prijeći s pravokutnika na proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^2$ koji ima površinu:

Korolar 10.7 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ skup koji ima površinu i neka je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearan operator. Tada skup $L(C)$ ima površinu i ona je dana sa*

$$\nu(L(C)) = |\det L|\nu(C).$$

Dokaz. Neka je $A \supseteq C$ pravokutnik. Možemo pretpostaviti da je $\det L \neq 0$; inače skup $L(A)$ ima površinu nula pa isto vrijedi i za skup $L(C) \subseteq L(A)$ i tvrdnja slijedi. Za zadani $\varepsilon > 0$, neka je P subdivizija pravokutnika A takva da za karakterističnu funkciju χ_C vrijedi

$$S_{\chi_C}(P) - s_{\chi_C}(P) < \frac{\varepsilon}{|\det L|}. \tag{10.2}$$

Označimo uniju svih pravokutnika A_{ij} subdivizije P koji su sadržani u C sa U, a uniju svih pravokutnika A_{ij} koji sijeku C sa V. Tada vrijedi $U \subseteq C \subseteq V$, pa je i $L(U) \subseteq L(C) \subseteq L(V)$. Po prethodnoj lemi, $\nu(L(U)) = |\det L|\nu(U)$, $\nu(L(V)) = |\det L|\nu(V)$. Nadalje, očito $S_{\chi_C}(P) = \nu(V)$, $s_{\chi_C}(P) = \nu(U)$. Zato je

$$\nu(L(V)) - \nu(L(U)) = |\det L|(\nu(V) - \nu(U)) = |\det L|(S_{\chi_C}(P) - s_{\chi_C}(P)) < \varepsilon.$$

Vidimo da za svaki $\varepsilon > 0$ možemo naći skupove $L(U) \subseteq L(C)$ i $L(V) \supseteq L(C)$ koji imaju površinu, i čija je razlika površina $< \varepsilon$. Odavde slijedi da i skup $L(C)$ ima površinu. Naime, prema Lemi 6.20 dovoljno je dokazati da granica skupa $L(C)$ ima površinu nula. Ta je granica sadržana u skupu $L(V) \setminus L(U)$, koji ima površinu manju od ε. To znači da za pravokutnik $B \supseteq L(V) \setminus L(U)$ postoji subdivizija P' takva da je gornja Darbouxova suma za karakterističnu funkciju skupa $L(V) \setminus L(U)$ u odnosu na P' manja od ε. S obzirom da je M_{ij} jednak 1 za pravokutnike koji sijeku $L(V) \setminus L(U)$ odnosno 0 za pravokutnike koji ne sijeku $L(V) \setminus L(U)$, slijedi da se skup $L(V) \setminus L(U)$ može pokriti pravokutnicima čija je ukupna površina manja od ε. Ti isti pravokutnici pokrivaju i $\partial L(C)$, a kako je $\varepsilon > 0$ proizvoljan slijedi da $\partial L(C)$ ima površinu 0.

Sada se lako vidi i da je $\nu(L(C)) = |\det L|\nu(C)$ (jer analogne tvrdnje vrijede za U i V). Naime, jer je $U \subset C \subset V$ vrijedi $L(U) \subset L(C) \subset L(V)$. Jer površine sva tri skupa sada postoje vrijedi i $\nu(L(U)) \leq \nu(L(C)) \leq \nu(L(V))$. Zbog Leme 10.6 slijedi $\nu(U) \leq \frac{1}{|\det L|}\nu(L(C)) \leq \nu(V)$, dok iz definicije skupova U i V vrijedi $\nu(U) \leq \nu(C) \leq \nu(V)$. Iz (10.2) je $\nu(V) - \nu(U) < \frac{\varepsilon}{|\det L|}$. Stoga je

$$\left| \frac{1}{|\det L|}\nu(L(C)) - \nu(C) \right| < \frac{\varepsilon}{|\det L|}.$$

Proizvoljnost od ε povlači formulu iz tvrdnje leme. $\square$

Lema 10.8 *Neka je $C_i, i \in \mathbb{N}$ familija skupova koji imaju površinu takvi da skup $C \subseteq \cup_{i\in\mathbb{N}} C_i$ ima površinu. Tada vrijedi*

$$\nu(C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i).$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\nu(C) \leq 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i)$$

jer zbog proizvoljnosti od $\varepsilon > 0$ onda slijedi tražena nejednakost.

Za dani i neka je U_i otvoreni skup takav da je $C_i \subset U_i$ i $\nu(U_i) \leq \nu(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ (pomoću homotetije ili iz unije pravokutnika, pažljivo odabrane tako da u interioru sadži C_i). Neka je $K \subseteq C$ kompaktan skup takav da vrijedi $\nu(K) \geq \nu(C) - \varepsilon$ (unija pravokutnika iz subdivizije koji su sadržani u C, vidi Zadatak 20.6). Sada je $K \subset \cup_i U_i$, pa je $\{U_i, i \in \mathbb{N}\}$ otvoren pokrivač kompaktng skupa K. Stoga postoji njegov konačni potpokrivač za skup K, tj. $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$. Sada je

$$\nu(C) - \varepsilon \leq \nu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(C_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i).$$

$\square$

Gornja tvrdnja zove se i σ-subaditivnost površine. Za disjunktne skupove vrijedi i σ-aditivnost.

Zadatak 10.9 Pokažite da ako su C_i iz prethodne leme u parovima disjunktni vrijedi

$$\nu(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i).$$

Lema 10.10 *Neka je $A_i, i \in \mathbb{N}$ familija skupova disjunktnih interirora (*$\operatorname{Int} A_i \cap \operatorname{Int} A_j = \emptyset, i \neq j$*) koji imaju površinu takvi da skup $C = \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ima površinu. Neka je $f : C \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija koja je i integrabilna na svakom A_i. Tada je f integrabilna na C i vrijedi*

$$\int_C f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f. \tag{10.3}$$

Dokaz. Definiramo padajući niz skupova

$$C_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sada je $C \backslash C_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$ skup koji ima površinu (jer A_i ima površinu za svaki $i \in \mathbb{N}$), pa onda i $C_n = C \backslash (C \backslash C_n)$ ima površinu.

Kako je $\chi_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \leq \chi_C$ slijedi ocjena

$$\nu(C \backslash C_n) = \sum_{i=1}^{n} \nu(A_i) = \nu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \nu(C),$$

pa je red $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ konvergentan. Stoga za dani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} \nu(A_i) < \varepsilon.$$

Jer je $C_n \supseteq C_{n+1}$ slijedi da je $\chi_{C_{n+1}} \leq \chi_{C_n}$, pa je opet po Korolaru 8.2 $\nu(C_{n+1}) \leq \nu(C_n)$, te niz $(\nu(C_n))_n$ pada, pa korištenjem Leme 10.8 dobivamo

$$\nu(C_n) \leq \nu(C_{n_0}) \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \nu(A_i) < \varepsilon.$$

Stoga je $\lim_{n\to\infty} \nu(C_n) = 0$.

Prema pretpostavci Leme je f integrabilna na svakom $C \backslash C_n$, te su ispunjene pretpostavke Leme 10.4, te slijedi tvrdnja. □

Daljnja je redukcija dana sljedećom lemom:

Lema 10.11 *Ako je Teorem o zamjeni varijabli istinit za konstantnu funkciju $f = 1$ i za svaki pravokutnik $K \subseteq D$, onda je istinit za bilo koju integrabilnu funkciju f.*

Dokaz. Iz istinitosti za $f = 1$ zbog linearnosti integrala odmah slijedi istinitost za bilo koju konstantnu funkciju. Pretpostavimo da je $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilna, gdje je $D = \varphi(C)$. Neka je

$A \subseteq D$ pravokutnik i neka je P neka subdivizija pravokutnika A na pravokutnnike A_{ij}. Tada vrijedi

$$s(P) = \sum_{i,j} m_{ij}(f)\nu(A_{ij}) = \sum_{i,j} \int_{A_{ij}} m_{ij}(f) = \sum_{i,j} \int_{\varphi^{-1}(A_{ij})} (m_{ij}(f) \circ \varphi)|J_\varphi|, \tag{10.4}$$

budući da teorem vrijedi za konstantnu funkciju $m_{ij}(f)$. Budući da je $m_{ij}(f) \leq f$, prema Napomeni 8.3 i Napomeni 8.11 vrijedi

$$\sum_{i,j} \int_{\varphi^{-1}(A_{ij})} (m_{ij}(f) \circ \varphi)|J_\varphi| \leq \sum_{i,j} \int^d_{\varphi^{-1}(A_{ij})} (f \circ \varphi)|J_\varphi| = \int^d_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)|J_\varphi| = \int^d_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)|J_\varphi|,$$

gdje smo sa $\int^d$ označili donji integral. Dakle vidimo da je $\int_A f \leq \int^d_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)|J_\varphi|$. Analogno se koristeći nejednakost $f \leq M_{ij}(f)$ dobiva $\int_A f \geq \int^g_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi)|J_\varphi|$, gdje $\int^g$ označava gornji integral. Sada vidimo da je funkcija $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ integrabilna na $\varphi^{-1}(A)$ i da joj je integral jednak $\int_A f$.

Sada koristimo činjenicu da je svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^2$ prebrojiva unija "skoro disjunktnih" kvadrata (interiori su im disjunktni), pa postoje kvadrati $A_i, i \in \mathbb{N}$ takvi da je $D = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Stoga je prema Lemi 10.10

$$\int_D f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{A_i} f.$$

Jer je A_i kvadrat odozgo vrijedi

$$\int_{A_i} f = \int_{\varphi^{-1}(A_i)} f \circ \varphi |J_\varphi|, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Jer $\varphi^{-1}(A_i)$ imaju površinu (vidi Lemu 10.14), jer je $\cup_{i \in \mathbb{N}} \varphi^{-1}(A_i) = \varphi^{-1}(D) = C$ i jer je $f \circ \varphi |J_\varphi|$ integrabilna opet iz Leme 10.10 slijedi

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(A_i)} f \circ \varphi |J_\varphi| = \int_C f \circ \varphi |J_\varphi|,$$

pa vrijedi Teorem o zamjeni varijabli. □

Kombinacijom Leme 10.11 i Korolara 10.7 dobiva se

Korolar 10.12 *Teorem o zamjeni varijabli je istinit ako je φ linearan operator.*

Dokaz. Po Korolaru 10.7, $\int_D 1 = \int_C |\det \varphi| = \int_C |J_\varphi|$, s obzirom da je diferencijal linearnog operatora φ jednak φ u svakoj točki. Sada tvrdnja slijedi za bilo koji f pomoću Leme 10.11. □

Još jedna jednostavna činjenica je

Korolar 10.13 *Ako je Teorem o zamjeni varijabli istinit za $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ i za $\psi : E \to \mathbb{R}^2$, gdje $E \supseteq \varphi(C)$, onda je istinit i za $\psi \circ \varphi : C \to \mathbb{R}^2$.*

Dokaz. Po Teoremu o diferencijalu kompozicije i po Binet-Cauchyjevom teoremu vrijedi $J_{\psi\circ\varphi} = (J_\psi \circ \varphi)J_\varphi$. Slijedi

$$\int_{\psi(\varphi(C))} f = \int_{\varphi(C)} (f \circ \psi)|J_\psi| = \int_C (f \circ \psi \circ \varphi)(|J_\psi| \circ \varphi)|J_\varphi| = \int_C (f \circ \psi \circ \varphi)|J_{\psi\circ\varphi}|.$$

□

Sada ćemo koristiti normu $\| \|_\infty$ na $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da za zadani $p \in \mathbb{R}^2$ nejednakost $\|x - p\|_\infty \leq s$ vrijedi ako i samo ako je x u kvadratu stranice $2s$ sa centrom u p. Nadalje, koristit ćemo sljedeću normu na prostoru linearnih operatora na $\mathbb{R}^2$: ako je $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ matrica operatora A u kanonskoj bazi, onda definiramo

$$\|A\|_\infty = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}.$$

Sada se lako vidi da vrijedi

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty, \qquad A \in L(\mathbb{R}^2), x \in \mathbb{R}^2.$$

Neka je K kvadrat $\|x - p\|_\infty \leq s$ sadržan u skupu C. Po Nejednakosti srednje vrijednosti (odnosno Teoremu srednje vrijednosti za vektorske funkcije) imamo

$$\|\varphi(x) - \varphi(p)\|_\infty \leq M\|x - p\|_\infty \leq Ms,$$

gdje je $M = \max_{y\in K} \|\nabla\varphi(y)\|_\infty$. Dakle, $\varphi(K)$ je sadržano u kvadratu $\|x - \varphi(p)\|_\infty \leq Ms$. Uz pretpostavku da skup $\varphi(K)$ ima površinu, slijedi

$$\nu(\varphi(K)) \leq M^2\nu(K). \tag{10.5}$$

Lema 10.14 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^2$ ograničen otvoren skup i neka je $\varphi : C \to \mathbb{R}^2$ injekcija klase C^1 takva da je $J_\phi(x) \neq 0$ za svaki $x \in C$. Ako je B skup koji ima površinu i čiji je zatvarač $\bar{B}$ sadržan u C, onda skup $\varphi(B)$ ima površinu.*

Dokaz. Po Lemi 6.20, dovoljno je dokazati da je granica $\partial\varphi(B)$ skup površine 0. Budući da je po Teoremu o inverznom preslikavanju φ homeomorfizam sa C na $\varphi(C)$, slijedi da je $\varphi(\partial B) = \partial\varphi(B)$. Zato je dovoljno dokazati da je $\varphi(\partial B)$ površine 0. Neka je $\varepsilon > 0$ zadan. Budući da B ima površinu, ∂B ima površinu 0, pa se može pokriti pravokutnicima $B_1, \ldots B_N$ ukupne površine manje od ε/M^2, gdje je $M = \max_{y\in B} \|\nabla\varphi(y)\|_\infty$. Prema (10.5), skup $\varphi(\partial B)$ je pokriven pravokutnicima ukupne površine manje od $M^2\varepsilon/M^2 = \varepsilon$. Dakle, $\varphi(\partial B)$ je skup površine 0. □

Ako je A invertibilan linearan operator onda i skup $A^{-1}\varphi(K)$ ima površinu po Lemi 10.14 i Korolaru 10.7. Iz (10.5) za $M = \max_{y\in K} \|A^{-1}\nabla\varphi(y)\|_\infty$ dobivamo

$$\nu(\varphi(K)) = \nu(AA^{-1}\varphi(K)) = |\det A|\nu(A^{-1}\varphi(K)) \leq |\det A|M^2\nu(K). \tag{10.6}$$

Iz pretpostavki teorema o zamjeni varibali funkcija φ je klase C^1. Jer je K kompaktan $\nabla\varphi$ je uniformno neprekidna. Stoga za dani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takva da

$$\forall z, y \in K, \qquad \|y - z\|_\infty < \delta \Longrightarrow \|\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(z)\|_\infty < \varepsilon. \tag{10.7}$$

Neka je kvadrat K podijeljen na konačno mnogo kvadrata $K_1, \ldots, K_N$, čiji se interiori međusobno ne preklapaju, sa centrima u $x_1, \ldots, x_N$ i sa stranicama manjim od $\delta > 0$. Primijenimo li na svaki od tih kvadrata (10.6), za $A = \nabla\varphi(x_i)$, i zbrojimo, dobivamo

$$\nu(\varphi(K)) = \sum_{i=1}^{N} \nu(\varphi(K_i)) \leq \sum_{i=1}^{N} |J_\varphi(x_i)| M_i^2 \nu(K_i),$$

gdje je $M_i = \max_{y \in K_i} \|\nabla\varphi(x_i)^{-1}\nabla\varphi(y)\|_\infty$. Sada iz (10.7) slijedi

$$\begin{aligned}
M_i &= \max_{y \in K_i} \|\nabla\varphi(x_i)^{-1}(\nabla\varphi(x_i) + \nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(x_i))\|_\infty \\
&\leq \max_{y \in K_i} \big(\|\nabla\varphi(x_i)^{-1}\nabla\varphi(x_i)\|_\infty + \|\nabla\varphi(x_i)^{-1}\|_\infty \|\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(x_i)\|_\infty\big) \\
&\leq 1 + \|\nabla\varphi(x_i)^{-1}\|_\infty \max_{y \in K_i} \|\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(x_i)\|_\infty < 1 + M\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdje je $M = \max_{y \in K} \|\nabla\varphi(y)^{-1}\|_\infty$. Ova ocjena vrijedi za sve $i = 1, \ldots, N$. Dakle,

$$\nu(\varphi(K)) \leq (1 + M\varepsilon)^2 \sum_{i=1}^{N} |J_\varphi(x_i)| \nu(K_i).$$

Za $\delta \to 0$, desna strana ove nejednakosti teži u $\int_K |J_\varphi|$ (po Darbouxovom teoremu (Teorem 9.1) integral je limes integralnih suma). Dakle nejednakost postaje

$$\nu(\varphi(K)) \leq (1 + M\varepsilon)^2 \int_K |J_\varphi|.$$

Kako ova nejednakost vrijedi za svaki $\varepsilon > 0$ slijedi

$$\nu(\varphi(K)) \leq \int_K |J_\varphi|.$$

Budući da je K proizvoljan kvadrat u C, slijedi da je i $\nu(\varphi(\tilde{C})) \leq \int_{\tilde{C}} |J_\varphi|$ za sve otvorene $\tilde{C} \subset C$ jer je svaki otvoreni skup u $\mathbb{R}^2$ prebrojiva unija "skoro disjunktnih" kvadrata (interiori su im disjunktni). Stoga vrijedi

$$\nu(\varphi(C)) \leq \int_C |J_\varphi|. \tag{10.8}$$

Dokažimo sada da vrijedi i suprotna nejednakost u (10.8). Iz pretpostavki Teorema o zamjeni varijabli φ je C^1 difeomorfizam. Neka je opet K kvadrat stranice $2s$ s centrom u p, tj. definiran sa $\|x - p\|_\infty \leq s$. Primjena nejednakosti srednje vrijednosti za vektorske funkcije dobivamo (kao i prije)

$$\|x - p\|_\infty \leq \|\varphi^{-1}(\varphi(x)) - \varphi^{-1}(\varphi(p))\|_\infty \leq M' \|\varphi(x) - \varphi(p)\|_\infty,$$

gdje je $M' = \max_{y \in K} \|\nabla\varphi^{-1}(\varphi(y))\|_\infty$. Stoga za slike točaka s ruba kvadrata ($\|x - p\|_\infty = s$) vrijedi

$$\|\varphi(x) - \varphi(p)\|_\infty \geq \frac{1}{M'} \|x - p\|_\infty = \frac{s}{M'}.$$

Stoga $\varphi(K)$ sadrži kvadrat oko $\varphi(p)$ stranice $\frac{2s}{M'}$, pa vrijedi

$$\nu(\varphi(K)) \geq \left(\frac{2s}{M'}\right)^2 = \frac{\nu(K)}{(M')^2}.$$

Kao u ocjeni (9.4) sada dobivamo za proizvoljni kvadrat K i regularni linearni operator A

$$\nu(\varphi(K)) = \nu(AA^{-1}\varphi(K)) = |\det A|\nu(A^{-1}\varphi(K)) \geq |\det A|\frac{\nu(K)}{(M')^2},$$

gdje je sada $M' = \max_{y\in K} \|\nabla(A^{-1}\varphi)^{-1}(A^{-1}\varphi(y))\|_\infty$. Iz teorema o inverznom preslikavanju imamo

$$\nabla(A^{-1}\varphi)^{-1} \circ (A^{-1}\varphi) = (\nabla(A^{-1}\varphi))^{-1} = (A^{-1}\nabla\varphi)^{-1} = (\nabla\varphi)^{-1}A$$

Sada proizvoljnu kocku K podijelimo na konačno kocki $K_1, \dots, K_N$, čiji se interiori međusobno ne preklapaju, sa centrima u točkama $x_1, \dots, x_N$ i sa stranicama manjim od δ (iz uniformne neprekidnosti $\nabla\varphi$ na C iz (9.5)). Na svakom kvadratu kao i prije biramo $A_i = \nabla\varphi(x_i)$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
M_i' &= \max_{y\in K_i} \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)\nabla\varphi(x_i)\|_\infty = \max_{y\in K_i} \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)(\nabla\varphi(y) + \nabla\varphi(x_i) - \nabla\varphi(y))\|_\infty \\
&\leq \max_{y\in K_i} \|\mathbf{I} + (\nabla\varphi)^{-1}(y)(\nabla\varphi(x_i) - \nabla\varphi(y))\|_\infty \leq \max_{y\in K_i}(1 + \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)(\nabla\varphi(x_i) - \nabla\varphi(y))\|_\infty) \\
&\leq 1 + \max_{y\in K_i} \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)\|_\infty \|\nabla\varphi(x_i) - \nabla\varphi(y)\|_\infty \\
&\leq 1 + \max_{y\in K} \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)\|_\infty \max_{y\in K_i} \|\nabla\varphi(x_i) - \nabla\varphi(y)\|_\infty \\
&\leq 1 + \tilde{M}\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdje je $\tilde{M} = \max_{y\in K} \|(\nabla\varphi)^{-1}(y)\|_\infty$.

Sada za kvadrat K računamo

$$\nu(\varphi(K)) = \sum_{i=1}^{N} \nu(\varphi(K_i)) \geq \sum_{i=1}^{N} |J_\varphi(x_i)|\frac{\nu(K_i)}{M_i^2}.$$

Jer je $M_i' \leq 1 + \tilde{M}\varepsilon$ vrijedi

$$\frac{1}{(M_i')^2} \geq \frac{1}{(1+\tilde{M}\varepsilon)^2}.$$

Stoga vrijedi

$$(1 + M\varepsilon)^2\nu(\varphi(K)) \geq \sum_{i=1}^{N} |J_\varphi(x_i)|\nu(K_i).$$

Za $\delta \to 0$ dobivamo

$$(1 + M\varepsilon)^2\nu(\varphi(K)) \geq \int_K |J_\varphi|.$$

Zbog proizvoljnosti ε slijedi

$$\nu(\varphi(K)) \geq \int_K |J_\varphi|.$$

Sada kao i u slučaju obratne nejednakosti ova jednakost vrijedi i za skup C. Stoga vrijedi i jednakost u (10.8).

Neka je sada $\tilde{K} \subset D$ proizvoljni otvoreni kvadrat. Onda dokazana tvrdnja za $K = \varphi^{-1}(\tilde{K})$ povlači

$$\nu(\tilde{K}) = \int_{\varphi^{-1}(\tilde{K})} |J_\varphi|,$$

pa teorem o zamjeni varijabli vrijedi za konstantnu funkciju, te primjenom Leme 10.11 dobivamo da vrijedi Teorem o zamjeni varijabli.

11 Funkcije zadane integralom

Općenito, zamjena redoslijeda dva granična procesa nije moguća. Ovdje ćemo se baviti uvjetima pod kojima se funkcija zadana integralom može derivirati. Glavni je rezultat sljedeći teorem.

Teorem 11.1 *Neka je* $f : A = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija takva da* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *postoji i neprekidna je na* A*. Neka je* $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ *zadana sa*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

Tada je F *diferencijabilna na* $[c, d]$ *i vrijedi* $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$*.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati da za svaki fiksirani y izraz

$$L(h) = \left| \frac{F(y+h) - F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \right| = \left| \int_a^b \left(\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx \right|$$

teži k 0 za $h \to 0$. Po Teoremu srednje vrijednosti,

$$\frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y')$$

za neki y' između y i $y + h$. Dakle

$$L(h) = \left| \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| dx.$$

Budući da je $\partial f / \partial y$ neprekidna na kompaktnom skupu A, ona je i uniformno neprekidna na A. Zato za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $|h| < \delta$ povlači

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

(naime, $d(y, y') < |h| < \delta$). Odavde slijedi $L(h) < \varepsilon$. Dakle doista $\lim_{h \to 0} L(h) = 0$. □

Iz Newton-Leibnizove formule znamo da je za neprekidnu funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ definiranu na intervalu I funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

primitivna funkcija za f, tj. vrijedi $F'(x) = f(x)$. Ovdje je $a \in I$ proizvoljan. Sada odmah slijedi i sljedeća varijanta: ako je

$$G(x) = \int_x^b f(t)dt = -\int_b^x f(t)dt,$$

onda je $G'(x) = -f(x)$. Kombiniranjem ovih činjenica sa Teoremom 11.1 dobivamo

Korolar 11.2 *Neka je $f : A = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da $\frac{\partial f}{\partial y}$ postoji i neprekidna je na A. Neka su $u, v : [c,d] \to [a,b]$ funkcije klase C^1. Neka je $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ zadana sa*

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx.$$

Tada je F diferencijabilna na $[c,d]$ i vrijedi

$$F'(y) = f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y) + \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Dokaz. Neka je $u = u(y)$, $v = v(y)$ i $w = y$. Tada je $F(y) = g(u,v,w) = \int_u^v f(x,w)dx$. Budući da g ima neprekidne parcijalne derivacije, g je diferencijabilna funkcija. Jasno je da su u, v, w također diferencijabilne. Slijedi da je i F, kao kompozicija diferencijabilnih funkcija, diferencijabilna, i vrijedi

$$F'(y) = \frac{\partial g}{\partial u}u'(y) + \frac{\partial g}{\partial v}v'(y) + \frac{\partial g}{\partial w}w'(y).$$

Kako je $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) = f(v(y),y)$ i $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) = -f(u(y),y)$ po Newton-Leibnizovoj formuli, a $\frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) = \int_u^v \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)dx$ po Teoremu 11.1, tvrdnja slijedi. □

Zadatak 11.3 Zadane su $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ i

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy, \qquad x > 0.$$

Dokažite da je F dva puta diferencijabilna i izračunajte $F''(x)$.

Zadatak 11.4 Neka je

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy.$$

Odredite $F'(x)$.

Zadatak 11.5 Neka je

$$F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-y^2}}dy.$$

Odredite $F'(x)$.

12 Višestruki integrali

Neka je $A \subset \mathbb{R}^n$ n-dimenzionalni kvadar, tj.

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Volumen kvadra A definira se kao $\nu(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$. Subdivizija P kvadra A je uređena n-torka $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, gdje je P_i subdivizija intervala $[a_i, b_i]$. Subdivizija P daje podjelu kvadra A na kvadre $A_{i_1,\ldots,i_n}$.

Za ograničenu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ i za subdiviziju P kvadra A definiramo donju i gornju Darbouxovu sumu:

$$s(P) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} m_{i_1,\ldots,i_n} \nu(A_{i_1,\ldots,i_n}); \qquad S(P) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} M_{i_1,\ldots,i_n} \nu(A_{i_1,\ldots,i_n}),$$

gdje su $m_{i_1,\ldots,i_n}$ i $M_{i_1,\ldots,i_n}$ infimum odnosno supremum funkcije f na kvadru $A_{i_1,\ldots,i_n}$. Budući da za bilo koju subdiviziju P kvadra A vrijedi

$$m\nu(A) \leq s(P) \leq S(P) \leq M\nu(A),$$

gdje su m i M infimum odnosno supremum funkcije f na kvadru A, skup svih donjih Darbouxovih suma ima supremum, donji integral $I_*(f)$ funkcije f na A, dok skup svih gornjih Darbouxovih suma ima infimum, gornji integral $I^*(f)$ funkcije f na A. Ako je $I_*(f) = I^*(f)$, kažemo da je f integrabilna na A i definiramo njezin integral kao

$$\int_A f = I_*(f) = I^*(f).$$

Općenito, $I_*(f) \leq I^*(f)$, zato što za bilo koje dvije subdivizije P_1, P_2 kvadra A vrijedi $s(P_1) \leq S(P_2)$. To se dokazuje promatranjem zajedničkog profinjenja subdivizija P_1 i P_2. Nadalje, funkcija f je integrabilna na A ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdivizija P kvadra A takva da je $S(P) - s(P) < \varepsilon$. Vrijedi analogon Lebesgueovog teorema: funkcija f je integrabilna na A ako i samo ako njezin skup prekida ima mjeru 0, tj. za svaki se $\varepsilon > 0$ dade pokriti s najviše prebrojivo mnogo kvadara, suma čijih volumena je manja od ε.

Vrijedi i analogon Fubinijevog teorema: ako je $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna, onda je

$$\int_A f = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_2\, dx_1.$$

Integracija se može izvesti i u bilo kojem drugom poretku. Također, pretpostavka neprekidnosti može se oslabiti i zahtijevati samo postojanje svih relevantnih integrala.

Vrijede i analogoni svih ostalih svojstava jednostrukih i dvostrukih integrala, kao linearnost, monotonost, aditivnost po području, Teorem srednje vrijednosti za integrale i Darbouxov teorem. Svi se ovi rezultati dokazuju potpuno analogno kao za dvostruki integral, pa dokaze nećemo navoditi (ali pozivamo čitaoce da razmisle i uvjere se da sve funkcionira na jednak način). Vrijedi i Teorem o zamjeni varijabli, s tim da ima nešto više posla za dokazati analogon osnovne Leme 10.6. Na primjer, za tri varijable, slika kvadra A po linearnom operatoru L je paralelepiped, čiji je volumen dan mješovitim produktom vektora $(b_1 - a_1)L(e_1)$, $(b_2 - a_2)L(e_2)$ i $(b_3 - a_3)L(e_3)$. Direktnim računom se provjerava da je $(Le_1 \,|\, Le_2 \times Le_3) = \det L$, odakle tvrdnja leme odmah slijedi. Za više od tri varijable, dokaz je složeniji jer nemamo formulu za volumen paralelepipeda.

Napokon, spomenimo dva glavna primjera zamjene varijabli u slučaju $n = 3$, cilindrične i sferičke koordinate. Lako se vidi da je Jacobian u slučaju cilindričnih koordinata jednak r, kao i za polarne koordinate, dok je Jacobian za sferičke koordinate jednak $\rho^2 \sin\phi$.

13 Integrali vektorskih funkcija

Pojam integrala i integrabilnosti lako proširujemo i na vektorske funkcije preko komponentnih funkcija.

Definicija 13.1 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m) : C \to \mathbb{R}^m$ ograničena. $\boldsymbol{F}$ je integrabilna ako su komponentne funkcije F_i, $i = 1, \ldots, m$ integrabilne na C. Tada definiramo*

$$\int_C \boldsymbol{F} := (\int_C F_1, \ldots, \int_C F_m).$$

U slučaju $n = 1$, tj. vektorske funkcije realne varijable $\boldsymbol{F} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ (lako se pokaže iz svojstva komponentnih funkcija) vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a),$$

te dvije formule parcijalne integracije

$$\int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}' = \boldsymbol{F}(b) \cdot \boldsymbol{G}(b) - \boldsymbol{F}(a) \cdot \boldsymbol{G}(a) - \int_a^b \boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{G},$$
$$\int_a^b h\boldsymbol{F}' = h(b)\boldsymbol{F}(b) - h(a)\boldsymbol{F}(a) - \int_a^b h'\boldsymbol{F},$$

za $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m), h \in C^1([a, b])$.

Svojstvo monotonosti integrala vektorske funkcije glasi:

Lema 13.2 *Neka je $C \subset \mathbb{R}^n$ ograničen skup i $\boldsymbol{F} : C \to \mathbb{R}^m$ integrabilna funkcija. Tada je*

$$\left\| \int_C \boldsymbol{F} \right\| \leq \int_C \|\boldsymbol{F}\|.$$

Dokaz. Jer je $\boldsymbol{F}$ integrabilna, prema definiciji su F_i, $i = 1, \ldots, m$ integrabilne na C. Prema Lebesgueovom teoremu slijedi da su $\tilde{F}_i$, $i = 1, \ldots, m$ (proširenje nulom na pravokutnik $A \supseteq C$) neprekidne osim na skupu mjere 0. Stoga je i funkcija $\|\boldsymbol{F}\|$ neprekidna osim na skupu mjere nula, a onda, opet prema Lebesgueovom teoremu, i integrabilna, pa desna strana u gornjoj formuli ima smisla.

Označimo $\boldsymbol{I} = \int_C \boldsymbol{F}$. Ako je $\|\boldsymbol{I}\| = 0$ nejednakost očito vrijedi. Stoga u nastavku pretpostavljamo $\|\boldsymbol{I}\| \neq 0$. Vrijedi

$$\|\boldsymbol{I}\|^2 = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I} \cdot \int_C \boldsymbol{F} = \int_C \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{F} \leq \int_C \|I\| \|\boldsymbol{F}\| = \|\boldsymbol{I}\| \int_C \|\boldsymbol{F}\|.$$

Dijeljenjem s $\|\boldsymbol{I}\|$ slijedi nejednakost iz tvrdnje. $\square$

14 Krivulje u $\mathbb{R}^n$

U nastavku kolegija proučavamo integrale po krivuljama i plohama. U prethodnom kolegiju definirali smo pojmove

- puta,
- parametrizirane krivulje,
- traga parametrizirane krivulje,
- regularne parametrizirane krivulje,
- parametarske transformacije parametrizirane krivulje,
- reparametrizacije parametarske transformacije,
- krivulje i traga krivulje,
- čuvanja orijentacije parametarske transformcije,
- orijentirane krivulje.

Sada ćemo ponoviti te pojmove.

Definicija 14.1 *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.* ***Put*** *u $\mathbb{R}^n$ je svako preslikavanje $\gamma \in C([a,b]; \mathbb{R}^n)$.*

Definicija 14.2 *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.* ***Parametrizirana krivulja*** *u $\mathbb{R}^n$ je $\gamma \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Ako je $I = [a,b]$ onda ćemo parametriziranu krivulju zvati i* ***gladak put****.*

Definicija 14.3 ***Trag*** *parametrizirane krivulje $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ je skup $\gamma^* := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$. Tada kažemo da je γ^* parametriziran s γ, odnosno da je γ njegova parametrizacija.*

U nastavku želimo definirati duljinu puta $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Neka je P subdivizija segmenta $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b.$$

Definirajmo

$$|P| = \max_{j=1,\ldots,k} (t_j - t_{j-1}).$$

Subdivizija P određuje po dijelovima afinu parametriziranu krivulju određenu uzastopnim točkama $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$. Duljinu tog po dijelovima linearnog puta (parametrizirane krivulje) lako izrazimo pomoću

$$\ell(\gamma, P) := \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

To nas motivira za narednu definiciju.

Definicija 14.4 ***Duljina puta*** *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, u oznaci $\ell(\gamma)$, dana je s*

$$\ell(\gamma) := \lim_{|P| \to 0} \ell(\gamma, P), \tag{14.1}$$

ako gornji limes postoji, u smislu da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|P| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\ell(\gamma) - \ell(\gamma, P)| < \varepsilon.$$

Pokazuje se da ovaj limes za parametrizirane krivulje definirane na segmentu $[a, b]$ uvijek postoji i da se lako računa (tu je bitna pretpostavka neprekidnosti derivacije γ'):

Teorem 14.5 *Za svaku parametriziranu krivulju $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ postoji $\ell(\gamma)$ te vrijedi*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt. \tag{14.2}$$

Napomena 14.6 O putovima možemo razmišljati kao o gibanju čestice, pri čemu je $\gamma(t)$ položaj čestice u trenutku t. Onda je $\gamma'(t)$ vektor brzine čestice, a $\|\gamma'(t)\|$ iznos brzine kojom se čestica giba. Onda gornja formula kaže da je put koji prevali čestica jednak integralu iznosa brzine po vremenu. U slučaju $n = 1$ to je jednostavna poslijedica Newton-Leibnizove formule.

Dokaz. Prema definiciji je

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1}))^2 \right)^{1/2}.$$

Primijenimo li Teorem srednje vrijednosti (za skalarnu funkciju) slijedi da postoje $t_j^i \in [t_{j-1}, t_j]$ takvi da vrijedi

$$\gamma_i(t_j) - \gamma_i(t_{j-1}) = \gamma_i'(t_j^i)(t_j - t_{j-1}), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Stoga je

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t_j^i)^2 \right)^{1/2} (t_j - t_{j-1}). \tag{14.3}$$

Kad bi svi $t_j^i, i = 1, \ldots, n$ bili isti $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$ onda bi

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j^*)\|(t_j - t_{j-1})$$

bila integralna suma za integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, pa bi Darbouxovom teoremu (analogonu Teorema 9.1) slijedilo da vrijedi (14.2). U ostatku dokaza zapravo pokazujemo da je (14.3) proizvoljno blizu jednoj integralnoj sumi.

Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $F : [a, b]^n \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(x_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Jer je γ gladak put funkcija F je neprekidna na $[a, b]^n$, pa onda i uniformno neprekidna. Stoga postoji $\delta_1 > 0$ takav da vrijedi

$$\forall x, y \in [a, b]^n, \|x - y\|_\infty < \delta_1 \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}.$$

Sada uspoređujemo

$$\begin{aligned}\ell(\gamma, P) &= \sum_{j=1}^{k} F(t_j^1, t_j^2, \ldots, t_j^n)(t_j - t_{j-1}),\\ \sigma(\|\gamma'\|, P) &= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) = \sum_{j=1}^{k} F(t_j, \ldots, t_j)(t_j - t_{j-1}).\end{aligned}$$

Ako je $|P| < \delta_1$ slijedi

$$|\ell(\gamma, P) - \sigma(\|\gamma'\|, P)| \leq \sum_{j=1}^{k} |F(t_j^1, t_j^2, \ldots, t_j^n) - F(t_j, \ldots, t_j)|(t_j - t_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

S druge strane iz Darbouxovog teorema (varijante Teorema 9.1 u dimenziji 1) slijedi da za odabrani $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_2 > 0$ takav da ako je $|P| < \delta_2$ slijedi

$$\left| \sigma(\|\gamma'\|, P) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sada za $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ i $|P| < \delta$ slijedi

$$\left| \ell(\gamma, P) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \left| \ell(\gamma, P) - \sigma(\|\gamma'\|, P) \right| + \left| \sigma(\|\gamma'\|, P) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

što povlači da limes u (14.1) postoji i jednak je integralu u (14.2). □

Primjer 14.7 Za funkciju $f \in C^1([a, b])$, graf je slika parametrizirane krivulje $\gamma(x) = (x, f(x))$, $x \in [a, b]$. Stoga je njegova duljina dana sa

$$\ell = \int_a^b \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx.$$

Definicija 14.8 *Za parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***regularna*** *ako vrijedi $\gamma'(t) \neq 0$ za sve $t \in I$. U tom slučaju za $t_0 \in I$ vektor $\gamma'(t_0)$ nazivamo* ***vektor brzine*** *ili* ***tangencijalni vektor*** *od γ u trenutku t_0, a njegovu normu $\|\gamma'(t_0)\|$ zovemo* ***brzina*** *od γ u trenutku t_0. Pravac*

$$\{\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) : \ t \in \mathbb{R}\}$$

se zove ***tangenta*** *na γ kroz točku $\gamma(t_0)$.*

Definicija 14.9 *Za regularnu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***jedinične brzine*** *ili da je* ***parametrizirana duljinom luka*** *ako je $\|\gamma'(t)\| = 1$ za sve $t \in I$.*

Primjer 14.10 Posebno je jednostavno računati duljinu glatkog puta $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ koji je **jedinične brzine**, tj. takav da je

$$\|\gamma'(t)\| = 1, \qquad t \in [a, b].$$

Naime, za njega je $\ell(\gamma) = b - a$.

Definicija 14.11 *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizirana krivulja.* ***Parametarska transformacija*** *od γ je C^1-difeomorfizam $\varphi : J \to I$, gdje je $J \subset \mathbb{R}$ neki drugi interval. Za parametriziranu krivulju $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***reparametrizacija*** *od γ.*

Na Diferencijalnom računu dokazali smo da vrijedi naredni teorem.

Teorem 14.12 *Svaku regularnu parametriziranu krivulju možemo reparametrizirati duljinom luka.*

Za regularan gladak put $\gamma \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ reparametrizacija se dobiva kao $\gamma \circ \varphi$, gdje je φ inverzna funkcija od $\psi : I \to \mathbb{R}$ definirane sa

$$\psi(s) := \int_{t_0}^{s} \|\gamma'(t)\| \, dt,$$

gdje je $t_0 \in I$ fiksiran. Funkcija ψ se obično zove **funkcija duljine luka** od γ od točke $\gamma(t_0)$.

Sad se prirodno nameće pitanje duljine puta za dva glatka puta $\alpha \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ i $\beta \in C^1([c,d],\mathbb{R}^n)$ sa svojstvom da imaju iste "početne" točke $\alpha(a) = \beta(c)$, "završne" točke $\alpha(b) = \beta(d)$ i prolaze kroz iste međutočke. Znamo da duljine puteva postoje, no jesu li jednake? Za odgovor na to pitanje definiramo pojam ekvivalencije puteva.

Definicija 14.13 *Parametrizirana krivulja $\alpha \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ je* ***ekvivalentna*** *parametriziranoj krivulji $\beta \in C^1(J,\mathbb{R}^n)$ ako je α reparametrizacija od β, tj. postoji C^1–difeomorfizam $\varphi \in C^1(I,J)$, takav da je*

$$\alpha = \beta \circ \varphi.$$

Zadatak 14.14 Pokažite da je relacija "biti ekvivalentan" relacija ekvivalencije na skupu svih parametriziranih krivulja u $\mathbb{R}^n$.

Pokažite također da ako su α i β ekvivalentne, da je tada α regularna ako i samo ako je β regularna.

Uvrštavanjem $f \equiv 1$ u naredni teorem dobivamo odgovor na naše pitanje.

Teorem 14.15 *Neka su $\alpha \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ i $\beta \in C^1([c,d],\mathbb{R}^n)$ dva ekvivalentna glatka puta i f neprekidna realna funkcija definirana na tragu od α (odnosno β). Tada vrijedi*

$$\int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_c^d f(\beta(t))\|\beta'(t)\|dt.$$

Dokaz. Kako je su α i β ekvivalentne, postoji C^1–difeomorfizam $\varphi \in C^1([a,b],[c,d])$. Stoga je $\varphi'(t) \neq 0$ za sve $t \in [a,b]$. Pretpostavimo sada da je $\varphi'(t) > 0$ za sve $t \in [a,b]$. Koristeći definiciju ekvivalencije, te supstituciju $u = \varphi(t)$ slijedi

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt &= \int_a^b f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\varphi'(t)\|dt = \int_a^b f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt \\
&= \int_c^d f(\beta(u))\|\beta'(u)\|du.
\end{aligned}$$

Ukoliko je $\varphi'(t) < 0$ za sve $t \in [a, b]$ ponavljamo račun

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt &= \int_a^b f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\varphi'(t)\|dt = -\int_a^b f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt \\
&= -\int_a^b f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt = \int_b^a f(\beta(\varphi(t)))\|\beta'(\varphi(t))\|\varphi'(t)dt \\
&= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(\beta(u))\|\beta'(u)\|du = \int_c^d f(\beta(u))\|\beta'(u)\|du,
\end{aligned}$$

jer je sada $\varphi(a) = d$ i $\varphi(b) = c$. □

Korolar 14.16 *Neka su $\alpha \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ i $\beta \in C^1([c, d], \mathbb{R}^n)$ dvije ekvivalentne parametrizirane krivulje. Tada im je duljina jednaka, tj. $\ell(\alpha) = \ell(\beta)$.*

Definicija 14.17 ***Krivulja*** *je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja. Elemente klase nazivamo* ***parametrizacijom*** *krivulje.* ***Trag krivulje*** *definiramo kao trag bilo koje njene regularne parametrizacije.*

Korolar 14.16 nam opravdava da možemo govoriti o duljini krivulja, a ne samo o duljini parametriziranih krivulja. Naime, duljina ne ovisi o izboru konkretne parametrizacije iz klase, pa ni naredna definicija ne ovisi o izboru predstavnika klase.

Definicija 14.18 *Neka je C krivulja i γ jedna njena parametrizacija. Ako γ ima duljinu, tada definiramo*

$$\ell(C) := \ell(\gamma).$$

15 Integral prve vrste duž glatkog puta

U Teoremu 14.15 pojavio nam se integral realne (skalarne) funkcije duž glatkog puta.

Napomena 15.1 Neka je $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gladak put. Zamislimo da je slika tog puta $\gamma([a,b])$ žica čija je gustoća na mjestu $\gamma(t)$ dana sa $f(\gamma(t))$. Neka je P particija od $[a,b]$ dana točkama $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Tada na sumu

$$m(f,\gamma,P) = \sum_{j=1}^{k} f(\gamma(t_j))\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$$

možmo gledati, kao u slučaju duljine puta, kao na aproksimaciju mase žice. Sličnim razmatranjima kao u Teoremu 14.5 možemo pokazati da je za gladak put

$$\lim_{|P|\to 0} m(f,\gamma,P) = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Isti integral možemo interpretirati kao površinu ispod grafa funkcije f definirane na slici puta $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2)$.

slika

Definicija 15.2 *Neka je $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gladak put, a $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ neprekidna. Tada broj*

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$$

*nazivamo **integralom realne funkcije f duž glatkog puta** γ ili **integralom prve vrste duž glatkog puta** γ.*

Iz Teorema 14.15 slijedi da integral prve vrste duž puta ne mijenja vrijednost na ekvivalentnom putu. Specijalno, za regularan gladak put $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ postoji ekvivalentan put $\hat{\gamma} \in C^1([0,L],\mathbb{R}^n)$, pa za njega vrijedi

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_0^L f(\hat{\gamma}(s))ds,$$

što motivira oznaku

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Povijesno oznaka dolazi od jednakosti

$$ds = \|\gamma'(t)\|dt$$

za duljinu "infinitezimalnog" dijela puta koji je slika "infinitezimalnog" intervala $[t, t+dt]$. Vrlo brzo ćemo dati matematičko značenje ovom (mističnom) izrazu.

Ponovno, Teorem 14.15 nam omogućava da proširimo pojam integrala prve vrste i na krivulje.

Definicija 15.3 *Neka je C krivulja i $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ jedna njena parametrizacija, a $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ neprekidna. Tada broj*

$$\int_C f ds := \int_\gamma f ds$$

*nazivamo **integralom realne funkcije f duž krivulje** C ili **krivuljni integral prve vrste duž krivulje** C.*

16 Integral druge vrste duž puta i diferencijalne 1-forme

Neka je $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gladak put. Interpretirajmo $\gamma(t)$ kao položaj čestice u $\mathbb{R}^n$. Neka se ta čestica giba pod djelovanjem neprekidne sile $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Neka je P subdivizija od $[a,b]$ dana točkama $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Za konstantnu silu $\boldsymbol{F}$ rad te sile pri premještanju čestice od $\gamma(t_{j-1})$ do $\gamma(t_j)$ dan je sa $\boldsymbol{F} \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$. Stoga će izraz

$$W(\gamma, \boldsymbol{F}, P) = \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{F}(\gamma(t_j)) \cdot (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))$$

biti aproksimacija rada sile $\boldsymbol{F}$ na putu γ. Sličnim argumentom kao kod definicije duljine puta zaključujemo

$$\lim_{|P|\to 0} W(\gamma, \boldsymbol{F}, P) = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Stoga definiramo rad sile $\boldsymbol{F}$ pri pomicanju čestice duž puta γ sa

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt. \tag{16.1}$$

Iz (16.1) slijedi da su nam od interesa i ovakvi integrali. Stoga definiramo

Definicija 16.1 *Neka je $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ gladak put i $\boldsymbol{F} : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ neprekidna. Tada broj*

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

nazivamo ***integral vektorske funkcije (polja) F duž glatkog puta*** *γ ili* ***integral druge vrste duž glatkog puta****.*

Napomena 16.2 Za regularne injektivne glatke putove je jedinični tangencijalni vektor u točki $\gamma(t)$ na putu γ dan sa

$$\boldsymbol{T}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Stoga slijedi

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \boldsymbol{T}(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds,$$

gdje je poslijednji integral zapravo integral prve vrste duž puta γ.

Po komponentama integral druge vrste duž puta možemo zapisati sa

$$\int_a^b \big(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\big)\,dt.$$

Ukoliko su koordinatne funkcije označene sa $\gamma = (x_1, \ldots, x_n)$ slijedi

$$\int_a^b \left(F_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots + F_n \frac{dx_n}{dt}\right) dt$$

Uobičajene pokrate su i

$$\int_\gamma F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n, \qquad \int_\gamma \boldsymbol{F} d\gamma,$$

tj.

$$\int_\gamma F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \tag{16.2}$$

U nastavku dajemo interpretaciju ove formule koja će biti važna za uvođenje integrala po plohama.

Definicija 16.3 *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$. Svako preslikavanje*

$$\omega : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

nazivamo ***linearna diferencijalna forma*** *ili* ***diferencijalna 1-forma*** *na U.*

Za svaki $x \in U$ po definiciji je $\omega(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ linearan funkcional. Stoga po Rieszovom teoremu o reprezentaciji ograničenih linearnih funkcionala slijedi da postoji i jedinstven je vektor $\boldsymbol{a}(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$\omega(x)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(x) \cdot \boldsymbol{v} = a_1(x)v_1 + \cdots + a_n(x)v_n = a_1(x)\pi_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_n(x)\pi_n(\boldsymbol{v}),$$

gdje smo sa π_i označili projekciju na i-tu koordinatnu os ($\pi_i(\boldsymbol{v}) = v_i$). Komponente vektora $\boldsymbol{a}(x)$, tj. $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ nazivamo koeficijenti forme. Koristimo li oznaku $\pi_i = dx_i$ za ovu projekciju slijedi da je

$$\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n, \qquad x \in U,$$

odnosno

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n.$$

Time smo dokazali narednu propoziciju

Propozicija 16.4 *Neka je ω diferencijalna 1-forma na U. Tada postoji i jedinstvena je funkcija $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) : U \to \mathbb{R}^n$ takva da je*

$$\omega(x) = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n, \qquad x \in U.$$

Definicija 16.5 *Diferencijalna 1-forma $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ je* ***neprekidna (diferencijabilna, klase*** *C^1) na U ako je* ***a*** *neprekidna (diferencijabilna, klase C^1).*

Definicija 16.6 *Neka je ω neprekdna diferencijalna 1-forma na $U \subset \mathbb{R}^n$ i $\gamma \in C^1([a,b], U)$ gladak put. Definiramo integral diferencijalne forme ω duž puta γ sa*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Za diferencijalnu 1-formu $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ iz definicije slijedi

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b (a_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + a_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)) dt = \int_\gamma \boldsymbol{a} d\gamma,$$

pa je integral diferencijalne 1-forme ω duž puta γ zapravo integral vektorske funkcije koeficijenata $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ duž puta γ.

Lema 16.7 *Neka su $\alpha \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ i $\beta \in C^1([c,d],\mathbb{R}^n)$ glatki putevi za koje postoji $\varphi \in C^1([a,b],[c,d])$ takva da je $\varphi(a) = c, \varphi(b) = d$ i $\alpha = \beta \circ \varphi$, te neka je ω neprekidna diferencijalna 1-forma. Tada je*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Dokaz. Jednostavnim računom slijedi

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \omega(\alpha(t))\alpha'(t)dt = \int_a^b \omega(\beta \circ \varphi(t))\beta'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_c^d \omega(\beta(u))\beta'(u)du,$$

uz supstituciju $u = \varphi(t)$. □

Primjer 16.8 Neka je ω diferencijalna 1-forma na $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dana formulom

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Za 1-formu ω kažemo da je **kutna forma**. Neka je $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dan sa

$$\alpha(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t).$$

Slijedi

$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 \frac{-\sin \pi t(-\pi \sin \pi t) + \cos \pi t(\pi \cos \pi t)}{\cos^2(\pi t) + \sin^2 \pi t} dt = \int_0^1 \pi dt = \pi.$$

Neka je $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dan sa

$$\beta(t) = (\cos \pi t, -\sin \pi t).$$

Slijedi

$$\int_\beta \omega = \int_0^1 \frac{\sin \pi t(-\pi \sin \pi t) + \cos \pi t(-\pi \cos \pi t)}{\cos^2(\pi t) + \sin^2 \pi t} dt = \int_0^1 -\pi dt = -\pi.$$

slika

Neka je $f : U \to \mathbb{R}$ klase C^1. Tada je $\mathrm{D}f \in C(U, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$, tj. neprekidna diferencijalna 1-forma! Stoga u nastavku za diferencijal funkcije f koristimo i oznaku df. Koeficijente forme lako dobivamo iz djelovanja diferencijala

$$\mathrm{D}f\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x_1}v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}v_n,$$

pa je

$$df = \mathrm{D}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Primjer 16.9 Neka je $U_0 = \langle 0, +\infty\rangle \times \mathbb{R}$ i $\theta_0 : U_0 \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$\theta_0(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Ova funkcija mjeri kut koji radijvektor točke (x, y) zatvara s pozitivnim dijelom x osi. Lako je vidjeti da je

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial\theta_0}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

pa je na U

$$d\theta_0 = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Stoga se $d\theta_0$ podudara na domeni U_0 s diferencijalnom 1-formom ω iz prošlog primjera. Funkciju θ_0 možemo proširiti do glatke funkcije na $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0) : x \leq 0\}$ formulom

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}, & y > 0 \\ \operatorname{arcctg} \frac{x}{y} - \pi, & y < 0 \end{cases},$$

za koju je $d\theta$ jednako ω na domeni U.

No, θ ne možemo proširiti do neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ gdje je ω definirana. Iz narednog teorema bit će jasno da ω nije diferencijal niti jedne diferencijabilne funkcije.

Za $f \in C^1([a, b])$ Newton-Leibnizova formula glasi

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

$f'(t)dt$ je zapravo diferencijal funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki t, a $dt : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je identiteta. Ako je $\gamma : [a, b] \to [a, b]$ također identiteta slijedi da Newton-Leibnizovu formulu možemo zapisati i sa

$$\int_\gamma df = \int_a^b df(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Generalizacija ove formule je dana u narednom teoremu.

Teorem 16.10 *Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ i $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ gladak put. Tada vrijedi*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dokaz. Iz definicije integrala diferencijalne 1-forme po putu slijedi

$$\begin{aligned} \int_\gamma df &= \int_a^b df(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \mathrm{D}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Korolar 16.11 *Neka je U otvoren, $\omega = df$ za neku $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ i α i β dva puta s istim ishodišnim i krajnjim točkama. Tada je*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega.$$

Definicija 16.12 *Za diferencijalnu 1-formu ω koja je oblika $\omega = df$ za neku C^1-funkciju f kažemo da je* ***egzaktna****.*

Teorem 16.10 i Korolar 16.11 onda možemo iskazati sa: integral egzaktne forme ovisi samo o krajnjim točkama puta. Također, lako se vidi i da je integral egzaktne forme po zatvorenom putu ($\gamma(a) = \gamma(b)$) jednak nuli.

Primjer 16.13 Sada vidimo da rezultat

$$\int_\alpha \omega \neq \int_\beta \omega$$

u Primjeru 16.8 povlači da ω nije diferencijal niti jedne C^1 funkcije definirane na $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Napomena 16.14 Neka je $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren, $\boldsymbol{F} : U \to \mathbb{R}^n$, te $\gamma \in C^1([a,b], U)$ gladak put. Kako je integral vektorske funkcije koeficijenata $\boldsymbol{F}$ duž puta γ zapravo integral diferencijalne 1-forme ω s koeficijentima $\boldsymbol{a}$ duž puta γ zaključujemo da ako je $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f$ za neku $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ slijedi da vrijedi

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Motivacija za integral vektorske funkcije duž puta nam je rad sile $\boldsymbol{F}$ duž puta γ. Silu koja je diferencijal, $\boldsymbol{F} = \mathrm{D}f$, za C^1 funkciju f, nazivamo konzervativna (f nazivamo potencijal). Stoga zaključujemo da rad konzervativne sile $\boldsymbol{F}$ duž puta γ ovisi samo o krajnjim točkama puta, te da vrijedi

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

pa je rad zapravo razlika potencijala u krajnjim točkama puta.

Primjer 16.15 Neka je $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ dana s

$$\gamma(t) = (-\cos \pi t, \sin \pi t).$$

Za kutnu formu ω iz Primjera 16.8 slijedi

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \frac{-\sin \pi t(\pi \sin \pi t) + (-\cos \pi t)(\pi \cos \pi t)}{\cos^2(\pi t) + \sin^2 \pi t} dt = -\int_0^1 \pi dt = -\pi.$$

Sada vidimo da je, za α kao u Primjeru 16.8,

$$\int_\gamma \omega = -\int_\alpha \omega,$$

pri čemu su α i γ ekvivalentne parametrizirane krivulje. Stoga zaključujemo da definiciju integrala diferencijalne 1-forme, tj. integrala druge vrste duž glatkog puta, ne možemo proširiti do integrala po krivulji jer će integral ovisiti o orijentaciji.

Definicija 16.16 - *Za parametarsku transformaciju $\varphi : J \to I$ kažemo da* ***čuva orijentaciju*** *ako je $\varphi'(t) > 0$ za sve $t \in J$. Ako je $\varphi'(t) < 0$ za sve $t \in J$ kažemo da φ* ***mijenja orijentaciju****.*

- *Za regularnu parametriziranu krivulju γ i njenu reparametrizaciju $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ kažemo da su* ***iste orijentacije*** *ako φ čuva orijentaciju. U suprotnom kažemo da su γ i $\tilde{\gamma}$* ***suprotne orijentacije****.*

Definicija 16.17 *Parametrizirana krivulja $\alpha \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ je* ***orijentirano ekvivalentna*** *parametriziranoj krivulji $\beta \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ ako je α reparametrizacija od β iste orijentacije, tj. postoji C^1–difeomorfizam $\varphi \in C^1(I, J)$, takav da je*

$$\alpha = \beta \circ \varphi$$

i vrijedi $\varphi'(t) > 0$ za sve $t \in I$.

Zadatak 16.18 Pokažite da je relacija "biti orijentirano ekvivalentan" relacija ekvivalencije na parametarskim krivuljama u $\mathbb{R}^n$.

Definicija 16.19 ***Orijentirana krivulja*** *je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja s obzirom na relaciju "biti orijentirano ekvivalentan".*

Napomena 16.20 Skup svih parametrizacija krivulje C (tj. klasa ekvivalentnih parametarskih krivulja) relacija "biti orijentirano ekvivalentan" dijeli na dva skupa, onih parametrizacija koje su međusobno iste orijentacije.

Orijentiranu glatku krivulju označavati ćemo s (C, γ), gdje je γ jedna parametrizacija krivulje C jer ona jedinstveno određuje orijentaciju.

Definicija 16.21 *Pretpostavimo da su α i β dvije parametrizacije glatke krivulje C. Ako α i β generiraju istu orijentaciju onda pišemo $(C, \alpha) = (C, \beta)$, a ako definiraju suprotnu orijentaciju pišemo $(C, \alpha) = -(C, \beta)$.*

Napomena 16.22 Neka je (C, γ) orijentirana glatka krivulja, gdje je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ put. Jedan put sa suprotnom orijentacijom od γ dan je s

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t).$$

Onda su (C, γ) i $(C, \tilde{\gamma})$ krivulje suprotne orijentacije, tj. $(C, \tilde{\gamma}) = -(C, \gamma)$. Lako se vidi da vrijedi

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

(Provjerite!)

Napomena 16.23 Za orijentiranu glatku regularnu krivulju (C, γ) u $\mathbb{R}^n$ takvu da je $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ injektivan definiramo formu duljine luka

$$ds(\gamma(t))\boldsymbol{v} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \boldsymbol{v}.$$

Sada vrijedi

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) ds(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt,$$

što opravdava uvriježenu notaciju $ds = \|\gamma'(t)\| dt$.

Definicija 16.24 *Neka je* (C, γ) *orijentirana krivulja u* $\mathbb{R}^n$ *i* $F : \gamma^* \to \mathbb{R}^n$ *neprekidna. Tada broj*

$$\int_{(C,\gamma)} \boldsymbol{F} = \int_{\gamma} \boldsymbol{F} d\gamma,$$

nazivamo ***integral funkcije*** F ***duž orijentirane krivulje*** (C, γ) *ili* ***krivuljni integral druge vrste****.*

Definicija 16.25 *Neka je* (C, γ) *orijentirana krivulja u* $\mathbb{R}^n$ *i* $\omega : \gamma^* \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*, neprekidna diferencijalna 1-forma. Tada broj*

$$\int_{(C,\gamma)} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

integral diferencijalne 1-forme duž orijentirane krivulje (C, γ)*.*

Napomena 16.26 Prema Lemi 16.7 prethodne dvije definicije su dobre, tj. da ne ovise o izboru parametrizacije koja je iste orijentacije kao γ.

17 Greenov teorem

Napomena 17.1 *Od sada pa nadalje pod (orijentiranom) krivuljom ćemo podrazumijevati (orijentiranu) krivulju čija je neka (pa onda i svaka) parametrizacija put, tj. domena joj je segment.*

Zapišimo ponovo Newton-Leibnizovu formulu za $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Ako shvatimo interval $I = [a,b]$ kao sliku glatkog puta danog identitetom, za integral na lijevoj strani jednakosti možemo pisati $\int_I df$, kao integral diferencijalne 1-forme.

Na desnoj strani pojavljuju nam se samo rubne točke, tj. točke iz ∂I. Stoga desnu stranu možemo inerpretirati kao 0-dimenzionalni integral funkcije f (odnosno diferencijalne 0-forme) po ∂I, s tim da razlikujemo b kao pozitivnu točku, a a kao negativnu.

Stoga uz ovakvu interpretaciju Newton-Leibnizovu formulu možemo zapisati i sa

$$\int_I df = \int_{\partial I} f. \tag{17.1}$$

Greenov teorem je 2-dimenzionalna generalizacija Newton-Leibnizove formule (17.1).

Za njegovu formulaciju treba nam pojam diferencijala diferencijalne 1-forme. Neka je

$$\omega = Pdx + Qdy$$

C^1 diferencijalna 1-forma. Definiramo njen diferencijal sa

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

I lijeva i desna strana jednakosti su nam za sada samo oznake objekata. Kasnije ćemo pokazati da se zapravo radi o diferencijalnim 2-formama. Za sada je to samo izraz oblika $mdxdy$, pri čemu je m realna funkcija dviju varijabli.

Ono što će u nastavku biti važno za Greenov teorem je kako integriramo diferencijalnu 2-formu $\mu = mdxdy$ ($m \in C(D,\mathbb{R})$) po povezanom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_D \mu := \int_D m = \int_D m(x,y)dxdy;$$

izraz na desnoj strani je integral realne funkcije m po skupu D.

Iskažimo sad neformalno Greenov teorem:

> *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ "dovoljno dobar" s rubom ∂D koji se sastoji od konačno mnogo "kontura", od kojih je svaka "pozitivno orijentirana" u odnosu na D. Ako je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna 1-forma klase C^1 definirana na D, tada je*
>
> $$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$
>
> *tj.*
>
> $$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy.$$

Primijetite sličnost ove formule i (17.1).
Kasnije ćemo još poopćiti tu formulu u Stokesovom teoremu.
Iskaz je vrlo neformalan jer još nismo definirali

- što znači "dovoljno dobar" skup,
- što je "kontura",
- što znači da su rubne kontura "pozitivno orijentirane u odnosu na D".

Primjer skupa $D \subset \mathbb{R}^2$ za koji bismo željeli da vrijedi Greenov teorem je pravokutnik. Njegov rub ne možemo dobiti kao sliku regularnog glatkog puta. Nadalje, primijetimo da rub možemo obići u dva smjera (jediničnu tangentu u svakoj točki, osim uglovima, možemo izabrati na točno dva načina).

Definicija 17.2 1° *Za put $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ kažemo da je* ***po dijelovima gladak*** *ako postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takve da su restrikcije $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$, $j = 1, \ldots, k$ glatki putevi.*

2° *Po dijelovima gladak put $\gamma \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$ je* ***regularan*** *ako ako postoje točke $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ takve da su restrikcije $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1},t_j]}$, $j = 1, \ldots, k$ regularni glatki putevi.*

3° *Neka je ω neprekidna diferencijalna 1-forma na $U \subset \mathbb{R}^2$ i $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^2)$ regularan po dijelovima gladak put čija je slika u U. Definiramo*

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma^i} \omega.$$

Primijetite da zbog svojstva integrala

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

slijedi da definicija integrala ne ovisi o subdiviziji P.

Time smo proširili definiciju integrala na regularne po djelovima glatke puteve.

U iskazu Greenovog teorema javlja nam se integral diferencijalne 1-forme, ali ne po putu, već po krivulji ruba "dovoljno dobrog" skupa.

Definicija 17.3 ***Po dijelovima glatka krivulja*** *je klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju "biti ekvivalentan"k na skupu regularnih po djelovima glatkih puteva.*

Orijentirana po dijelovima glatka krivulja *je klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju "biti orijentirano ekvivalentan" kao u Definiciji 16.19 na skupu regularnih po djelovima glatkih puteva.*

Napomena 17.4 *Neka su α i β dvije parametrziacije po dijelovima glatke krivulje C. Analogno kao u Definiciji 16.21, pišemo $(C, \alpha) = (C, \beta)$ ako α i β generiraju istu orijentaciju, odnosno $(C, \alpha) = -(C, \beta)$ ako α i β definiraju suprotnu orijentaciju.*

Definicija 17.5 *Neka je (C,γ) orijentirana po dijelovima glatka krivulja u $\mathbb{R}^n$ i $\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ neprekidna diferencijalna 1-forma definirana na tragu od γ. Definiramo*

$$\int_{(C,\gamma)} \omega = \int_\gamma \omega$$

i zovemo ***integralom diferencijalne 1-forme duž orijentirane po dijelovima glatke krivulje*** *(C,γ). Taj integral još nazivamo i* ***integral vektorske funkcije (polja) $\boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_n)$ duž C*** *ili* ***krivuljni integral druge vrste****.*

Zadatak 17.6 Dokažite da je definicija integrala duž orijentirane po dijelovima glatke krivulje dobra, tj. da ne ovisi o izboru parametrizacije koja je iste orijentacije kao γ. Nadalje, ako su α i β dvije parametrizacije od C suprotnih orijentacija, pokažite sami da vrijedi

$$\int_{(C,\alpha)} \omega = -\int_{(C,\beta)} \omega.$$

Na sličan način može se proširiti i definicija krivuljnog integrala prve vrste na po dijelovima glatke krivulje.

Definicija 17.7 *Za krivulju C kažemo da je* ***jednostavno zatvorena krivulja*** *(ili* ***Jordanova krivulja****) ako dopušta regularnu parametrizaciju γ definiranu na nekom segmentu $[a,b]$ tako da je $\gamma(a) = \gamma(b)$ i restrikcija $\gamma|_{[a,b\rangle}$ injekcija.*

Analogno definiramo pojam po dijelovima glatke Jordanove krivulje.

Definicija 17.8 *Za trag po dijelovima glatke Jordanove krivulje kažemo da je* ***kontura****.*

Definicija 17.9 *"Dovoljno dobar" skup $D \subset \mathbb{R}^2$ je povezan i kompaktan skup čiji je rub ∂D unija konačno međusobno disjunktnih kontura.*

Jer je ∂D unija konačno mnogo kontura slijedi da ima površinu 0 (zašto?), pa D ima površinu. Stoga postoji i integral svake neprekidne diferencijalne 2-forme μ na D, pa je lijeva strana jednakosti u Greenovom teoremu dobro definirana za diferencijalnu formu $d\omega$ jer je ω klase C^1.

Ostaje nam definirati "pozitivnu orijentaciju" ruba "dovoljno dobrog" skupa. Intuitivno, pozitivna orijentacija znači da nam skup ostaje s lijeva kada obilazimo njegov rub. Pojam pozitivne orijentacije možemo formalno definirati koristeći sljedeći bitni teorem topologije ravnine, kojeg navodimo bez dokaza:

Teorem 17.10 (Jordanov teorem o krivulji) *Neka je K kontura. Tada se komplement $\mathbb{R}^2 \setminus K$ sastoji od dva disjunktna (putevima) povezana otvorena skupa i K je zajednički rub svakog od njih. Jedan od tih povezanih otvorenih skupova je omeđen (i naziva se* ***unutrašnje područje*** *konture K, dok je drugi neomeđen (i naziva se* ***vanjsko područje*** *konture K).*

Koristeći Jordanov teorem o krivulji možemo na precizan način definirati pojam pozitivne odnosno negativne orijentiranosti orijentirane po dijelovime glatke Jordanove krivulje

Definicija 17.11 *Neka je (C,γ) orijentirana po dijelovima glatka Jordanova krivulja s tragom K. U svakoj točki t gdje postoji $\gamma'(t)$ definiramo jedinično normalno polje*

$$\boldsymbol{N}(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{T}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)).$$

Kažemo da je (C,γ):

- ***pozitivno orijentirana*** *ako polje* $t \mapsto \boldsymbol{N}(t)$ *pokazuje prema unutrašnjem području od* K, *u smislu da za svako* t *gdje* $\gamma'(t)$ *postoji, postoji* $\delta > 0$ *takav da za sve* $s \in \langle 0, \delta \rangle$ *točke* $\gamma(t) + s \cdot \boldsymbol{N}(t)$ *leže u unutrašnjem području od* K*;*

- ***negativno orijentirana*** *ako ako polje* $t \mapsto \boldsymbol{N}(t)$ *pokazuje prema vanjskom području od* K*.*

Jordanov teorem o krivulji u našem slučaju povlači da od svih rubnih kontura "dovoljno dobrog" skupa D jedinstvena je ona čije unutrašnje područje sadrži sve ostale rubne konture od D. Nju ćemo zvati vanjska kontura ruba, dok sve ostale nazivamo unutarnjim konturama ruba od D.

Sada napokon možemo definirati pojam pozitivne orijentiranosti rubnih kontura s obzirom na D.

Definicija 17.12 *Neka je* $D \subset \mathbb{R}^2$ *"dovoljno dobar" skup. Za rubnu konturu* K *od* D *kažemo da je* ***pozitivno orijentirana s obzirom na*** D *ako je* K

- *pozitivno orijentirana (u smislu Definicije 17.11) u slučaju da je* K *vanjska, odnosno*

- *negativno orijentirana (u smislu Definicije 17.11) u slučaju da je* K *unutarnja.*

Napomena 17.13 Neka je sada K kontura čije unutrašnje područje sadrži ishodište. Preptostavimo je K parametrizirana s $\gamma \in C([a,b], \mathbb{R}^2)$ koji je po dijelovima gladak i regularan te da siječe os x točno dva puta.

Zanima nas vrijednost integrala

$$\int_{(C,\gamma)} \omega,$$

gdje je C krivulja definirana s γ, a ω kutna forma (definirana u Primjeru 16.8). Onda γ možemo napisati kao zbroj po dijelovima glatkih regularnih puteva $\gamma_1 \in C([a_1, b_1], \mathbb{R}^2)$ i $\gamma_2 \in C([a_2, b_2], \mathbb{R}^2)$ koji su orijentirano ekvivalentni putovi restrikciji od γ i vrijedi

$$P_1 = \gamma_2(b_2) = \gamma_1(a_1), \qquad P_2 = \gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2).$$

Nadalje pretpostavimo da prva ne siječe negativni dio osi x, a druga pozitivni. Računamo

$$\begin{aligned} \int_{(C,\gamma)} \omega &= \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} d\theta + \int_{\gamma_2} d\tilde{\theta} \\ &= \theta(\gamma_1(b_1)) - \theta(\gamma_1(a_1)) + \tilde{\theta}(\gamma_2(b_2)) - \tilde{\theta}(\gamma_2(a_2)), \end{aligned}$$

gdje je $\tilde{\theta}$ funkcija kuta definirana na $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0), x > 0\}$ (s vrijednostima u $\langle 0, 2\pi \rangle$). Sada je

$$\int_{(C,\gamma)} \omega = \theta(P_2) - \theta(P_1) + \tilde{\theta}(P_1) - \tilde{\theta}(P_2) = \pm 2\pi.$$

Stoga primijetimo da je orijentirana krivulja (C, γ) pozitivno orijentirana ako je $\int_\gamma \omega = 2\pi$, odnosno negativno orijentirana ako je $\int_\gamma \omega = -2\pi$.

Primjer 17.14 Greenov teorem ponekad možemo koristiti za račun krivuljnog integrala.

$$\int_{\partial D} 2xydx + x^2 dy = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \right) = 0.$$

Primjer 17.15 Ponekad je lakše izračunati krivuljni integral. Površina "dovoljno dobrog" skupa D je dana sa

$$A = \int_D dxdy = \int_{\partial D} -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy.$$

Na isti način dobivamo i formule

$$A = \int_{\partial D} -ydx = \int_{\partial D} xdy.$$

Za eliptični disk $\{(x,y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ parametriziramo elipsu sa $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$. Orijentacija generirana parametrizacijom γ je pozitivna pa računamo

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-b\sin t(-a\sin t) + a\cos t\, b\cos t)\, dt = \pi ab.$$

Primjer 17.16 Neka je (C,γ) pozitivno orijentirana po dijelovima glatka Jordanova krivulja čije unutrašnje područje traga sadrži ishodište. Neka je nadalje (C_R, γ_R) negativno orijentirana kružnica dovoljno malog radijusa takvog da je čitava sadržana u unutarnjem području od traga od C. Neka je sada D područje između tragova od C_R i C. Tada je D "dovoljno dobar skup"i njegove rubne konture su pozitivno orijentirane u odnosu na D (Definicija 17.12)

Za diferencijalnu formu

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

vrijedi $d\omega = 0$ (izračunajte), pa primjenom Greenovog teorema dobivamo

$$\int_{(C,\gamma)} \omega + \int_{(C_R,\gamma_R)} \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = 0.$$

Ponovimo li isti račun kao u Primjeru 16.8 slijedi da je

$$\int_{(C,\gamma)} \omega = -\int_{(C_R,\gamma_R)} \omega = 2\pi.$$

Ukoliko krivulja C u unutarnjem području ne sadrži ishodište primjena Greenovog teorema daje

$$\int_C \omega = \int_D d\omega = 0.$$

Neka je $\boldsymbol{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. **Divergencija** vektorske funkcije (polja) $\boldsymbol{F}$ je skalarna funkcija $\operatorname{div} \boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana sa

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

U slučaju $n = 2$ je $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$. Naredni teorem direktna je poslijedica Greenovog teorema, a obično je poznat pod imenom teorem o divergenciji, Gausov teorem ili teorem Gaussa i Ostrogradskog.

Teorem 17.17 (Teorem o divergenciji za $n = 2$) *Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ "dovoljno dobar" skup i $\boldsymbol{F} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$. Tada vrijedi*

$$\int_D \operatorname{div} \boldsymbol{F} dxdy = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} ds,$$

pri čemu je $\boldsymbol{N}$ jedinična vanjska normala na ∂D.

Dokaz. Neka je γ parametrizacija od dijela ∂D koja generira pozitivnu orijentaciju. U točki $x = \gamma(t)$ tangencijalni vektor dan je sa

$$\boldsymbol{T}(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)).$$

Stoga je vektor

$$\boldsymbol{N}(x) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$

jedinični i okomit na $\boldsymbol{T}(x)$, pa je i jedinična normala. Štoviše dobiven je rotacijom za $\pi/2$ u smjeru kazaljke na satu. Stoga "gleda" izvan skupa D, pa je $\boldsymbol{N}$ jedinična vanjska normala. Sada je

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} ds &= \int_{\partial D}(F_1N_1 + F_2N_2)ds = \int_{\partial D}(F_1T_2 - F_2T_1)ds = \int_{\partial D}(-F_2, F_1)\cdot\boldsymbol{T} ds \\
&= \int_{\partial D} -F_2dx + F_1dy = \int_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) dxdy.
\end{aligned}$$

□

Napomena 17.18 Integral po ∂D je krivuljni integral prve vrste i on ne ovisi o orijentaciji. S druge strane za primjenu Greenovog teorema nužan je pozitivno orijentiran rub s obzirom na skup D. To se reflektira u iskazu zahtjevom da je $\boldsymbol{N}$ vanjska normala. Ako uzmemo parametrizaciju negativne orijentacije s obzirom na skup D i njen pripadni jedinični vektor $\boldsymbol{T}$ u gornjem računu ćemo dobiti

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} ds &= \int_{\partial D}(-F_2, F_1)\cdot(-\boldsymbol{T})ds \\
&= \int_{\partial D} -F_2dx + F_1dy,
\end{aligned}$$

gdje je ∂D u zadnjoj formuli pozitivno orijentiran, tj. opet ćemo dobiti množenje jediničnim tangencijalnim vektorom koji generira pozitivnu orijentaciju s obzirom na skup D.

Teorem o divergenciji izuzetno je važan u mehanici kontinuuma, što se vidi iz narednog primjera.

Primjer 17.19 Neka homogena ploča zauzima područje $U \subset \mathbb{R}^2$. Označimo sa $u(x, y, t)$ temperaturu na mjestu $(x, y) \in U$ u trenutku t. Neka je sada $D \subset U$ krug. Ukupna toplina na krugu D u trenutku t dana je sa

$$h(t) = \int_D u(x, y, t)dxdy.$$

S druge strane izrazom

$$\int_{\partial D} -\nabla u\cdot\boldsymbol{N} ds$$

dan je ukupni fluks (protok) topline preko ruba područja D (brzina kojom toplina izlazi iz D). Kako ukupni fluks topline mora biti u ravnoteži s brzinom promjene ukupne topline na D slijedi jednadžba

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\partial D} \nabla u\cdot\boldsymbol{N} ds = 0.$$

primjenom teorema o divergenciji slijedi

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t} - \int_D \operatorname{div} \nabla u dx dy = 0.$$

Zbog proizvoljnosti kruga D slijedi diferencijalna jednadžba na U

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \nabla u = 0,$$

odnosno uz definiciju diferencijalnog operatora $\Delta = \operatorname{div} \nabla$, a koji se naziva Laplaceov operator i jednak je $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Prelazimo na dokaz Greenovog teorema. Dokazujemo ga u tri koraka. Prvo ćemo ga dokazati za jedinični kvadrat $I^2 = [0,1] \times [0,1]$, zatim za injektivnu C^1 sliku jediničnog kvadrata, te na kraju za domenu koja je unija takvih slika.

Lema 17.20 (Greenov teorem za jedinični kvadrat) *Neka je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna forma klase C^1 na I^2 i ∂I^2 je s pozitivnom orijentacijom. Tada vrijedi*

$$\int_{I^2} d\omega = \int_{\partial I^2} \omega.$$

Dokaz. Teorem dokazujemo direktnim računom primjenom Fubinijevog teorema i Newton-Leibnizove formule.

$$\begin{aligned} \int_{I^2} d\omega &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(Q(1,y) - Q(0,y)\right) dy - \int_0^1 \left(P(x,1) - P(x,0)\right) dx. \end{aligned}$$

Trebamo još provjeriti da je to i rezultat krivuljnog integrala na desnoj strani jednakosti u Greenovom teoremu. Definiramo parametrizacije $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sa

$$\gamma_1(t) = (t,0), \quad \gamma_2(t) = (1,t), \quad \gamma_3(t) = (1-t,1), \quad \gamma_4(t) = (0,1-t).$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^2} \omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_4} \omega \\ &= \int_0^1 P(t,0)dt + \int_0^1 Q(1,t)dt - \int_0^1 P(1-t,1)dt - \int_0^1 Q(0,1-t)dt \\ &= \int_0^1 P(x,0)dx + \int_0^1 Q(1,y)dy - \int_0^1 P(x,1)dx - \int_0^1 Q(0,y)dy, \end{aligned}$$

pa je tvrdnja dokazana. $\square$

Definicija 17.21 *Skup $D \subset \mathbb{R}^2$ nazivamo* ***(glatka) 2-ćelija*** *ako postoji difeomorfizam $\boldsymbol{F} \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup koji sadrži I^2, takav da vrijedi $\boldsymbol{F}(I^2) = D$.*

Ako pritom vrijedi $J_{\boldsymbol{F}}(u,v) = \det \nabla \boldsymbol{F}(u,v) > 0$ za sve $(u,v) \in U$, onda za par $(D, \boldsymbol{F})$ kažemo da je ***orijentirana (glatka) 2-ćelija****.*

Kako je preslikavanje $\boldsymbol{F}$ C^1-difeomorfizam, ono je također homeomorfizam, pa imamo $\operatorname{Int} D = \operatorname{Int}(\boldsymbol{F}(I^2)) = \boldsymbol{F}(\operatorname{Int}(I^2))$ te $\partial D = \partial(\boldsymbol{F}(I^2)) = \boldsymbol{F}(\partial I^2)$.

Budući da je $\boldsymbol{F}$ klase C^1, slijedi da će se točke od ∂I^2 u kojima je regularna parametrizacija glatka preslikati u točke u kojima je regularna parametrizacija također glatka. Stoga vrhova u D može biti najviše četiri. Primijenjujući isto rezoniranje na $\boldsymbol{F}^{-1}$ zaključujemo da D ima točno četiri vrha. U to se možemo uvjeriti i na sljedeći način. Pogledajmo sada ishodište kao vrh od I^2. Diferencijal $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(0,0)$ preslikava vektore $\boldsymbol{e}_1$ i $\boldsymbol{e}_2$ (koji određuju kut u ishodištu) u vektore $\partial_1 \boldsymbol{F}(0,0)$ i $\partial_2 \boldsymbol{F}(0,0)$. Kako je Jacobijeva determinanta pozitivna u svim točkama slijedi

$$\partial_1 \boldsymbol{F}(0,0) \cdot \mathbf{Q} \partial_2 \boldsymbol{F}(0,0) = J_{\boldsymbol{F}}(0,0) > 0,$$

gdje je $\mathbf{Q}$ rotacija za kut $\pi/2$ u smjeru kazaljke na satu. Stoga slijedi da je unutarnji kut koji zatvaraju $\partial_1 \boldsymbol{F}(0,0)$ i $\mathbf{Q}\partial_2 \boldsymbol{F}(0,0)$ iz $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Uvažavajući definiciju rotacije $\mathbf{Q}$ slijedi da je unutarnji kut što ga zatvaraju $\partial_1 \boldsymbol{F}(0,0)$ i $\partial_2 \boldsymbol{F}(0,0)$ iz $\langle 0, \pi \rangle$. Stoga ne može biti 0, pa je slika ishodišta, tj. vrha od I^2, ponovo vrh u D. Stoga D ima točno četiri vrha.

Posebno, trokut i krug nisu 2-ćelije. Primijetite da ni nekonveksni četverokut nije 2-ćelija. Štoviše, može se pokazati da svaki skup čiji je rub gladak osim u točno četiri točke s unutrašnjim kutevima $< \pi$ je 2-ćelija.

Također se može pokazati da pozitivna orijentacija na ∂I^2 inducira pozitivnu orijentaciju na ∂D.

Napomena 17.22 Kao u definiciji pozitivne orijentacije definiramo normalno polje na ∂D parametriziranu (a onda i orijentiranu) sa $\boldsymbol{F} \circ \gamma$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla F \circ \gamma \gamma' = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_2}{\partial x} & -\frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \circ \gamma \gamma' = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_2}{\partial x} \circ \gamma \gamma_1' - \frac{\partial F_2}{\partial y} \circ \gamma \gamma_2' \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} \circ \gamma \gamma_1' + \frac{\partial F_1}{\partial y} \circ \gamma \gamma_2' \end{pmatrix}$$

Točke oblika

$$\gamma + \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma',$$

su u unutrašnjosti od I^2 za dovojlno male η. Funkcija $\boldsymbol{F}$ ih preslika u točke

$$F(\gamma + \eta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma') = F(\gamma) + \eta \nabla F \circ \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma' + O(\eta^2)$$

koje su uunutrašnjosti od $D = \boldsymbol{F}(I^2)$. Sada promatramo kut koji zatvaraju gore izračunata normala na ∂D i vektor koji je usmjeren u unutrašnjost.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & -\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \circ \gamma \gamma' \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_2}{\partial x} & -\frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \circ \gamma \gamma' = \gamma' \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial x} & -\frac{\partial F_2}{\partial x} \end{pmatrix} \circ \gamma \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_2}{\partial x} & -\frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \circ \gamma \gamma'$$

$$= \gamma' \cdot \begin{pmatrix} J_{\boldsymbol{F}} \circ \gamma & 0 \\ 0 & J_{\boldsymbol{F}} \circ \gamma \end{pmatrix} \gamma' = J_{\boldsymbol{F}} \circ \gamma \|\gamma'\|^2 > 0.$$

Stoga kut manji od $\pi/2$, pa normala pokazuje prema unutrašnjem području, te je pozitivna orijentacija naslijeđena.

Ideja dokaza Greenovog teorema za 2-ćeliju je sada povući forme sa D na I^2 i primijeniti Greenov teorem za jedinični kvadrat. Ovo povlačenje definirano je na slijedeći način:

Definicija 17.23 *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren te $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$.*

1° ***Povlak (pull-back)*** *diferencijalne 0-forme φ na $\boldsymbol{F}(U)$ je 0-forma $\boldsymbol{F}^*(\varphi)$ na U definirana s*

$$\boldsymbol{F}^*(\varphi) = \varphi \circ \boldsymbol{F}.$$

2° ***Povlak*** *diferencijalne 1-forme $\omega = Pdx + Qdy$ na $\boldsymbol{F}(U)$ je 1-forma $\boldsymbol{F}^*(\omega)$ na U definirana s*

$$\boldsymbol{F}^*(\omega) = \boldsymbol{F}^*(P)\boldsymbol{F}^*(dx) + \boldsymbol{F}^*(Q)\boldsymbol{F}^*(dy),$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{F}^*(dx) = dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial u}du + \frac{\partial F_1}{\partial v}dv, \quad \boldsymbol{F}^*(dy) = dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial u}du + \frac{\partial F_2}{\partial v}dv.$$

3° ***Povlak*** *diferencijalne 2-forme $\mu = m\,dxdy$ na $\boldsymbol{F}(U)$ je 2-forma na U definirana s*

$$\boldsymbol{F}^*(\mu) = (m \circ \boldsymbol{F})J_{\boldsymbol{F}}\,dudv.$$

Ovdje smo koristili oznake (u, v) za koordinate u domeni od $\boldsymbol{F}$ i (x, y) za koordinate u slici od $\boldsymbol{F}$. Primijetite također da smo povlak 1-forme dobili tako da smo napravili formalnu zamjenu

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Zadatak 17.24 Pokažite da se povlak 2-forme sada može dobiti koristeći iste ove formalne zamjene, uz korištenje relacija $dudu = dvdv = 0$ i $dudv = -dvdu$.

Naredna svojstva povlaka koristit ćemo za dokaz Greenovog teorema.
Naredna svojstva povlaka koristit ćemo za dokaz Greenovog teorema.

Lema 17.25 *Neka je $(D, \boldsymbol{F})$ orijentirana 2-ćelija. Ako je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna 1-forma klase C^1 na $\boldsymbol{F}(U)$ i $\mu = m\,dxdy$ diferencijalna 2-forma klase C^1 na $\boldsymbol{F}(U)$, tada vrijedi:*

1°

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial I^2} \boldsymbol{F}^*(\omega),$$

2°

$$\int_D \mu = \int_{I^2} \boldsymbol{F}^*(\mu),$$

3°

$$d(\boldsymbol{F}^*(\omega)) = \boldsymbol{F}^*(d\omega).$$

Dokaz. 1°. Neka je $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \to \partial I^2$ po dijelovima regularna pozitivno orijentirana parametrizacija od ∂I^2. Kako je $J_{\boldsymbol{F}} > 0$ na U, tada je $\boldsymbol{F} \circ \gamma$ po dijelovima regularna pozitivno orijentirana parametrizacija od ∂D (Napomena 17.22). Ako je $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$, za sve $t \in [a, b]$ u kojima $\gamma'(t)$ postoji te $i = 1, 2$ imamo

$$(F_i \circ \gamma)'(t) = \nabla F_i(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial F_i}{\partial u}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial F_i}{\partial v}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \omega &= \int_{\boldsymbol{F}\circ\gamma} \omega \\
&= \int_a^b [P(\boldsymbol{F}(\gamma(t)))(\boldsymbol{F} \circ \gamma)_1'(t) + Q(\boldsymbol{F}(\gamma(t)))(\boldsymbol{F} \circ \gamma)_2'(t)]\, dt \\
&= \int_a^b (P(\boldsymbol{F}(\gamma(t))) \left(\frac{\partial F_1}{\partial u}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial F_1}{\partial v}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt \\
&+ \int_a^b Q(\boldsymbol{F}(\gamma(t))) \left(\frac{\partial F_2}{\partial u}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt \\
&= \int_\gamma \left[(P \circ \boldsymbol{F}) \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} du + \frac{\partial F_1}{\partial v} dv \right) + (Q \circ \boldsymbol{F}) \left(\frac{\partial F_2}{\partial u} du + \frac{\partial F_2}{\partial v} dv \right) \right] \\
&= \int_\gamma \boldsymbol{F}^*(P)\boldsymbol{F}^*(dx) + \boldsymbol{F}^*(Q)\boldsymbol{F}^*(dy) \\
&= \int_\gamma \boldsymbol{F}^*(\omega) \\
&= \int_{\partial I^2} \boldsymbol{F}^*(\omega).
\end{aligned}$$

2°. Kako je $J_{\boldsymbol{F}} > 0$ na U, prema Teoremu o zamjeni varijabli imamo

$$\begin{aligned}
\int_D \mu &= \int_{\boldsymbol{F}(I^2)} m\, dxdy = \int_{I^2} (m \circ \boldsymbol{F})|J_{\boldsymbol{F}}|\, dudv = \int_{I^2} (m \circ \boldsymbol{F}) J_{\boldsymbol{F}}\, dudv \\
&= \int_{I^2} \boldsymbol{F}^*(\mu).
\end{aligned}$$

3°. Iz definicije povlaka 2-forme $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ dobivamo

$$\boldsymbol{F}^*(d\omega) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \circ \boldsymbol{F} J_{\boldsymbol{F}} dudv. \tag{17.2}$$

S druge strane, povučena 1-forma ω dana je s

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^*(\omega) &= \boldsymbol{F}^*(P)\boldsymbol{F}^*(dx) + \boldsymbol{F}^*(Q)\boldsymbol{F}^*(dy) \\
&= P \circ \boldsymbol{F} \left(\frac{\partial F_1}{\partial u} du + \frac{\partial F_1}{\partial v} dv \right) + Q \circ \boldsymbol{F} \left(\frac{\partial F_2}{\partial u} du + \frac{\partial F_2}{\partial v} dv \right) \\
&= \left(P \circ \boldsymbol{F} \frac{\partial F_1}{\partial u} + Q \circ \boldsymbol{F} \frac{\partial F_2}{\partial u} \right) du + \left(P \circ \boldsymbol{F} \frac{\partial F_1}{\partial v} + Q \circ \boldsymbol{F} \frac{\partial F_2}{\partial v} \right) dv.
\end{aligned}$$

Sada računamo diferencijal od $\boldsymbol{F}^*(\omega)$:

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}^*(\omega)) = \Big[&\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial F_1}{\partial v} + Q\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial F_2}{\partial v}\right)\\ &- \frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial F_1}{\partial u} + Q\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial F_2}{\partial u}\right)\Big]dudv.\end{aligned}$$

Nakon deriviranja članova u zagradama druge parcijalne derivacije funkcija F_1 i F_2 se skrate (Schwarzov teorem), pa dobivamo

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}^*(\omega)) &= \Big(\frac{\partial}{\partial u}(P\circ\boldsymbol{F})\frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}(Q\circ\boldsymbol{F})\frac{\partial F_2}{\partial v}\\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v}(P\circ\boldsymbol{F})\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}(Q\circ\boldsymbol{F})\frac{\partial F_2}{\partial u}\Big)dudv\\ &= \Big(\nabla P\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} + \nabla Q\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v}\\ &\quad - \nabla P\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u} - \nabla Q\circ\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}\Big)dudv\\ &= \Big(\nabla P\circ\boldsymbol{F}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}\Big)\\ &\quad + \nabla Q\circ\boldsymbol{F}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}\Big)\Big)dudv.\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}d(\boldsymbol{F}^*(\omega)) &= \Big(\nabla P\circ\boldsymbol{F}\Big(\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial F_1}{\partial u}\Big)\boldsymbol{e}_2\\ &\quad + \nabla Q\circ\boldsymbol{F}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial u}\Big)\boldsymbol{e}_1\Big)dudv\\ &= \Big(-\frac{\partial P}{\partial y}\circ\boldsymbol{F}J_{\boldsymbol{F}} + \frac{\partial Q}{\partial x}\circ\boldsymbol{F}J_{\boldsymbol{F}}\Big)dudv\\ &= \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\circ\boldsymbol{F}J_{\boldsymbol{F}}dudv.\end{aligned}$$

Dobili smo rezultat kao u (17.2), te je tvrdnja dokazana. □

Lema 17.26 (Greenov teorem za orijentirane 2-ćelije) *Neka je $(D,\boldsymbol{F})$ orijentirana 2-ćelija. Ako je ω diferencijalna 1-forma klase C^1 na $\boldsymbol{F}(U)$, tada vrijedi*

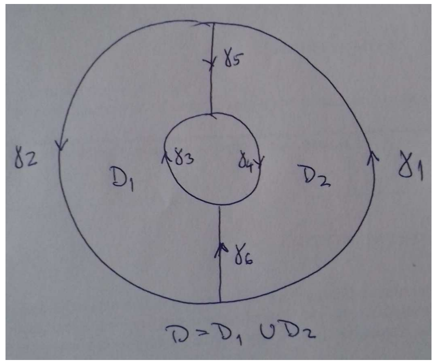
$$\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega.$$

Dokaz. Imamo

$$\int_D d\omega = \int_{I^2}\boldsymbol{F}^*(d\omega) = \int_{I^2} d(\boldsymbol{F}^*(\omega)) = \int_{\partial I^2}\boldsymbol{F}^*(\omega) = \int_{\partial D}\omega,$$

gdje smo redom koristili Lemu 17.25.2, Lemu 17.25.3, Greenov teorem za jedinični kvadrat, te Lemu 17.25.1. □

Primjer 17.27 Neka je sada D kružni vijenac, što nije 2-ćelija, no može se napisati kao unija dviju 2-ćelija D_1 i D_2.



Sada je

$$\partial D_1 = \gamma_2 - \gamma_6 + \gamma_3 - \gamma_5, \qquad \partial D_2 = \gamma_1 + \gamma_5 + \gamma_4 + \gamma_6.$$

Primijenimo li sada Greenov teorem na D_1 i D_2 slijedi

$$\begin{aligned}\int_{D_1} d\omega &= \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_6} \omega + \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_5} \omega \\ \int_{D_2} d\omega &= \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_5} \omega + \int_{\gamma_4} \omega + \int_{\gamma_6} \omega.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih formula dobivamo točno tvrdnju Greenovog teorema. Primijetite da je za izvod ključno bilo poništavanje integrala na susjednim krivuljama 2-ćelija, jer ih obilazimo dva puta u suprotnim smjerovima.

Primjer 17.28 Sličnu dekompoziciju kao u prethodnom primjeru možemo napraviti i za trokut, te zaključiti da će Greenov teorem vrijediti za trokut.

Promotrimo sada skup koji se može prikazati kao unija 2-ćelija $D_1, \ldots, D_k$, koje se ili ne sijeku ili se sijeku u jednoj točki ili u jednom bridu na kome induciraju suprotnu orijentaciju. Neka je E neki od bridova 2-ćelija. Tada je on ili brid neke druge ćelije, tada ga nazivamo unutrašnji, ili nije. U drugom slučaju mora biti rubni brid, tj. $E \subset \partial D$. Jer je ∂D unija ovakvih bridova slijedi da oni induciraju orijentaciju na ∂D. Može se pokazati da je ova orijentacija jedinstvena, tj. svaka druga unija 2-ćelija inducirati će istu orijentaciju. Stoga zaključujemo da i na ovakvim skupovima vrijedi Greenov teorem.

No, sada ovaj zaključak povlači da Greenov teorem vrijedi i za svaki "dovoljno dobar" skup. Svaki takav konkretan skup lako se prikaže kao unija 2-ćelija. Općenito osnovna ideja dokaza leži da u netrivijalnoj činjenici da se svaki takav skup može triangulirati (podijeliti na trokute, sa moguće zakrivljenim stranicama (ali glatkim), s istim svojstvom bridova, ili su rubni ili ih dijele dva trokuta; u nekim slučajevima jednostavna je konstrukcija da dodamo u interiror skupa jednu točku i spojimo ju glatkim krivuljama sa svim vrhovima s ruba). Nakon toga trokut lako podijelimo na 2-ćelije.

Prije nego li navedemo još jednu poslijedicu Greenovog teorema, uvedimo sljedeću definiciju

Definicija 17.29 *Neka je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna 1-forma klase C^1 definirana na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Za ω kažemo da je* ***zatvorena*** *ako vrijedi $d\omega = 0$, odnosno $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ na U.*

Propozicija 17.30 *Svaka egzaktna diferencijalna 1-forma klase C^1 je zatvorena.*

Dokaz. Iz pretpostavke slijedi da postoji funkcija $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ takva da je

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Korištenjem Schwarzovog teorema dobivamo

$$d\omega = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dxdy = 0.$$

□

Teorem 17.31 *Neka je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna 1-forma klase C^1 definirana na zvjezdastom otvorenom skupu $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

1° *ω je egzaktna na U.*

2° *ω je zatvorena na U.*

3° *Za svake dvije točke $c_1, c_2 \in U$, integral $\int_\gamma \omega$ neovisan je o po dijelovima glatkom putu γ od c_1 do c_2.*

Prisjetimo se da za skup U kažemo da je **zvjezdast** ako postoji točka $c \in U$ takva da je za svaki $x \in U$ spojnica $[c, x] = \{(1-t)c + tx : t \in [0,1]\}$ čitava sadržana u U (tada još kažemo da je U zvjezdast s obzirom na točku c).

Dokaz. Iz Propozicije 17.30 slijedi da 1° povlači 2°, a iz Korolara 16.11 slijedi da 1° povlači 3°.

Pretpostavimo da vrijedi 3°. Tada za svaki zatvoren po dijelovima gladak put $\gamma : [a, b] \to U$ vrijedi $\int_\gamma \omega = 0$. Naime, kako je $c_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$, za konstantan put $\alpha : [a, b] \to U$, $\alpha(t) = c_0$, imamo $\alpha' = 0$ na $[a, b]$, pa je prema pretpostavci

$$\int_\gamma \omega = \int_\alpha \omega = 0.$$

Neka je D proizvoljan kvadrat u U s pozitivno orijentiranim rubom ∂D, tada Greenov teorem povlači

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = 0,$$

Zbog proizvoljnosti kvadrata D slijedi da je $d\omega = 0$, tj. vrijedi 2°. (Primijetimo da do sada nismo koristili pretpostavku da je U zvjezdast.)

Napokon, pretpostavimo da vrijedi 2°, tj. $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ na U. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(0,0) \in U$ te da je U zvjezdast s obzirom na $(0,0)$, tj. za sve $(x, y) \in U$ i $t \in [0,1]$ vrijedi $(tx, ty) = t(x, y) \in U$. Neka je $(x, y) \in U$ proizvoljna točka. Jer je U zvjezdast s obzirom na $(0,0)$,

$$\gamma_{(x,y)} : [0,1] \to U, \qquad \gamma_{(x,y)}(t) := (tx, ty)$$

je dobro definiran gladak put u U, s početkom u $(0,0)$ i krajem u (x, y).

Definirajmo funkciju $f : U \to \mathbb{R}$ s

$$f(x, y) := \int_{\gamma_{(x,y)}} \omega = \int_0^1 (P(tx, ty)x + Q(tx, ty)y)\, dt.$$

Koristeći analogon Teorema 11.1, zaključujemo da obje parcijalne derivacije od f postoje na U i da vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(P(tx,ty)x+Q(tx,ty)y\right)\,dt\\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)tx+P(tx,ty)+\frac{\partial Q}{\partial x}(tx,ty)ty\right)\,dt.\end{aligned}$$

Jer je $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, koristeći Netwon-Leibnizovu formulu dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(P(tx,ty)+\frac{\partial P}{\partial x}(tx,ty)tx+\frac{\partial P}{\partial y}(tx,ty)ty\right)\,dt\\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tP(tx,ty))\,dt\\ &= P(x,y).\end{aligned}$$

Na sličan način bismo zaključili i da vrijedi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$. Dakle, $\omega=df$ je egzaktna. $\square$

Napomena 17.32 *(a) Ako je U npr. (otvoreni) pravokutnik ili krug, implikacija $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ se također može dokazati koristeći Greenov teorem.*

*(b) Svaka zatvorena diferencijalna 1-forma klase C^1 na proizvoljnom otvorenom skupu U u $\mathbb{R}^2$ je **lokalno egzaktna**. Naime, zbog otvorenosti od U, za proizvoljnu točku $c\in U$ postoji $r>0$ takav da je $K(c,r)\subseteq U$. Kako je $K(c,r)$ konveksan, on je svakako zvjezdast, pa je prema Teoremu 17.31 restrikcija od ω na $K(c,r)$ egzaktna 1-forma.*

*(c) Teorem 17.31 vrijedi u svim dimenzijama i to na općenitijim tzv. jednostavno povezanim područjima (intuitivno, u $\mathbb{R}^2$, to su ona područja koja nemaju "rupa"), a implikacija $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ se obično zove **Poincaréova lema**.*

Obrat Propozicije 17.30 (odnosno implikacija $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Teorema 17.31) općenito ne vrijedi za skupove koji nisu zvjezdasti. Npr. kutna forma ω iz Primjera 16.8 je zatvorena, ali nije egzaktna na svojoj domeni $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. S druge strane, ω je egzaktna na svakom komplementu nekog polupravca kroz ishodište (što je zvjezdast skup u $\mathbb{R}^2$).

Koristeći diferencijalne 1-forme možemo ustanoviti da neka područja u $\mathbb{R}^2$ nisu difeomorfna. Kao ilustraciju navedimo sljedeći primjer.

Primjer 17.33 Za $c\in\mathbb{R}^2$ te $0<r<s$ označimo redom s $K(c,r)$ i $K(c,r,s)$ otvoreni krug oko c radijusa r i otvoreni kružni vijenac oko c s unutarnjim radijusom r i vanjskim radijusom s.

Kako je krug $K(c,r)$ konveksan (posebno zvjezdast), iz Teorema 17.31 slijedi da je svaka zatvorena diferencijalna 1-forma klase C^1 na $K(c,r)$ egzaktna.

S druge strane na $K(c,r,s)$ postoje zatvorene diferencijalne 1-forme koje nisu egzaktne. Naime, za $c=(c_1,c_2)$ neka je ω_c kutna forma centrirana s obzirom na točku c, tj.

$$\omega_c=\frac{-(y-c_2)\,dx+(x-c_1)\,dy}{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}.$$

Tada je ω_c dobro definirana 1-forma na $K(c,r,s)\subset\mathbb{R}^2\setminus\{c\}$ i vrijedi $d\omega_c=0$ (tj. ω_c je zatvorena).

S druge strane, za $p = (r+s)/2$ neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to K(c, r, s)$ parametrizacija kružnice $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|x - c\| = p\} \subset K(c, r, s)$ definirana s $\gamma(t) = (c_1 + p\cos t, c_2 + p\sin t)$. Tada je

$$\int_\gamma \omega_c = \int_0^{2\pi} \frac{-p\sin t(-p\sin t) + p\cos t(p\cos t)}{(p\cos t)^2 + (p\sin t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Kako je γ zatvoren put u $K(c, r, s)$ te $\int_\gamma \omega_c \neq 0$, pozivajući se na Korolar 16.11 zaključujemo da ω_c nije egzaktna.

Pretpostavimo da postoji C^2-difeomorfizam $\mathbf{F} : K(c, r) \to K(c, r, s)$. Onda bismo prema dokazu Leme 17.25 1° imali

$$\int_{\mathbf{F}^{-1}\circ\gamma} \mathbf{F}^*(\omega_c) = \int_\gamma \omega_c = 2\pi. \tag{17.3}$$

Kako povlak i diferencijal komutiraju (Lema 17.25 3°), $\mathbf{F}^*(\omega_c)$ je zatvorena 1-forma na $K(c, r)$, stoga i egzaktna. Jer je $\mathbf{F}^{-1}\circ\gamma$ zatvoren put u $K(c, r)$, iz Korolara 16.11 slijedi da je $\int_{\mathbf{F}^{-1}\circ\gamma} \mathbf{F}^*(\omega_c) = 0$. Time smo dobili kontradikciju s (17.3).

18 Multilinearne funkcije

U ovom odjeljku shvatit ćemo $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ (k puta). Funkcija $M : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ za argument onda prima k vektora iz $\mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{a}^1, \ldots \boldsymbol{a}^k \in \mathbb{R}^n$. Funkciju M nazivamo k-multilinearnom ili multilinearnom ako je linearna po svakoj varijabli

$$M(\boldsymbol{a}^1, \ldots, x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}^k) = xM(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}, \ldots, \boldsymbol{a}^k) + yM(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{b}, \ldots, \boldsymbol{a}^k).$$

Primijetite da je 1-multilinearna funkcija zapravo linearna.

Multilinearna funkcija M je alternirajuća ako je

$$M(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k) = 0,$$

čim su neka dva od vektora $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ jednaka.

Ako je $k = n$ primjer multilinearne alternirajuće funkcije je determinanta. Tehnikama kao u slučaju determinante, lako je onda pokazati da je multilinearna funkcija alternirajuća ako i samo ako mijenja predznak pri zamjeni dva argumenta. Također ako su vektori $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ linearno zavisni slijedi

$$M(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k) = 0.$$

Stoga ako je $k > n$ jedina alternirajuća multilinearna funkcija je nul funkcija.

Linearnu funkciju zapisali smo u bazi projekcija dx_i, $i = 1, \ldots, n$. Sličan zapis željeli bi imati i u slučaju multilinearnih funkcija. Neka je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ uređena k-torka elemenata iz $\{1, \ldots, n\}$. Definiramo funkciju

$$d\boldsymbol{x}_I : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}, \qquad d\boldsymbol{x}_I(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k) = \det \mathbf{A}_I,$$

pri čemu je $\mathbf{A}_I \in M_k(\mathbb{R})$ matrica kojoj je r-ti redak jednak i_r-tom retku matrice

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}^1 \cdots \boldsymbol{a}^k).$$

Neka su I i J uređene rastuće k-torke indeksa $(1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n)$. Lako se provjeri da je

$$d\boldsymbol{x}_I(\boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_k}) = \begin{cases} 1, & I = J \\ 0, & I \neq J \end{cases}.$$

Naime ako je $I = J$ tada je $\mathbf{A}_I$ jedinična matrica, a ako su I i J različiti barem jedan redak od $\mathbf{A}_I$ je nula.

Zbog svojstva determinante jasno je da su funkcije $d\boldsymbol{x}_I$ alternirajuće multilinearne funkcije i prema narednom teoremu razapinju skup svih alternirajućih k-multilinearnih funkcija.

Teorem 18.1 *Neka je $M : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ alternirajuća k-multilinearna funkcija. Tada je*

$$M = \sum_{[I]} \alpha_I d\boldsymbol{x}_I,$$

gdje je $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $\alpha_I = M(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k})$, a $[I]$ označava da sumiramo po svim rastućim k-torkama indeksa.

Dokaz. Označimo

$$\tilde{M} = \sum_{[I]} M(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k}) d\boldsymbol{x}_I.$$

Želimo pokazati da je $M(\boldsymbol{a}^1, \ldots \boldsymbol{a}^k) = \tilde{M}(\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k)$ za sve vektore $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k \in \mathbb{R}^n$. Za svaku k-torku vrijedi

$$\begin{aligned}
\tilde{M}(\boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_k}) &= \sum_{[I]} M(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k}) d\boldsymbol{x}_I(\boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_k}) \\
&= M(\boldsymbol{e}^{\mathrm{per}(J)_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{\mathrm{per}(J)_k}) d\boldsymbol{x}_{\mathrm{per}(J)}(\boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_k}) \\
&= (-1)^{\sigma(\mathrm{per})} M(\boldsymbol{e}^{\mathrm{per}(J)_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{\mathrm{per}(J)_k}) = M(\boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_k})
\end{aligned}$$

gdje je $\mathrm{per}(J)$ permutacija k-torke J, a $\sigma(\mathrm{per})$ joj je parnost. No, iz svojstva multilinearnosti slijedi

$$\begin{aligned}
M(\boldsymbol{a}^1, \ldots \boldsymbol{a}^k) &= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} a^1_{i_1} \cdots a^k_{i_k} M(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k}) \\
&= \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} a^1_{i_1} \cdots a^k_{i_k} \tilde{M}(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k}) = \tilde{M}(\boldsymbol{a}^1, \ldots \boldsymbol{a}^k).
\end{aligned}$$

□

Primjer 18.2 Već smo naveli determinantu na $\mathbb{R}^n$ kao primjer alternirajuće n-multilinearne funkcije. Štoviše vrijedi da je determinanta i jedina takva funkcija na $\mathbb{R}^n$ sa svojstvom da je $\det(\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n) = 1$.

Navedimo sada Binet-Cauchyjevu produktnu formulu.

Teorem 18.3 *Neka je $k \leq n$ neka su dane matrice $\mathbf{A} \in M_{k,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Tada vrijedi*

$$\det \mathbf{AB} = \sum_{[I]} (\det \mathbf{A}_I^T)(\det \mathbf{B}_I).$$

Primijetite da je za $k = n$ ova formula zapravo Binet-Cauhyjeva formula.

Dokaz. Označimo

$$\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k)^T, \qquad \mathbf{B} = (\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^k).$$

Stoga je

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}^1 & \cdots & \boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{b}^k \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{b}^1 & \cdots & \boldsymbol{a}^k \cdot \boldsymbol{b}^k \end{bmatrix},$$

pa je za $\mathbf{A}$ fiksnu sa

$$M(\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^k) = \det \mathbf{AB}$$

definirana jedna alternirajuća k-multilinearna funkcija. Stoga je

$$M = \sum_{[I]} M(\boldsymbol{e}^{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{i_k}) d\boldsymbol{x}_I.$$

Računamo

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{b}^1,\dots,\boldsymbol{b}^k) &= \sum_{[I]} M(\boldsymbol{e}^{i_1},\dots,\boldsymbol{e}^{i_k}) d\boldsymbol{x}_I(\boldsymbol{b}^1,\dots,\boldsymbol{b}^k) = \sum_{[I]} M(\boldsymbol{e}^{i_1},\dots,\boldsymbol{e}^{i_k}) \det \mathbf{B}_I \\ &= \sum_{[I]} \det \mathbf{A}(\boldsymbol{e}^{i_1},\dots,\boldsymbol{e}^{i_k}) \det \mathbf{B}_I = \sum_{[I]} \det \mathbf{A}_I \det \mathbf{B}_I. \end{aligned}$$

□

Ova nam formula treba za račun površine k-dimenzionalnog paralelepipeda u $\mathbb{R}^n$. Neka su dani vektori $\boldsymbol{a}^1,\dots,\boldsymbol{a}^k \in \mathbb{R}^n$. k-dimenzionalni paralelepiped P je skup

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^k t_i \boldsymbol{a}^i, t_i \in [0,1]\}.$$

U slučaju $k = n$ znamo da P možemo dobiti kao sliku jedinične kocke $I^n = I \times \cdots \times I$ nakon djelovanja linearnog operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tada su $\boldsymbol{a}^i = L(\boldsymbol{e}^i), i = 1,\dots,n$, a oni čine stupce matrice $\mathbf{A}$ opertora L u paru kanonskih baza, tj. $Lx = \mathbf{A}x$. Stoga je $P = L(I^n)$, te je stoga po Lemi 10.6, a koja vrijedi i za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu(P) = |\det \mathbf{A}|\nu(I^n) = |\det \mathbf{A}| = \sqrt{(\det \mathbf{A})^2} = \sqrt{\det \mathbf{A}^T\mathbf{A}}, \tag{18.1}$$

gdje smo iskoristili da je $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Neka je sada X podskup k-dimenzionalnog potprostora V od $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$. Neka je $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ ortonormirana baza za V. Definiramo linearni operator $\Phi : V \to \mathbb{R}^k$ sa

$$\Phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1,\dots,k.$$

Ovo preslikavanje je izomorfizam vektorskih prostora (štoviše i unitarnih jer je ortogonalni operator). Definiramo k-dimenzionalnu površinu sa

$$p(X) = \nu(\Phi(X)).$$

Da bi definicija bila dobra moramo pokazati da ne ovisi o izboru baze. Pa neka je $\boldsymbol{w}^1,\dots,\boldsymbol{w}^k$ neka druga ortonormirana baza na V i $\Psi : V \to \mathbb{R}^k$ pripadni izomorfizam definiran sa

$$\Psi(\boldsymbol{w}_i) = \boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1,\dots,k.$$

Stoga je kompozicija $\Psi \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ortogonalni operator, te čuva volumen po Korolaru 10.7. Vrijedi

$$\nu(\Phi(X)) = \nu(\Psi \circ \Phi^{-1} \circ \Phi(X)) = \nu(\Psi(X)),$$

pa je $p(X)$ dobro definiran. U narednom teoremu dajemo formulu za površinu k-dimenzionalnog paralelepipeda.

Teorem 18.4 *Neka je P k-dimenzionalni paralelepiped u $\mathbb{R}^n$ $(k \le n)$ razapet vektorima $\boldsymbol{a}^1,\dots,\boldsymbol{a}^k$. Tada je*

$$p(P) = \sqrt{\det \mathbf{A}^T\mathbf{A}},$$

gdje je $\mathbf{A}$ matrica s vektorima $\boldsymbol{a}^1,\dots,\boldsymbol{a}^k$ kao stupcima.

Dokaz. Neka je V k-dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^n$ koji sadrži vektore $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^k$ i neka je $\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^k$ ortonormirana baza za V, te $\Phi : V \to \mathbb{R}^k$ pripadni izomorfizam s $\mathbb{R}^k$. Definiramo vektore

$$\boldsymbol{b}^i = \Phi(\boldsymbol{a}^i), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Sada korištenjem (18.1), oznake $\mathbf{B} = (\boldsymbol{b}^1 \cdots \boldsymbol{b}^k)$, te činjenice da je Φ ortogonalan operator pa čuva kuteve, dobivamo

$$p(P) = \nu(\Phi(P)) = \sqrt{\det \mathbf{B}^T \mathbf{B}} = \sqrt{\det (\boldsymbol{b}^i \cdot \boldsymbol{b}^j)_{i,j}} = \sqrt{\det (\boldsymbol{a}^i \cdot \boldsymbol{a}^j)_{i,j}} = \sqrt{\det \mathbf{A}^T \mathbf{A}}.$$

□

19 Površina plohe

U ovom poglavlju uvodimo pojam površine k-dimenzionalnih ploha u $\mathbb{R}^n$. Neka je Q k-dimenzionalna kocka u $\mathbb{R}^k$, tj. skup

$$Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k,$$

(kocka je ovdje važna jedino radi lakše notacije, sasvim jednostavno bi motivirali definiciju i za slučaj kvadra). Preslikavanje

$$\boldsymbol{F} \in C^1(Q, \mathbb{R}^n),$$

koje je injektivno na $\operatorname{Int} Q$ nazivamo karta. Definirat ćemo površinu karte $\boldsymbol{F}$, s oznakom $p(\boldsymbol{F})$ (uloga karte je ovdje kao što je bila uloga puta kod krivulja). Neka je $P = (P_1, \ldots, P_k)$ subdivizija kvadra Q. Ona dijeli kocku Q na kocke $Q_{i_1,\ldots,i_k}$ stranice duljine h čija je unija Q, a međusobni presjek eventualno sadrži stranice. Da smo već definirali površinu prirodno bi bilo da vrijedi

$$p(\boldsymbol{F}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} p(\boldsymbol{F}|_{Q_{i_1,\ldots,i_k}}).$$

Površinu slika kvadara u subdiviziji jednako je teško izračunati kao i površinu slike originalnog kvadra. Stoga sliku kvadara u subdiviziji aproksimiramo afinom funkcijom

$$\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k}) + \mathrm{D}\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})(Q_{i_1,\ldots,i_k} - q_{i_1,\ldots,i_k}),$$

pri čemu je $q_{i_1,\ldots,i_k}$ proizvoljna točka iz $Q_{i_1,\ldots,i_k}$. Jer je $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})$ linearan operator slijedi da je $\mathrm{D}\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})(Q_{i_1,\ldots,i_k} - q_{i_1,\ldots,i_k})$ translatiran paralelepiped sa stranicama

$$h\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_1}(q_{i_1,\ldots,i_k}), \ldots, h\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_k}(q_{i_1,\ldots,i_k}).$$

Označimo li sa $\mathbf{A}_{i_1,\ldots,i_k}$ matricu kojoj su gornji vektori stupci iz Teorema 18.4 jer translacija ne mijenja površinu slijedi da je

$$p(\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k}) + \nabla\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})(Q_{i_1,\ldots,i_k} - q_{i_1,\ldots,i_k})) = \sqrt{\det \mathbf{A}^T_{i_1,\ldots,i_k}\mathbf{A}_{i_1,\ldots,i_k}},$$

pa je

$$p(\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k}) + \nabla\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})(Q_{i_1,\ldots,i_k} - q_{i_1,\ldots,i_k})) = \sqrt{\det \nabla\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})^T \nabla\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})}h^k.$$

Slijedi

$$p(\boldsymbol{F}) \approx \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sqrt{\det \mathrm{D}\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})^T\, \mathrm{D}\boldsymbol{F}(q_{i_1,\ldots,i_k})}\nu(Q_{i_1,\ldots,i_k}).$$

Prepoznamo li ovaj izraz kao integralnu sumu slijedi definicija.

Definicija 19.1 *Neka je $Q \subset \mathbb{R}^k$ kvadar i $\boldsymbol{F} \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$. k-dimenzionalna površina karte $\boldsymbol{F}$ je broj*

$$p(\boldsymbol{F}) = \int_Q \sqrt{\det \nabla\boldsymbol{F}(u)^T \nabla\boldsymbol{F}(u)}du.$$

Zadatak 19.2 Neka $\boldsymbol{F} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definira sferne koordinate na sferi radijusa R u $\mathbb{R}^3$. Tada iz definicije slijedi da je

$$p(\boldsymbol{F}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

Zadatak 19.3 Neka je $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ i $f : Q \to \mathbb{R}$. Graf funkcije f, parametriziran je sa $\boldsymbol{F}(x) = (x, f(x))$. Pokažite da je površina dana formulom

$$p(\boldsymbol{F}) = \int_Q \sqrt{1 + |\nabla f|^2}.$$

U Zadatku 19.2 izračunali smo površinu karte koja parametrizira sferu i dobili poznatu vrijednost površine sfere radijusa R. Naravno, da bi taj broj mogli pridijeliti površini sfere moramo pokazati da je neovisan o parametrizaciji.

Definicija 19.4 *Skup $D \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo (glatka) k-**ćelija** ako postoji injektivno preslikavanje $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, gdje je $I^k \subset U$, takvo da vrijedi $\varphi(I^k) = D$ i $\nabla\varphi(x)$ je maksimalnog ranga k za svaki $x \in U$. Preslikavanje $\varphi|_{I^k}$ nazivamo **parametrizacija** od D.*

Napomena 19.5 Primijetite da je sasvim svejedno je li parametrizacija definirana na I^k ili nekom kvadru u $\mathbb{R}^k$ jer je prijelaz afin.

Teorem 19.6 *Neka su φ i ψ dvije parametrizacije k-ćelije $A \subset \mathbb{R}^n$. Tada je*

$$p(\varphi) = p(\psi).$$

Dokaz. Jer su φ i ψ injekcije slijedi da je dobro definirana bijekcija

$$T : I^k \to I^k, \qquad T = \psi^{-1} \circ \varphi.$$

Neka je $x_0 \in I^k$. Jer je $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ parametrizacija $\nabla\psi(x_0)$ je $n \times k$ matrica ranga k. Prenumerirajmo sada koordinate kodomene tako da je prvih k redaka matrice $\nabla\psi(x_0)$ nezavisno, tj. da je ta $k \times k$ podmatrica regularna. Neka je $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ projekcija na prvih k koordinata $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k)$. Stoga funkcija

$$f = \pi \circ \psi : I^k \to \mathbb{R}^k$$

ima regularan $\nabla f(x_0)$ i klase je C^1, pa možemo primijeniti teorem o inverznom preslikavanju. Zato postoje otvoreni skupovi $x_0 \in U' \subset U$ i $\pi(\psi(x_0)) \in V' \subset \mathbb{R}^k$ i funkcija $g : V' \to U'$ klase C^1 inverzna funkciji f na U'. Stoga je $g \circ \pi$ klase C^1 i lokalni inverz za ψ. Zaključujemo da je T funkcija klase C^1.

Jer je $\varphi = \psi \circ T$ slijedi

$$\nabla\varphi^T \nabla\varphi = (\nabla\psi \circ T \nabla T)^T \, \nabla\psi \circ T \nabla T = \nabla T^T \nabla\psi^T \nabla\psi \nabla T,$$

pa je

$$\sqrt{\det \nabla\varphi^T \nabla\varphi} = \sqrt{\det\left(\nabla T^T \nabla\psi^T \circ T \nabla\psi \circ T \nabla T\right)} = \sqrt{\det \nabla\psi^T \circ T \nabla\psi \circ T} |\det \nabla T|.$$

Stoga zamjena varijabli u integralu površine daje

$$p(\varphi) = \int_{I^k} \sqrt{\det \nabla\varphi^T \nabla\varphi} = \int_{I^k} \sqrt{\det \nabla\psi^T \circ T \nabla\psi \circ T} |\det \nabla T| = \int_{I^k} \sqrt{\det \nabla\psi^T \nabla\psi} = p(\psi).$$

□

Sad smo u stanju definirati površinu k-ćelije jer je površina jednaka za različite parametrizacije.

Definicija 19.7 *Neka je D k-ćelija u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$p(D) = p(\varphi),$$

gdje je $\varphi|_{I^k}$ neka parametrizacija od D.

Napomena 19.8 Ovdje bismo mogli proširiti definiciju površine i na skupove koji su unija k-ćelija koje se sijeku samo u vrhovima ili samo na stranicama, slično kao u slučaju 2-ćelija kod Greenovog teorema.

20 Diferencijalne forme

Ranije smo definirali diferencijalnu 1-formu ω na $U \subset \mathbb{R}^n$ kao preslikavanje

$$\omega : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

te pokazali da se može prikazati u bazi projektora na pojedinu koordinatu sa

$$\omega = a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n,$$

gdje $a_1, \ldots, a_n : U \to \mathbb{R}$ nazivamo koeficijenti forme. Sada definiramo diferencijalne k-forme.

Definicija 20.1 ***Diferencijalna*** k***-forma*** *μ na $U \subset \mathbb{R}^n$ je preslikavanje*

$$\mu : U \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n),$$

gdje $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ označava skup svih alternirajućih k-multilinearnih funkcija na $\mathbb{R}^n$.

Po Teoremu 18.1 svaka se k-multilinearna funkcija na jedinstven način može napisati kao linearna kombinacija "multidiferencijala" $d\boldsymbol{x}_I$, pa postoje funkcije $m_I : U \to \mathbb{R}$, koeficijenti forme, takve da je

$$\mu(x) = \sum_{[I]} m_I(x) d\boldsymbol{x}_I,$$

gdje $[I]$ označava sumaciju po svim rastućim k-torkama $I = (i_1, \ldots, i_k)$, takvim da je $1 \leq i_r \leq n$ (da bi imali jedinstvenost koeficijenata, tj. prikaza).

Definicija 20.2 *Diferencijalna k-forma je* ***neprekidna (diferencijalna, klase*** *C^1) ako su koeficijenti forme m_I neprekidne (diferencijabilne, klase C^1).*

Primjer 20.3 Svaka diferencijalna 2-forma na $\mathbb{R}^3$ oblika je

$$\mu(x) = m_{(1,2)}(x) d\boldsymbol{x}_{(1,2)} + m_{(1,3)}(x) d\boldsymbol{x}_{(1,3)} + m_{(2,3)}(x) d\boldsymbol{x}_{(2,3)},$$

dok je svaka diferencijalna 3-forma na $\mathbb{R}^3$ oblika

$$\lambda = l_{(1,2,3)}(x) d\boldsymbol{x}_{(1,2,3)}.$$

Uobičajena notacija za multidiferencijale je

$$d\boldsymbol{x}_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

za $I = (i_1, \ldots, i_k)$.

Ako je $\mathbf{A} \in M_{n,k}$ matrica kojoj su stupci $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ slijedi

$$d\boldsymbol{x}_I(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \det \mathbf{A}_I,$$

gdje smo sa $\mathbf{A}_I$ označavali matricu kojoj je r-ti redak i_r-ti redak matrice $\mathbf{A}$. Stoga ako je $i_r = i_s$ dva su retka matrice $\mathbf{A}_I$ jednaka pa joj je determinanta jednaka 0, pa je tada

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0.$$

Specijalno je

$$dx_i \wedge dx_i = 0. \tag{20.1}$$

Slično, koristeći ponašanje determinante na zamjenu redaka matrice, možemo pokazati i

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i. \tag{20.2}$$

Množenje formi definirano je prvo za multidiferencijale

$$d\boldsymbol{x}_I \wedge d\boldsymbol{x}_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_s},$$

za multiindekse $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $J = (j_1, \ldots, j_s)$. Sada se lako proširuje na produkt k-forme i l-forme

$$\lambda = \sum_{[I]} l_I d\boldsymbol{x}_I, \qquad \mu = \sum_{[J]} m_J d\boldsymbol{x}_J.$$

Njihov produkt (nekad zvan i vanjsko množenje ili vanjski produkt) je diferencijalna $(k+l)$-forma definirana sa

$$\lambda \wedge \mu = \sum_{[I],[J]} l_I m_J d\boldsymbol{x}_I \wedge d\boldsymbol{x}_J.$$

Dobiveni rezultat nije zapisan na uobičajen način jer $k+l$-torke nisu rastuće, no jasno je da se korštenjem svojstava (20.1) i (20.2) to jednostavno napravi.

Primijetite da u slučaju $k + l > n$ slijedi $\lambda \wedge \mu = 0$.

Zadatak 20.4 Pokažite da vrijedi

$$\mu \wedge \lambda = (-1)^{kl} \lambda \wedge \mu.$$

Od ranije znamo da je diferencijal funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj. 0-forme, diferencijalna 1-forma koja je dana sa

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Definicija 20.5 *Neka je $\mu = \sum_{[I]} m_I d\boldsymbol{x}_I$ diferencijalna k-forma klase C^1 definirana na $U \subset \mathbb{R}^n$. Diferencijal $d\mu$ je diferencijalna $(k+1)$-forma na U definirana sa*

$$d\mu = \sum_{[I]} (dm_I) \wedge d\boldsymbol{x}_I.$$

Direktno iz definicije, a zbog multilinearnosti, vrijedi:

Zadatak 20.6 Neka su μ i λ diferencijalne k-forme klase C^1. Pokažite da vrijedi

$$d(\mu + \lambda) = d\mu + d\lambda.$$

Štoviše pokažite da je d linearan.

Primjer 20.7 Neka je $\omega = Pdx + Qdy$ diferencijalna 1-forma na $\mathbb{R}^2$. Sada je prema definiciji

$$d\omega = (dP) \wedge dx + dQ \wedge dy = (\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy) \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy.$$

Stoga je

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Propozicija 20.8 *Neka je μ diferencijalna k-forma klase C^2 na otvorenom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$. Tada je $d(d\mu) = 0$.*

Dokaz. Iz Zadatka 20.6 slijedi da je dovoljno pokazati tvrdnju za

$$\mu = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}.$$

Iz definicije diferencijala slijedi

$$d\mu = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik},$$

pa je

$$d(d\mu) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{ik}.$$

No, kako se, zbog Schwarzovog teorema, u ovoj sumi javljaju članovi $dx_r \wedge dx_s$ i $dx_s \wedge dx_r$ s istim koeficijentom zbog (20.2) slijedi da je čitava suma jednaka nuli. $\square$

Vrijedi i formula za diferencijal produkta (dokažite sami).

Teorem 20.9 *Neka je μ diferencijalna k-forma, a λ diferencijalna l-forma, obje klase C^1 na $U \subset \mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$d(\mu \wedge \lambda) = d\mu \wedge \lambda + (-1)^k \mu \wedge d\lambda.$$

Sad smo spremni za definiciju integrala diferencijalne k-forme po k-dimenzionanoj karti. Podsjetimo da je integral 1-forme ω duž puta $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ bio definiran sa

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definicija 20.10 *Neka je μ diferencijalna k-forma klase C^1 na $\mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^k$ k-dimenzionalni kvadar i $\varphi \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$ k-dimenzionalna karta. Tada broj*

$$\int_\varphi \mu = \int_Q \mu(\varphi(u))(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u))du_1 \cdots du_k$$

*nazivamo **integral forme μ po karti** φ.*

Integral na desnoj strani je klasični integral realne funkcije po kvadru.

Primjer 20.11 U slučaju kad je $k = n$ i $\mu = m dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ slijedi (korištenjem definicije $d\boldsymbol{x}_I$)

$$\begin{aligned} \int_\varphi \mu &= \int_Q m \circ \varphi(u) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n}(u) \right) du_1 \cdots du_n \\ &= \int_Q m \circ \varphi(u) \det \nabla \varphi(u) du_1 \cdots du_n. \end{aligned}$$

Stoga za φ koji je jednak identiteti slijedi

$$\int_Q \mu = \int_Q m.$$

Za dokaz Greenovog teorema na 2-ćeliji ključnu ulogu igrao je povlak. Sada generaliziramo taj pojam na k-forme.

Definicija 20.12 *Neka je $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (koordinate u domeni su u_j, a kodomeni x_i).*

1° ***Povlak*** *diferencijalne 0-forme f je 0-forma $\varphi^*(f)$ definirana sa*

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

2° ***Povlak*** *diferencijala dx_i je diferencijalna 1-forma $\varphi^*(dx_i)$ definirana sa*

$$\varphi^*(dx_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} du_j = d\varphi_i.$$

3° *Definiciju sada proširujemo na proizvoljnu formu koristeći svojstva*

(i) $\varphi^*(f\mu) = f \circ \varphi \varphi^*(\mu)$,

(ii) $\varphi^*(\mu \wedge \lambda) = \varphi^*(\mu) \wedge \varphi^*(\lambda)$,

(iii) $\varphi^*(\mu + \lambda) = \varphi^*(\mu) + \varphi^*(\lambda)$.

Primjer 20.13 Provjerimo da je ova definicija u skladu s onom koju smo dali za 1-formu $\omega = Pdx + Qdy$ i povlak φ.

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^*(Pdx) + \varphi^*(Qdy) = P \circ \varphi\varphi^*(dx) + Q \circ \varphi\varphi^*(dy) = P \circ \varphi d\varphi_1 + Q \circ \varphi d\varphi_2.$$

Lema 20.14 *Neka su $\omega_1, \ldots, \omega_k$ diferencijalne 1-forme na $\mathbb{R}^k$ dane sa*

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} du_j, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Označimo li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vrijedi

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \det \mathbf{A} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

Dokaz. Množenjem slijedi

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_k=1}^{k} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_k}.$$

Označimo $J = (j_1, \ldots, j_k)$ i $\sigma(J)$ parnost permutacije. Slijedi

$$du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_k} = \sigma(J) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k,$$

pa dobivamo

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = \sum_J \sigma(J) a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \det \mathbf{A} du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

□

Sada možemo dokazati jedno od svojstava povlaka kao u Lemi 17.25.

Teorem 20.15 *Neka je $\varphi \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$ k-dimenzionalna karta i μ diferencijalna k-forma na $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$\int_\varphi \mu = \int_Q \varphi^*(\mu).$$

Dokaz. Zbog aditivnosti povlaka dovoljno je dokazati teorem za forme oblika $\mu = m dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Korištenjem Leme 20.14 slijedi

$$\varphi^*(\mu) = m \circ \varphi \varphi^*(dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dx_{i_k}) = m \circ \varphi d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} = m \circ \varphi \det \left(\frac{\partial \varphi_{i_r}}{\partial u_j} \right) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

S druge strane iz definicije integrala slijedi

$$\begin{aligned} \int_\varphi \mu &= \int_Q m(\varphi(u)) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u) \right) du_1 \cdots du_k \\ &= \int_Q m(\varphi(u)) \det \left(\frac{\partial \varphi_{i_r}}{\partial u_j}(u) \right) du_1 \cdots du_k, \end{aligned}$$

pa smo dobili tvrdnju teorema. □

Ovaj nam teorem daje i način kako efektivno računati integral forme. Neka je $\mu = f dy \wedge dz$ diferencijalna 2-forma klase C^1 na $\mathbb{R}^3$, a $\varphi \in C^1(Q, \mathbb{R}^3)$ 2-dimenzionalna karta. Slijedi

$$\int_\varphi \mu = \int_Q \varphi^*(\mu) = \int_Q \varphi^*(f dy \wedge dz) = \int_Q f \circ \varphi \varphi^*(dy) \wedge \varphi^*(dz) = \int_Q f \circ \varphi d\varphi_2 \wedge d\varphi_3.$$

Osim toga Teorem 20.15 poopćenje je Leme 17.25 koja je bila važna za dokaz Greenovog teorema. Na isti način iskoristit ćemo Teorem 20.15 za dokaz Stokesovog teorema. Trebat će nam još i naredni rezultat.

Teorem 20.16 *Neka je $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ i μ diferencijalna k-forma klase C^1 na $\mathbb{R}^n$. Tada vrijedi*

$$d(\varphi^*(\mu)) = \varphi^*(d\mu).$$

Dokaz. Za $k = 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \varphi^*(d\mu) &= \varphi^* \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_j} dx_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \circ \varphi \, \varphi^*(dx_j) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \circ \varphi \, d\varphi_j \\ &= d\mu \circ \varphi d\varphi = d(\mu \circ \varphi) = d(\varphi^*(\mu)). \end{aligned}$$

Neka je sada $k = 1$, tj. $\mu = m dx_i$, za neki $1 \leq i \leq n$. Sada je $d\mu = dm \wedge dx_i$. Stoga vrijedi

$$\varphi^*(d\mu) = \varphi^*(dm) \wedge \varphi^*(dx_i) = d\varphi^*(m) \wedge d\varphi_i = d(\varphi^*(m) \wedge d\varphi_i) = d(\varphi^*(m \wedge dx_i)) = d(\varphi^*(\mu)).$$

Dokaz dalje ide indukcijom po k, uz m koja je diferencijalna $k-1$-forma. □

Definiramo formu površine plohe za k-ćeliju $D \subset \mathbb{R}^n$ kao diferencijalnu k-formu danu sa

$$dA = \sum_{[I]} n_I d\boldsymbol{x}_I,$$

gdje su funkcije n_I definirane na sljedeći način: neka je $I = (i_1, \ldots, i_k)$ i $x \in D$ i neka je $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ parametrizacija k-ćelije, $x = \varphi(u)$; tada je

$$n_I(x) = \frac{1}{\Delta} \det \nabla\varphi_I(u) = \frac{1}{\Delta} \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(u),$$

gdje je

$$\Delta = \sqrt{\det \nabla\varphi(u)^T \nabla\varphi(u)} = \sqrt{\sum_{[I]} (\det \nabla\varphi_I(u))^2}.$$

Da bi pokazali da je definicija dobra, moramo pokazati neovisnost funkcija n_I o parametrizaciji. Pa neka je $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ druga parametrizacija od D sa svojstvom da je $\det \nabla T(u) > 0$, gdje je

$$T = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)) \to \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V)).$$

Onda je $\varphi = \psi \circ T$, pa iz derivacije kompozicije slijedi

$$\det \nabla\varphi_J(u) = \det \nabla(\psi \circ T)_J(u) = \det \nabla(\psi_J \circ T)(u) = \det \nabla\psi_J \circ T(u) \det \nabla T(u).$$

Vidimo da se faktor $\det \nabla T(u)$, koji je pozitivan krati u brojniku i nazivniku izraza n_I.

Napomena 20.17 Primijetite da ukoliko je $\det \nabla T < 0$ dobili bi n koji je točno suprotnog predznaka. U pozadini je zapravo orijentacija k-ćelije. Uz zahtijev $\det \nabla T > 0$ reći ćemo da su parametrizacije **usuglašene orijentacije**, a ako je $\det \nabla T < 0$ da su **suprotne orijentacije**. To nas vodi i na definiciju orijentirane ćelije.

Definicija 20.18 *Uređeni par (D, φ) ćelije D i jedne parametrizacije φ nazivamo* ***orijentirana k-ćelija****.*

Sada je forma površine k-ćelije dobro definirana za orijentiranu ćeliju (D, φ) (ali ne i samo za k-ćeliju). Uzmemo li suprotno orijentiranu ćeliju njena forma površine plohe bit će upravo suprotna po predznaku.

Primjer 20.19 Izračunajmo formu površine plohe za 2-ćeliju u $\mathbb{R}^3$. Neka je $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija ćelije. Tada je za svaki $u \in U$ tangencijalna ravnina na ćeliju u $\varphi(u)$ razapeta sa $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u)$ i $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)$. Stoga je vektor jedinične normale dan sa

$$\boldsymbol{N}(\varphi(u)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u)\|}.$$

Korištenjem identiteta $\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ za sve $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ dobivamo

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right\|^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right)^2.$$

S druge strane

$$\Delta^2(u) = \det\left(\nabla\varphi^T(u) \nabla\varphi(u)\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) & \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \end{vmatrix} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right\|^2.$$

Sada računamo $n_{(1,2)}, n_{(1,3)}$ i $n_{(2,3)}$:

$$\begin{aligned} n_{(1,2)} &= \frac{1}{\Delta} \det \nabla\varphi_{(1,2)} = N_3, \\ n_{(1,3)} &= \frac{1}{\Delta} \det \nabla\varphi_{(1,3)} = -N_2, \\ n_{(2,3)} &= \frac{1}{\Delta} \det \nabla\varphi_{(2,3)} = N_1. \end{aligned}$$

Stoga je

$$dA = N_3 dx \wedge dy - N_2 dx \wedge dz + N_1 dy \wedge dz.$$

Kako smo u Napomeni 20.17 zaključili predznak forme površine plohe određen je i određuje orijentaciju ćelije. Stoga u slučaju 2-ćelije u $\mathbb{R}^3$ vidimo da zadavanje normale odreduje orijentaciju ćelije. Iz narednog zadatka slijedit će da to vrijedi i u slučaju hiperploha, tj. $(n-1)$-ćelija u $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 20.20 Neka je $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ parametrizacija $n-1$ dimenzionalne ćelije u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo vektor $\boldsymbol{N}$ na ćeliji s komponentama

$$N_i(\varphi(u)) = \frac{(-1)^{i-1}}{\Delta} \det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}(u).$$

Pokažite da je tada $\boldsymbol{N}(\varphi(u))$ okomit na sve vektore $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(u)$, $k = 1, \ldots, n-1$, te je stoga jedinični normalni vektor u točki $\varphi(u)$ ćelije.

Pokažite također da vrijedi

$$dA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} N_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Direktan račun pokazuje da se površina karte može iskazati kao integral forme površine.

Teorem 20.21 *Neka je D k-ćelija u $\mathbb{R}^n$. Ako je $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ parametrizacija od D, tada vrijedi*

$$p(\varphi) = \int_\varphi dA,$$

pri čemu je u definiciji forme površine ćelija orijentirana s φ.

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= \int_Q \sqrt{\det \nabla\varphi(u)^T \nabla\varphi(u)}\, du_1 \cdots du_k = \int_Q \frac{1}{\Delta} \det(\nabla\varphi(u)^T \nabla\varphi(u)) du_1 \cdots du_k \\ &= \int_Q \frac{1}{\Delta} \sum_{[I]} (\det \nabla\varphi_I(u))^2 du_1 \cdots du_k = \int_Q \sum_{[I]} n_I(\varphi(u)) \det \nabla\varphi_I(u) du_1 \cdots du_k \\ &= \int_Q \sum_{[I]} n_I(\varphi(u)) d\boldsymbol{x}_I \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \right) du_1 \cdots du_k \\ &= \int_Q dA \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k} \right) du_1 \cdots du_k \\ &= \int_\varphi dA. \end{aligned}$$

$\square$

Iz Teorema 20.21 i Definicije 19.7 slijedi da površinu k-ćelije možemo zapisati i sa

$$p(D) = \int_{\varphi} dA, \tag{20.3}$$

gdje je φ neka parametrizacija od D. Motivirani ponašanjem površine definiramo integral k-forme po orijentiranoj k-ćeliji.

Definicija 20.22 *Neka je μ diferencijalna k-forma čija domena sadrži orijentiranu k-ćeliju (D, ψ). Neka je φ parametrizacija od D usuglašena s ψ. Broj*

$$\int_D \mu = \int_{\varphi} \mu$$

nazivamo ***integral diferencijalne k-forme po orijentiranoj k-ćeliji*** *(D, ψ).*

Slično kao i uvijek da bi pokazali da je definicija dobra moramo pokazati da ne ovisi o izboru parametrizacije od D. Dokaz slijedi direktno iz definicije korištenjem teorema o zamijeni varijabli.

Lema 20.23 *Neka je D k-ćelija u $\mathbb{R}^n$ i μ neprekidna diferencijalna k-forma definirana na D. Neka su $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ i $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ dvije parametrizacije od D sa svojstvom $\varphi(I^k) = \psi(I^k)$. Neka je $T = \psi^{-1} \circ \varphi : U \to V$. Neka su $X \subset U$ i $Y \subset V$ skupovi s površinom takvi da je $Y = T(X)$. Neka je $\overline{\varphi} = \varphi|_X$, $\overline{\psi} = \psi|_Y$. Tada je*

$$\int_{\overline{\varphi}} \mu = \int_{\overline{\psi}} \mu$$

ako su paramerizacije usuglašene orijentacije, dok je

$$\int_{\overline{\varphi}} \mu = -\int_{\overline{\psi}} \mu$$

ako su suprotne orijentacije.

Dokaz. Dokaz provodimo samo za $X = Y = I^k$. Također dovoljno je provesti dokaz za formu $\mu = m_I d\boldsymbol{x}_I$. Računamo

$$\int_{\overline{\varphi}} \mu = \int_{I^k} m_I \circ \overline{\varphi}(x) d\boldsymbol{x}_I(\nabla\overline{\varphi}(x)) dx_1 \cdots dx_k.$$

Jer je $\overline{\varphi} = \overline{\psi} \circ T$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\varphi}} \mu &= \int_{I^k} m_I \circ \overline{\psi} \circ T(x) d\boldsymbol{x}_I(\nabla\overline{\psi} \circ T(x) \nabla T(x)) dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int_{I^k} m_I \circ \overline{\psi} \circ T(x) \det\left(\nabla\overline{\psi}_I \circ T(x) \nabla T(x)\right) dx_1 \cdots dx_k \\
&= \int_{I^k} m_I \circ \overline{\psi} \circ T(x) \det\left(\nabla\overline{\psi}_I \circ T(x)\right) \det \nabla T(x) dx_1 \cdots dx_k.
\end{aligned}$$

Sada primjenjujemo teorem o zamjeni varijabli za $v = T(u)$, te dobivamo

$$\int_{\overline{\varphi}} \mu = \pm \int_{\overline{\psi}} \mu$$

u ovisnosti jesu li orijentacije φ i ψ usuglašene ili suprotne, redom. $\square$

Motivaciju za promatranje integrala diferencijalnih formi po ćelijama nalazimo na raznim stranama. Spomenimo dvije. Za 2-dimenzionalnu ćeliju $D \subset \mathbb{R}^3$ i funkciju $\rho : D \to \mathbb{R}$ koja označava površinsku gustoću mase slijedi da je masa ljuske dana sa

$$\int_D \rho dA.$$

Neka je D 2-ćelija u $\mathbb{R}^3$ orijentiranu jediničnom normalom $\boldsymbol{n}$ i neka $\boldsymbol{v}$ označava brzinu fluida. Tada fluks po granici D

$$\int_D \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA$$

mjeri protok kojim fluid prelazi ćeliju D u smjeru normale $\boldsymbol{n}$. Ako je K 3-ćelija u $\mathbb{R}^3$ s vanjskom jediničnom normalom $\boldsymbol{n}$ onda integral

$$\int_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dA$$

mjeri brzinu kojom fluid napušta K.

Zbog važnosti ova dva integrala uvode se i plošni integrali prve i druge vrste. Kod prvog se integriraju skalarne funkcije, a kod drugog vektorske.

Napomena 20.24 Neka je D 2-ćelija u $\mathbb{R}^3$ i $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Plošni integral funkcije f po ćeliji D definiran je sa

$$\int_D f dA = \int_\varphi f dA,$$

gdje je orijentacija u definicji forme površine dA usuglašena s $\varphi : I^2 \to D$. Vidimo da se zapravo radi o integralu forme površine dA pomnožene s f. Račun kao Teoremu 20.21 daje

$$\int_D f dA = \int_{I^2} f(\varphi(u)) \sqrt{\det \nabla\varphi(u)^T \nabla\varphi(u)} du_1 du_2. \tag{20.4}$$

S druge strane izračunali smo da je

$$\Delta(u) = \sqrt{\det\left(\nabla\varphi^T(u)\nabla\varphi(u)\right)} = \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right\|,$$

pa je

$$\int_D f dA = \int_{I^2} f(\varphi(u)) \sqrt{\det \nabla\varphi(u)^T \nabla\varphi(u)} du_1 du_2 = \int_{I^2} f(\varphi(u)) \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial\varphi}{\partial u_2}(u) \right\| du_1 du_2.$$

Formula (20.4) poopćava se i u slučaju k-ćelije u $\mathbb{R}^n$.

Za neprekidnu $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^3$ plošni integral druge vrste za orijentiranu 2-ćeliju D definiran je preko plošnog integrala prve vrste

$$\int_D \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_D \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} dA,$$

gdje je $\boldsymbol{n}$ jedinična normala sukladna orijentaciji.

Kako i kod krivuljnih integrala prvi integral ne ovisi o orijentaciji (već je jedino važno da orijentacija u definiciji dA bude usuglašena s φ), dok drugi integral mijenja predznak pri promjeni orijentacije.

21 Stokesov teorem

Podsjetimo se da Greenov teorem glasi

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

za diferencijalnu 1-formu ω na "dovoljno dobrom" području $D \subset \mathbb{R}^2$. Stokesov teorem iskazan je istom formulom samo za diferencijalnu $(k-1)$-formu μ i "dovoljno dobar" podskup R, k-dimenzionalne plohe $M \subset \mathbb{R}^n$, tj. vrijedi

$$\int_R d\mu = \int_{\partial R} \mu.$$

Greenov teorem je specijalan slučaj za $n = k = 2$, dok za $n = k = 1$ dobivamo Newton-Leibnizovu formulu.

Dokaz Stokesovog teorema slijedi kao u slučaju Greenovog teorema. Prvo ćemo tvrdnju dokazati za jediničnu kocku I^k u $\mathbb{R}^k$. Zatim ćemo koristeći povlak teorem dokazati za k-ćeliju na, te na kraju za uniju k-ćelija.

Jedinična kocka u $\mathbb{R}^k$ je skup

$$I^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_i \in [0,1]\}.$$

Rub kocke ∂I^k je unija $2k$ različitih $(k-1)$-dimenzionalnih stranica

$$I^{k-1}_{i,\delta} = \{(x_1, \dots, x_k) \in I^k : x_i = \delta\}, \qquad i = 1, \dots, k, \quad \delta \in \{0,1\}.$$

(i, δ) stranica $I^{k-1}_{i,\delta}$ od I^k je slika jedinične kocke I^{k-1} u $\mathbb{R}^{k-1}$ pri djelovanju preslikavanja

$$\iota_{i,\delta} : I^{k-1} \to \mathbb{R}^k, \qquad \iota_{i,\delta}(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, \delta, x_i, \dots, x_{k-1}).$$

U slučaju $k = 2$ ove parametrizacije generiraju orijentaciju kao na slici, pa je pozitivna orijentacija dana sa

$$\partial I^2 = -I^1_{1,0} + I^1_{1,1} - I^1_{2,1} + I^1_{2,0}.$$

Za neprekidnu diferencijalnu 1-formu ω integral po ∂I^2 je bio definiran sa

$$\int_{\partial I^2} \omega = -\int_{\iota_{1,0}} \omega + \int_{\iota_{1,1}} \omega - \int_{\iota_{2,1}} \omega + \int_{\iota_{2,0}} \omega = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta \int_{\iota,\delta}} \omega.$$

Sada analogno definiramo integral $(k-1)$-forme μ po rubu orijentirane kocke, $(\partial I^k, \mathrm{id})$:

$$\int_{\partial I^k} \mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{\iota_{i,\delta}} \mu.$$

Ovdje zapravo integriramo po stranicama kocke, a "pozitivna"orijentacija ruba je implicitno dana izborom predznaka u sumi na desnoj strani. Diferencijalna k-forma na $\mathbb{R}^k$ oblika je $\mu = m dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$. Njen integral po I^k uz parametrizaciju identitetom onda je jednak (vidi Primjer 20.11)

$$\int_{I^k} \mu = \int_{I^k} m,$$

gdje je na desnoj strani integral realne funkcije više varijabli. Kao i u slučaju Greenovog teorema naredni teorem dokazujemo direktnim računom.

Teorem 21.1 (Stokesov teorem za jediničnu kocku) *Neka je μ diferencijalna $(k-1)$-forma klase C^1 definirana na otvorenom nadskupu od $I^k \subset \mathbb{R}^k$. Tada vrijedi*

$$\int_{I^k} d\mu = \int_{\partial I^k} \mu. \tag{21.1}$$

Dokaz. Po Teoremu 18.1 slijedi da je

$$\mu = \sum_{[I]} m_I d\boldsymbol{x}_I,$$

gdje suma de po svim rastućim $(k-1)$-torkama brojeva iz $\{1, \ldots, k\}$. Stoga u svakoj $(k-1)$-torci nedostaje točno jedan element skupa $\{1, \ldots, k\}$, pa formu μ možemo zapisati i sa

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} m_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

gdje $\widehat{dx_i}$ znači da smo ispustili taj diferencijal, te su m_i realne funkcije klase C^1. Slijedi

$$\begin{aligned}
d\mu &= \sum_{i=1}^{k} dm_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial m_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{\partial m_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k.
\end{aligned}$$

Sada računamo obje strane u (21.1). Prvo

$$\begin{aligned}
\int_{I^k} d\mu &= \int_{I^k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{\partial m_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \int \left(\int_0^1 \frac{\partial m_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \int \left(m_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k) \right. \\
&\qquad \left. - m_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k) \right) dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_k \\
&= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \left(\int_{\iota_{i,1}} m_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k - \int_{\iota_{i,0}} m_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k \right).
\end{aligned}$$

Na rubu izraze računamo odvojeno

$$
\begin{aligned}
\int_{\iota_{i,\delta}} \mu &= \int_{\iota_{i,\delta}} \sum_{j=1}^{k} m_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \\
&= \int_{I^{k-1}} \sum_{j=1}^{k} m_j \circ \iota_{i,\delta} \iota_{i,\delta}^* (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k) \\
&= \int_{I^{k-1}} \sum_{j=1}^{k} m_j \circ \iota_{i,\delta} \iota_{i,\delta}^* (dx_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\iota_{i,\delta}^*(dx_j)} \wedge \cdots \wedge \iota_{i,\delta}^*(dx_k) \\
&= \int_{I^{k-1}} m_i \circ \iota_{i,\delta} \iota_{i,\delta}^* (dx_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{\iota_{i,\delta}^*(dx_i)} \wedge \cdots \wedge \iota_{i,\delta}^*(dx_k) \\
&= \int_{\iota_{i,\delta}} m_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_k.
\end{aligned}
$$

Sada slijedi

$$
\int_{I^k} d\mu = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \left(\int_{\iota_{i,1}} \mu - \int_{\iota_{i,0}} \mu \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i-1} (-1)^{\delta+1} \int_{\iota_{i,\delta}} \mu = \int_{\partial I^k} \mu.
$$

□

Neka je sada $U \supset I^k$ otvoren i D k-ćelija parametrizirana sa $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, te (D, φ) orijentirana k-ćelija. I sada će parametrizacija φ preslikavati interior kocke na interior ćelije, te rub na rub. (i, δ)-stranica $D_{i,\delta} = \varphi(I_{i,\delta}^{k-1})$, pa je

$$
D_{i,\delta} = \varphi_{i,\delta}(I^{k-1}), \qquad \varphi_{i,\delta} = \varphi \circ \iota_{i,\delta} : I^{k-1} \to \mathbb{R}^n.
$$

Za diferencijalnu $(k-1)$-formu μ definiranu na orijentiranoj k-ćeliji (D, φ) definiramo

$$
\int_{\partial D} \mu = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{\varphi_{i,\delta}} \mu.
$$

I ovdje je ponovno, izborom predznaka, implicitno određena "pozitivna"orijentacija ∂D u donosu na (D, φ).

Teorem 21.2 (Stokesov teorem za orijentiranu k-ćeliju) *Neka je (D, φ) orijentirana k-ćelija u $\mathbb{R}^n$ i neka je μ diferencijalna $(k-1)$-forma definirana na otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$ koji sadrži D. Tada je*

$$
\int_D d\mu = \int_{\partial D} \mu.
$$

Dokaz. Računamo koristeći svojstva povlaka

$$
\begin{aligned}
\int_D d\mu &= \int_{\varphi} d\mu = \int_{I^k} \varphi^*(d\mu) = \int_{I^k} d\varphi^*(\mu) = \int_{\partial I^k} \varphi^*(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{\iota_{i,\delta}} \varphi^*(\mu) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\delta=0}^{1} (-1)^{i+\delta} \int_{\varphi_{i,\delta}} \mu = \int_{\partial D} \mu.
\end{aligned}
$$

□

Napomena 21.3 Sad možemo nastaviti na isti način kao kod dokaza Greenovog teorema i zaključiti da vrijedi tvrdnja Stokesovog teorema za skupove koji se mogu prikazati kao unija orijentiranih k-ćelija koje su s međusobno disjunktnim presjekom ili s presjekom u stranicama ćelije. Naime, na sličan način integrali po stranicama ćelija koje su unutrašnje će se skratiti.

Skup $M \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo k-dimenzionalna ploha (mnogostrukost) u $\mathbb{R}^n$ ako svaka točka iz M leži u otvorenom skupu $V \subset \mathbb{R}^n$ takvom da je $V \cap M$ parametriziran s kartom $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to V \cap M$. Plohu nazivamo klase C^1 ili **glatka ploha** ako je unija slika glatkih karata.

Glatka k-dimenzionalna ploha M u $\mathbb{R}^n$ je skup koji lokalno izgleda kao $\mathbb{R}^k$. Važan nam je naredni rezultat.

Teorem 21.4 *Za svaku kompaktnu glatku k-dimenzionalnu plohu M u $\mathbb{R}^n$ postoji konačno k-ćelija $D_1, \ldots, D_r \subset \mathbb{R}^n$ takvih da je $M = \cup_{i=1}^r D_i$ takvih da je $\operatorname{Int} D_i \cap \operatorname{Int} D_j = \emptyset$ za $i \neq j$.*

Ako su sve karte k-plohe usuglašene onda je na plohi definirana orijentacija, te govoriomo o orijentiranoj k-plohi.

Najćešće primjene Stokesovog teorema su za kompaktne, orijentirane, po dijelovima glatke k-plohe s rubom. To je kompaktan skup V podskup orijentirane k-plohe $M \subset \mathbb{R}^n$ takav da je ∂V po dijelovim glatka $(k-1)$-dimenzionalna ploha. Može se pokazati da se orijentacija prirodno prenosi sa M na ∂V.

Teorem 21.5 (Stokesov teorem) *Neka je $V \subset M$ orijentirana kompaktna po dijelovima glatka k-ploha s rubom, gdje je $M \subset \mathbb{R}^n$ orijentirana po dijelovima glatka k-ploha. Neka je ∂V pozitivne orijentacije i μ je diferencijalna $(k-1)$-forma klase C^1 definirana na otvorenom skupu koji sadrži V. Tada vrijedi*

$$\int_V d\mu = \int_{\partial V} \mu.$$

22 Klasični teoremi vektorske analize

Teorem o divergenciji slijedi iz Stokeosvog teorema za $k = n - 1$ i za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$, ne samo $n = 2$. Preciznije vrijedi

Teorem 22.1 (Teorem o divergenciji, Gaussov teorem) *Neka je $\boldsymbol{F}$ klase C^1 na okolini kompaktne n-plohe s rubom $V \subset \mathbb{R}^n$. Tada vrjedi*

$$\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA,$$

gdje je $\boldsymbol{N}$ jedinična vanjska normala na ∂V, a dA forma površine pozitivno orijentiranog ruba ∂V.

Dokaz. Dokaz zapravo provodimo za ćeliju parametriziranu s φ. Iz Zadatka 20.20 znamo zapis $n-1$ dimenzionalne forme površine dA, te slijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA &= \int \sum_{i=1}^{n} F_i N_i dA(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}) \\
&= \int \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} F_i N_i (-1)^{j-1} N_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_n (\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}) du \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int F_i (-1)^{j-1} N_i N_j \det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} du
\end{aligned}$$

Opet iz Zadatka 20.20 znamo i formulu za komponente normale

$$N_j = \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta} \det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})}. \tag{22.2}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int F_i (-1)^{j-1} N_i \frac{(-1)^{j-1}}{\Delta} \left(\det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right)^2 du \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int F_i N_i \frac{1}{\Delta} \left(\det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right)^2 du \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int F_i(\varphi(u)) N_i(\varphi(u)) \Delta du,
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili

$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right)^2.$$

Sada, ponovno koristeći (22.2) vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA &= \sum_{i=1}^{n} \int F_i(\varphi(u))(-1)^{i-1} \det \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} du \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int F_i(\varphi(u))(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}\Big) du \\
&= \int_{\partial V} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}
\tag{22.3}
$$

Definirajmo $(n-1)$–formu

$$
\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.
$$

Onda je

$$
\begin{aligned}
d\alpha &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} dF_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = (\operatorname{div} \boldsymbol{F}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}
$$

Sada Stokesov teorem povlači tvrdnju

$$
\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} = \int_V d\alpha = \int_{\partial V} \alpha = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA.
$$

□

Klasična formulacija Stokesovog teorema za $n = 3$ i $k = 2$ dana je u narednom teoremu. Neka je U otvoren i $\boldsymbol{F} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Definiramo $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} : U \to \mathbb{R}^3$ sa

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}.
$$

Neka je D orijentirana glatka 2-ploha u $\mathbb{R}^3$. Jer je D orijentirana, slijedi da je jedinstveno određena jedinična normala $\boldsymbol{N}$ na D. Za kartu φ vrijedi

$$
\boldsymbol{N} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \times \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \right|}.
$$

Ako je $\boldsymbol{n}$ jedinična vanjska normala na ∂D tangencijalna na D, tada je jedinični tangencijalni vektor na ∂D dan sa

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{n}.$$

Štoviše, za ravninski D, ovakva definicija generira pozitivnu orijentaciju na ∂D (u smislu korištenom u Greenovom teoremu).

Teorem 22.2 (Klasični Stokesov teorem) *Neka je D orijentirana kompaktna 2-ploha s rubom u $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{T}$ jedinična normala na D i jedinična tangenta na ∂D, definirane gore. Ako je $\boldsymbol{F}$ klase C^1 definirana na otvorenom skupu koji sadrži D, tada vrijedi*

$$\int_D \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds.$$

Dokaz. Neka je

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Slijedi

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds.$$

Računamo $d\omega$:

$$\begin{aligned}
d\omega &= dF_1 \wedge dx + dF_2 \wedge dy + dF_3 \wedge dz \\
&= (\frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz) \wedge dx + (\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz) \wedge dy + (\frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy) \wedge dz \\
&= (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}) dx \wedge dz + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) dx \wedge dy \\
&= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} G_i dx_1 \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_3,
\end{aligned}$$

gdje je $\boldsymbol{G} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, t.j.,

$$G_1 = \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \qquad G_2 = \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad G_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Stoga iz formule (22.3) iz dokaza Teorema o divergenciji (Teorem 22.1) dobivamo

$$\int_D d\omega = \int_D \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} G_i dx_1 \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_3 = \int_D \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{N} dA.$$

Stokesov teorem sada povlači tvrdnju

$$\int_D \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N} dA = \int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} ds.$$

$\square$

Definicija 22.3 *Neka je μ diferencijalna k-forma definirana na otvorenom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$. μ nazivamo* ***zatvorena*** *(na U) ako je $d\mu = 0$. μ nazivamo* ***egzaktna*** *(na U) ako postoji $(k-1)$-forma ω na U takva da je $d\omega = \mu$.*

Kako iz Propozicije 20.8 slijedi da je $d(d\omega) = 0$ slijedi da je svaka egzaktna forma ujedno i zatvorena. Zanima nas možemo li štogod reći o obratu. Iz Teorema 17.31 slijedi da je svaka zatvorena 1-forma, definirana na čitavom $\mathbb{R}^2$ ujedno i egzaktna. No, iz Primjera 16.8 slijedi da je 1-forma ω zatvorena, no nije egzaktna. Stoga zaključujemo da će obrat ovisiti o domeni.

Skup U je zvjezdast ako postoji točka $p \in U$ takva da je za svaki $x \in U$ skup $[a, x] \in U$.

Teorem 22.4 *Svaka zatvorena diferencijalna k-forma klase C^1 na zvjezdastom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$ je egzaktna.*

Dvije su značajne poslijedice ovog teorema. Lako se računom pokaže da za funkcije $\boldsymbol{G} \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ vrijedi

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G} \Longrightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0,$$
$$\boldsymbol{F} = \nabla f \Longrightarrow \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0.$$

Teorem 22.4 povlači da za zvjezdast U vijedi i obrat.

Teorem 22.5 *Neka je $U \subset \mathbb{R}^3$ zvjezdast i $\boldsymbol{F} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. tada vrijedi*

1° $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$ *ako i samo ako postoji $F : U \to \mathbb{R}$ takav da je $\boldsymbol{F} = \nabla f$,*

2° $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ *ako i samo ako postoji $\boldsymbol{G} : U \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$.*

Dokaz. 1° $\Longleftarrow$ Ovaj smjer se provjeri direktnim računom.

$\Longrightarrow$ Neka je $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$. Definiramo formu

$$\alpha = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Sada je (kao u dokazu Teorema 22.2)

$$d\alpha = (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_1 dy \wedge dz - (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_2 dx \wedge dz + (\operatorname{rot} \boldsymbol{F})_3 dx \wedge dy.$$

Iz pretpostavke slijedi da je $d\alpha = 0$. Iz Teorema 22.4 sada slijedi da postoji f takva da je $\alpha = df$, t.j., $\boldsymbol{F} = \nabla f$.

2° $\Longleftarrow$ Ovaj smjer se provjeri direktnim računom.

$\Longrightarrow$ Neka je $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$. Definiramo formu

$$\beta = F_1 dy \wedge dz - F_2 dx \wedge dz + F_3 dx \wedge dz.$$

Slijedi

$$d\beta = \operatorname{div} \boldsymbol{F} dx \wedge dy \wedge dz.$$

Jer je $d\beta = 0$ po pretpostavci, prema Teoremu 22.4 slijedi da je β egzaktna. Stoga postoji 1-forma γ takva da je $\beta = d\gamma$. Općenita 1-forma glasi

$$\gamma = G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz.$$

Direktan račun daje $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$. □