Diferencijalni račun funkcija više varijabli

Ilja Gogić, Pavle Pandžić i Josip Tambača

3. veljače 2021.

Sadržaj

Literatura

- S. Mardešić, Matematička analiza, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- Š. Ungar, Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.
- S. Lang, Calculus of Several Variables, Springer Verlag, 1993.
- S. Kurepa, Matematička analiza 3: Funkcije više varijabli, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw - Hill,1964.
- V. A. Zorich, Mathematical Analysis I, II, Springer Verlag, 2003.
- J.E. Marsden, M.J. Hoffman, Elementary Classical Analysis, W.H. Freeman and Company, New York, 1974, 1993.

1 Uvod

Osnovna pitanja matematičke analize realnih funkcija realne varijable su konvergencija nizova, limes funkcije, neprekidnost funkcije, derivabilnost. Tako je na primjer funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u točki c ako postoji $d \in \mathbb{R}$ (onda će biti $d = f'(c)$) tako da vrijedi

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - d \right) = 0.$$

Želimo li razmatrati diferencijabilnost funkcije $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, za $m, n \in \mathbb{N}$, željeli bismo napisati sličnu formulu. Svakako ćemo za to morati reći što znači $x \to c$, te što znači $\lim_{x \to c} h(x) = 0$ (tu smo odmah blizu pitanjima neprekidnosti funkcije). U tome će nam svakako pomoći pojam limesa niza u $\mathbb{R}^n$, te svojstva skupova u $\mathbb{R}^n$ (skupovi su svakako složeniji od onih u $\mathbb{R}$). U $\mathbb{R}$ smo "udaljenost" mjerili apsolutnom vrijednošću $|x - c|$ (udaljenost od x do c), te nam je ona pomogla da definiramo pojam konvergencije. Sličnu funkciju udaljenosti sada trebamo u $\mathbb{R}^n$.

2 Struktura prostora $\mathbb{R}^n$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ ambijent je u kome ćemo izučavati realnu analizu.

Definicija 2.1. *Skup $\mathbb{R}^n$ sastoji se od svih uređenih n-torki realnih brojeva:*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Stoga je $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n puta) Kartezijev produkt n kopija skupa $\mathbb{R}$.

Uz koordinatno definirano zbrajanje i množenje skalarom (iz $\mathbb{R}$):

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n), \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

skup $\mathbb{R}^n$ postaje realan vektorski prostor. Stoga elemente prostora $\mathbb{R}^n$ ponekad zovemo točke, a ponekad vektori. Dimenzija prostora jednaka je n jer vektori

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \cdots \quad , \boldsymbol{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

čine jednu bazu tog prostora koju obično nazivamo kanonska baza.

Definicija 2.2. *Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definiramo*

1° *skalarni produkt*

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

2° *norma*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

3° *metrika*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Teorem 2.3. *Ove funkcije zadovoljavaju*

1° *svojstva skalarnog produkta*

(i) $(x|x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $(x|x) = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$;

(iii) $(x|y + w) = (x|y) + (x|w), \quad x, y, w \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$;

(v) $(x|y) = (y|x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$;

2° *svojstva norme*

(i) $\|x\| \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$ *(nejednakost trokuta za normu);*

3° *svojstva metrike*

(i) $d(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$;

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *(nejednakost trokuta za metriku);*

4° *nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunjakowskog*

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Dokaz. Svojstva skalarnog produkta slijede algebarski. Jednom kad je dokazana nejednakost Schwarz-Cauchy-Bunjakowskog, svojstva norme slijede iz svojstava skalarnog produkta (vidjeti Propoziciju 2.5). Svojstva metrike slijede iz svojstava norme (vidjeti Propoziciju 2.10). □

Napomena 2.4. Ako je na vektorskom prostoru V definirana funkcija $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva 1° iz prethodnog teorema, tada $(V, (\cdot|\cdot))$ nazivamo **unitarni prostor**, a funkciju $(\cdot|\cdot)$ **skalarni produkt**.

Slično, ako je na vektorskom prostoru V definirana funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva 2° iz prethodnog teorema, tada $(V, \|\cdot\|)$ nazivamo **normiran prostor**, a funkciju $\|\cdot\|$ **norma**.

I opet slično, ako je na skupu V definirana funkcija $d : V \times V \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva 3° iz prethodnog teorema, tada (V, d) nazivamo **metrički prostor**, a funkciju d **metrika**.

Propozicija 2.5. *Neka je* $(V, (\cdot|\cdot))$ *unitaran prostor i neka je funkcija* $\|\cdot\| : V \times V \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)}.$$

Tada je $\|\cdot\|$ *norma na* V *(tj.* $(V, \|\cdot\|)$ *je normiran prostor) za koju kažemo da je* ***inducirana iz skalarnog produkta****. Nadalje, vrijedi nejednakost S-C-B*

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|, \quad x, y \in V.$$

Dokaz. Najprije dokažimo nejednakost S-C-B. Ako su x ili y jednaki 0 nejednakost je zadovoljena s nulama. Stoga u daljnjem pretpostavljamo da je $\|x\| > 0$ i $\|y\| > 0$. Za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$0 \leq (\alpha x + y|\alpha x + y) = \alpha^2(x|x) + 2\alpha(x|y) + (y|y).$$

Sada stavimo $a = (x|x)$, $b = 2(x|y)$ i $c = (y|y)$, pa gornja nejednakost postaje

$$0 \leq a\alpha^2 + b\alpha + c, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $a > 0$, znamo da kvadratna funkcija s desne strane nejednakosti poprima svoj minimum za $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Stoga i u toj točki vrijedi nejednakost

$$0 \leq a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c,$$

tj.

$$\frac{b^2}{4a} \leq c.$$

Jer je $a > 0$ sijedi

$$b^2 \leq 4ac,$$

što je točno nejednakost S-C-B kad vratimo supstituciju.

Sada provjerimo svojstva norme 3° iz Teorema 2.3.

(i) $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geq 0$;

(ii) $0 = \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ ako i samo ako je $(x|x) = 0$, odnosno ako i samo ako je $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x|\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x|x)} = |\alpha|\sqrt{(x|x)} = |\alpha|\|x\|$;

(iv) Koristeći svojstva skalarnog produkta i nedjednakost S-C-B, imamo

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) \leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Uzimanjem drugog korijena dobivamo nejednakost trokuta za induciranu normu.

□

Ako je $(V, (\cdot|\cdot))$ unitaran prostor, tada se lako provjeri da pripadna inducirana norma $\|\cdot\|$ zadovoljava tzv. **relaciju paralelograma**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x, y \in V.$$

Obratno, ako je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor čija norma zadovoljava relaciju paralelograma, tada je ona inducirana iz skalarnog produkta. Preciznije, vrijedi:

Teorem 2.6 (Jordan-von Neumannov teorem)**.** Neka je $(V, \|\cdot\|)$ (realan) normiran prostor. Norma $\|\cdot\|$ je inducirana iz nekog skalarnog produkta $(\cdot|\cdot)$ ako i samo ako ona zadovoljava relaciju paralelograma. U tom slučaju je taj skalarni produkt dan s

$$(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (x, y \in V).$$

Dokaz. Za zadaću. □

Pomoću skalarnog produkta definiramo ortogonalnost (okomitost) dvaju vektora

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad (x|y) = 0.$$

Primjer 2.7 (vježbe)**.** Svi vektori ortogonalni na $(1,1,1)$ su dani sa

$$(x|(1,1,1)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

To su oni vektori za koje vrijedi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Oni čine dvodimenzionalni potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ razapet vektorima

$$(1,0,-1), (0,1,-1).$$

Skup $L\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ (L označava linearnu ljusku) je ortogonalni komplement skupa $\{(1,1,1)\}$.

Norma mjeri duljinu vektora $x \in \mathbb{R}^n$.

Primjer 2.8 (vježbe)**.** Duljina vektora $(1, 1, 1)$ jednaka je

$$\|(1, 1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Metrika mjeri udaljenost točaka.

Primjer 2.9 (vježbe)**.** Udaljenost točaka $(1, 1, 1)$ i $(3, 2, 0)$ dana je sa

$$d((1, 1, 1), (3, 2, 0)) = \sqrt{(1-3)^2 + (1-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

Naravno, udaljenost točaka jednaka je duljini vektora koji ih povezuje

$$d((1, 1, 1), (3, 2, 0)) = \|(1, 1, 1) - (3, 2, 0)\| = \|(-2, -1, 1)\| = \sqrt{6}.$$

Propozicija 2.10. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normiran prostor i neka je funkcija $d : V \times V \to \mathbb{R}$ dana s*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tada je d metrika na V (tj. (V, d) je metrički prostor) za koju kažemo da je ***inducirana iz norme****.*

Dokaz. Trebamo provjeriti svojstva metrike 3° iz Teorema 2.3.

(i) $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$

(ii) $0 = d(x, y) = \|x - y\|$ ako i samo ako $x = y$

(iii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$

(iv) $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Definicija 2.11. *Za dvije norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ na vektorskom prostoru V kažemo da su* ***ekvivalentne*** *ako postoje konstante $m, M > 0$ tako da vrijedi*

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\| \quad \forall x \in V.$$

U tom slučaju pišemo $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

Lako se provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih normi na V (DZ).

Definicija 2.12. *Za dvije metrike d i d' na skupu V kažemo da su* ***ekvivalentne*** *ako postoje konstante $m, M > 0$ tako da vrijedi*

$$md(x, y) \leq d'(x, y) \leq Md(x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

U tom slučaju pišemo $d \sim d'$.

Također se lako provjeri da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih metrika na V (DZ). Nadalje, ako je V vektorski prostor te ako su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ dvije ekvivalentne norme na V, onda su i njihove inducirane metrike ekvivalentne.

Primjer 2.13. Neka je dana funkcija $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Lako se pokaže da i ova funkcija zadovoljava svojstva norme 2° iz Teorema 2.3, pa je i $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ normiran prostor. Štoviše vrijede nejednakosti

$$\|x\|_\infty \le \|x\| \le \sqrt{n}\|x\|_\infty, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Naime, očito je

$$|x_i| \le \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \|x\|,$$

što daje jednu nejednakost. S druge strane

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^n (\max_j |x_j|)^2} = \sqrt{n\|x\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

Stoga vrijedi (2.1), pa za norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_\infty$ kažemo da su ekvivalentne (u nekim situacijama bit će nam svejedno koju normu koristimo).

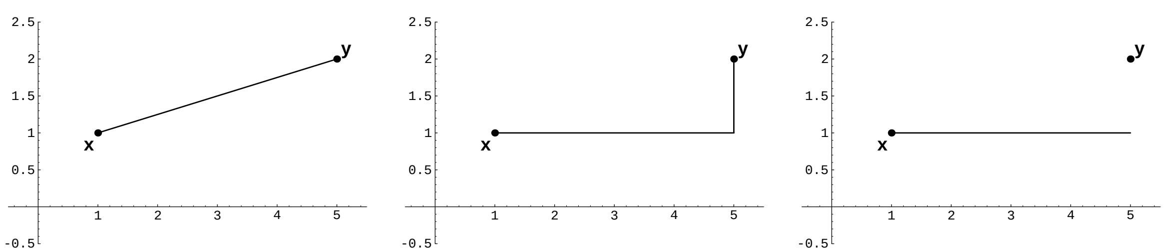
Napomena 2.14. Za niz $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da konvergira prema $a \in \mathbb{R}^n$ ako vrijedi

$$\|a_k - a\| \to 0.$$

Sada je jasno da niz konvergira ako i samo ako konvergira u nekoj ekvivalentnoj normi (metrici). Slično će tako pitanja neprekidnosti funkcije biti neovisna o ekvivalentnoj normi.

Napomena 2.15. Na $\mathbb{R}^n$ možemo uvesti čitavu familiju normi formulom $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ za $p \ge 1$. U tom kontekstu Euklidska norma je $\|\cdot\|_2$. Direktnim računom se može pokazati da su sve ove norme ekvivalentne, pa imamo i čitavu familiju ekvivalentnih metrika na $\mathbb{R}^n$ danih formulom $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$, $p \ge 1$. Također primijetimo da vrijedi $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$, što opravdava oznaku $\|x\|_\infty$. Nadalje, u Teoremu 8.6 ćemo pokazati da su svake dvije norme na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentne.

Primjer 2.16. Neka su dane točke $x = (1, 1)$ i $y = (5, 2)$. Udaljenost tih točaka u različitim metrikama dana je duljinom iscrtane spojnice.



norma 2   norma 1   norma ∞

Primjer 2.17. Označimo s $C([0, 1])$ skup svih realnih neprekidnih funkcija na segmentu $[0, 1]$. Kao što znamo, $C([0, 1])$ ima prirodnu strukturu realnog vektorskog prostora uz operacije po točkama:

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t), \qquad (f + g)(t) = f(t) + g(t),$$

gdje su $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in C([0,1])$ te $t \in [0,1]$. Na tom prostoru definiramo dvije funkcije

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : \ t \in [0,1]\}, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt,$$

za koje se lako provjeri da zadovoljavaju svojstva norme. Stoga su $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ i $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ normirani prostori. Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \, dt = \|f\|_\infty,$$

S druge strane, ne postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1$ za sve $f \in C([0,1])$. Naime, promotrimo niz funkcija

$$f_k(t) = \begin{cases} -2k^2 t + 2k, & t \in [0, \frac{1}{k}] \\ 0, & t \in \langle \frac{1}{k}, 1] \end{cases} .$$

Sada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\|f_k\|_\infty = 2k, \qquad \|f_k\|_1 = 1.$$

Posebno, norme $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$ nisu ekvivalentne na $C([0,1])$.

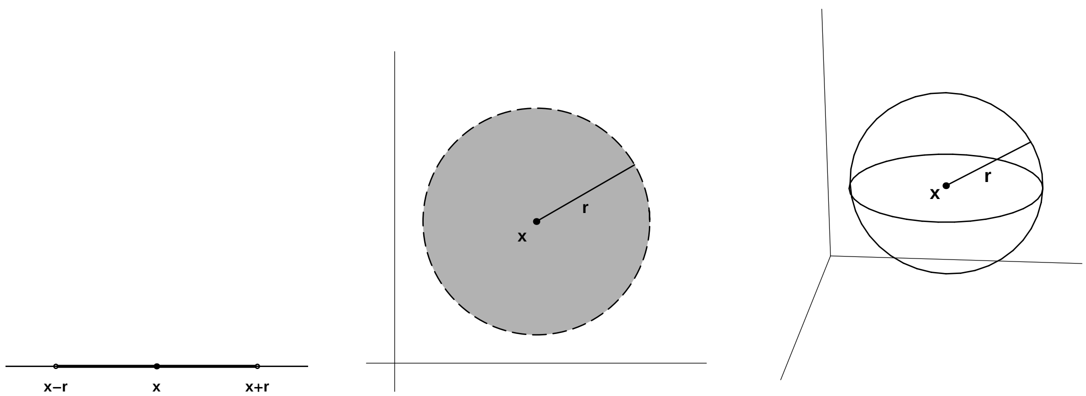
3 Otvoreni i zatvoreni skupovi

3.1 Otvoreni skupovi

Definicija 3.1. *Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Skup*

$$K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < r \right\}$$

nazivamo ***otvorena kugla*** *oko x radijusa r.*



Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je ***otvoren*** *ako vrijedi*

$$\forall x \in A,\ \exists r > 0, \quad K(x,r) \subseteq A.$$

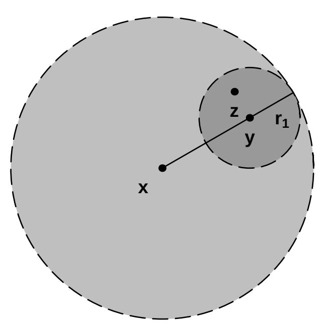
Otvorena okolina *točke $x \in \mathbb{R}^n$ je svaki otvoreni skup koji sadrži točku x.*

Propozicija 3.2. *Otvorena kugla $K(x,r)$ je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $y \in K(x,r)$. Definiramo (vidi sliku)

$$r_1 = r - d(x,y).$$

Budući je $y \in K(x,r)$ slijedi da je $d(x,y) < r$, pa je $r_1 > 0$. Ako je $z \in K(y,r_1)$ proizvoljna



točka, koristeći nejednakost trokuta dobivamo

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r_1 = r.$$

Stoga je $z \in K(x,r)$, pa smo dokazali da je $K(y,r_1) \subseteq K(x,r)$. ☐

Napomena 3.3. Radijus r otvorene kugle u definiciji otvorenog skupa ovisi o točki x.

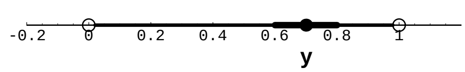
Napomena 3.4. Iako različite norme na $\mathbb{R}^n$ daju različite otvorene kugle, primjetimo da definicija otvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ ne ovisi o izboru konkretne norme. To slijedi iz već spomenute činjenice da su svake dvije norme na $\mathbb{R}^n$ međusobno ekvivalentne, a ekvivalentne norme induciraju iste otvorene skupove (DZ).

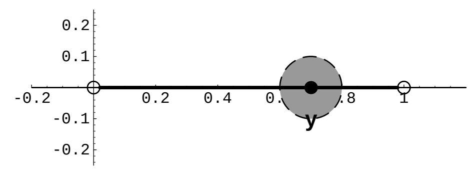
Zadatak 3.5. Za zadane $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ pokažite da je skup

$$\mathbb{R}^n \backslash \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$$

otvoren.

Primjer 3.6. Otvoreni interval $\langle 0, 1\rangle$ je otvoren skup u $\mathbb{R}$, no nije otvoren u $\mathbb{R}^2$ (nakon što ga poistovjetimo sa skupom $\{(x,0) : 0 < x < 1\} \subset \mathbb{R}^2$).





Propozicija 3.7. *U metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$

1° *prazan skup* $\emptyset$ *i čitav skup* $\mathbb{R}^n$ *su otvoreni,*

2° *unija proizvoljne familije otvorenih skupova je otvoren skup,*

3° *presjek svake konačne familije otvorenih skupova je otvoren.*

Dokaz. Za zadaću. □

Napomena 3.8. Neka je $\mathcal{U}$ familija podskupova od X koja zadovoljava svojstva 1°, 2° i 3° prethodnog teorema. Tada $(X, \mathcal{U})$ nazivamo **topološkim prostorom**, a $\mathcal{U}$ **topologijom**. Elemente familije $\mathcal{U}$ nazivamo **otvorenim skupovima**.

Ovo apstraktno okruženje dovoljno je za definiciju konvergencije niza, limesa funkcije, te neprekidnosti funkcije.

Primjer 3.9. Skup

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$$

je otvoren, dok skup

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$$

nije.

3.2 Interior skupa

Definicija 3.10. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*Točka $x \in A$ je **unutarnja točka** skupa A ako postoji otvorena okolina U točke x sadržana u A (tj. $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren , $x \in U \subseteq A$).*

***Nutrina** ili **interior** skupa A je skup svih unutarnjih točaka, tj.*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists U \subseteq \mathbb{R}^n,\, U \text{ otvoren},\, x \in U \subseteq A\}.$$

Nutrinu označavamo s $\operatorname{Int} A$.

Direktno iz definicije slijedi da je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup.

Propozicija 3.11.

$$\begin{aligned} \operatorname{Int} A &= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, K(x,r) \subseteq A\} \\ &= \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ otvoren}}} U. \end{aligned}$$

Dokaz. Ako je $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \exists r > 0, K(x,r) \subseteq A\}$ za okolinu U uzmemo baš $K(x,r)$, pa je jasno da je $x \in \operatorname{Int} A$. Ako je $x \in \operatorname{Int} A$ onda postoji njegova otvorena okolina U takva da je $x \in U \subseteq A$. Budući je $x \in U$ i U otvoren postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U \subseteq A$.

Direktno iz definicije slijedi

$$\operatorname{Int} A \subseteq \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ otvoren}}} U.$$

Uzmimo sada točku iz skupa na desnoj strani jednakosti. Slijedi da postoji otvoren podskup od A koji ju sadrži. Stoga je ona unutarnja točka, pa i element $\operatorname{Int} A$. Time je dokazana i obratna inkluzija. $\square$

Iz ove propozicije zaključujemo da je $\operatorname{Int} A$ zapravo najveći otvoren skup sadržan u skupu A.

Primjer 3.12. Interior skupa $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ je

$$\operatorname{Int} S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}.$$

Naime, sve točke (x,y) za koje je $0 < x < 1$ možemo smjestiti otvorenu okolinu u S, pa su sve takve točke u $\operatorname{Int} S$. S druge strane, za točku $(1,y)$ svaka kugla radijusa r sadrži točku koja nije u S (npr. točku $(1 + r/2, y)$), pa onda i svaki otvorena okolina točke $(1,y)$ sadrži točku koja nije u S.

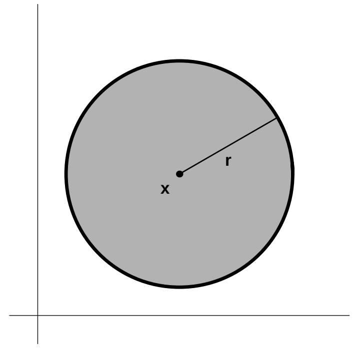
3.3 Zatvoreni skupovi

Definicija 3.13. *Skup $B \subseteq \mathbb{R}^n$ je **zatvoren** ako mu je komplement $\mathbb{R}^n \backslash B$ otvoren.*

Primjer 3.14. Jednočlani skupovi $\{x\}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ su zatvoreni u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 3.15. Skup $\overline{K}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ r > 0)$ je zatvoren. Za $\overline{K}(x,r)$ kažemo da je **zatvorena kugla** oko x radijusa r.

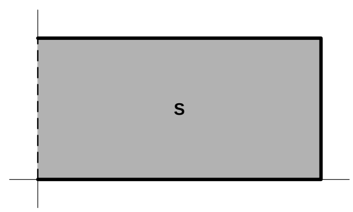
Primjer 3.16. Postoje skupovi koji nisu niti otvoreni niti zatvoreni. Primjer jednog takvog je poluotvoreni interval $\langle 0, 1]$. S druge strane skupovi $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ su i otvoreni i zatvoreni. Štoviše, kasnije ćemo pokazati da su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ zapravo jedini skupovi u $\mathbb{R}^n$ koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni.



Napomena 3.17. Koristeći De Morganove zakone (unije i presjeci se mijenjaju pri uzimanju komplemena) i svojstvima $1°, 2°, 3°$ za otvorene dobivamo da su $\emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ zatvoreni skupovi; da je presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova, zatvoren skup; te da je unija konačne proizvoljne familije zatvorenih skupova također zatvoren skup.

Primjer 3.18. Svaki konačan skup $\mathbb{R}^n$ je zatvoren kao konačna unija jednočlanih (stoga i zatvorenih) skupova.

Primjer 3.19. Skup $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ nije zatvoren niti otvoren.



3.4 Gomilište

Definicija 3.20. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Točka $x \in \mathbb{R}^n$ je* ***gomilište skupa*** *A ako svaka otvorena okolina točke x sadrži barem jednu točku iz A različitu od x.*

Točku skupa A koja nije njegovo gomilište nazivamo ***izolirana točka****.*

Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A' (ili A^d; tzv. ***derivat*** *od A).*

Napomena 3.21. U ovoj definiciji mogli smo tražiti da svaka otvorena okolina točke x sadrži beskonačno mnogo točaka iz A. Naime, neka je U otvorena okolina točke x. Jer je ona otvorena, slijedi da postoji radijus r_0 takav da $K(x, r_0) \subseteq U$. Sada iz gornje definicije slijedi da za otvorene kugle radijusa r_0/k, $k \in \mathbb{N}$ dobivamo niz točaka iz A koje su u U. Razmislite zašto ih mora biti beskonačno mnogo različitih. Nadalje, otvorene kugle su dovoljne za opis gomilišta.

Napomena 3.22. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ primijetite da je A' zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Zaista, neka je $x \in \mathbb{R}^n \setminus A'$. Tada postoji otvorena okolina U od x koja ne sadrži niti jednu točku iz $A \setminus \{x\}$. Kako je U otvorena okolina svake svoje točke, zaključujemo da je $U \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A'$. Posebno, za $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$ imamo $K(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A'$. Dakle, $\mathbb{R}^n \setminus A'$ je otvoren, odnosno A' je zatvoren.

Primjer 3.23. Jednočlani skupovi $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ nemaju gomilišta.

Primjer 3.24. Skup gomilišta skupa $\langle 0,1\rangle \subset \mathbb{R}$ je $[0,1]$. Posebno, gomilište ne mora ležati u samom skupu.

Teorem 3.25. *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sva svoja gomilišta.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A zatvoren. Tada je $\mathbb{R}^n \backslash A$ otvoren. Za $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$ (x nije u A) slijedi da postoji $r > 0$ t.d. $K(x,r) \subset \mathbb{R}^n \backslash A$. Stoga x nije gomilište od A, pa su sva gomilišta u skupu A.

Pretpostavimo sad da skup A sadrži sva svoja gomilišta. Uzmimio $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$. To nije točka gomilišta, pa postoji $r > 0$ takav da $K(x,r) \subset \mathbb{R}^n \backslash A$. Stoga je $\mathbb{R}^n \backslash A$ otvoren, pa je A zatvoren. $\square$

Napomena 3.26. Ako skup nema gomilišta (tj. ako je njegov skup gomilišta prazan), ovaj teorem i dalje povlači da je zatvoren.

Primjer 3.27. Jedino gomilište skupa $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je 0.

Primjer 3.28. $K(x,r)' = \overline{K}(x,r)$.

Primjer 3.29. Ako je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\}$, onda je $A' = \mathbb{R}^2$.

Napomena 3.30. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **gust u** $\mathbb{R}^n$ ako svaka otvorena okolina proizvoljne točke $x \in \mathbb{R}^n$ siječe skup A, tj. ako vrijedi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\, \forall r > 0,\, K(x,r) \cap A \neq \emptyset.$$

Primijetimo da je A gust u $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $A' = \mathbb{R}^n$.

Primjer 3.31. Kao što znamo, svaki otvoreni interval u $\mathbb{R}$ sadrži barem jedan racionalan i barem jedan iracionalan broj. Dakle, skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su gusti u $\mathbb{R}$. Koristeći tu činjenicu za zadaću provjerite i da su skupovi $\mathbb{Q}^n$ te $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ gusti u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 3.32. Za $A_1 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ i $A_2 = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ imamo $A_1' = A_2' = [0,1]$.

Zadatak 3.33. *Odredite sva gomilišta skupova* $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ([0,1] \cap \mathbb{Q})$, $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times [0,1]$, $([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}$ *i* $([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

3.5 Zatvarač skupa

Slično kako je interior skupa najveći otvoren skup sadržan u njemu, tako sad definiramo zatvarač skupa kao najmanji zatvoren skup koji ga sadrži.

Definicija 3.34. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$.* ***Zatvarač*** *(zatvorenje) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, je presjek svih zatvorenih skupova što sadrže A, tj.*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ zatvoren}}} F.$$

Kako je presjek zatvorenih skupova zatvoren slijedi da je $\overline{A}$ zatvoren skup. Također je jasno da $A \subseteq \overline{A}$. Nadalje, skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.

Primjer 3.35. $\overline{\langle 0,1\rangle} = [0,1]$.

Propozicija 3.36. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Tada vrijedi*

$$\overline{A} = A \cup A' = A \cup \{\textit{gomilišta skupa } A\}.$$

Dokaz. Dokažimo najprije da je $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Neka je $x \in \overline{A}$. Ako $x \notin A'$ onda postoji okolina U oko x takva da je $U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$. Pretpostavimo da x ne pripada niti skupu A, tj. $x \notin A$. Tada je $A \setminus \{x\} = A$, pa je $U \cap A = \emptyset$, tj. $A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U$. Kako je skup $\mathbb{R}^n \setminus U$ zatvoren, po definiciji zatvarača je $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus U$, što je kontradikcija, budući da je $x \in \overline{A}$ i $x \in U$.

Obratno, trivijalno je $A \subseteq \overline{A}$, pa je i $A' \subseteq (\overline{A})'$. No, budući da je $\overline{A}$ zatvoren, on sadrži sva svoja gomilišta (Teorem 3.25) pa je $(\overline{A})' \subseteq \overline{A}$. Dakle, $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. ☐

Primjer 3.37. $\overline{[0,1\rangle \cup \{2\}} = [0,1] \cup \{2\}$.

Primjer 3.38. **Udaljenost točke** $x \in \mathbb{R}^n$ **do skupa** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo kao broj

$$d(x, A) = \inf \{d(x,y) : \ y \in A\}.$$

Tada vrijedi

$$x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad d(x, A) = 0.$$

Zaista, neka je $x \in \overline{A} = A \cup A'$. Ako je $x \in A$ onda trivijalno slijedi $d(x, A) = 0$ ($d(x, x) = 0$). Ako je x gomilište od A tada za svaki $r > 0$ postoji neki $x \neq y \in A$ takav da je $y \in K(x, r)$. To znači da za svaki $r > 0$ postoji $y \in A$ takav da $d(x, y) < r$. Dakle, $d(x, A) = 0$.

Obratno, neka je $d(x, A) = 0$. Iz svojstva infimuma slijedi da za svaki $r > 0$ postoji $y \in A$ takav da je $d(x, y) < r$. Dakle, $A \cap K(x, r) \neq \emptyset$, pa je $x \in A \cup A' = \overline{A}$.

3.6 Rub skupa

Definicija 3.39. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*.* ***Rub*** *ili* ***granica*** *skupa* A *dana je s*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}.$$

Primijetimo da je rub zatvoren skup kao presjek zatvorenih skupova. Također direktno iz definicije vidimo da vrijedi $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

Primjer 3.40. $\partial K(x, r) = S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$ (**sfera** oko x radijusa r).

Propozicija 3.41. *Neka je* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Tada je* $x \in \partial A$ *ako i samo ako za svaki* $r > 0$ *kugla* $K(x, r)$ *sadrži točke iz* A *i* $\mathbb{R}^n \setminus A$ *(moguće i sam* x*).*

Dokaz. Neka je $x \in \partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$.

Dvje su mogućnosti $x \in A$ ili $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Neka je $x \in A$. Tada $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$ povlači da je x gomilište za $\mathbb{R}^n \setminus A$, pa svaka okolina sadrži neku točku iz $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Obratno, sami. ☐

Zadatak 3.42. Dokažite da za svaki $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vrijedi $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$. Pritom je $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$ pa je $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Primjer 3.43. Za $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\}$ imamo $\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}$.

Primjer 3.44. Za $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$ i $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\}$ imamo $\partial A_1 = \partial A_2 = [0, 1]$.

4 Nizovi u $\mathbb{R}^n$

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. **Niz** u A je svaka funkcija $a : \mathbb{N} \to A$. Označavamo ga s $(a_k)_k$. Na primjer, jedan niz u $\mathbb{R}^2$ je dan s

$$a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Definicija 4.1. *Za niz $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***konvergentan*** *ako postoji vektor $a \in \mathbb{R}^n$ takav niz realnih brojeva $(d(a_k, a))_k$ konvergira prema 0, tj. ako*

$$(\exists a \in \mathbb{R}^n)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall k \geq k_0)\,(d(a_k, a) < \varepsilon).$$

Tada pišemo

$$a_k \to a \qquad \text{ili} \qquad \lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Točku a zovemo ***limes niza*** *i također kažemo da niz $(a_k)_k$* ***konvergira prema*** *a. Za niz $(a_k)_k$ kažemo da je* ***divergentan*** *ako on nije konvergentan.*

Napomena 4.2. Definicija 4.1 se direktno može prepisati u proizvoljnom metričkom prostoru.

Za $n = 1$ dobivamo uobičajenu definiciju konvergencije. U tom slučaju važnu su ulogu igrali monotoni nizovi. Kako u $\mathbb{R}^n$ nismo uveli uređaj, nema smisla govoriti o pojmu monotonog niza.

Definiciju 4.1 možemo na ekvivalentan način i ovako iskazati: $a_k \to a$ ako vrijedi

$$\forall K(a, \varepsilon), \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_0, \quad a_k \in K(a, \varepsilon).$$

Kao i u slučaju dimenzije $n = 1$ samo je jedan mogući limes niza u $\mathbb{R}^n$:

Propozicija 4.3. *Ako niz $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ konvergira, tada mu je limes jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva limesa $\overline{a}$ i $\hat{a}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz konvergencije niza $(a_k)_k$ slijedi da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$d(\overline{a}, a_k) < \varepsilon/2 \qquad \text{i} \qquad d(\hat{a}, a_k) < \varepsilon/2.$$

Tada vrijedi

$$d(\overline{a}, \hat{a}) \leq d(\overline{a}, a_k) + d(a_k, \hat{a}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Stoga je nužno $\overline{a} = \hat{a}$. □

Napomena 4.4. Prethodni argument možemo ovako reformulirati. Ako bi bilo $\varepsilon = \frac{1}{2} d(\overline{a}, \hat{a}) > 0$, onda iz

$$K(\overline{a}, \varepsilon) \cap K(\hat{a}, \varepsilon) = \emptyset,$$

zaključujemo da ne mogu svi članovi niza počevši od nekog biti u obje kugle.

Napomena 4.5. Budući da u općenitom topološkom prostoru nemamo metriku, konvergenciju niza definiramo pomoću otvorenih skupova. Ako je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, tada za $a \in A$ označimo s $\mathcal{U}(a)$ skup svih otvorenih okolina od a, tj. skup svih $U \in \mathcal{U}$ takvih da je $a \in \mathcal{U}$.

Za niz $(a_k)_k$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$ kažemo da je **konvergentan**, ako postoji točka $a \in X$ takva da za svaku otvorenu okolinu U od a postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $a_k \in U$, tj.

$$(\exists a \in X)\,(\forall U \in \mathcal{U}(a))\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall k \geq k_0)\,(a_k \in U).$$

U tom slučaju za točku a kažemo da je **limes** niza $(a_k)_k$.

Za razliku od situacije u metričkim prostorima, limes konvergentnog niza u općenitom topološkom prostoru ne mora biti jedinstven. Npr., za proizvoljan skup X stavimo $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$. Tada je $\mathcal{U}$ očito topologija na X (tzv. *indiskretna topologija*). Primijetimo da je s obzirom na tu topologiju svaki niz u X konvergentan te mu je svaka točka iz X limes. Posebno, ako X ima barem dva različita elementa, niti jedan (konvergentan) niz u topološkom prostoru $(X,\mathcal{U})$ neće imati jedinstven limes.

S obzirom da je $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor, znamo zbrajati vektore i množti ih skalarom. Kao i u slučaju $n = 1$ prirodno je istražiti odnos konvergencije niza i tih operacija.

Propozicija 4.6. *Neka su $(a_k)_k$ i $(b_k)_k$ nizovi u $\mathbb{R}^n$ i $(\lambda_k)_k$ niz u $\mathbb{R}$. Ako*

$$a_k \to a, \qquad b_k \to b, \qquad \lambda_k \to \lambda$$

tada vrijedi

1° $a_k + b_k \to a + b,$

2° $\lambda_k a_k \to \lambda a.$

Dokaz. Dokaz je isti kao u slučaju dimenzije $n = 1$. Za zadaću. □

U Primjeru 2.13 smo direktnim računom pokazali da su norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne (pa i njihove inducirane metrike). To povlači da niz konvergira u jednoj metrici ako i samo ako konvergira u drugoj. Stoga dobivamo karakterizaciju konvergencije niza $(a^k)_k$ pomoću konvergencije koordinatnih nizova $(a_i^k)_k$, gdje je $a^k = (a_1^k, \dots, a_n^k)$.

Propozicija 4.7. *$a^k \to a$ ako i samo ako $a_i^k \to a_i$, za $i = 1, \dots, n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $a^k \to a$. To znači

$$\|a^k - a\| \to 0.$$

Ekvivalencija normi iz Primjera 2.13 povlači da

$$\|a^k - a\|_\infty \to 0.$$

Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi

$$\max\{|a_1^k - a_1|, \dots, |a_n^k - a_n|\} = \|a^k - a\|_\infty < \varepsilon$$

Pročitamo li prethodni redak ponovno samo za svaku koordinatu zaključujemo da

$$a_i^k \to a_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Obratno, neka koordinatni nizovi konvergiraju

$$a_i^k \to a_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoje $k_1, \dots, k_n$ takvi da vrijedi

$$\begin{aligned} \forall k \geq k_1, &\quad |a_1^k - a_1| < \varepsilon, \\ &\vdots \\ \forall k \geq k_n, &\quad |a_n^k - a_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Uzmemo i $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ onda za $k \geq k_0$ vrijede sve ove ocjene. Stoga je

$$\forall k \geq k_0 \qquad \|a^k - a\|_\infty = \max\{|a_1^k - a_1|, \ldots, |a_n^k - a_n|\} < \varepsilon.$$

Zaključujemo da $\|a^k - a\|_\infty \to 0$, pa onda opet prema Primjeru 2.13 $\|a^k - a\| \to 0$. $\square$

Napomena 4.8. Zbog ekvivalencije svih normi na $\mathbb{R}^n$ slijedi da niz konvergira u $\mathbb{R}^n$ u proizvoljnoj normi ako i samo ako svi koordinatni nizovi konvergiraju (u $\mathbb{R}$).

Primjer 4.9. Sada lako zaključujemo da niz s početka ovog odjeljka konvergira.

Slično, svi nizovi $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, 0), (0, \frac{1}{k}), (\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$ konvergiraju istom limesu $(0, 0)$. Prvi niz nalazi se na simetrali prvog kvadranta, naredna dva na koordinatnim osima, a zadnji na grafu funkcije $y = x^2$.

Zadatak 4.10. Dokažite ponovno Propoziciju 4.6 koristeći tvrdnju Propozicije 4.7.

Propozicija 4.7 također povlači

Korolar 4.11. *Ako nizovi (a_k) i (b_k) u $\mathbb{R}^n$ konvergiraju redom prema a i b, onda niz $(a_k|b_k)$ konvergira prema $(a|b)$.*

Definicija 4.12. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***ograničen*** *(omeđen) ako postoji $M > 0$ takav da je $A \subseteq \overline{K}(0, M)$.*

Za niz $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ je kažemo da je ***ograničen*** *(omeđen) ako je njegov skup vrijednosti $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$.*

Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ niz. ***Podniz*** *niza a je svaka funkcija $b = a \circ p$, pri čemu je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo monotona.*

$$b_1 = a_{p(1)} = a_{p_1}, b_2 = a_{p(2)} = a_{p_2}, \ldots$$

Točka $a \in \mathbb{R}^n$ je ***gomilište niza*** *$(a_k)_k$ ako je za svaki $\varepsilon > 0$ beskonačno mnogo članova niza $(a_k)_k$ u $K(a, \varepsilon)$.*

Napomena 4.13. Pojam gomilišta niza treba razlikovati od pojma gomilišta skupa vrijednosti niza. Npr. ako je $a \in \mathbb{R}^n$, tada je skup gomilišta konstantnog niza $a_k = a$, $k \in \mathbb{N}$, skup $\{a\}$, dok skup $\{a_k : k \in \mathbb{N}\} = \{a\}$ nema gomilišta.

Propozicija 4.14. *Točka $a \in \mathbb{R}^n$ je gomilište niza $(a_k)_k$ ako i samo ako postoji podniz niza $(a_k)_k$ koji konvergira prema a.*

Dokaz. Za zadaću. $\square$

Propozicija 4.15. *Svaki podniz konvergentnog niza u $\mathbb{R}^n$ je također konvergentan s istim limesom.*

Dokaz. Za zadaću. $\square$

Zbog Propozicije 4.7 određena svojstva poznata za nizove u $\mathbb{R}$ prenose se na nizove u $\mathbb{R}^n$.

Propozicija 4.16. *Svaki konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$ je ograničen.*

Dokaz 1. Neka je $(a^k)_k$ konvergentan niz. Tada je zbog Propozicije 4.7 konvergentan u $\mathbb{R}$ i svaki njegov koordinatni niz. Stoga je svaki od njih ograničen. Neka je M_i ograda i-tog koordinatnog niza, tj.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |a_i^k| \leq M_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Neka je $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$. Sada vrijedi

$$\|a^k\|_\infty \leq M.$$

Sada zbog ekvivalencije normi iz Primjera 2.13 vrijedi

$$\|a^k\| \leq \sqrt{n}\|a^k\|_\infty \leq \sqrt{n}M,$$

pa je niz ograničen. $\square$

Dokaz 2. Propoziciju možemo dokazati i direktno. Budući $a^k \to a$ slijedi da za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$\forall k \geq k_0, \quad d(a^k, a) < 1.$$

Definiramo

$$R = \max\{1, d(a^1, a), \dots, d(a^{k_0-1}, a)\}.$$

Sada za sve $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$(a^k)_k \subset K(a, R),$$

odnosno

$$(a^k)_k \subset K(0, d(0, a) + R).$$

$\square$

Teorem 4.17 (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove)**.** *Svaki ograničen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je $(a^k)_k \subset \mathbb{R}^n$ ograničen. No zbog ekvivalencije normi niz je ograničen i u normi $\|\cdot\|_\infty$. Stoga je i svaki njegov koordinatni podniz ograničen. Sada B-W teorem za $\mathbb{R}$ kaže da koordinatni niz $(a_1^k)_k$ ima konvergentan podniz $(a_1^{p_1(k)})_k$

$$a_1^{p_1(k)} \to a_1.$$

Sada je koordinatni podniz $(a_2^{p_1(k)})_k$ ograničen, pa ima podniz koji je konvergentan. Podniz podniza je podniz originalnog niza, pa ga označimo sa $(a_2^{p_2(k)})_k$. Vrijedi

$$a_2^{p_2(k)} \to a_2.$$

Tako nastavimo do zadnje koordinate. Time smo dobili n podnizova originalnog niza koji konvergiraju:

$$\begin{gathered} a_1^{p_1(k)} \to a_1, \\ \vdots \\ a_n^{p_n(k)} \to a_n. \end{gathered}$$

No $(a^{p_n(k)})_k$ je podniz svih prethodnih podnizova, pa prema Propoziciji 4.15 vrijedi

$$\begin{gathered} a_1^{p_n(k)} \to a_1, \\ \vdots \\ a_n^{p_n(k)} \to a_n. \end{gathered}$$

Slijedi

$$a^{p_n(k)} \to (a_1, \dots, a_n).$$

$\square$

Napomena 4.18. B-W teorem smo mogli iskazati i kao: svaki ograničeni niz u $\mathbb{R}^n$ ima gomilište.

Nizove možemo iskoristiti za karakterizaciju zatvorenih skupova.

Teorem 4.19. *Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako i samo ako svaki niz u A koji konvergira u $\mathbb{R}^n$ ima limes u A.*

Dokaz. Neka je A zatvoren. Pretpostavimo $(a_k)_k \subseteq A$ i $a_k \to a$. Dvije su mogućnosti:

(a) Postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a_k = a$ za svaki $k \geq k_0$. Onda je $a \in A$.

(b) Svaka otvorena okolina točke a tada sadrži beskonačno elemenata niza $(a_k)_k$, pa onda i elemenata iz A. Stoga je a gomilište skupa A. Onda je prema Teoremu 3.25 $a \in A$.

Obratno, neka svaki konvergentan niz u A ima limes u A. Neka je $a \in A'$ gomilište skupa A. Iz definicije slijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji točka $a_k \in A$ takva da je $a_k \in K(a, \frac{1}{k})$. Budući da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon > 1/k_0$, slijedi da za njega vrijedi $\forall k \geq k_0$, $a_k \in K(a, \varepsilon)$. Stoga

$$a_k \to a.$$

Iz pretpostavke je onda $a \in A$. Stoga skup A sadrži sva svoja gomilišta pa je po Teoremu 3.25 zatvoren. □

Zadatak 4.20. Neka je dan konvergentan niz $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ takav da je $\|a_k\| \leq K$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Pokažite da tada i njegov limes a zadovoljava $\|a\| \leq K$. Ako je $\|a_k\| < K$ za sve $k \in \mathbb{N}$, vrijedi li nužno $\|a\| < K$?

Zadatak 4.21. Koristeći Teorem 4.19 odredite $\overline{A}$, ako je $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Propozicija 4.22. *Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $x \in \overline{B}$ ako i samo ako postoji niz u B kojem je x limes.*

Dokaz. Za zadaću. □

Definicija 4.23. *Niz $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ je* ***Cauchyjev niz*** *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\,(\forall k, l \geq k_0)\,(d(a_k, a_l) < \varepsilon).$$

Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je ***potpun*** *ako svaki Cauchyjev niz u A konvergira.*

Opća svojstva Cauchyjevih nizova navedena su u narednoj propoziciji.

Propozicija 4.24. *U $\mathbb{R}^n$ vrijedi:*

1° *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev niz.*

2° *Cauchyjev niz je ograničen.*

3° *Ako podniz Cauchyjevog niza konvergira prema a onda i čitav niz konvergira prema a.*

Dokaz. Za zadaću. □

Za $n = 1$ poznato je da svaki Cauchyjev niz konvergira, pa je $(\mathbb{R}, d)$, s uobičajenom metrikom $d(x, y) = |x - y|$, potpun. Naredni teorem kaže da je i $(\mathbb{R}^n, d)$ potpun.

Teorem 4.25. *Svaki Cauchyjev niz u* $\mathbb{R}^n$ *je konvergentan.*

Dokaz. Neka je $(a_k)_k \subset \mathbb{R}^n$ Cauchyjev niz. Prema Propoziciji 4.24 2° taj niz je ograničen. Prema B-W teoremu on ima konvergentan podniz. Sada opet Propozicija 4.24 3° povlači da čitav niz konvergira. $\square$

Napomena 4.26. Teorem 4.25 smo mogli dokazati i bez poziva na B-W teorem. Naime, korištenjem ekvivalencije normi iz Primjera 2.13 za Cauchyjev niz u $\mathbb{R}^n$ slijedi da su mu koordinatni nizovi Cauchyjevi u $\mathbb{R}$. No kako znamo da je $\mathbb{R}$ potpun slijedi da koordinatni nizovi konvergiraju, što opet povlači konvergenciju čitavog niza.

Propozicija 4.27. *Podskup* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *je zatvoren ako i samo ako je potpun.*

Dokaz. Neka je A zatvoren i neka je $(a_k)_k \subseteq A$ Cauchyjev niz. Kako je $(a_k)_k$ Cauchyjev u $\mathbb{R}^n$, a ovaj je potpun, slijedi da niz konvergira. Jer je A zatvoren, slijedi da mu je limes u A, pa je A potpun.

Obratno neka je A potpun. Neka je $(a_k)_k \subset A$ konvergentan niz s limesom a. Slijedi da je on i Cauchyjev niz, no onda je Cauchyjev u A. Zbog potpunosti od A niz konvergira limesu u A, a zbog jedinstvenosti limesa, konvergira baš prema a. Zaključujemo $a \in A$, pa je skup A zatvoren. $\square$

Napomena 4.28. Potpuni normirani prostori se još zovu i **Banachovi**. Koristeći prethodne argumente, nije teško dokazati i da je svaki konačnodimenzionalan normiran prostor Banachov (pokušajte sami).

Napomena 4.29. S druge strane, postoje beskonačnodimenzionalni normirani prostori koji nisu Banachovi. Npr., promotrimo normirani prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, gdje je

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

i njegov potprostor $\mathcal{P}$ koji se sastoji od svih polinoma restringiranih na $[0,1]$. Tada niz polinoma $(p_k)_k$ definiranih s

$$p_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}$$

konvergira u normi $\|\cdot\|_\infty$ prema funkciji $f(t) = e^t$ (restringiranoj na $[0,1]$). Posebno, $(p_k)_k$ je Cauchyjev niz u $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. S druge strane, funkcija f nije polinom, tj. $f \notin \mathcal{P}$. Naime, za svako $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $f^{(m)} = f$. Posebno, ne postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $f^{(m)} = 0$.

Zadatak 4.30. Dokažite da je normirani prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ Banachov.

Zadatak 4.31. Dokažite da normirani prostor $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ nije Banachov, gdje je

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Uputa. Promotrite sljedeći niz funkcija:

$$f_k(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \\ \frac{k}{2}(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}), & \frac{1}{2} - \frac{1}{k} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{k} \le t \le 1. \end{cases}$$

5 Kompaktnost

U analizi funkcija jedne varijable važan je dio proučavanje funkcija definiranih na segmentu. Na primjer, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, svaka je neprekidna funkcija na segmentu I ograničena i postiže svoj minimum i maksimum. U dokazu tih tvrdnji ključna su svojstva segmenta I ograničenost i zatvorenost. Naime, zbog ograničenosti, svaki niz u I ima konvergentan podniz, a zbog zatvorenosti, limes tog podniza je u I. U $\mathbb{R}^n$ ulogu segmenta preuzimaju kompaktni skupovi.

Definicija 5.1. *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je* ***kompaktan*** *ako je ograničen i zatvoren.*

Koristeći definiciju lako je provjeriti koji su skupovi kompaktni a koji nisu:

Primjer 5.2. Skup $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ nije kompaktan jer nije ograničen.
Skup $[0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ je kompaktan.
$K(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ nije kompaktan jer nije zatvoren.
$\overline{K}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan.
Skup $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktan.

Zadatak 5.3. Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan i $B \subseteq K$ zatvoren. Tada je i B kompaktan.

Za dokaze tvrdnji o kompaktnim skupovima korisna je sljedeća karakterizacija kompaktnosti koja se obično koristi kao definicija kompaktnog skupa u općenitim metričkim prostorima:

Teorem 5.4. *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji je limes u A.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A kompaktan, dakle ograničen i zatvoren, i neka je (a_k) neki niz u A. Taj je niz ograničen, pa po Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove, ima podniz a_{p_k} koji konvergira prema nekom $b \in \mathbb{R}^n$. Zbog zatvorenosti skupa A vrijedi $b \in A$, dakle niz (a_n) ima konvergentan podniz čiji je limes u A.

Obratno, pretpostavimo da svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji je limes u A. Za dokaz zatvorenosti skupa A koristimo karakterizaciju pomoću nizova (Teorem 4.10). Neka je (a_k) niz u A koji konvergira prema $b \in \mathbb{R}^n$. Taj niz ima konvergentan podniz s limesom u A. Taj limes međutim mora biti jednak b prema Propoziciji 4.13. Dakle je $b \in A$.

Ako A ne bi bio ograničen, tada bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ postojao $a_k \in A$, $\|a_k\| \geq k$. Na taj način dobivamo niz u A čiji je svaki podniz neograničen, pa i divergentan po Propoziciji 4.14. To je kontradikcija s pretpostavkom da svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji je limes u A, dakle A mora biti ograničen. □

Sada ćemo opisati još jedno svojstvo ekvivalentno kompaktnosti, koje se odnosi na mogućnost reduciranja proizvoljnog otvorenog pokrivača na konačan pokrivač. U ovom kolegiju to svojstvo nećemo trebati, međutim ono je važno u mnogim dokazima koje ćete susretati u budućim kolegijima (npr. u kolegiju Integrali funkcija više varijabli). To je svojstvo važno i zato što se pomoću njega definira kompaktnost u općenitim topološkim prostorima.

Definicija 5.5. ***Pokrivač*** *skupa $A \subset \mathbb{R}^n$ je bilo koja familija skupova u $\mathbb{R}^n$ čija unija sadrži A. Drugim riječima, to je skup*

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I, U_i \subset \mathbb{R}^n\}$$

(pri čemu je I neki skup), takav da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. Pokrivač je ***konačan*** *ako sadrži konačan broj skupova. Ako pak su svi elementi U_i pokrivača $\mathcal{U}$ otvoreni skupovi, tada govorimo o* ***otvorenom pokrivaču****.*

Potpokrivač *pokrivača $\mathcal{U}$ skupa A je podfamilija od $\mathcal{U}$ koja je i sama pokrivač od A (tj. unija skupova potpokrivača je i dalje nadskup od A).*

Primjer 5.6. (a) Familija $\mathcal{U} = \{K((x,0),1) : x \in \mathbb{R}\}$ je otvoreni pokrivač realne osi x u $\mathbb{R}^2$. Ona ima prebrojiv potpokrivač $\{K((n,0),1) : n \in \mathbb{Z}\}$, no nema konačan potpokrivač.

(b) Familija $\mathcal{U} = \{K((x,0),1) : x \in [-1,1]\}$ je otvoreni pokrivač segmenta $[-1,1]$ u $\mathbb{R}^2$. Taj pokrivač ima potpokrivač koji se sastoji od dva elementa: $K((-1/2,0),1)$ i $K((1/2,0),1)$.

Teorem 5.7 (Heine-Borel)**.** *Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač skupa A ima konačan potpokrivač.*

Dokaz. Pretpostavimo da za skup A vrijedi da svaki njegov otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.

Dokažimo da je A ograničen. Skup kugala $\{K(0,k) : k \in \mathbb{N}\}$ je otvoreni pokrivač pd A (jer je to otvoreni pokrivač cijelog $\mathbb{R}^n$). Prema pretpostavci, A je onda sadržan i u uniji konačnog broja takvih kugala, $K(0,k_1),\dots,K(0,k_m)$. Dakle, A je sadržan u kugli $K(0,\max_i k_i)$ pa je ograničen.

Pretpostavimo da A nije zatvoren. Tada postoji gomilište b skupa A, koje nije element od A. Za proizvoljan $a \in A$ definirajmo $U_a = K(a, \frac{1}{2}d(a,b))$. Jasno je da je familija skupova $\{U_a : a \in A\}$ otvoreni pokrivač od A. Slijedi da već konačno njih, $U_{a_1},\dots,U_{a_k}$ pokriva A. Neka je

$$r = \min\left\{\frac{1}{2}d(a_i,b) : i = 1,\dots,k\right\} > 0.$$

Tada $K(b,r)$ ne siječe $U_{a_1},\dots,U_{a_k}$, pa ne siječe ni A, što je kontradikcija s činjenicom da je b gomilište skupa A. Dakle A mora biti zatvoren.

Za obratnu implikaciju koristit ćemo sljedeću lemu koju ćemo dokazati nakon završetka dokaza teorema:

Lema 5.8. *Pretpostavimo da skup $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ima svojstvo da za svaki njegov otvoreni pokrivač postoji konačan potpokrivač. Tada bilo koji zatvoreni skup $A \subseteq B$ ima to isto svojstvo.*

Uočite gdje se koristi zatvorenost

Budući da je A ograničen, on je sadržan u nekoj kocki $T_0 = [-M,M]^n$. Budući da je A i zatvoren, iz Leme 5.8 vidimo da je dovoljno dokazati da svaki otvoreni pokrivač kocke T_0 ima konačan potpokrivač.

Pretpostavimo da je $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač kocke T_0 koji nema konačan potpokrivač. Raspolovimo li svaki od bridova kocke T_0 dobit ćemo 2^n manjih kocaka, od kojih bar jedna, označimo je s T_1, nije pokrivena s konačno mnogo skupova U_i. Toj kocki ponovno raspolovimo sve bridove, pa tako dobivamo manje kocke, od kojih bar jedna, T_2, nije pokrivena s konačno mnogo skupova U_i. Nastavljanjem ovog postupka dobivamo niz kocaka

$$T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_k \supset \dots$$

takvih da je duljina brida kocke T_k jednaka $\frac{2M}{2^k}$, i takvih da nijedna od njih nije pokrivena s konačno mnogo skupova U_i.

Prema Cantorovom teoremu (vidjeti kraj ovog poglavlja), postoji točka $c \in \bigcap_k T_k$. Točka c je u nekom U_i, a U_i je otvoren, pa je za neki $r > 0$ kugla $K(c,r)$ sadržana u U_i. S druge strane, za dovoljno velike k dijametar kocke T_k je manji od r, pa zbog $c \in T_k$ vrijedi $T_k \subset K(c,r) \subset U_i$.

Dakle je T_k pokriven sa samo jednim U_i, što je kontradikcija. Prema tome, pokrivač skupa T_0 bez konačnih potpokrivača ne može postojati. $\square$

Dokaz Leme 5.8 Neka je $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač skupa A. Dodavanjem otvorenog skupa $\mathbb{R}^n \setminus A$ dobivamo otvoreni pokrivač za B, koji mora imati konačan potpokrivač. Taj se potpokrivač sastoji od nekih $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ i možda $\mathbb{R}^n \setminus A$. S obzirom da je $\mathbb{R}^n \setminus A$ disjunktan s A, zaključujemo da $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ pokrivaju A. $\square$

Preostaje da kažemo par riječi o Cantorovom teoremu kojeg smo koristili u dokazu Teorema 5.7. U slučaju $n = 1$ on je dobro poznat iz analize funkcija jedne varijable: neka je $I_k = [a_k, b_k]$ silazan niz intervala, tj. neka vrijedi

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \ldots,$$

odnosno

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq \cdots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1.$$

Tada je presjek segmenata I_k neprazan; u stvari, to je segment $[\sup\{a_k\}, \inf\{b_k\}]$.

Taj se teorem lako poopćava na n-dimenzionalnu kocku. Naime, neka je

$$T_k = [a_k^1, b_k^1] \times [a_k^2, b_k^2] \times \cdots \times [a_k^n, b_k^n]$$

silazan niz kocaka u $\mathbb{R}^n$. Tada je za svaki j, $[a_k^j, b_k^j]$ silazan niz segmenata, čiji presjek sadrži neki c^j. Slijedi da je točka $c = (c^1, \ldots, c^n)$ sadržana u presjeku kocki T_k.

Napomena 5.9. Standarna greška pri iskazivanju Teorema 5.7 je da se ispusti pretpostavka da se radi samo o otvorenim pokrivačima, tj. da iskaz glasi: Skup $A \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktan ako i samo ako svaki pokrivač od A ima konačan potpokrivač. Ta tvrdnja vrijedi jedino za konačne skupove. Naime, ako je A bilo koji beskonačan podskup od $\mathbb{R}^n$ (npr. zatvorena kugla u $\mathbb{R}^n$), tada je $\{\{x\} : x \in A\}$ jedan primjer (zatvorenog) pokrivača od A koji očito nema konačan potpokrivač.

Napomena 5.10. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Dijametar od A definiramo kao broj

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \in [0, +\infty].$$

Primijetimo da je $\operatorname{diam} A < +\infty$ ako i samo ako je A ograničen.

Ako je $\mathcal{U}$ pokrivač od A, tada broj $\lambda > 0$ (ako postoji) takav da za svaki $B \subseteq A$ sa svojstvom $\operatorname{diam} B \leq \lambda$ postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $B \subseteq U$, naziva se **Lebesgueov broj** pokrivača $\mathcal{U}$.

Ako je A kompaktan, tada svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od A ima Lebesgueov broj. Naime, ako bi postojao otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ kompaktnog skupa A koji nema Lebesgueov broj, tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji skup $A_m \subseteq A$ takav da je $\operatorname{diam} A_m \leq \frac{1}{m}$ i koji nije sadržan niti u jednom članu iz $\mathcal{U}$.

U svakom A_m odaberimo jednu točku $a_m \in A_m$. Kako je A kompaktan, niz $(a_m)_m$ ima konvergentan podniz $(a_{m_j})_j$ s limesom $a_0 \in A$. Sada postoji neki $U \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ je pokrivač) koji sadrži taj a_0. Zbog otvorenosti od U postoji $r > 0$ takav da je $K(a_0, r) \subseteq U$.

Iz svojstava $a_{m_j} \to a_0$ i $\operatorname{diam} A_{m_j} \leq \frac{1}{m_j}$ slijedi da postoji $j_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$\forall j \geq j_0, \qquad d(a_{m_j}, a_0) < \frac{r}{2} \quad \& \quad \operatorname{diam} A_{m_j} \leq \frac{r}{2}.$$

Za takve j onda vrijedi

$$\forall a \in A_{m_j}, \qquad d(a, a_0) \leq d(a, a_{m_j}) + d(a_{m_j}, a_0) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

pa je $A_{m_j} \subseteq K(a_0, r) \subseteq U$, što je u kontradikciji s izborom skupova A_m.

6 Limes i neprekidnost funkcija više varijabli

Pod **funkcijom više varijabli** podrazumijevat ćemo funkciju $f : A \to \mathbb{R}^k$, gdje je A proizvoljan podskup od $\mathbb{R}^n$ za neki $n > 1$. Ako je $n = 1$ govorimo o **funkciji jedne varijable**. Za funkciju f kažemo da je **realna** ako je $k = 1$, odnosno **vektorska** ako je $k > 1$. Ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija, tada joj možemo pridružiti tzv. **komponentne funkcije** $f_1, \ldots, f_k : A \to \mathbb{R}$, definirane s $f_j = p_j \circ f$, gdje je $p_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ projekcija na j-tu koordinatu, tj. p_j točki $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ pridružuje njezinu j-tu komponentu x_j, $p_j(x) = x_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. U toj ćemo situaciji pisati

$$f = (f_1, \ldots, f_k).$$

Primjer 6.1. Primijetimo da su funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zgodne zbog toga što su njihovi grafovi $\{(x, y, f(x, y)) : x, y \in A\}$ tipično plohe u $\mathbb{R}^3$ pa se možemo koristiti geometrijskom intuicijom. Od konkretnih primjera spomenimo $f(x, y) = x^2 + y^2$ (graf je najbolje zamisliti kao plohu nastalu rotacijom parabole $z = y^2$ u yz-ravnini oko z-osi) te $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (graf se dobiva rotacijom grafa $z = |y|$ u yz-ravnini oko z-osi, dakle riječ je o beskonačnom naopako postavljenom konusu).

Primjer 6.2. Od vektorskih funkcija važnu ulogu igraju tzv. parametrizirane krivulje u $\mathbb{R}^k$, tj. glatke funkcije $\alpha : I \to \mathbb{R}^k$ gdje je I inverval u $\mathbb{R}$ (pojam glatkoće ćemo definirati kasnije). Od konkretnih primjera navedimo npr. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Primijetite da je slika funkcije α jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$, te da bi isto vrijedilo ako α restringiramo na $[0, 2\pi\rangle$, čime bismo je učinili injektivnom. Razmislite i o spirali $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Limes funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}^n$ definira se slično kao u slučaju realne funkcije jedne varijable:

Definicija 6.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $c \in \mathbb{R}^n$ gomilište skupa A. Kažemo da funkcija $f : A \to \mathbb{R}^k$ ima **limes u točki** c ako postoji vektor $L \in \mathbb{R}^k$ takav da za svaku otvorenu kuglu $K(L, \varepsilon)$ oko L u $\mathbb{R}^k$ postoji otvorena kugla $K(c, \delta)$ oko c u $\mathbb{R}^n$ takva da je $f(A \cap K(c, \delta) \setminus \{c\})$ sadržano u $K(L, \varepsilon)$. Drugim riječima,*

$$(\exists L \in \mathbb{R}^k)\, (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (\forall x \in A \setminus \{c\})\, (d(x, c) < \delta \implies d(f(x), L) < \varepsilon).$$

*U tom slučaju vektor L zovemo **limes funkcije** f u c i pišemo*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Napomena 6.4. Primijetimo da limes definiramo samo u točkama gomilišta c domene A; inače neka ε-okolina točke c ne bi sadržavala ni jednu točku iz $A \setminus \{c\}$, što bi uvjet u definiciji učinilo besmislenim.

Primijetite također kako u slučaju realne funkcije jedne varijable definirane na otvorenom ili zatvorenom intervalu ova definicija pokriva jednako slučajeve kad je c u unutrašnjosti intervala ili na njegovom rubu.

Kao obično, ako $\lim_{x \to c} f(x)$ postoji, onda je on jedinstven. Naime, ako bi postojala dva različita limesa, mogli bismo ih razdvojiti disjunktnim otvorenim kuglama, pa bi uvjet iz definicije bilo nemoguće ispuniti.

Uz pojam limesa usko je vezan i pojam neprekidnosti:

Definicija 6.5. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $c \in A$. Ako je c gomilište skupa A, tada kažemo da je funkcija $f : A \to \mathbb{R}^k$ **neprekidna u točki** c ako je $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Ako $c \in A$ nije gomilište skupa A, onda se f automatski smatra neprekidnom u c.*

*Ako f nije neprekidna u točki c onda kažemo i da f **ima prekid** u c.*

*Ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$ neprekidna u svakoj točki iz A onda kažemo da je f **neprekidna na** A.*

Raspisom definicije limesa u slučaju $c \in A'$ dobivamo da je f neprekidna u c ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in A)\,(d(x,c) < \delta \implies d(f(x), f(c)) < \varepsilon), \tag{6.1}$$

gdje smo dozvolili provjeru uvjeta za točku c jer je trivijalno zadovoljena. U slučaju kada je c izolirana točka (tj. nije gomilište), onda je $c \in A$ i možemo naći $\delta > 0$ tako da $K(c,\delta)$ ne sadrži biti jednu točku iz $A \setminus \{c\}$ (pa je uvjet iz (6.1) trivijalno zadovoljen. Stoga je (6.1) ekvivalentna definicija neprekidnosti u točki c (tj. neovisno o tome je li $c \in A'$ ili $c \notin A'$).

Primjer 6.6. Identiteta na $\mathbb{R}^n$, tj. $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i(x) = x$, je neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}^n$. Naime, za svaki $\varepsilon > 0$ možemo uzeti $\delta = \varepsilon$ i zaključiti da $d(x,c) < \delta$ povlači $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$ (jer je $d(f(x), f(c)) = d(x,c) < \delta = \varepsilon$). Još jedan očigledan primjer je konstanta, tj. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f(x) = C$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$, gdje je C neki element $\mathbb{R}^k$. Sada je bilo koji δ dobar za svaki ε, jer je uvjet $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$ trivijalno ispunjen s obzirom da je $d(f(x), f(c)) = 0$.

Prije nego prijeđemo na složenije primjere, bit će korisno ustanoviti da se, kao i u slučaju realnih funkcija jedne varijable, pojmovi limesa i neprekidnosti mogu definirati i pomoću nizova.

Teorem 6.7. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $f : A \to \mathbb{R}^k$ funkcija. Tada vrijedi:*

1° *Neka je $c \in \mathbb{R}^n$ gomilište skupa A. Tada je $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ako i samo ako za svaki niz $(x_m)_m$ u $A \setminus \{c\}$ koji konvergira prema c niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_m))$ konvergira prema L (**Heineova karakterizacija egzistencije limesa**).*

2° *Neka je $c \in A$. Tada je f neprekidna u c ako i samo ako za svaki niz $(x_m)_m$ u A koji konvergira prema c niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_m))$ konvergira prema $f(c)$ (**Heineova karakterizacija neprekidnosti**)*

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = L$ i neka je (x_m) niz u $A \setminus \{c\}$ takav da vrijedi $x_m \to c$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in A \setminus \{c\}$ iz $d(x,c) < \delta$ slijedi $d(f(x), L) < \varepsilon$. Kako $x_m \to c$, za taj δ postoji m_0 takav da za sve $m \geq m_0$ vrijedi $d(x_m, c) < \delta$. Zato je za sve $m \geq m_0$ i $d(f(x_m), L) < \varepsilon$. Dakle, $f(x_m) \to L$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki niz (x_m) u $A \setminus \{c\}$, $x_m \to c$ povlači $f(x_m) \to L$. Ako ne bi bilo $\lim_{x\to c} f(x) = L$, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ i za svaki $\delta > 0$ postojao $x \in A \setminus \{c\}$ takav da je $d(x,c) < \delta$ ali $d(f(x), L) \geq \varepsilon$. Posebno, za $\delta_m = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$, dobivamo niz $(x_m)_m$ u $A \setminus \{c\}$ takav da je $d(x_m, c) < \frac{1}{m}$ ali $d(f(x_m), L) \geq \varepsilon$. Dakle, niz $(x_m)_m$ konvergira prema c, ali niz $(f(x_m))_m$ ne konvergira prema L, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Druga tvrdnja odmah slijedi iz prve. □

Napomena 6.8. Primijetimo da ako je $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ i ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$ neprekidna, tada je restrikcija $f|_B$ funkcije f na B također neprekidna. To slijedi direktno iz definicije.

Primjer 6.9. Kao što znamo iz teorije funkcija jedne varijable, postoje mnogobrojni primjeri funkcija koje imaju prekid. Ako uzmemo bilo koju funkciju $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja ima prekid u točki $c \in \mathbb{R}$, tada će funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) = g(x)$ imati prekid u svakoj točki pravca $\{(c,y) :\ y \in \mathbb{R}\}$. Ako npr. za g uzmemo funkciju koja poprima vrijednost 1 za sve nenegativne realne brojeve, odnosno 0 za negativne, tada funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x,y) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

ima prekid u svakoj točki y-osi. Ako pak za g uzmemo *Dirichletovu funkciju*, tj. karakterističnu funkciju skupa racionalnih brojeva ($g(x) = 1$ ako je x racionalan, odnosno $g(x) = 0$ ako je x iracionalan), tada zbog gustoće skupova $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ slijedi da g ima prekid u svakom realnom broju. Posljedično, funkcija

$$f(x,y) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

ima prekid u svakoj točki iz $\mathbb{R}^2$.

Napomena 6.10. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $c \in A \cap A'$. Ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$ funkcija koja ima limes u c, tada f ne mora nužno biti neprekidna u c, tj. taj limes ne mora biti jednak $f(c)$. Npr. za funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

vrijedi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 1 \neq 0 = f(0,0)$.

Zadatak 6.11. Ako je $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da sve njene restrikcije na pravce kroz ishodište imaju u $(0,0)$ isti limes L, mora li nužno vrijediti $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$?

Koristeći Teorem 6.7 i Propoziciju 4.6 možemo direktno zaključiti:

Teorem 6.12. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $c \in \mathbb{R}^n$ gomilište skupa A. Ako su $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ dvije funkcije takve da vrijedi $\lim_{x\to c} f(x) = L_1$ i $\lim_{x\to c} g(x) = L_2$, te ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:*

1° $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$;

2° $\lim_{x\to c} \lambda f(x) = \lambda L_1$;

3° $\lim_{x\to c}(f(x)|g(x)) = (L_1|L_2)$.

Odavde pak neposredno dobivamo

Korolar 6.13. *Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, i ako su $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ obje neprekidne u $c \in A$, tada su i funkcije $f + g$, λf te $(f|g)$ neprekidne u c.*

Neprekidne funkcije imaju još jedno važno svojstvo:

Teorem 6.14. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^k$, i neka su $f : A \to \mathbb{R}^k$ i $g : B \to \mathbb{R}^l$ funkcije takve da je $f(A) \subseteq B$. Ako je f neprekidna u $c \in A$ te g neprekidna u $f(c)$, onda je kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c.*

Dokaz. Dokaz je vrlo jednostavan i potpuno analogan dokazu za realne funkcije jedne varijable. Naime, neka je $(x_i)_i$ niz u A koji konvergira prema c. Tada zbog neprekidnosti funkcije f u c vrijedi $f(x_i) \to f(c)$. Sada neprekidnost funkcije g u $f(c)$ povlači $g(f(x_i)) \to g(f(c))$, pa vidimo da je $g \circ f$ doista neprekidna u c. $\square$

Sada smo spremni za primjere.

Primjer 6.15. Kao prvo, svaka projekcija $p_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, k)$ je neprekidna. Naime, identiteta $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ i konstantna funkcija $C_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ koja točki x pridružuje j-ti vektor kanonske baze, e_j koji ima sve komponente 0 osim j-te koja je jednaka 1, su neprekidne prema Primjeru 6.6. Zato je prema Korolaru 6.13 i

$$p_j = (i|C_j)$$

neprekidna. Koristeći i ostale tvrdnje Korolara 6.13 sada odmah vidimo da je svaka polinomijalna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako primijenimo i komponiranje sa mnogim neprekidnim realnim funkcijama jedne varijable koje su nam poznate od ranije, dobivamo mnoštvo primjera, kao npr. funkcije $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ iz Primjera 6.1, ili

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x_1, \dots, x_n) = e^{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \sin(x_1 \dots x_n).$$

Naravno, zavisno o domeni realne funkcije jedne varijable s kojom komponiramo, domena funkcije f često neće biti cijeli $\mathbb{R}^n$.

Ako je pak $f : A \to \mathbb{R}^k$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, vektorska funkcija, onda je njena neprekidnost ekvivalentna neprekidnosti svih njezinih komponenata:

Propozicija 6.16. *Funkcija $f = (f_1, \dots, f_k) : A \to \mathbb{R}^k$, gdje je $A \subseteq \mathbb{R}^n$, je neprekidna u točki $c \in A$ ako i samo ako su sve njezine komponentne funkcije f_j neprekidne u c.*

Dokaz. S obzirom da smo vidjeli da su projekcije p_j neprekidne na čitavom $\mathbb{R}^k$, ako je f neprekidna u c slijedi da su i sve njezine komponente $f_j = p_j \circ f$ neprekidne u c. Obratno, pretpostavimo da su sve f_j neprekidne u c. Neka je $(x_i)_i$ niz u A koji konvergira prema c. Tada niz $(f_j(x_i))_i$ konvergira prema $f_j(c)$ za svaki j, pa prema Propoziciji 4.7 niz $(f(x_i))_i$ konvergira prema $f(c)$. Dakle je f neprekidna u c prema Teoremu 6.7. $\square$

Zadatak 6.17. Dokažite analognu tvrdnju za limese: Funkcija $f = (f_1, \dots, f_k) : A \to \mathbb{R}^k$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ima limes $L = (L_1, \dots, L_k)$ u točki $c \in A'$ ako i samo ako su sve njezine komponentne funkcije f_j u imaju limes L_j u točki c.

Sada možemo dobiti mnoštvo primjera neprekidnih vektorskih funkcija; samo moramo paziti da im komponente budu neprekidne realne funkcije, kakve smo opisali u Primjeru 6.15. Na primjer, funkcije α i β iz Primjera 6.2 su neprekidne (u svim točkama domene). Također, funkcija

$$f(x, y) = (x^2 y, e^{x/y}, \cos x \sin y)$$

je neprekidna na čitavoj svojoj prirodnoj domeni $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Naravno, postoji mnogo funkcija koje nisu neprekidne (vidjeti npr. Primjer 6.9).

Definicija 6.18. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za podskup B od A kažemo da je **otvoren u** A ako postoji otvoren skup U u $\mathbb{R}^n$ takav da je $B = A \cap U$. Analogno definiramo da je $B \subseteq A$ **zatvoren u** A ako je komplement $A \setminus B$ otvoren u A, odnosno ako postoji zatvoren podskup V u $\mathbb{R}^n$ takav da je $B = A \cap V$.*

Napomena 6.19. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako je A otvoren (zatvoren) u $\mathbb{R}^n$, tada je svaki podskup od A koji je otvoren (zatvoren) u A također otvoren (zatvoren) kao podskup od $\mathbb{R}^n$.

Nadalje, za zadani skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ familija skupova otvorenih u A zadovoljava svojstva iz Propozicije 3.7, pa zadaje topologiju na skupu A. Ta topologija zove se **relativna topologija** na A.

Primjer 6.20. Neka je $A = [0, 2\rangle \subset \mathbb{R}$. Tada je $B = [0, 1\rangle$ otvoren u A jer je npr. $B = A \cap \langle -1, 1\rangle$, dok je $C = [1, 2\rangle$ zatvoren u A jer je npr. $C = A \cap [1, 2]$.

Sada ćemo dati karakterizaciju neprekidnosti funkcije $f : A \to \mathbb{R}^k$ koja inače služi kao definicija neprekinosti funkcije između topoloških prosotra (Napomena 6.23).

Teorem 6.21. *Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^k$ je neprekidna na A ako i samo ako je za svaki otvoren podskup $V \subseteq \mathbb{R}^k$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u A.*

Dokaz. Neka je f neprekidna na A i neka je $V \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren. Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Jer je V otvoren postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Jer je f neprekidna u x za taj ε postoji $\delta_x > 0$ takav da je $f(K(x, \delta_x) \cap A) \subseteq K(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Stoga je

$$K(x, \delta_x) \cap A \subseteq f^{-1}(V),$$

pa je

$$\left(\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} K(x, \delta_x) \right) \cap A = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} K(x, \delta_x) \cap A \subseteq f^{-1}(V). \tag{6.2}$$

Jer je $f^{-1}(V) \subseteq A$, u (6.2) imamo jednakost skupova. Dakle, $f^{-1}(V)$ smo prikazali kao presjek otvorenog skupa u $\mathbb{R}^n$ i A, pa je $f^{-1}(V)$ otvoren u A.

Obratno, neka je za svaki otvoreni $V \subseteq \mathbb{R}^k$ skup $f^{-1}(V)$ otvoren u A. Neka je $x \in A$ i $\varepsilon > 0$. Jer je $K(f(x), \varepsilon)$ otvoren u $\mathbb{R}^k$, prema pretpostavci je $f^{-1}(K(f(x), \varepsilon))$ otvoren u A. Stoga postoji otvoren skup U u $\mathbb{R}^n$ takav da je $U \cap A = f^{-1}(K(f(x), \varepsilon))$. Jer je U otvoren u $\mathbb{R}^n$ postoji $\delta > 0$ takav da je $K(x, \delta) \subseteq U$, pa je i

$$K(x, \delta) \cap A \subseteq U \cap A = f^{-1}(K(f(x), \varepsilon)).$$

Stoga je

$$f(K(x, \delta) \cap A) \subseteq K(f(x), \varepsilon),$$

pa je f neprekidna u x po definiciji. Kako je $x \in A$ bio proizvoljan, slijedi da je f neprekidna na skupu A. $\square$

Napomena 6.22. Primijetite da je ovo svojstvo ekvivalentno sa svojstvom da je za svaki zatvoren podskup $Z \subseteq \mathbb{R}^k$ skup $f^{-1}(Z)$ zatvoren u A, tj može se dobiti kao presjek A s nekim zatvorenim podskupom od $\mathbb{R}^n$. Naime, zatvoreni skupovi su komplementi otvorenih, a operacije uzimanja komplementa i uzimanja praslike po funkciji f međusobno komutiraju.

Napomena 6.23. Teorem 6.21 nam sugerira kako možemo definirati pojam neprekidnosti za funkcije između općenitih topoloških prostora: Ako su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori, tada za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **neprekidna** ako je za svaki otvoren podskup V od Y skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X, tj.

$$(\forall V \in \mathcal{V})\, (f^{-1}(V) \in \mathcal{U}).$$

Kao primjenu ove karakterizacije spomenimo činjenicu da je sada očito da su za neprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skupovi kao

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\} \qquad \text{ili} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 1\}$$

otvoreni, dok su skupovi kao

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\} \qquad \text{ili} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 1\}$$

zatvoreni. Naime ti su skupovi redom oblika

$$f^{-1}(\langle 0,+\infty\rangle), \qquad f^{-1}(\langle -\infty,1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle)),$$

dakle praslike otvorenih skupova, odnosno

$$f^{-1}([0,+\infty\rangle), \qquad f^{-1}(\{1\}),$$

dakle praslike zatvorenih skupova.

Zadatak 6.24. Analizirajte otvorenost/zatvorenost narednih skupova

1) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$,
2) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$,
3) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1\}$,
4) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$,
5) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 = 1\}$,
6) $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \geq 1\}$.

Zadatak 6.25. Svakom skupu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ možemo pridružiti njegovu **karakterističnu funkciju** $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ definiranu s

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}.$$

Dokažite da je skup točaka u kojima χ_A ima prekid jednak rubu ∂A od A.

7 Uniformno neprekidne i Lipschitz-neprekidne funkcije

Definicija 7.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}^k$ kažemo da je* ***uniformno neprekidna*** *na A ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in A$ koji su udaljeni za manje od δ, njihove funkcijske vrijednosti $f(x)$ i $f(y)$ su udaljene za manje od ε. Simbolički:*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in A)\,(d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Uniformna neprekidnost očito povlači neprekidnost na A (tj. u svakoj točki $c \in A$). Razlika između pojmova neprekidnosti na A i uniformne neprekidnosti na A je u tome što kod uniformne neprekidnosti δ ovisi samo o ε, dok kod obične neprekidnosti δ ovisi i ε i o svakoj točki $c \in A$. Dakle, ako je f neprekidna na A, tada za fiksirani $\varepsilon > 0$ svaki $c \in A$ ima svoj $\delta_{c,\varepsilon} > 0$ takav da za sve $x \in A$ za koje je $d(x, c) < \delta_{c,\varepsilon}$ vrijedi $d(f(x), f(c)) < \varepsilon$. No općenito se može dogoditi da je $\inf_{c \in A} \sup \delta_{c,\varepsilon} = 0$, tako da nećemo moći naći univerzalni $\delta > 0$ takav da je $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ za sve $x, y \in A$ za koje je $d(x, y) < \delta$. Prije nego li to ilustriramo konkretnim primjerom, dajemo sljedeću korisnu karakterizaciju uniformne neprekidnosti preko nizova, čiji je dokaz vrlo sličan dokazu Heineove karakterizacije neprekidnosti (Teorem 6.7).

Propozicija 7.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^k$ je uniformno neprekidna na A ako i samo ako za svaka dva niza $(x_m)_m$ i $(y_m)_m$ u A, iz $d(x_m, y_m) \to 0$ slijedi $d(f(x_m), f(y_m)) \to 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f uniformno neprekidna na A i neka su $(x_m)_m$ i $(y_m)_m$ dva niza u A takva da $d(x_m, y_m) \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ takav da za sve $x, y \in A$ iz $d(x, y) < \delta$ slijedi $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Kako $d(x_m, y_m) \to 0$, postoji postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m \geq m_0$ vrijedi $d(x_m, y_m) < \delta$. Onda je i $d(f(x_m), f(y_m)) < \varepsilon$ za sve $m \geq m_0$, odakle slijedi $d(f(x_m), f(y_m)) \to 0$.

Obratno, pretpostavimo da f nije uniformno neprekidna na A. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoje $x, y \in A$ takvi da je $d(x, y) < \delta$ i $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. Posebno, za $\delta_m = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, postoje $x_m, y_m \in A$ takvi da je $d(x_m, y_m) < 1/m$ i $d(f(x_m), f(y_m)) \geq \varepsilon$. Na taj način dolazimo do nizova $(x_m)_m$ i $(y_m)_m$ u A sa svojstvom da $d(x_m, y_m) \to 0$ i $d(f(x_m), f(y_m)) \not\to 0$. $\square$

Primjer 7.3. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = x^2$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, ali nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Zaista, promotrimo niz $(a_m)_m$ u $\mathbb{R}$ čiji je opći član dan s $a_m = \sqrt{m}$. S jedne strane imamo

$$|a_{m+1} - a_m| = \sqrt{m+1} - \sqrt{m} = \frac{1}{\sqrt{m+1} + \sqrt{m}} \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

kada $m \to \infty$, dok je s druge strane

$$d(f(a_{m+1}), f(a_m)) = |m + 1 - m| = 1$$

za sve $m \in \mathbb{N}$. Prema Propoziciji 7.2 (primijenjenoj na nizove $(a_{m+1})_m$ i $(a_m)_m$), f nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

Zadatak 7.4. Dokažite da funkcija $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = 1/x$ nije uniformno neprekidna.

Zadatak 7.5. Mora li svaka ograničena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ biti uniformno neprekidna?

Zadatak 7.6. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Ako su $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ dvije uniformno neprekidne funkcije, dokažite da je i njihova linearna kombinacija $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) uniformno neprekidna funkcija na A.

(b) Dokažite da je funkcija $f = (f_1, \ldots, f_k) : A \to \mathbb{R}^k$ uniformno neprekidna na A ako i samo ako su sve njene komponentne funkcije $f_i : A \to \mathbb{R}$ uniformno neprekidne na A.

Definicija 7.7. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}^k$ kažemo da je **Lipschitzova** na A (ili **Lipschitz-neprekidna** na A) ako postoji konstanta $L \geq 0$ takva da vrijedi*

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in A. \tag{7.2}$$

Napomena 7.8. Ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$ Lipschitzova funkcija, definirajmo

$$L_f = \inf \{L \geq 0 : d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \ \forall x, y \in A\}.$$

Tada je $L = L_f$ najmanja konstanta za koju vrijedi (7.2) i zovemo ju **Lipschitzova konstanta** od f.

Označimo s

$$r = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in A, \, x \neq y \right\}.$$

Iz definicije od L_f slijedi da za svaki $x, y \in A$, $x \neq y$ imamo

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq L_f,$$

pa uzimanjem supremuma dobivamo $r \leq L_f$.

S druge strane, iz definicije supremuma u r slijedi da za svaki $x, y \in A$, $x \neq y$ vrijedi

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq r.$$

Kako za $x = y$ imamo $d(x, y) = 0$ (kao i obratno), gornja nejednakost je ekvivalentna s

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y) \qquad \forall x, y \in A.$$

Dakle, f zadovoljava (7.2) za $L = r$. Iz definicije od L_f sada slijedi $L_f \leq r$.

Stoga smo dobili karakterizaciju

$$L_f = \sup \left\{ \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} : x, y \in A, \, x \neq y \right\}.$$

Zadatak 7.9. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Ako su $f, g : A \to \mathbb{R}^k$ dvije Lipschitzove funkcije, dokažite da je njihova linearna kombinacija $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) također Lipschitzova funkcija na A.

(b) Dokažite da je funkcija $f = (f_1, \ldots, f_k) : A \to \mathbb{R}^k$ Lipschitzova na A ako i samo ako su sve njene komponentne funkcije $f_i : A \to \mathbb{R}$ Lipschitzove na A.

Napomena 7.10. Svaka Lipschitzova funkcija $f : A \to \mathbb{R}^k$ je uniformno neprekidna. Naime, neka je L_f Lipschitzova konstanta za f. Ako je $L_f = 0$, onda je f konstantna funkcija pa je tvrdnja trivijalna. Ako je pak $L_f > 0$, onda za dano $\varepsilon > 0$ uzmemo $\delta := \frac{\varepsilon}{L_f}$. Tada za sve $x, y \in A$ takve da je $d(x, y) < \delta$ imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq L_f \cdot d(x, y) < L_f \cdot \frac{\varepsilon}{L_f} = \varepsilon.$$

Dakle, imamo sljedeće implikacije:

$$\text{Lipschitzovost} \quad \Longrightarrow \quad \text{uniformna neprekidnost} \quad \Longrightarrow \quad \text{neprekidnost.}$$

Općenito su gornje implikacije striktne (Primjer 7.3 nam pokazuje da neprekidnost općenito ne povlači uniformnu neprekidnost).

U osnovne primjere Lipschitzovih funkcija s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^k$ spadaju linearni operatori. Prije nego li to dokažemo, prisjetimo se da skup $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ svih linearnih operatora s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^k$ ima strukturu realnog vektorskog prostora uz operacije po točkama:

$$(\alpha T)x = \alpha(Tx), \qquad (T + T')x = Tx + T'x,$$

gdje su $T, T' \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Dimenzija od $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ jednaka je nk.

Primjer 7.11. Ako je $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ linearani operator, tada je T Lipschitzova funkcija ako i samo ako je T **ograničen**, u smislu da postoji $L \geq 0$ takav da vrijedi

$$\|Tx\| \leq L\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3}$$

Pritom, ako definiramo

$$\|T\|_o = \inf\{L \geq 0 : \ \|Tx\| \leq L\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

vrijedi $\|T\|_o = L_T$, gdje je L_T Lipschitzova konstanta za T.

Zaista, ako je T linearan operator takav da vrijedi (7.3), onda iz definicije od $\|T\|_o$ slijedi

$$\|Tx\| \leq \|T\|_o\|x\| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Stoga za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq \|T\|_o\|x - y\|,$$

odakle vidimo da je T Lipschitzova funkcija s $L_T \leq \|T\|_o$.

Obratno, ako je T Lipschitzova funkcija s pripadnom konstantom L_T, imamo

$$\|Tx - Ty\| \leq L_T\|x - y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Posebno, za $y = 0$ dobivamo $\|Tx\| \leq L_T\|x\|$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$, odakle slijedi da je T ograničen i $\|T\|_o \leq L_T$. Dakle, $L_T = \|T\|_o$.

Napomena 7.12. Oprez: Treba razlikovati svojstvo ograničenosti linearnog operatora iz Primjera 7.11 i svojstvo ograničenosti linearnog operatora kao funkcije (što po definiciji znači da je njegova slika ograničen podskup kodomene). Naime, kako je slika linearnog operatora $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ potprostor od $\mathbb{R}^k$, $T(\mathbb{R}^n)$ će biti ograničen skup u $\mathbb{R}^k$ ako i samo ako je T nuloperator.

Teorem 7.13. *(a) Svaki linearni operator $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je ograničen i vrijedi*

$$\begin{aligned} \|T\|_o &= \inf\{L \geq 0 : \|Tx\| \leq L\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Posebno, T je Lispchitzova funkcija i $L_T = \|T\|_o$

*(b) $\|\cdot\|_o$ definira normu na vektorskom prostoru $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ koja se zove **operatorska norma**.*

(c) Za sve $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ i $S \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ vrijedi

$$\|ST\|_o \leq \|S\|_o\|T\|_o.$$

Dokaz. (a) Neka je $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ standardna ortonormirana baza za $\mathbb{R}^n$. Definirajmo

$$L = \left(\sum_{i=1}^n \|T\mathbf{e}_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Koristeći nejednakost S-C-B (Propozicija 2.5), za proizvoljni $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_iT\mathbf{e}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|Te_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|T\mathbf{e}_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = L\|x\|. \end{aligned}$$

Dakle, T je ograničen pa iz Primjera 7.11 slijedi da je T Lipschitzova funkcija s $L_T = \|T\|_o$. Nadalje, prema Napomeni 7.8 je

$$\begin{aligned} \|T\|_o &= L_T = \sup\left\{\frac{\|Tx - Ty\|}{\|x - y\|} : x, y \in \mathbb{R}^n, \, x \neq y\right\} \\ &= \sup\left\{\left\|T\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right)\right\| : x, y \in \mathbb{R}^n, \, x \neq y\right\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

(b) Provjeravamo svojstva norme iz Teorema 2.3.

Za $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ je očito $\|T\|_o \geq 0$. Nadalje, prema (a) imamo $\|T\|_o = 0$ ako i samo ako je $\|Tx\| = 0$ za sve $\|x\| = 1$. Kako je T linearan operator, to vrijedi ako i samo ako je $T = 0$ (tj. nuloperator).

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} \|\alpha T\|_o &= \sup\{\|\alpha(Tx)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{|\alpha|\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = |\alpha|\|T\|_o. \end{aligned}$$

Nadalje, za $T, T' \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ imamo

$$\begin{aligned} \|T + T'\|_o &= \sup\{\|Tx + T'x\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| + \|T'x\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} + \sup\{\|T'x\| : \|x\| = 1\} = \|T\|_o + \|T'\|_o. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da operatorska norma zaista definira normu na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

(c) Ako je $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ i $S \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ tada je $ST \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ i

$$\begin{aligned}\|ST\|_o &= \sup\{\|STx\| : \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|S\|_o\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|S\|_o \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \|S\|_o\|T\|_o.\end{aligned}$$

□

Prije nego li damo primjer uniformno neprekidne funkcije koja nije Lipschitzova, istaknimo jedan koristan kriterij za provjeravanje Lipschitzovosti diferencijabilnih funkcija jedne varijable (kasnije ćemo dati poopćenje te tvrdnje za diferencijabilne funkcije više varijabli):

Napomena 7.14. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, gdje je I otvoreni interval u $\mathbb{R}$. Tada je f Lipschitzova na I ako i samo ako je f' omeđena na I. U tom slučaju Lipschitzova konstanta za f je

$$L_f = \|f'\|_\infty = \sup\{|f'(x)| : x \in I\}.$$

Zaista, pretpostavimo da je f Lipschitzova na I s konstantom L_f te fiksirajmo neki $x \in I$. Prema Napomeni 7.2, za svaki $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je da je $x + h \in I$ imamo

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq L_f.$$

Prelaskom na limes dobivamo

$$|f'(x)| = \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq L_f.$$

Dakle, f' je ograničena na I i $\|f'\|_\infty \leq L_f$.

Obratno, pretpostavimo da je $\|f'\|_\infty < \infty$. Fiskirajmo $x, y \in I$ tako da je $x < y$. Tada prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $c_{x,y}$ između x i y takav da je

$$f(y) - f(x) = f'(c_{x,y})(y - x).$$

Stoga je

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c_{x,y})||x - y| \leq \|f'\|_\infty \cdot |x - y|.$$

Dakle, f je Lipschitzova i $L_f \leq \|f'\|_\infty$. Iz prvog dijela dokaza odmah slijedi da je $L_f = \|f'\|_\infty$.

Koristeći Napomenu 7.14 sada lako možemo dati primjer uniformno neprekidne funkcije koja nije Lipschitzova.

Primjer 7.15. Neka je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = \sqrt{x}$. Tada je f uniformno neprekidna na $[0, +\infty\rangle$. Naime, restrikcija $f|_{[0,2]}$ je uniformno neprekidna (kao neprekidna funkcija definirana na segmentu). Također, kako je f derivabilna na $\langle 0, +\infty\rangle$ i kako je njena derivacija $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ omeđena na $\langle 1, +\infty\rangle$ (s $1/2$), iz Napomene 7.14 slijedi da je restrikcija $f|_{\langle 1,+\infty\rangle}$ Lipschitzova, stoga i uniformno neprekidna (Napomena 7.10).

Sve zajedno, za dano $\varepsilon > 0$ neka su redom $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ konstante koje dobivamo iz definicije uniformne neprekidnosti restrikcija $f|_{[0,2]}$ i $f|_{\langle 1,+\infty\rangle}$. Stavimo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Neka su $x, y \in [0, +\infty\rangle$ takvi da je $|x - y| < \delta$. Radi određenosti pretpostavimo da je $x < y$. Tada je čitav interval $\langle x, y\rangle$ sadržan u $[0, 2]$ ili u $\langle 1, +\infty\rangle$ pa je svakako $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

S druge strane, f nije Lipschitzova na $[0, +\infty\rangle$ jer za $x > 0$ imamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

što teži prema $+\infty$ kada $x \to 0^+$. Alternativno, mogli smo iskoristiti Napomenu 7.14 i zaključiti da f nije Lipschitzova jer $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nije omeđena na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak 7.16. Odredite sve $p > 0$ za koje je funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = x^p$

(a) Lipschitzova,

(b) uniformno neprekidna.

Napomena 7.17. Lipschitzove funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I interval u $\mathbb{R}$, ne moraju biti derivabilne. Naime, $f(x) = |x|$ je očito Lipschitzova na čitavom $\mathbb{R}$ (s $L_f = 1$), ali nije derivabilna u 0.

S druge strane, može se pokazati da su Lipschitzove funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ *gotovo svuda derivabilne*, u smislu da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prebrojivo mnogo segmenata $[a_i, b_i] \subset I$ čija je ukupna duljina manja od ε (tj. $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon$) tako da je f derivabilna na komplementu $I \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i])$.

Zadatak 7.18. Ispitajte je li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{za } x \neq 0 \\ 1 & \text{za } x = 0. \end{cases}$$

uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Je li f Lipschitzova na $\mathbb{R}$?

Zadatak 7.19. Ispitajte Lipschitzovost i uniformnu neprekidnost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ako je

(a) $f(x, y) = (x + e^{-y}, y + \operatorname{arctg} x)$,

(b) $f(x, y) = (x + y, xy)$,

(c) $f(x, y) = (x \cos y, y \sin x)$.

Zadatak 7.20. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : \overline{A} \to \mathbb{R}^m$ neprekidna funkcija. Ako je f Lipschitzova na A, dokažite da je f Lipschitzova i na $\overline{A}$ s istom Lipschitzvom konstantom.

8 Neprekidne funkcije na kompaktima

Sada ćemo poopćiti dio Bolzano-Weierstrassovog teorema o neprekidnim funkcijama na segmentu koji kaže da takve funkcije postižu minimum i maksimum. Tu je ključno svojstvo segmenta njegova kompaktnost; to neće iznenaditi one koji se sjećaju dokaza. (Dio o međuvrijednostima ćemo također poopćiti, ali malo kasnije, kad obradimo pojam povezanosti; to je drugo ključno svojstvo segmenta.)

Teorem 8.1. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan i neka je $f : K \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija. Tada je skup $f(K)$ kompaktan.*

Dokaz. Neka je $(y_i)_i$ proizvoljan niz u $f(K)$. Izaberimo $x_i \in K$ tako da je $y_i = f(x_i)$. Zbog kompaktnosti od K, niz $(x_i)_i$ ima konvergentan podniz $(x_{p(i)})_i$ koji teži prema $c \in K$. Sada neprekidnost funkcije f povlači da niz $(y_{p(i)})_i = (f(x_{p(i)}))_i$ konvergira prema $f(c)$. Dakle, niz $(y_i)_i$ ima konvergentan podniz s limesom u $f(K)$. Prema Teoremu 5.4, $f(K)$ je kompaktan. □

Zadatak 8.2. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija.

(a) Ako je $K \subset \mathbb{R}^k$ kompaktan, je li nužno njegova praslika $f^{-1}(K)$ kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$?

(b) Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ograničen, je li nužno i $f(A)$ ograničen?

(c) Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren, je li nužno i $f(A)$ zatvoren?

Korolar 8.3. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan, i neka je $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f ograničena, te dostiže minimum i maksimum.*

Dokaz. Upravo smo vidjeli da je skup $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompaktan, dakle ograničen i zatvoren. Iz ograničenosti slijedi da $f(K)$ ima infimum i supremum. Supremum s skupa $f(K)$ može biti element tog skupa; u tom slučaju riječ je o maksimumu. U suprotnom, iz definicije supremuma odmah slijedi da je s gomilište skupa $f(K)$. Tada zbog zatvorenosti $f(K)$ slijedi da je $s \in f(K)$, što je kontradikcija. Analogno se vidi da je infimum skupa $f(K)$ u stvari njegov minimum. □

Primjer 8.4. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, postiže minimum i maksimum na zatvorenom kvadratu s vrhovima u $(\pm 1, \pm 1)$. U stvari, s obzirom da je f kvadrat norme, jasno je da se minimum 0 postiže u $(0, 0)$ i da se maksimum 2 postiže u vrhovima. Skicirajte (ili barem zamislite) graf ove funkcije.

Zadatak 8.5. Vrijedi li obrat Korolara 8.3, tj. ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ takav da svaka neprekidna funkcija $f : K \to \mathbb{R}$ dostiže minimum i maksimum, mora li K nužno biti kompaktan?

Koristeći postojanje minimuma i maksimuma neprekidnih realnih funkcija na kompatkima možemo dokazati sljedeću ranije spominjanu činjenicu:

Teorem 8.6. *Svake dvije norme na $\mathbb{R}^n$ su ekvivalentne.*

Dokaz. Neka je $\|\cdot\|'$ proizvoljna norma na $\mathbb{R}^n$ i neka je $\|\cdot\|_2$ uobičajena euklidska norma koju stalno koristimo. Budući da je svojstvo ekvivalentnosti normi relacija ekvivalencije, dovoljno je dokazati da su norme $\|\cdot\|'$ i $\|\cdot\|_2$ ekvivalentne. Stavimo

$$M = \max\{\|\mathbf{e}_i\|' : \ i = 1, \ldots, n\},$$

gdje je $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$. Tada za svaki $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|x\|' = \|(x_1, \dots, x_n)\|' = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \right\|' \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|\mathbf{e}_i\|' \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| \leq nM\|x\|_2,$$

jer je

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max\{|x_i| : \ i = 1, \dots, n\} \leq n\|x\|_2.$$

Odavde odmah slijedi da je $\|\cdot\|' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitzova, stoga i neprekidna funkcija (s obzirom na normu $\|\cdot\|_2$, kao i obično). Naime, kako je $\|\cdot\|'$ norma na $\mathbb{R}^n$, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$|\|x\|' - \|y\|'| \leq \|x - y\|' < nM\|x - y\|_2.$$

Neka je m minimum funkcije $\|\cdot\|'$ na jediničnoj sferi u $\mathbb{R}^n$, tj. na skupu

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}.$$

Egzistencija tog minimuma slijedi iz Korolara 8.3, budući da je prema dokazanom $\|\cdot\|'$ neprekidna funkcija, a S^{n-1} je kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$. Zbog svojstva norme $\|x\|' = 0$ ako i samo ako $x = 0$ slijedi da je $m > 0$. Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ različit od 0 vrijedi

$$\|x\|' = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|' \geq m\|x\|_2.$$

Naime, $\frac{x}{\|x\|_2} \in S^{n-1}$ pa je $\|\frac{x}{\|x\|_2}\|' \geq m$. Dokazali smo dakle da je

$$m\|x\|_2 \leq \|x\|' \leq nM\|x\|_2,$$

pa je norma $\|\cdot\|'$ ekvivalentna euklidskoj normi. □

Zadatak 8.7. Dokažite sljedeću generalizaciju Teorema 8.6: ako je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, tada su svake dvije norme na V ekvivalentne.

Kao što znamo iz teorije funkcije jedne varijable, svaka neprekidna funkcija na segmentu je automatski uniformno neprekidna. Imamo sljedeće poopćenje te tvrdnje, s potpuno analognim dokazom:

Teorem 8.8. *Neka je $K \subset \mathbb{R}^n$ i $f : K \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija. Ako je K kompaktan, onda je f uniformno neprekidna na K.*

Dokaz. Pretpostavimo da f nije uniformno neprekidna na K. Iz (dokaza) Propozicije 7.2 slijedi da postoji $\varepsilon > 0$ i nizovi $(x_m)_m$ i $(y_m)_m$ u K tako da vrijedi $d(x_m, y_m) \to 0$ i $d(x_m, y_m) \geq \varepsilon$ za sve $m \in \mathbb{N}$. Kako je K kompaktan, niz $(x_m)_m$ ima konvergentni podniz $(x_{p_m})_m$ s limesom $c \in K$. Kako $d(x_{p_m}, y_{p_m}) \to 0$ vrijedi i $y_{p_m} \to c$. Sada neprekidnost funkcije f povlači $f(x_{p_m}) \to f(c)$ i $f(y_{p_m}) \to f(c)$, što je u kontradikciji s $d(f(x_{p_m}), f(y_{p_m})) \geq \varepsilon$ za sve $m \in \mathbb{N}$. □

Napomena 8.9. Alternativni dokaz prethodnog teorema možemo dati korištenjem činjenice da svaki otvoreni pokrivač kompaktnog skupa ima Lebesgueov broj (vidjeti Napomenu 5.10). Naime, neka je $\varepsilon > 0$. Neprekidnost funkcije f na K povlači da za svaki $c \in K$ postoji $\delta_c > 0$ takav da f preslikava kuglu $K(c, \delta_c)$ u kuglu $K(f(c), \frac{\varepsilon}{2})$. Neka je δ Lebesgueov broj otvorenog pokrivača $\{K(c, \delta_c) : \ c \in K\}$ skupa K. Tada $d(x, y) < \delta$ povlači da se x i y nalaze u jednoj od kugala $K(c, \delta_c)$. Slijedi da se $f(x)$ i $f(y)$ nalaze u kugli $K(f(c), \frac{\varepsilon}{2})$, pa vrijedi

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(c)) + d(f(c), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zadatak 8.10. Vrijedi li sljedeće pojačanje Teorema 8.8: Ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan skup i $f : K \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija, onda je f Lipschitzova na K.

Zadatak 8.11. Vrijedi li obrat Teorema 8.8, tj. ako je $K \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je svaka neprekidna funkcija $f : K \to \mathbb{R}^k$ uniformno neprekidna na K, mora li K nužno biti kompaktan?

Na kraju ovo odjeljka istaknimo i sljedeću jednostavnu, ali bitnu posljedicu dosadašnjih rezultata:

Korolar 8.12. *Neka su $K \subset \mathbb{R}^n$ i $L \subset \mathbb{R}^k$, pri čemu je K kompaktan. Ako je $f : K \to L$ neprekidna bijekcija, tada je i njen inverz $g = f^{-1} : L \to K$ neprekidna funkcija.*

Dokaz. Prema Napomeni 6.22 dovoljno je dokazati da je za svaki zatvoren skup A u K skup $g^{-1}(A)$ zatvoren u L. Neka je stoga A zatvoren skup u K. Kako je K kompaktan, prema Zadatku 5.3 A je također kompaktan. Stoga je i $g^{-1}(A) = f(A)$ kompaktan skup prema Teoremu 8.1. Posebno taj skup je zatvoren u $\mathbb{R}^k$. Kako je $g^{-1}(A) \subseteq L$, imamo $g^{-1}(A) = g^{-1}(A) \cap L$, odakle vidimo da je $g^{-1}(A)$ zatvoren i u L. $\square$

Napomena 8.13. Ako su X i Y topološki prostori, tada za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **homeomorfizam** ako je f neprekidna bijekcija čiji je inverz također neprekidan. Prisjetimo se da smo neprekidnost funkcija između općenitih topoloških prostora definirali u Napomeni 6.23.

Za topološke prostore X i Y kažemo da su **homeomorfni** ako postoji homeomorfizam s X na Y. Lako se provjeri da je relacija "biti homeomorfan" relacija ekvivalencije. S topološkog stanovišta homeomorfni prostori se obično identificiraju.

Napomena 8.14. Korolar 8.12 možemo ovako reformulirati: Ako je $K \subset \mathbb{R}^n$ kompaktan, tada je svaka neprekidna injekcija $f : K \to \mathbb{R}^k$ homeomorfizam na svoju sliku $f(K)$.

Zadatak 8.15. Dokažite da je funkcija $f : [0, 2\pi\rangle \to S^1$ definirana s $f(t) = (\cos t, \sin t)$ neprekidna bijekcija s intervala $[0, 2\pi\rangle$ na jediničnu kružnicu S^1 u $\mathbb{R}^2$ čiji inverz $f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi\rangle$ nije neprekidan.

9 Povezanost i povezanost putevima

U ovom poglavlju razmatramo povezanost skupova u $\mathbb{R}^n$ i dokazujemo "intuitivno očitu" tvrdnju da neprekidna funkcija preslikava povezan skup u povezan skup. Ta je tvrdnja poopćenje činjenice da neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti između minimuma i maksimuma. Na prvi se pogled čini intuitivno jasnim što bi trebali biti povezani skupovi (npr. otvorene ili zatvorene kugle), za razliku od nepovezanih (npr. unija dvije disjunktne, razmaknute kugle). Kod kompliciranijih primjera intuicija više nije tako čvrsta. Npr. ako je

$$f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

tada se lako se vidi da je zatvarač njenog grafa Γ_f jednak $\Gamma_f \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Da li je $\overline{\Gamma_f}$ povezan? S jedne strane, izgleda da je $\overline{\Gamma_f}$ unija dva (povezana) disjunktna komada, pa ne bi trebao biti povezan. S druge strane, ti su komadi "beskonačno blizu", pa iako su disjunktni možda nisu dovoljno razdvojeni. U stvari, postoje dva slična ali ne identična pojma povezanosti, od kojih se jedan naziva povezanost a drugi povezanost putevima. U Primjeru 9.26 ćemo pokazati da $\overline{\Gamma_f}$ jest povezan, ali da nije povezan putevima.

Definicija 9.1. ***Put u skupu*** *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je bilo koje neprekidno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takvo da je $\alpha([a, b]) \subseteq A$. Ako je $\alpha(a) = x$ i $\alpha(b) = y$, onda kažemo i da je α* ***put u*** *A* ***od*** *x* ***do*** *y. U slučaju da je $x = y$, put α se naziva i* ***petljom****.*

Propozicija 9.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za proizvoljne dvije točke $x, y \in A$ definirajmo $x \sim y$ ako postoji put u A od x do y. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije na A. Njene klase ekvivalencije zovemo* ***komponente povezanosti putevima****.*

Dokaz.

- *Refleksivnost:* Za svaki $x \in A$ imamo $x \sim x$.
  Zaista, za proizvoljni segment $[a, b]$ u $\mathbb{R}$ definirajmo konstantno preslikavanje $\alpha : [a, b] \to A$, $\alpha(t) = x$. Očito je α neprekidno preslikavanje (stoga i put u A) s $\alpha(a) = \alpha(b) = x$.

- *Simetričnost:* Ako su $x, y \in A$ takvi da je $x \sim y$, onda je i $y \sim x$.
  Zaista, neka je $\alpha : [a, b] \to A$ put u A od x do y. Definirajmo preslikavanje $\tilde{\alpha} : [a, b] \to A$ s

  $$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(a + b - t).$$

  Tada je $\tilde{\alpha}$ neprekidna, $\tilde{\alpha}([a, b]) = \alpha([a, b]) \subseteq A$ te $\tilde{\alpha}(a) = \alpha(b) = y$ i $\tilde{\alpha}(b) = \alpha(a) = x$. Dakle, $\tilde{\alpha}$ je put u A od y do x.

- *Tranzitivnost:* Ako su $x, y, z \in A$ takvi da je $x \sim y$ te $y \sim z$, onda je i $x \sim z$.
  Zaista, neka je $\alpha_1 : [a, b] \to A$ put u A od x do y, te $\alpha_2 : [c, d] \to A$ put u A od y do z. Tada je i

  $$\alpha_3 : [b, b + d - c] \to A, \qquad \alpha_3(t) = \alpha_2(t - b + c)$$

  put u A od y do z. Definirajmo preslikavanje

  $$\alpha : [a, b + d - c] \to A, \qquad \alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & t \in [a, b] \\ \alpha_3(t), & t \in [b, b + d - c] \end{cases},$$

  tako da je $\alpha(a) = x$ te $\alpha(b + d - c) = z$. Kako su α_1 i α_3 neprekidna preslikavanja na svojim domenama te kako je

  $$\lim_{t\to b^-} \alpha(t) = \lim_{t\to b^-} \alpha_1(t) = \alpha_1(b) = y = \alpha_3(b) = \lim_{t\to b^+} \alpha_3(t) = \lim_{t\to b^+} \alpha(t),$$

zaključujemo da je α neprekidno preslikavanje na $[a, b+d-c]$. Dakle, α je put u A od x do z.

$\square$

Definicija 9.3. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***povezan putevima*** *ako za svake dvije točke $x, y \in A$ postoji put u A od x do y, odnosno $(\forall x, y \in A)(x \sim y)$.*

Ako smatramo da imamo dobru predodžbu o tome kako izgledaju putevi, onda je ova definicija intuitivno prihvatljiva: ova vrsta povezanosti znači da od svake točke skupa A možemo na neprekidan način doći do bilo koje druge točke od A, pri čemu niti u jednom trenutku ne izlazimo iz samog skupa A.

Primjer 9.4. Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **konveksan** ako je za sve $x, y \in A$ njihova spojnica (konveksna ljuska)

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty : \ t \in [0,1]\}$$

sadržana u skupu A. Svaki konveksan skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je putevima povezan. Naime, za prozvoljne $x, y \in A$ definirajmo $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ s $\alpha(t) = (1-t)x + ty$. Tada je očito α put u A od x do y. Posebno, $\mathbb{R}^n$ je povezan putevima, kao i sve otvorene i zatvorene kugle u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 9.5. Primijetimo da je podskup A od $\mathbb{R}$ povezan putevima ako i samo ako je A interval (bilo kakav). Naime, svaki interval je povezan putevima (specijalni slučaj Primjera 9.4). S druge strane, pretpostavimo da A nije interval. Tada postoje točke $x_1, x_2 \in A$ i $y \in \mathbb{R} \setminus A$ takve da je $x_1 < y < x_2$. Kako je A prema pretpostavci povezan putevima, postoji put $\alpha : [a, b] \to A$ takav da je $\alpha(a) = x_1$ i $\alpha(b) = x_2$. Prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za neprekidne realne funkcije na segmentu, imamo $[x_1, x_2] \subseteq \alpha([a, b]) \subseteq A$. Posebno je $y \in A$ što je kontradikcija.

Primjer 9.6. Neka je I interval u $\mathbb{R}$ te $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je njen graf

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : \ x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

povezan putevima. Zaista, neka su $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ dvije točke s Γ_f. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $x_1 \leq x_2$. Tada je $[x_1, x_2] \subseteq I$, pa je

$$\alpha : [x_1, x_2] \to \Gamma_f, \qquad \alpha(t) = (t, f(t))$$

traženi put u Γ_f od $(x_1, f(x_1))$ do $(x_2, f(x_2))$, jer je f neprekidna.

Primjer 9.7. Ako je $n > 1$ onda je svaka sfera u $\mathbb{R}^n$ povezana putevima. Zaista, za $c \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$ neka je

$$S(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - c\| = r\}$$

sfera u $\mathbb{R}^n$ s centrom u c radijusa r. Za proizvoljne $x, y \in S(c, r)$ trebamo pokazati da vrijedi $x \sim y$. Razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj. Vektori $x - c$ i $y - c$ su linearno nezavisni. Tada je

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \alpha(t) = r\frac{(1-t)(x-c) + t(y-c)}{\|(1-t)(x-c) + t(y-c)\|} + c$$

dobro definirano neprekidno preslikavanje takvo da je $\|\alpha(t) - c\| = r$ za sve $t \in [0,1]$. Kako je $\alpha(0) = x$ i $\alpha(1) = y$, zaključujemo da je α put u $S(c, r)$ od x do y. Dakle, u tom slučaju je $x \sim y$.

2. slučaj. Vektori $x - c$ i $y - c$ su linearno zavisni. U tom slučaju uzmimo bilo koji $z \in S(c, r)$ takav da vektor $z - c$ nije kolinearan s $x - c$ i $y - c$. Prema 1. slučaju imamo $x \sim z$ i $y \sim z$. Kako je $\sim$ relacija ekvivalencije, mora biti i $x \sim y$.

zašto je ovo poseban slučaj?

Primijetimo da za $n \geq 2$ sfere u $\mathbb{R}^n$ nisu konveksni skupovi.

Zadatak 9.8. Dokažite da je svaki otvoreni kružni vijenac u $\mathbb{R}^2$, tj. skup

$$K(c,r,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : r < d(x,c) < R\},$$

gdje su $c \in \mathbb{R}^2$ i $0 < r < R$, povezan putevima.

Zadatak 9.9. Neka je $n \geq 2$. Ako iz sfere u $\mathbb{R}^n$ izbacimo jednu točku, dokažite da taj skup i dalje ostaje povezan putevima.

S druge strane imamo i sljedeću definiciju koja odgovara predodžbi da povezan skup ne možemo razdijeliti u dva "odvojena" komada:

Definicija 9.10. *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***povezan*** *ako se ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna podskupa koji su otvoreni u A. U protivnom za A kažemo da je* ***nepovezan****.*

Prisjetite se da podskup B skupa A zovemo otvorenim u A ako postoji otvoren skup U u $\mathbb{R}^n$ takav da je $B = A \cap U$ (Definicija 6.18).

Napomena 9.11. Prazan skup $\emptyset$ je očito povezan (i povezan putevima).

Jasno je da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan ako i samo ako se ne može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna podskupa koji su zatvoreni u A (u smislu Definicije 6.18).

Također, A je povezan ako i samo ako su jedini podskupovi od A koji su istovremeno otvoreni i zatvoreni u A sam A i $\emptyset$.

Nadalje, direktno iz Definicije 9.10 slijedi da je skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nepovezan ako i samo ako postoje podskupovi $U, V \subseteq A$ takvi da vrijedi:

- U, V neprazni;
- U, V otvoreni u A;
- $U \cap V = \emptyset$;
- $A = U \cup V$.

Zadatak 9.12. Dokažite da je skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nepovezan ako i samo ako postoji neprekidna surjekcija $f : A \to \{0, 1\}$.

Sljedeći primjer je važan za teoriju pa ćemo ga nazvati propozicijom:

Propozicija 9.13. *Segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je povezan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da su A i B dva neprazna disjunktna zatvorena skupa čija je unija $[a,b]$. Kako je segment $[a,b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$, prema Napomeni 6.19 A i B su zatvoreni i kao podskupovi od $\mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $b \in A$; dakle $b \notin B$. Kako je skup B ograničen, on ima supremum s u $\mathbb{R}$. Budući da je s gomilište od B, a B je zatvoren, slijedi da je $s \in B$. Kako $b \notin B$, imamo $s < b$, pa je onda $\langle s, b] \subseteq A$ (jer je $A = [a,b] \setminus B$). Posebno, s je također gomilište skupa A, pa zbog zatvorenosti od A slijedi $s \in A$. Dakle $s \in A \cap B$, što je nemoguće jer su A i B disjunktni. $\square$

Napomena 9.14. Primijetite da se sličan argument koristio u dokazu treće tvrdnje Bolzano-Weierstrassovog teorema koja kaže da neprekidna funkcija na segmentu poprima sve međuvrijednosti između maksimuma i minimuma.

Korolar 9.15. *Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan putevima onda je A i povezan.*

Dokaz. Pretpostavimo da se A može rastaviti na uniju dva neprazna disjunktna podskupa U i V koji su otvoreni u A. Izaberimo točke $u \in U$ i $v \in V$. Neka je $\alpha : [a,b] \to A$ put od u do v. Tada su $\alpha^{-1}(U)$ i $\alpha^{-1}(V)$ očito neprazni i disjunktni podskupovi od $[a,b]$ koji u uniji daju čitav $[a,b]$. Nadalje, kako je α neprekidno preslikavanje, prema Teoremu 6.21, $\alpha^{-1}(U)$ i $\alpha^{-1}(V)$ su otvoreni u A. To pokazuje da je segment $[a,b]$ nepovezan, što je kontradikcija s Propozicijom 9.13. □

Primjer 9.16. Svi konveksni skupovi kao i sve sfere u $\mathbb{R}^n$ su povezani skupovi. To slijedi direktno iz Korolara 9.15 i činjenice da su ti skupovi povezani putevima (Primjer 9.4 i 9.7) .

Primjer 9.17. Sada možemo opisati sve povezane podskupove od $\mathbb{R}$: to su točno svi intervali. Kao što znamo, svaki interval u $\mathbb{R}$ je povezan putevima, pa je stoga i povezan prema Korolaru 9.15. S druge strane, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ povezan, onda on mora biti interval. Naime, u suprotnom bi postojao $x \in \mathbb{R}\backslash A$ takav da su oba skupa $A_1 = \langle -\infty, x\rangle \cap A$ i $A_2 = \langle x, +\infty\rangle \cap A$ neprazna. Skupovi A_1 i A_2 su očito disjunktni i otvoreni u A koji u uniji daju čitav A, čime smo dobili kontradikciju s pretpostavkom da je A povezan. Dakle, za podskupove od $\mathbb{R}$ su pojmovi povezanosti i povezanosti putevima ekvivalentni pojmovi. To već nije istina za podskupove od $\mathbb{R}^2$, kao što što ćemo vidjeti u Primjeru 9.26

Međutim vrijedi naredni rezultat:

Propozicija 9.18. *Otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ je povezan ako i samo ako je povezan putevima.*

Dokaz. Iz Korolara 9.15 slijedi da povezanost putevima povlači povezanost. Stoga je dovoljno pokazati da u slučaju otvorenog skupa povezanost povlači povezanost putevima.

Najprije dokažimo da je svaka komponenta povezanosti putevima otvorenog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ također otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Zaista za $x \in A$ pripadna komponenta povezanosti putevima je oblika

$$A_x = \{y \in A : \ x \sim y\} = \{y \in A : \exists \text{ put u } A \text{ od } x \text{ do } y\}.$$

Budući da je A otvoren u $\mathbb{R}^n$ i $A_x \subseteq A$, za proizvoljan $y \in A_x$ postoji $r > 0$ takav da je $K(y,r) \subseteq A$. Prema Primjeru 9.4 svaka (otvorena) kugla je povezana putevima, pa za svaki $z \in K(y,r)$ imamo $y \sim z$. Kako je $x \sim y$ te kako je $\sim$ relacija ekvivalencije na A (Propozicija 9.2), slijedi $x \sim z$ odnosno $z \in A_x$. Time smo pokazali da je $K(y,r) \subseteq A_x$, pa je A_x otvoren skup.

Pretpostavimo sada da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan, ali da nije povezan putevima. Posebno $A \neq \emptyset$ te fiksirajmo neki $x \in A$. Tada imamo $A_x \neq A$, pa postoji $y \in A \setminus A_x$. Prema dokazanom, A_y je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Budući da je $\sim$ relacija ekvivalencije, A_x i A_y su disjunktni skupovi i

$$A \setminus A_x = \bigcup_{y \in A \setminus A_x} A_y.$$

Zaključujemo da je skup $A \setminus A_x$ otvoren, kao unija otvorenih skupova. Stoga smo dokazali da su skupovi A_x i $A \setminus A_x$ otvoreni, neprazni, disjunktni te u uniji daju A. Dakle, A je nepovezan, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. □

Slični argument koji dokazuje Korolar 9.15 dokazuje i sljedeći važan rezultat:

Teorem 9.19. *Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan i ako je $f : A \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija, tada je njena slika povezan skup u $\mathbb{R}^k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f(A)$ nije povezan. Tada postoje neprazni disjunktni $X, Y \subseteq f(A)$ koji su otvoreni u $f(A)$ takvi da je $X \cup Y = f(A)$. Neka su U i V otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^k$ takvi da je $X = U \cap f(A)$, $Y = V \cap f(A)$. Skupovi $f^{-1}(X) = f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(Y) = f^{-1}(V)$ su neprazni, disjunktni i otvoreni u A (prema Teoremu 6.21) te u uniji daju čitav A. To je kontradikcija s povezanošću skupa A. Dakle, $f(A)$ mora biti povezan. $\square$

Napomena 9.20. Također je istina da je neprekidna slika skupa koji je povezan putevima i sama povezana putevima. Naime ako su $y = f(x)$ i $y' = f(x')$ bilo koje točke u $f(A)$ i ako je $\alpha : [a, b] \to A$ put od x do x', onda je $f \circ \alpha$ put u $f(A)$ od y do y'.

Zadatak 9.21. Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ neprekidna funkcija. Ako je $B \subseteq \mathbb{R}^k$ povezan, je li nužno i $f^{-1}(B)$ povezan skup?

Korolar 9.22. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je slika od f interval u $\mathbb{R}$. Posebno, ako je $f(x) = a$ i $f(y) = b$, tada f postiže sve međuvrijednosti između a i b.*

Dokaz. Tvrdnja je očita jer je $f(A)$ povezan podskup od $\mathbb{R}$, dakle interval prema Primjeru 9.17. $\square$

Sada lako dobivamo sljedeće poopćenje Bolzano-Weierestrassovog teorema za neprekidne realne funkcije na segmentu:

Korolar 9.23. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan i kompaktan i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je slika od f segment u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Prema Korolaru 9.22 $f(A)$ je interval u $\mathbb{R}$, a prema Teoremu 8.1 $f(A)$ je kompaktan skup. Dakle, $f(A)$ je segment. $\square$

Imamo i sljedeću korisnu činjenicu o povezanim skupovima:

Propozicija 9.24. *Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan, onda je i njegov zatvarač $\overline{A}$ povezan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\overline{A}$ nije povezan. Tada postoje U, V neprazni, disjunktni i zatvoreni skupovi takvi da je $\overline{A} = U \cup V$. Stoga su

$$U' = U \cap A, \qquad V' = V \cap A$$

skupovi zatvoreni u A, disjunktni te $U' \cup V' = A$. Kako je A povezan jedan od ova dva skupa je prazan. Neka je to U'. To znači da je $A = V' \subseteq V$, pa je i $\overline{A} \subseteq \overline{V} = V$. Dakle $U = \overline{A} \setminus V = \emptyset$, što je kontradikcija. $\square$

Zadatak 9.25. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ povezan skup, je li nužno neki od skupova $\operatorname{Int} A$, A' i ∂A također povezan?

Sada napokon dajemo najavljeni primjer skupa u $\mathbb{R}^2$ koji je povezan ali nije povezan putevima:

Primjer 9.26. Neka je

$$f : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

Tvrdimo da je zatvarač $\overline{\Gamma_f}$ grafa od f povezan podskup od $\mathbb{R}^2$ koji nije povezan putevima. Posebno, zatvarač skupa koji je povezan putevima općenito ne mora biti povezan putevima.

Povezanost od $\overline{\Gamma_f}$ slijedi direktno iz Primjera 9.6 te Propozicija 9.15 i 9.24.

Dokažimo sada da $\overline{\Gamma_f}$ nije povezan putevima. U tu svrhu najprije primijetimo da je

$$\overline{\Gamma_f} = \Gamma_f \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Zaista, označimo skup s desne strane gornje jednakosti s A. Kako bismo pokazali da je $A \subseteq \overline{\Gamma_f}$, dovoljno je prikazati svaku točku iz $\{0\} \times [-1, 1]$ kao limes nekog konvergentnog niza u Γ_f. Neka je stoga $y \in [-1, 1]$. Kako je $\sin([0, 2\pi]) = [-1, 1]$, postoji $\theta \in [0, 2\pi]$ takav da je $\sin\theta = y$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $x_n = 1/(\theta + 2n\pi)$. Tada imamo

$$\Gamma_f \ni (x_n, \sin(1/x_n)) = (x_n, y) \to (0, y)$$

kada $n \to \infty$. Kako bismo pokazali obratnu inkluziju $\overline{\Gamma_f} \subseteq A$, dovoljno je dokazati da je skup A zatvoren (jer je $\Gamma_f \subset A$). Neka je $(x_n, y_n)_n$ niz u A koji konvergira prema nekoj točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trebamo pokazati da je $(x, y) \in A$. Kako $x_n \to x$ i $y_n \to y$ imamo $x \geq 0$ i $|y| = \lim_n |y_n| \leq 1$. Ako je $x = 0$, onda je očito $(x, y) = (0, y) \in A$. Ako je $x > 0$, onda bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (u protivnom izaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n > 0$ za sve $n > n_0$ i prijeđemo na podniz $(y_n)_n$, gdje je $y_n = x_{n+n_0}$). Tada je $(x_n, y_n) \in \Gamma_f$, pa je $y_n = \sin(1/x_n)$. Kako je funkcija $f(x) = \sin(1/x)$ neprekidna na $\langle 0, +\infty\rangle$, iz $x_n \to x$ slijedi

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sin(1/x_n) = \sin(1/x).$$

Dakle, $(x, y) \in \Gamma_f \subset A$.

Sada dokažimo da $\overline{\Gamma_f}$ nije povezan putevima. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji put $\alpha : [a, b] \to \overline{\Gamma_f}$ takav da je $\alpha(a) = (0, 0)$ i $\alpha(b) = (1/\pi, 0)$. Kao i obično, označimo prvu komponentu od α s α_1 a drugu s α_2, tako da je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Budući da je α_1 neprekidna na $[a, b]$ te $\alpha_1(a) = 0$ i $\alpha_1(b) = 1/\pi$, postoji $a < t_1 < b$ takav da je $\alpha_1(t_1) = 2/(3\pi)$. Koristeći isti argument dobivamo $a < t_2 < t_1$ takav da je $\alpha_1(t_2) = 2/(5\pi)$. Na taj način dolazimo do strogo padajućeg niza $(t_n)_n$ u $\langle a, b\rangle$ takvog da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\alpha_1(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

Kako je $\alpha_1(t_n) > 0$ i $\alpha(t_n) \in \overline{\Gamma_f}$, mora biti $\alpha(t_n) \in \Gamma_f$, pa je

$$\alpha_2(t_n) = \sin\frac{1}{\alpha_1(t_n)} = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n. \tag{9.1}$$

Kako je $(t_n)_n$ strogo padajuć niz u $\langle a, b\rangle$, on je konvergentan. Budući da je α_2 neprekidna funkcija na $[a, b]$, niz $(\alpha_2(t_n))_n$ je također konvergentan, što je u kontradikciji s (9.1). Dakle, $\overline{\Gamma_f}$ nije povezan putevima.

Pri kraju ovog odjeljka istaknimo još jednu jednostavnu ali korisnu činjenicu:

Propozicija 9.27. *Neka je $\{A_i : i \in I\}$ proizvoljna familija povezanih podskupova od $\mathbb{R}^n$ čiji je presjek neprazan. Tada je i unija $\bigcup_{i\in I} A_i$ povezan skup.*

Dokaz. Neka je $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ i $c \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Pretpostavimo da A nije povezan. Tada postoje neprazni, disjunktni skupovi U i V otvoreni u A takvi da je $A = U \cup V$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $c \in U$. Za svako $i \in I$ definirajmo

$$U_i = U \cap A_i, \qquad V_i = V \cap A_i.$$

Tada su za sve $i \in I$ skupovi U_i i V_i disjunktni i otvoreni u A_i (pokažite!) te $A_i = U_i \cup V_i$. Nadalje, svi skupovi U_i su neprazni, jer je $c \in U_i$ za sve $i \in I$. Zbog povezanosti skupova A_i, mora biti $V_i = \emptyset$ za sve $i \in I$. Stoga je

$$V = V \cap A = V \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} V_i = \emptyset,$$

pa smo došli do kontradikcije. $\square$

Zadatak 9.28. Neka je $\{A_i : i \in I\}$ proizvoljna familija podskupova od $\mathbb{R}^n$ koji su povezani putevima i čiji je presjek neprazan. Je li nužno i unija $\bigcup_{i \in I} A_i$ povezana putevima?

Zadatak 9.29. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) Ako su A i B povezani skupovi, je li nužno i $A \cap B$ povezan skup?

(b) Ako su A i B povezani putevima, je li nužno i $A \cap B$ povezan putevima?

Napomena 9.30. Ako je X topološki prostor, tada se bilo koje svojstvo od X koje je invarijantno na homeomorfizme (vidjeti Napomenu 8.13) zove **topološka invarijanta**. Drugim riječima, ako X ima svojstvo (P), tada je ono topološka invarijanta od X ako bilo koji drugi topološki prostor Y koji je homeomorfan s X ima također svojstvo (P). Primjeri topoloških invarijanti su npr. kompaktnost, povezanost i povezanost putevima. Posebno, ako X ima neku topološku invarijantu koju nema Y, tada X i Y ne mogu biti homeomorfni.

Koristeći tu opservaciju, dokažimo npr. da jedinična kružnica S^1 u $\mathbb{R}^2$ nije homeomorfna niti jednom podskupu A od $\mathbb{R}$. Pretpostavimo suprotno, te neka je $f : S^1 \to A$ neki homeomorfizam. Kako je S^1 kompaktan i povezan skup, prema Korolaru 9.23 $A = f(S^1)$ mora biti segment u $\mathbb{R}$. Neka su $a < b$ takvi da je $A = [a, b]$. Uzmimo proizvoljnu točku $p \in S^1$ takvu da je $a < f(p) < b$. Prema Zadatku 9.9 skup $S^1 \setminus \{p\}$ je povezan (putevima). Kako je povezanost topološka invarijanta, $f(S^1 \setminus \{p\}) = A \setminus \{f(p)\}$ također mora biti povezan skup (formalno, tu se pozivamo na Teorem 9.19). No to je kontradikcija s Napomenom 9.17, budući da su svi povezani podskupovi od $\mathbb{R}$ točno intervali, a $A \setminus \{f(p)\}$ nije interval.

10 Banachov teorem o fiksnoj točki

Definicija 10.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}^k$ kažemo da je* ***kontrakcija*** *ako je ona Lipschitzova s konstantom $L_f < 1$.*

Primijetimo da iz definicije kontrakcije slijedi da svakako vrijedi

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in A,\ x \neq y. \tag{10.1}$$

No funkcija f koja zadovoljava (10.1) općenito ne mora biti kontrakcija:

Zadatak 10.2. Nađite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja (za $A = \mathbb{R}$) zadovoljava (10.1) ali koja nije kontrakcija.

Sljedeći je teorem, iako vrlo jednostavan, ključan za dokaz mnogih važnih rezultata. Nama će Banachov teorem prvenstveno služiti za dokaz teorema o inverznoj funkciji (Teorem 16.1), a možda je najpoznatija primjena teorema za dokaz egzistencije rješenja Cauchyjeve zadaće za običnu diferencijalnu jednadžbu (više na kolegiju Obične diferencijalne jednadžbe). Nakon dokaza donosimo još neke primjene.

Teorem 10.3 (Banachov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zatvoren i neka je $f : A \to A$ kontrakcija. Tada f ima jedinstvenu fiksnu točku u A, tj. $\exists! x \in A$ takav da je $f(x) = x$.*

Dokaz. Stavimo $L = L_f$. Dokažimo najprije egzistenciju fiksne točke. Neka je a bilo koja točka u A. Definirajmo niz $(x_m)_m$ u A rekurzivno s

$$x_1 = a; \qquad x_{m+1} = f(x_m) \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Možemo pretpostaviti da je $x_2 \neq x_1$; u protivnom smo već pronašli fiksnu točku, $x = x_1$. Također možemo pretpostaviti da f nije konstantna funkcija, tako da je $0 < L < 1$. Pretpostavimo da znamo da je niz $(x_m)_m$ Cauchyjev. Onda će zbog zatvorensti skupa A niz $(x_m)_m$ biti i konvergentan (Propozicija 4.27. Označimo njegov limes s x. Budući da je f neprekidna funkcija (Napomena 7.10), prelaskom na limes iz jednakosti $x_{m+1} = f(x_m)$ dobivamo

$$x = \lim_{m\to\infty} x_{m+1} = \lim_{m\to\infty} f(x_m) = f\left(\lim_{m\to\infty} x_m\right) = f(x),$$

pa je x fiksna točka od f.

Kako bismo dokazali da je niz $(x_m)_m$ Cauchyjev, primijetimo najprije da iz činjenice da je f kontrakcija slijedi

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq L d(x_{m-1}, x_m) \leq L^2 d(x_{m-2}, x_{m-1}) \leq \cdots \leq L^{m-1} d(x_1, x_2),$$

za bilo koji $m \in \mathbb{N}$. Ako su sada $k, m \in \mathbb{N}$, $k < m$, onda vrijedi

$$\begin{aligned} d(x_k, x_m) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq (L^{k-1} + L^k + \cdots + L^{m-2}) d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Budući da je $0 < L < 1$, red $\sum_i L^i$ konvergira. Slijedi da je posljednji izraz u gornjoj nejednakosti po volji malen ako je k dovoljno velik. Naime, za zadani $\varepsilon > 0$, uzmimo dovoljno velik $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za ostatak reda $\sum_i L^i$ vrijedi

$$\sum_{i=k_0-1}^{\infty} L^i < \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_2)}.$$

Tada će za svaki $k \geq k_0$ vrijediti

$$L^{k-1} + L^k + \cdots + L^{m-2} < \sum_{i=k-1}^{\infty} L^i \leq \sum_{i=k_0-1}^{\infty} L^i < \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_2)}.$$

Stoga je za sve $k, m \geq k_0$

$$d(x_k, x_m) < \frac{\varepsilon}{d(x_1, x_2)} d(x_1, x_2) = \varepsilon.$$

Dakle, niz $(x_m)_m$ je doista Cauchyjev. Ostaje dokazati jedinstvenost fiksne točke. Pretpostavimo da su $x, y \in A$ dvije različite fiksne točke za f. Kako je $L < 1$ i $d(x, y) > 0$, imamo

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) < d(x, y),$$

što je kontradikcija. Dakle, $x = y$. $\square$

Napomena 10.4. Ovaj teorem daje samo dovoljne uvjete za jedinstvenu fiksnu točku. Funkcija $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dana formulom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x, & x \in [0, 1/4\rangle \\ 1, & x \in [1/4, 1] \end{cases}$$

nije kontrakcija, a ima jedinstvenu fiksnu točku 1.

Primjer 10.5. Funkcija $f(x) = x^2$ ima fiksne točke 0 i 1. Kako je $f'(x) = 2x$, prema Napomeni 7.14 f je kontrakcija na $[-1/4, 1/4]$ s Lipschitzovom konstantom $1/2$. Stoga f na $[-1/4, 1/4]$ ima jedinstvenu fiksnu točku 0. Primijetite da je i na segmentu $[-1/2, 1/2]$ fiksna točka od f jedinstvena, ali f na tom segmentu nije kontrakcija.

Napomena 10.6. Ako $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nije zatvoren, tada kontrakcija $f : A \to A$ ne mora uopće imati fiksnu točku. Npr. uzmimo da je $A = \langle 0, 1\rangle \subset \mathbb{R}$. Ako je $f(x) = x/2$, tada je f očito kontrakcija i $f(A) \subset A$. S druge strane jedina fiksna točka of f je 0 koja nije u A.

Zadatak 10.7. Ako je A otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$, nađite primjer kontrakcije $f : A \to A$ koja nema fiksnu točku.

Napomena 10.8. Banachov teorem nam posredno daje i egzistenciju rješenja jednadžbe $f(x) = x$, za funkciju f koja je kontrakcija. Štoviše, niz iteracija $x_{n+1} = f(x_n)$ iz dokaza teorema 10.3, za bilo koju početnu iteraciju, konvergira prema fiksnoj točki, tj. rješenju jednadžbe, pa je time dana i konstrukcija numeričke metode za aproksimaciju rješenja jednadžbe (ne zaboravite provjeriti pretpostavke Banachovog teorema!).

Primjer 10.9. Neka je $\alpha > 0$ i $f : [\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right).$$

Iz AG-nejednakosti

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \qquad \forall x, y \geq 0$$

dobivamo da je $f(x) \geq \sqrt{\alpha}$, pa je $f([\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle) \subseteq [\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle$. Nadalje, prema Napomeni 7.14 imamo

$$\begin{aligned} L_f &= \|f'\|_\infty = \sup\{|f'(x)| : x \in [\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle\} \\ &= \sup\left\{\frac{1}{2}\left|1 - \frac{\alpha}{x^2}\right| : x \in [\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle\right\} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Dakle, f je kontrakcija pa prema Teoremu 10.3, f ima jedinstvenu fiksnu točku na $[\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle$. Ona zadovoljava
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{\alpha}.$$
Posebno, ako za α uzmemo bilo koji prirodan broj koji nije potpuni kvadrat, tada nam za proizvoljan racionalan broj $x_0 \in [\sqrt{\alpha/2}, +\infty\rangle$ iteracije
$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$$
daju niz racionalnih aproksimacija iracionalanog broja $\sqrt{\alpha}$.

Primjer 10.10. Rješenje jednadžbe
$$\cos x - x = 0$$
je fiksna točka funkcije $f(x) = \cos x$. Ova funkcija nije kontrakcija na $\mathbb{R}$, no jest na $[0,1]$. Naime, $f'(x) = \sin x$ pa je $\|f'\|_\infty = 1$ i $\|f'|_{[0,1]}\|_\infty = \sin 1 < 1$ (vidjeti Napomenu 7.14). Također, očito je $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Stoga prema Teoremu 10.3 f na $[0,1]$ ima jedinstvenu fiksnu točku koja je i rješene gornje jednadžbe. Iteracije iz dokaza Teorema 10.3 nam mogu poslužiti za numeričku aproksimaciju rješenja.

Primjer 10.11. Neka je dan trokut ABC. Neka su A_1, B_1, C_1 polovišta stranica BC, AC i AB, redom. Neka je preslikavanje $F : ABC \to A_1B_1C_1$ afino preslikavanje koje preslikava $A \mapsto A_1$, $B \mapsto B_1$, $C \mapsto C_1$ (jedinstveno je određeno time). Ovo preslikavanje je kontrakcija. Stoga ima jedinstvenu fiksnu točku: zajedničko težište.

Zadatak 10.12. Geografsku kartu Zagreba položite na pod učionice na fakultetu. Tada postoji točno jedna podudarna točka karte i učionice.

11 Diferencijal i derivacije

11.1 Diferencijal

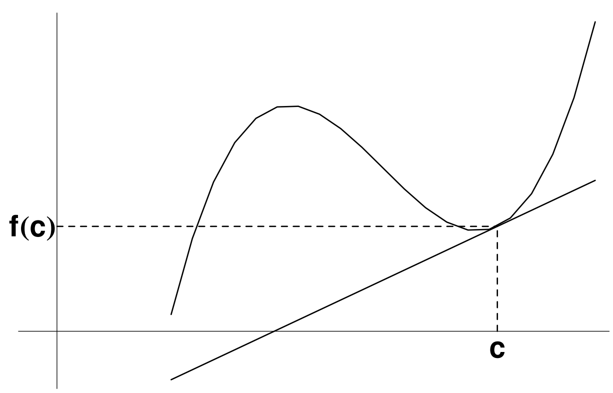
U ovom odjeljku poopćujemo pojam diferencijabilnosti na funkcije više varijabli. Prisjetimo se, realna funkcija realne varijable $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna (ili derivabilna) u $c \in \langle a, b\rangle$ ako postoji limes

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

U tom slučaju taj limes je jedinstven i broj

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

zovemo derivacija funkcije f u točki c. Taj broj upravo predstavlja nagib (koeficijent smjera) tangente na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$:



Primijetimo da diferencijabilnost od f u točki c možemo iskazati na još nekoliko ekvivalentnih načina:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \quad &\iff \quad \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right) = 0 \\
&\iff \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} = 0 \\
&\iff \quad \lim_{x\to c} \frac{|f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)|}{|x - c|} = 0.
\end{aligned}$$

Stoga definiciju diferencijabilnosti možemo iskazati i ovako: funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je diferencijabilna u $c \in \langle a, b\rangle$ ako postoji $l \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x) - f(c) - l(x - c)|}{|x - c|} = 0. \tag{11.1}$$

Iz gornjih ekvivalencija i jedinstvenosti derivacije u točki vidimo da ako takav $l \in \mathbb{R}$ postoji, on je jedinstven i jednak $f'(c)$.

Za proizvoljni $l \in \mathbb{R}$ označimo s f_l afinu funkciju koja prolazi kroz točku $(c, f(c))$ s koeficijentom smjera l, tj.

$$f_l(x) = f(c) + l(x - c).$$

Jer je funkcija f diferencijabilna u c, ona je i neprekidna u c, pa je $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Očito je i za svako $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to c} f_l(x) = f(c)$, pa je

$$\lim_{x\to c} |f(x) - f_l(x)| = 0.$$

No, ako izaberemo jedinstveni $l = f'(c)$ onda dobivamo i više:

$$\lim_{x\to c} \frac{|f(x) - f_{f'(c)}(x)|}{|x - c|} = 0.$$

Ovo svojstvo bi mogli iskazati ovako: Kada $x \to c$, razlika funkcije $f_{f'(c)}$ (čiji je graf tangenta od f u $(c, f(c))$) i funkcije f teži još brže u 0 nego razlika $x - c$. Štoviše, zbog jedinstvenosti derivacije u točki, $f_{f'(c)}$ je jedina afina funkcija koja ima to svojstvo.

Definiramo li preslikavanje $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom $L(x) = lx$, tada je to preslikavanje linearno (tj. L je linearni operator s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$). Štoviše, svaki linearni operator s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ je tog oblika. Sada nam (11.1) daje motivaciju za sljedeću definiciju:

Definicija 11.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je* ***diferencijabilna u točki*** *$c \in A$ ako postoji linearni operator $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ takav da vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0. \tag{11.2}$$

Funkcija f je ***diferencijabilna na*** *A ako je ona diferencijabilna u svakoj točki skupa A.*

Napomena 11.2. Norme na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ u ovoj definiciji su Euklidske, ali zbog ekvivalencija normi na (realnim) konačnodimenzionalnim prostorima (Teorem 8.6), definicija ne ovisi o izboru konkretnih normi na $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{R}^m$. Primijetite također da je ista definicija smislena i za funkcije $f : A \subseteq V \to W$, gdje su V i W normirani prostori te $A \subseteq V$ otvoren.

Za proizvoljni $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definiramo pripadnu afinu aproksimaciju s

$$f_L(x) = f(c) + L(x - c).$$

Ona ima ista svojstva kao i u slučaju realne funkcije realne varijable.

Primjer 11.3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija koja je diferencijabilna u točki $c \in A$. U tom slučaju je linearni operator L iz definicije diferencijabilnosti linearni funkcional na $\mathbb{R}^n$ (tj. $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), pa prema Rieszovom teoremu o reprezentaciji linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$ postoji jedinstveni vektor $l \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$Lx = (l|x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$. Stoga je u tom slučaju afina aproksimacija f_L oblika

$$f_L(x) = f(c) + (l|x - c)$$

i ona je najbolja afina aproksimacija funkcije f u okolini točke c.

U slučaju $n = 2$, graf funkcije f_L je ravnina koja prolazi kroz točku $(c, f(c))$, čiji je vektor normale l.

slika

Kad u narednom teoremu pokažemo jedinstvenost operatora L tu ćemo ravninu nazivati tangencijalna ravnina.

Teorem 11.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $c \in A$. Tada je linearni operator L iz definicije diferencijabilnosti u c jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dva linearna operatora $L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ koji zadovoljavaju (11.2). Dokazat ćemo da je $L_1\boldsymbol{e} = L_2\boldsymbol{e}$ za proizvoljni jedinični vektor $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$. Odavde će posebno slijediti da se linearni operatori L_1 i L_2 podudaraju na kanonskoj bazi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ za $\mathbb{R}^n$, pa stoga moraju biti jednaki.

Neka je $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan jedinični vektor i neka je $\lambda > 0$. Označimo $x = c + \lambda\boldsymbol{e}$. Tada je

$$\lambda = \|x - c\| \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{e} = \frac{x - c}{\lambda} = \frac{x - c}{\|x - c\|}.$$

Zbog otvorenosti skupa A za dovoljno male λ vrijedi $x \in A$. Sada je

$$\begin{aligned} \|L_1\boldsymbol{e} - L_2\boldsymbol{e}\| &= \left\| L_1\frac{x - c}{\|x - c\|} - L_2\frac{x - c}{\|x - c\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{-f(x) + f(c) + L_1(x - c)}{\|x - c\|} + \frac{f(x) - f(c) - L_2(x - c)}{\|x - c\|} \right\|. \end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti trokuta dobivamo

$$\|L_1\boldsymbol{e} - L_2\boldsymbol{e}\| \le \frac{\|f(x) - f(c) - L_1(x - c)\|}{\|x - c\|} + \frac{\|f(x) - f(c) - L_2(x - c)\|}{\|x - c\|}.$$

Uzimanjem limesa $x \to c$ slijedi da desna strana gornje nejednakosti teži u 0, pa je $L_1\boldsymbol{e} = L_2\boldsymbol{e}$ za proizvoljan jedinični vektor iz $\mathbb{R}^n$. □

Sada kada znamo da je linearni operator L iz Definicije 11.1 jedinstven (tj. potpuno određen funkcijom f i točkom c) opravdana je sljedeća definicija:

Definicija 11.5. *Linearni operator L iz Definicije 11.1 zove se **diferencijal funkcije f u točki** c i označava se s $\mathrm{D}f(c)$.*

Primjer 11.6. U slučaju kada je $m = n = 1$, diferencijal $\mathrm{D}f(c) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ je operator množenja s $f'(c)$, tj. $\mathrm{D}f(c)x = f'(c)x$.

Napomena 11.7. Primijetimo da Definicija 11.1 ima smisla i za funkcije definirane na skupovima A koji nisu nužno otvoreni. Naime, da bi limes (11.2) uopće imao smisla dovoljno je zahtijevati da je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ takav da je $c \in A \cap A'$. No tada općenito diferencijal više ne mora biti jedinstven. Npr., neka je

$$A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

i neka je $f : A \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, 0) = 0$. Ako je $c \in A$ proizvoljna točka, tada svaki linearni operator $L \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ čija jezgra sadrži skup A zadovoljava jednakost (11.2).

Zadatak 11.8. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i neka je $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $c \in A \cap A'$. Također, neka postoje dva linearno nezavisna vektora $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ i $\delta > 0$ takvi da je $c + tv_1, c + tv_2 \in A$ za $t \in [0, \delta\rangle$ ili $\langle -\delta, 0]$. Dokažite da je tada linearni operator $L \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ koja zadodovljava (11.2) jedinstven.

U specijalnom slučaju vrijedi i više.

Zadatak 11.9. Pretpostavimo da je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ konveksan skup. Ako je $c \in A \cap A'$, dokažite da će za svaku funkciju $f : A \to \mathbb{R}^m$ koja zadodovljava (11.2) linearni operator $L \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ biti jedinstven ako i samo ako postoje dva linearno nezavisna vektora $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ takvi da je $c + v_1, c + v_2 \in A$.

Primjer 11.10. Direktno iz Definicije 11.1 slijedi da je afina funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = Tx + b,$$

pri čemu su $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i $b \in \mathbb{R}^m$, diferencijabilna u svim točkama domene $\mathbb{R}^n$, te da joj je diferencijal u svim točkama jednak T.

Primjer 11.11. Neka je $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = (Tx|x)$. Za fiksni $c \in \mathbb{R}^n$ i proizvoljni $x \in \mathbb{R}^n$ definiramo $h = x - c$. Sada vrijedi

$$(Tx|x) = (T(c+h)|c+h) = (Tc|c) + (Tc|h) + (Th|c) + (Th|h).$$

Definiramo linearni operator $L_c \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ djelovanjem na proizvoljni vektor $h \in \mathbb{R}^n$ s

$$L_c h = (Tc|h) + (Th|c) = ((T + T^t)c|h).$$

Stoga je

$$f(x) - f(c) - L_c h = (Th|h).$$

Koristeći nejednakost S-C-B i činjenicu da je linearni operatori T ograničen (Teorem 7.13), dobivamo

$$\frac{|(Th|h)|}{\|h\|} \leq \frac{\|Th\|\|h\|}{\|h\|} \leq \|T\|_o \|h\|,$$

pa je

$$\lim_{h \to 0} \frac{|(Th|h)|}{\|h\|} = 0.$$

Dakle,

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - L_c(x-c)|}{\|x - c\|} = \lim_{x \to c} \frac{|(T(x-c)|x-c)|}{\|x - c\|} = 0.$$

Stoga je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$, a operator L_c joj je diferencijal u točki c.

Lema 11.12. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, i $c \in A$. Funkcija f je diferencijabilna u točki c ako i samo ako su f_i diferencijabilne u c za svaki $i = 1, \ldots, m$.*

Dokaz. Neka je f diferencijabilna u c i neka je $L = \mathrm{D}f(c)$. Tada vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x-c)\|}{\|x - c\|} = 0.$$

To je ekvivalentno s (vidjeti Napomenu 11.13)

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - L(x-c)}{\|x-c\|} = 0,$$

Kako je za svaku funkciju $g : A \to \mathbb{R}^m$, $g_i(x) = (g(x)|\boldsymbol{e}_i)$, prema Zadatku 6.17 gornja jednakost je ekvivalentna s

$$\lim_{x \to c} \frac{(f(x) - f(c) - L(x-c)|\boldsymbol{e}_i)}{\|x-c\|} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m. \tag{11.3}$$

Zbog simetričnosti skalarnog produkta to je pak ekvivalentno s

$$\lim_{x \to c} \frac{f_i(x) - f_i(c) - (L^t\boldsymbol{e}_i|x-c)}{\|x-c\|} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m.$$

Svaki od vektora $L^t\boldsymbol{e}_i$ definira linearni funkcional $L_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ formulom $L_i x = (L^t\boldsymbol{e}_i|x)$, pa su funkcije f_i diferencijabilne u c za svaki $i = 1, \dots, m$. Također čitamo i da je

$$\mathrm{D}f_i(c)x = (\mathrm{D}f(c)^t\boldsymbol{e}_i|x) = (\mathrm{D}f(c)x|\boldsymbol{e}_i). \tag{11.4}$$

Obratno, neka su sve funkcije f_i diferencijabilne u c s diferencijalima $\mathrm{D}f_i(c)$. To znači da je

$$\lim_{x \to c} \frac{f_i(x) - f_i(c) - \mathrm{D}f_i(c)(x-c)}{\|x-c\|} = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m.$$

Motivirani s (11.4) definiramo linearni operator $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ formulom

$$Lx = (\mathrm{D}f_1(c)x, \dots, \mathrm{D}f_m(c)x).$$

Zbog (11.3) slijedi da je sada f diferencijabilna točki c s diferencijalom L. $\square$

Napomena 11.13. U dokazu Leme 11.12 smo koristili sljedeću tvrdnju: Ako je $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $c \in A'$, onda vrijedi

$$\lim_{x \to c} \|g(x)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to c} g(x) = 0.$$

Naime, po definiciji limesa, desna ekvivalencija znači

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall \in A \setminus \{c\})\,(\|x-c\| < \delta \implies \|g(x) - 0\| < \varepsilon).$$

Ovo je točno ekvivalentno lijevoj strani ekvivalencije jer je $|\|g(x)\| - 0| = \|g(x) - 0\| = \|g(x)\|$.

Zadatak 11.14. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i pretpostavimo da je $f : A \to \mathbb{R}^m$ funkcija sa svojstvom postoje realni brojevi $M \geq 0$ i $r > 1$ takvi da vrijedi

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x-y\|^r \qquad \forall x, y, \in A.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na A te odredite njen diferencijal.

11.2 Parcijalne derivacije

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i neka je $f : A \to \mathbb{R}^m$. Neka su $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$ komponentne funkcije od f tako da je

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Svaka od funkcija f_i funkcija je n varijabli, pa za danu točku $c = (c_1, \dots, c_n) \in A$ možemo definirati realne funkcije jedne varijable

$$g_{ij}(h) = f_i(c_1, \dots, c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, \dots, c_n),$$

definirane na nekom otvorenom intervalu u $\mathbb{R}$ koji sadrži sadrži 0 (takav interval sigurno postoji jer je A prema pretpostavci otvoren). Ovime zapravo promatramo samo ponašanje funkcije f_i na nekoj otvorenoj okolini točke c koja je sadržana u A i to samo duž osi x_j.

slika

Budući da su g_{ij} realne funkcije realne varijable, njih znamo derivirati.

Definicija 11.15. ***Parcijalne derivacije*** *funkcije f u točki $c \in A$, u oznaci $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$ ili $\partial_{x_j} f_i(c)$, dane su s*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) = g_{ij}'(0) = & \lim_{h \to 0} \frac{f_i(c_1, \dots, c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, \dots, c_n) - f_i(c_1, \dots, c_n)}{h} \\ = & \lim_{h \to 0} \frac{f_i(c + h\boldsymbol{e}_j) - f_i(c)}{h} \end{aligned} \tag{11.5}$$

Čitamo: Parcijalna derivacija i-te komponente funkcije f po varijabli x_j, odnosno parcijalno f_i po x_j, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Iz same definicije je jasno kako računati parcijalne derivacije. Npr. za funkciju $f(x, y) = (x^2, x^3y, x^4y^2)$ parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dane su s:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= 2x, & \tfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) &= 0, \\ \tfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= 3x^2y, & \tfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) &= x^3 \\ \tfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) &= 4x^3y^2, & \tfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) &= 2x^4y. \end{aligned}$$

Napomena 11.16. Kao i u slučaju definicije diferencijabilnosti u definiciji parcijalnih derivacija skup na kome je definirana derivacija ne mora biti otvoren. Očito je naime da će parcijalne derivacije biti definirane u svim točkama domene funkcije za koje je limes u (11.5) dobro definiran. Npr. ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $c \in A$ za koju postoji $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da je segment $[c, c + \delta \boldsymbol{e}_j]$ sadržan u A, tada za funkciju $f : A \to \mathbb{R}^m$ definicija parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_j}(c)$ ima smisla. S druge strane, definicija ostalih parcijalnih derivacija od f u c uopće ne mora biti smislena. Npr. ako je $A = [c, c + \delta \boldsymbol{e}_j]$, tada jedino i ima smisla promatrati j-tu parcijalnu derivaciju od f u c.

Već smo vidjeli da je diferencijal $\mathrm{D}f(c)$ za diferencijabilne realne funkcije jedne varijable f zapravo operator množenja s $f'(c)$. Taj rezultat sada generaliziramo.

Teorem 11.17. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija u točki $c \in A$. Tada sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$ postoje. Nadalje, ako definiramo matricu $\nabla f(c) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ s*

$$\nabla f(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix},$$

tada je $\nabla f(c)$ zapis od $\mathrm{D}f(c)$ u paru kanonskih baza od $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$.

Napomena 11.18. Znak ∇ čitamo "**nabla**", a matricu $\nabla f(c)$ zovemo **Jacobijeva matrica funkcije f u točki** c, a ponekad i derivacija vektorske funkcije više varijabli.

Dokaz Teorema 11.17 Neka je funkcija f diferencijabilna u točki c, tako da postoji $\mathrm{D}f(c)$. Tada je (i, j)-ti element matrice linearnog operatora $\mathrm{D}f(c)$ u paru kanonskih baza jednak

$$a_{ij} := (\mathrm{D}f(c)\boldsymbol{e}_j|\boldsymbol{e}_i),$$

gdje su (kao i obično) $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{R}^n$ i $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m$ vektori kanonske baze. Kako je

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0,$$

posebno za vektore x oblika $x = c + h\boldsymbol{e}_j$ (gdje je $h \in \mathbb{R}$ dovoljno mali takav da je $x \in A$), dobivamo

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, \ldots, c_n) - f(c_1, \ldots, c_n) - h\,\mathrm{D}f(c)\boldsymbol{e}_j\|}{|h|} = 0.$$

Koristeći Napomenu 11.13 i Zadatak 6.17 gornja konvergencija povlači konvergenciju svih komponenti vektora u brojniku, tj. za svaki $i = 1, \ldots, m$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \to 0} \frac{f_i(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, \ldots, c_n) - f_i(c_1, \ldots, c_n) - h(\mathrm{D}f(c)\boldsymbol{e}_j|\boldsymbol{e}_i)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f_i(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_j + h, c_{j+1}, \ldots, c_n) - f_i(c_1, \ldots, c_n)}{h} - a_{ij}. \end{aligned}$$

Iz definicije parcijalnih derivacija slijedi da one postoje, te da je $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$. $\square$

Stoga je diferencijal $\mathrm{D}f(c)$, ako postoji, potpuno određen parcijalnim derivacijama $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c)$ koje lako računamo tehnikama razvijenim za funkcije jedne varijable: Ako $\mathbb{R}^n$ na standardan način poistovijetimo sa stupčanim matricama $M_{1,n}(\mathbb{R})$, preko

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

tada je za svaki $h \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{D}f(c)h = \nabla f(c)\underline{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{11.6}$$

Npr. Jacobijeva matrica za $f(x,y) = (x^2, x^3y, x^4y^2)$ dana je s

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 3x^2y & x^3 \\ 4x^3y^2 & 2x^4y \end{pmatrix}.$$

Koristeći rezultate iz idućeg odjeljka lako se argumentira da je f zaista diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$. Stoga je za $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ i $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{D}f(c)h = \begin{pmatrix} 2c_1 & 0 \\ 3c_1^2c_2 & c_1^3 \\ 4c_1^3c_2^2 & 2c_1^4c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1h_1 \\ 3c_1^2c_2h_1 + c_1^3h_2 \\ 4c_1^3c_2^2h_1 + 2c_1^4c_2h_2 \end{pmatrix}.$$

Naravno, uzimanjem različitih parova baza za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dobit ćemo različite matrične prikaze od $\mathrm{D}f(c)$.

Primjer 11.19. Za $j = 1, \ldots, n$ promotrimo projekciju $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiranu sa $p_j(x) = x_j = (x|\boldsymbol{e}_j)$. Jacobijeva matrica od p_j u proizvoljnoj točki $c \in \mathbb{R}^n$ dana je s

$$\nabla p_j(c) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

gdje je 1 stoji na j-toj poziciji. Stoga je

$$\nabla p_j(c)x = x_j = p_j(x),$$

pa je jedini kandidat za diferencijal sama funkcija p_j. To je zapravo i očekivano jer je p_j linearna funkcija, a u Primjeru 11.10 smo vidjeli da su sve linearne funkcije $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ diferencijabilne, te da je $\mathrm{D}L(c) = L$ za sve $c \in \mathbb{R}^n$.

Zadatak 11.20. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x,y) = |xy|$ diferencijabilna u $(0,0)$, ali da nije diferencijabilna ni na kojoj otvorenoj okolini oko $(0,0)$.

Zadatak 11.21. Nađite primjer funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja je diferencijabilna u samo jednoj točki.

Zadatak 11.22. Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kažemo da je **homogena** ako vrijedi

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ako je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogena funkcija koja je diferencijabilna u točki 0, dokažite da je f linearni funkcional.

Kod definicije parcijalnih derivacija ograničili smo se na restrikcije funkcije u okolini neke točke u smjerovima koordinatnih osi. Naravno, ima smisla promatrati i druge smjerove.
slika

Definicija 11.23. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $c \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, te neka je $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ jedinični vektor (tj. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$). Ako postoji limes*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c + h\boldsymbol{v}) - f(c)}{h}$$

nazivamo ga ***derivacija funkcije u smjeru*** *vektora $\boldsymbol{v}$ u točki c i označavamo s $\nabla_{\boldsymbol{v}} f(c)$ ili $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c)$.*

Pretpostavimo sada da je $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u c i neka je $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ jedinični vektor. Ako u jednakost (11.2) uvrstimo $x = c + h\boldsymbol{v}$, dobivamo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(c+h\boldsymbol{v}) - f(c) - h\,\mathrm{D}f(c)\boldsymbol{v}\|}{|h|} = 0.$$

(Primijetimo da će za dovoljno male $h \in \mathbb{R}$ će biti $x \in A$ jer je A otvoren). Prema Napomeni 11.13 gornja jednakost je evivalentna s

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h\boldsymbol{v}) - f(c) - h\,\mathrm{D}f(c)\boldsymbol{v}}{h} = 0.$$

Stoga je

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h\boldsymbol{v}) - f(c)}{h} = \mathrm{D}f(c)\boldsymbol{v}.$$

Stoga smo pokazali sljedeću Propoziciju:

Propozicija 11.24. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}^m$ te neka je $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ jedinični vektor. Ako je funkcija diferencijabilna u točki c tada postoji $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c)$ i vrijedi*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c) = \mathrm{D}f(c)\boldsymbol{v}.$$

Napomena 11.25. Derivacija od f u smjeru vektora kanonske baze $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ u c se često označava s $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Prema Propoziciji 11.24 i (11.6) imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(c) = \mathrm{D}f(c)\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(c) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(c) \end{pmatrix},$$

tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ je vektor iz $\mathbb{R}^m$ koji je jednak i-tom stupcu Jacobijeve matrice $\nabla f(c)$.

U slučaju $m = 1$, tj. kada je f realna funkcija više varijabli, Jacobijeva matrica u točki c je dana s

$$\nabla f(c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) \end{pmatrix}.$$

To je matrica dimenzije $1 \times n$. Vektor iz $\mathbb{R}^n$ s istim komponentama se naziva **gradijent** od f u c i označava s $\operatorname{grad} f(c)$. Dakle:

$$\operatorname{grad} f(c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) \right).$$

Primijetimo da je $\operatorname{grad} f(c)$ upravo vektor l iz Primjera 11.3. Dakle, ako je $f : A \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u $c \in A$, tada je

$$\mathrm{D}f(c)(x) = (\operatorname{grad} f(c)|x),$$

pa je najbolja afina aproksimacija od f u okolini točke c dana s

$$x \mapsto f(c) + (\operatorname{grad} f(c)|x - c).$$

Ako je $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ jedinični vektor, tada koristeći Propoziciju 11.24 i (11.6) dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c) = \mathrm{D}f(c)\boldsymbol{v} = \nabla f(c)\underline{\boldsymbol{v}} = (\operatorname{grad} f(c)|\boldsymbol{v}). \tag{11.7}$$

Kao posljedicu gornje jednakosti dobivamo sljedeći rezultat:

Korolar 11.26. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija koja je diferencijabilna u točki $c \in A$ te $\mathrm{D}f(c) \neq 0$. Stavimo

$$\boldsymbol{v}_0 := \frac{\operatorname{grad} f(c)}{\|\operatorname{grad} f(c)\|}.$$

Tada od skupa svih jediničnih vektora iz $\mathbb{R}^n$, funkcija f iz točke c raste najbrže u smjeru vektora $\boldsymbol{v}_0$, a pada najbrže u smjeru vektora $-\boldsymbol{v}_0$.

Dokaz. Koristeći (11.7) i nejednakost S-C-B, za proizvoljni jedinični vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ imamo

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(c)\right| = |(\operatorname{grad} f(c)|\boldsymbol{v})| \leq \|\operatorname{grad} f(c)\|\|\boldsymbol{v}\| = \|\operatorname{grad} f(c)\|.$$

Pritom se jednakost postiže ako i samo ako su vektori $\boldsymbol{v}$ i $\operatorname{grad} f(c)$ kolinearni odnosno ako i samo ako je $\boldsymbol{v} = \pm\boldsymbol{v}_0$ (jer je $\|\boldsymbol{v}\| = 1$). Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}_0}(c) = \|\operatorname{grad} f(c)\| \geq (\operatorname{grad} f(c)|\boldsymbol{v}) \geq -\|\operatorname{grad} f(c)\| = \frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{v}_0)}(c),$$

slijedi tvrdnja. □

Zadatak 11.27. Ako je $c \in \mathbb{R}^n$, nađite primjer neprekidne funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ za koju u točki c ne postoji derivacija ni duž kojeg jediničnog vektora $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

12 Svojstva diferencijabilnih funkcija

Za realne funkcije jedne realne varijable lako vidimo da diferencijabilnost u točki povlači neprekidnost u toj točki:

$$\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c) = f'(c)\lim_{x\to c}(x-c) = f'(c)\cdot 0 = 0.$$

Poopćenje tog rezultata vrijedi i za vektorske funkcije više varijabli. Prije nego li to dokažemo uvedimo sljedeći pojam:

Definicija 12.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}^m$ kažemo da ima **Lipschitzovo svojstvo u točki** $c \in A$ ako vrijedi*

$$(\exists \delta > 0)\,(\exists L \geq 0)\,(\forall x \in A)\,(\|x-c\| < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(c)\| \leq L\|x-c\|). \tag{12.1}$$

Napomena 12.2. Isti argument kao u Napomeni 7.10 pokazuje da ako funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ ima Lipschitzovo svojstvo u točki $c \in A$, onda je ona i neprekidna u točki c. Naime, ako je $L = 0$ onda je f konstantna na $A \cap K(c,\delta)$, pa je posebno neprekidna u c. Ako je pak $L > 0$ onda za proizvoljni $\varepsilon > 0$ stavimo $\delta_{\text{neprekidnost}} = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{L}\}$.

Zadatak 12.3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$ funkcija koja ima Lipschitzovo svojstvo u svakoj točki $c \in A$.

(a) Je li f nužno Lipschitzova na A?

(b) Je li f nužno uniformno neprekidna na A?

Teorem 12.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Ako je funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $c \in A$ tada f ima Lipschitzovo svojstvo u c. Posebno, f je neprekidna u c.*

Dokaz. Po definiciji diferencijabilnosti u točki $c \in A$ imamo

$$\lim_{x\to c}\frac{\|f(x)-f(c)-\mathrm{D}f(c)(x-c)\|}{\|x-c\|} = 0.$$

Stoga iz definicije limesa za $\varepsilon = 1$ dobivamo $\delta > 0$ takav da za sve $x \in A$ sa svojstvom $\|x-c\| < \delta$ vrijedi

$$\|f(x)-f(c)-\mathrm{D}f(c)(x-c)\| \leq \|x-c\|.$$

Odavde korištenjem nejednakosti trokuta dobivamo

$$\|f(x)-f(c)\| \leq \|f(x)-f(c)-\mathrm{D}f(c)(x-c)\| + \|\mathrm{D}f(c)(x-c)\| \leq \|x-c\| + \|\mathrm{D}f(c)(x-c)\|. \tag{12.2}$$

Kako je prema Teoremu 7.13

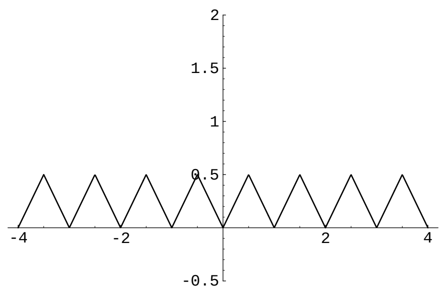
$$\|\mathrm{D}f(c)y\| \leq \|\mathrm{D}f(c)\|_o\|y\| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $\|\cdot\|_o$ operatorska norma na $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, iz (12.2) odmah dobivamo (12.1) za $L = 1 + \|\mathrm{D}f(c)\|_o$. $\square$

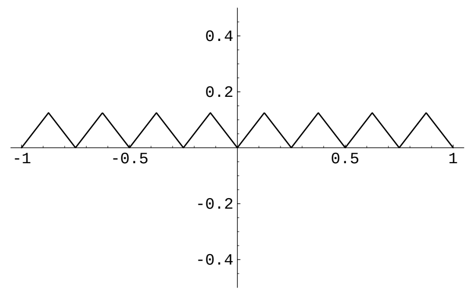
Primjer 12.5. Obrat teorema ne vrijedi, a tipični primjer je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ koja ja neprekidna (štoviše Lipschitzova), a nije diferencijabilna u 0.

Napomena 12.6. Neka je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na $[-1/2, 1/2]$ definirana formulom $|x|$, a na ostatku domene proširena po periodičnosti (”cik-cak funkcija”). Definiramo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

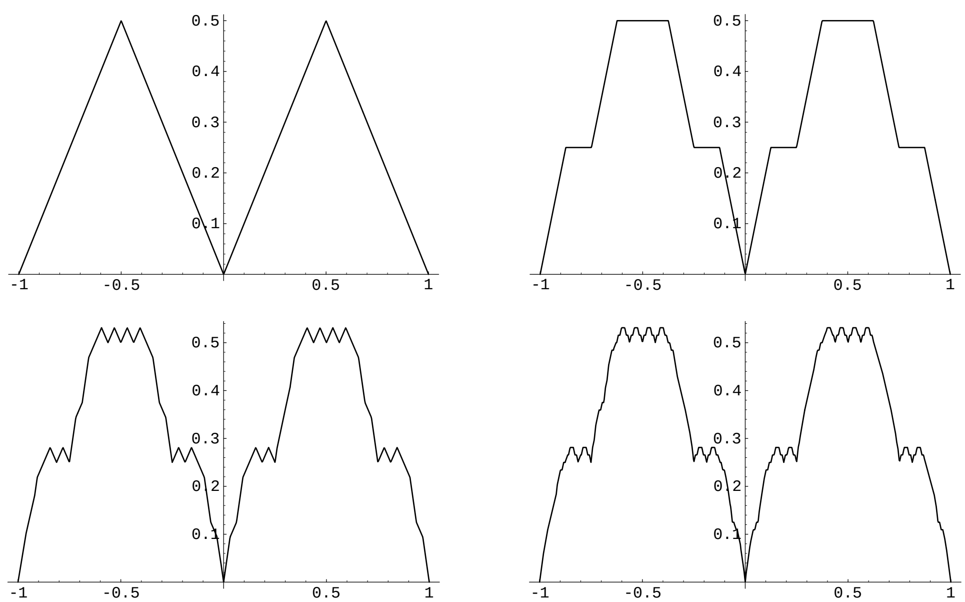


graf od g



graf od $g(4x)/4$

Iz Weierstrasseovog kriterija slijedi da je funkcija f neprekidna, a može se dokazati da nije diferencijabilna ni u jednoj točki iz $\mathbb{R}$.



Takve funkcije iako ovdje umjetno konstruirane javljaju se i u primjenama. Jedan je primjer Brownovo gibanje, putanja čestice u fluidu kao što je voda ili zrak je neprekidna, ali nigdje diferencijabilna.

Drugi primjer je kod fraktala, odnosno dinamičkih sustava. Za $c \in \mathbb{C}$ i funkciju $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danu formulom $f_c(z) = z^2 + c$ promatramo $f_c^n = f_c \circ \cdots \circ f_c$ (n kompozicija funkcije sa samom sobom). Definiramo

$$J_c^\infty = \{z : f_c^n(z) \to \infty, n \to \infty\},$$

te $J_c = \partial J_c^\infty$ (skup se zove Julia skup od f_c). Za $c = 0$ J_c je jedinična kružnica, no za $c \neq 0$, ali dovoljno blizu 0 može se pokazati da je J_c neprekidna, ali nigdje diferencijabilna krivulja.

Propozicija 12.7. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilne funkcije u točki $c \in A$, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha f + \beta g$ diferencijabilna u točki c i vrijedi*

$$\mathrm{D}(\alpha f + \beta g)(c) = \alpha\, \mathrm{D}f(c) + \beta\, \mathrm{D}g(c).$$

Zadatak 12.8. *Dokažite Propoziciju 12.7.*

Jednostavna generalizacija derivacije produkta dana je u narednoj propoziciji:

Propozicija 12.9. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}^m$ i $g : A \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije u točki $c \in A$. Tada je gf diferencijabilna u c i njen diferencijal $\mathrm{D}(gf)(c)$ je dan sa*

$$\mathrm{D}(gf)(c)h = g(c)(\mathrm{D}f(c)h) + f(c)(\mathrm{D}g(c)h) \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Zadatak 12.10. *Dokažite Propoziciju 12.9.*

Zadatak 12.11. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren te $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilne funkcije u točki $c \in A$. Dokažite da je tada i funkcija $h : A \to \mathbb{R}$ definirana s $h(x) = (f(x)|g(x))$ diferencijabilna u točki c.

Važno pravilo koje nam je omogućilo deriviranje velike klase funkcija bilo je "lančano pravilo" odnoso diferencijabilnost kompozicije. Ovdje dokazujemo njegovu generalizaciju.

Teorem 12.12 (Diferencijabilnost kompozicije)**.** *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna u $c \in A$. Neka je $B \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoren, $f(A) \subseteq B$ i $g : B \to \mathbb{R}^p$ diferencijabilna u $d = f(c)$. Tada je i kompozicija $g \circ f$ diferencijabilna u c te vrijedi*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(c) = \mathrm{D}g(f(c))\, \mathrm{D}f(c). \tag{12.3}$$

Dokaz. Najprije primijetitimo da je djelovanje linearnih operatora na desnoj strani jednakosti u formuli (12.3) dobro definirano. Mi ćemo pokazati da vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) - \mathrm{D}g(f(c))\, \mathrm{D}f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0. \tag{12.4}$$

Odavde onda slijedi da je funkcija $g \circ f$ diferencijabilna u c te da je njen diferencijal u c dan formulom (12.3).

Računamo

$$\begin{aligned}
&\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) - \mathrm{D}g(f(c))\, \mathrm{D}f(c)(x - c)\| \qquad (12.5)\\
&\quad = \|g(f(x)) - g(f(c)) - \mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c)) + \mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c))\| \\
&\quad \leq \|g(f(x)) - g(f(c)) - \mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c))\| + \|\, \mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c))\|.
\end{aligned}$$

Budući da je funkcija f je diferencijabilna u c, ona ima Lipschitzovo svojstvo u točki c (Teorem 12.4), pa postoje $M > 0$ i $\delta_0 > 0$ takvi da je

$$(\forall x \in A)\, (\|x - c\| < \delta_0 \implies \|f(x) - f(c)\| \leq M\|x - c\|).$$

Uzmimo sada $\varepsilon > 0$. Iz diferencijabilnosti funkcije g u točki $d = f(c)$ slijedi da postoji $\delta_1 > 0$ takav da vrijedi

$$(\forall y \in B)\, \left(\|y - d\| < \delta_1 \implies \|g(y) - g(d) - \mathrm{D}g(d)(y - d)\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\|y - d\|\right).$$

Stoga za $0 < \|x - c\| < \delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_1/M\}$ slijedi

$$\frac{\|g(f(x)) - g(f(c)) - \mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c))\|}{\|x - c\|} \leq \frac{\varepsilon}{2M} \frac{\|f(x) - f(c)\|}{\|x - c\|} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Time smo ocijenili prvi član iz zadnjeg reda u (12.5).

Sada ocjenjujemo drugi član iz zadnjeg reda u (12.5). Kako je $\mathrm{D}g(f(c))$ ograničen linearan operator (Teorem 7.13), postoji konstanta $N > 0$ takva da vrijedi

$$\|\,\mathrm{D}g(f(c))y\| \leq N\|y\| \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Jer je f diferencijabilna u točki c, slijedi da postoji $\delta_3 > 0$ takav da vrijedi

$$(\forall x \in A) \left(0 < \|x - c\| < \delta_3 \Longrightarrow \frac{\|f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} < \frac{\varepsilon}{2N}\right).$$

Sada za sve $x \in A$ takve da je $0 < \|x - c\| < \delta_3$ vrijedi

$$\frac{\|\,\mathrm{D}g(f(c))(f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c))\|}{\|x - c\|} \leq N \frac{\|f(x) - f(c) - \mathrm{D}f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Napokon, ako stavimo $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$, vrijedi

$$(\forall x \in A) \left(0 < \|x - c\| < \delta \Longrightarrow \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) - \mathrm{D}g(f(c))\,\mathrm{D}f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} < \varepsilon\right),$$

pa slijedi (12.4). Time je teorem dokazan. □

Napomena 12.13. *Ovaj rezultat sad možemo i reformulirati u terminu Jacobijevih matrica:*

$$\nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \nabla f(x).$$

Napomena 12.14. Koristeći Propoziciju 12.7, Teorem 12.12 i diferencijabilnost funkcije $\varphi : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ dane s $\varphi(x) = 1/x$, sada lako možemo zaključiti i da je kvocijent diferencijabilih realnih funkcija funkcija više varijabli također diferencijabilan na interioru svoje prirodne domene.

Primjer 12.15. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa svojstvom da je u polarnim koordinatama neovisna o kutu θ. To znači da postoji funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2).$$

Želimo izračunati parcijalne derivacije funkcije f uz predpostavku da je g diferencijabilna. Označimo

$$h(x, y) = x^2 + y^2.$$

Teorem 12.12 povlači da je

$$\nabla f(x, y) = \nabla g(x^2 + y^2) \nabla h(x, y).$$

Jer je

$$\nabla g = g', \qquad \nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

slijedi

$$\nabla f(x, y) = g'(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix},$$

pa je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g'(x^2 + y^2) 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g'(x^2 + y^2) 2y$$

Primjer 12.16. Neka su dane diferencijabilne funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Promatramo kompoziciju $f \circ \gamma$. Prema Teoremu 12.12 imamo

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{D}(f \circ \gamma)(t) = \mathrm{D}f(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t).$$

Primjer 12.17. Neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabilna i $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2, x^3 + y^3).$$

Definirajmo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ formulom

$$h(x, y) = (x^2 + y^2, x^3 + y^3).$$

Stoga je

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Ponovo koristeći Teorem 12.12 imamo

$$\nabla f(x, y) = \nabla g(x^2 + y^2, x^3 + y^3)\nabla h(x, y) = \nabla g(x^2 + y^2, x^3 + y^3) \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)2x + \frac{\partial g}{\partial y}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)3x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)2y + \frac{\partial g}{\partial y}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)3y^2. \end{aligned}$$

Zadatak 12.18. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferencijabilna i $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana sa

$$g(x, y, z) = F(x^3y^2z, x^2 + y^2 + z^2).$$

Pokažite da je g diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$ te joj odredite diferencijal.

Zadatak 12.19. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je $g'(2) = 3$. Za $\boldsymbol{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ izračunajte $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1, -1)$, gdje je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x, y) = g(3x^2 - xy^2).$$

Zadatak 12.20. Pretpostavimo da su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi. Ako je $m \neq n$ dokažite da ne postoji diferencijabilna bijekcija $\varphi : U \to V$ klase čiji je inverz $\varphi^{-1} : V \to U$ također diferencijabilan.

Jednom kad znamo da je funkcija diferencijabilna u točki, po Teoremu 11.17 znamo da postoje sve parcijalne derivacije u toj točki. Prirodno je pitanje vrijedi li obratno, tj. možemo li iz egzistencije svih parcijalnih derivacija zaključiti diferencijabilnost funkcije. Odgovor je negativan:

Primjer 12.21. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Obje parcijalne derivacije ove funkcije u $(0, 0)$ postoje i jednake su 0. S druge strane funkcija f nije neprekidna u $(0, 0)$, pa nije niti diferencijabilna u $(0, 0)$.

Dakle egzistencija svih parcijalnih derivacija u točki općenito ne povlači diferencijabilnost u toj točki. To je zapravo i očekivano jer za račun parcijalnih derivacija u točki mi radimo restrikcije funkcije samo na koordinatne osi, a diferencijabilnost uzima u obzir ponašanje na čitavoj okolini te točke.

Možemo se dalje pitati hoće li možda egzistencija derivacija u svakom smjeru u nekoj točki povlačiti diferencijabilnost u toj točki. Odgovor je ponovo negativan, što se vidi iz narednog primjera:

Primjer 12.22. Neka je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \ \& \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} .$$

Neka je P proizvoljan pravac kroz ishodište. Ako je P x-os ili y-os, tada je očito restrikcija od f na P jednaka nula, pa obje parcijalne derivacije od f u $(0,0)$ postoje i jednake su 0. Ako P nije x-os ili y-os, tada je P dan jednadžbom $y = kx$ za neko $k \neq 0$. Tada je restrikcija od f na skup $\{(x,kx) : \ |x| < |k|\}$ (što je neprazan otvoren podskup od P) jednaka 0. Dakle, za svaki jedinični vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ postoji $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(0,0)$ i sve te derivacije su jednake 0. S druge strane, funkcija f nije diferencijabilna u $(0,0)$, budući da u $(0,0)$ ima prekid. (Zašto?)

Ipak, vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 12.23. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$. Ako sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ postoje i neprekidne su na A, tada je f diferencijabilna na A.*

Dokaz. Dokaz možemo provesti za svaku komponentnu funkciju neovisno zbog Leme 11.12. Stoga u nastavku pretpostavljamo $m = 1$. Nadalje, radi jednostavnosti oznaka ostatak dokaza provodimo u slučaju $n = 2$.

Fiksirajmo točku $x = (x_1, x_2) \in A$ te izaberimo $\delta > 0$ takav da je $K(x, \delta) \subseteq A$. Neka je $y = (y_1, y_2)$ proizvoljna točka iz $K(x, \delta)$ različita od x. Očito je

$$f(y) - f(x) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2).$$

Za $i = 1, 2$ promotrimo realne funkcije jedne varijable $g_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirane s $g_i = f \circ \gamma_i$, gdje su $\gamma_i : [0,1] \to K(x,\delta) \subseteq A$ definirane s

$$\gamma_1(t) = ((1-t)x_1 + ty_1, y_2) \qquad \text{i} \qquad \gamma_2(t) = (x_1, (1-t)x_2 + ty_2).$$

Budući da prema pretpostavci sve parcijalne derivacije od f postoje, g_i su diferencijabilne funkcije te je

$$g_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t))(y_1 - x_1) \qquad \text{i} \qquad g_2'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(t))(y_2 - x_2).$$

Prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoje $t_y, s_y \in [0,1]$ (ovisni o y) takvi da vrijedi

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) = g_1(1) - g_1(0) = g_1'(\gamma_1(t_y))(1-0) = g_1'((\gamma_1(t_y)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t_y))(y_1 - x_1)$$

i

$$f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2) = g_2(1) - g_2(0) = g_2'(\gamma_2(s_y))(1-0) = g_2'(\gamma_2(s_y)) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(s_y))(y_2 - x_2).$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&|f(y)-f(x)-\nabla f(x)(y-x)| \\
&\qquad = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t_y))(y_1-x_1)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(s_y))(y_2-x_2)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)(y_1-x_1)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)(y_2-x_2)\right| \\
&\qquad \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t_y))-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right||y_1-x_1|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(s_y))-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right||y_2-x_2| \\
&\qquad \le \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t_y))-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(s_y))-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|\right)\|y-x\|,
\end{aligned}
$$

slijedi

$$
\frac{\|f(y)-f(x)-\nabla f(x)(y-x)\|}{\|y-x\|}\le\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma_1(t_y))-\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma_2(s_y))-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|\right).
$$

Ako $y\to x$ onda $t_y, s_y\to 0$, pa $\gamma_1(t_y),\gamma_2(s_y)\to x$. Zbog neprekidnosti parcijalnih derivacija slijedi da desna strana nejednakosti teži prema nuli, što povlači diferencijbilnost funkcije f u točki x. $\square$

Napomena 12.24. Teorem smo dokazali za $n=2$, no sličan dokaz prolazi i za proizvoljan n.

Ovaj teorem nam daje efektivan način provjeravanja diferencijabilnosti funkcije u najvećem broju slučajeva. Dakle, najprije odredimo parcijalne derivacije, zatim nađemo otvoren skup na kojem su one neprekidne, te zaključimo da je na tom skupu funkcija diferencijabilna.

Primjer 12.25. U Primjeru 11.11 smo po definiciji pokazali da je za $T\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definirana s $f(x)=(Tx|x)$ diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$, te da za svako $x\in\mathbb{R}^n$ imamo $\mathrm{D}f(x)h=((T+T^t)x|h)$.

Isto smo mogli zaključiti i koristeći Teorem 12.23. Naime, ako je $T=(t_{ij})$, tada za svako $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ imamo

$$
f(x)=(Tx|x)=\sum_{i,j=1}^n t_{ij}x_jx_i.
$$

Stoga su parcijalne derivacije od f u x dane s

$$
\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)=\sum_{j=1}^n t_{kj}x_j+\sum_{i=1}^n t_{ik}x_i=\sum_{j=1}^n(t_{kj}+t_{jk})x_j=(Tx|e_k)+(T^tx|e_k).
$$

Kako su sve parcijalne derivacije neprekidne na $\mathbb{R}^n$ (kao polinomi prvog stupnja), iz Teorema 12.23 slijedi da je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^n$ te je

$$
\nabla f(x)=\underline{x}^t(T+T^t)\qquad\forall x\in\mathbb{R}^n.
$$

13 Teorem srednje vrijednosti

Za realne funkcije realne varijable teorem srednje vrijednosti (Lagrangeov) kaže da za neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ koja je diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$ postoji točka $c \in \langle a, b\rangle$ za koju vrijedi

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Jednostavno poopćenje ove tvrdnje ne vrijedi što se vidi iz narednog primjera. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ dana s

$$f(x) = (x^2, x^3).$$

Pretpostavimo da postoji $c \in \langle 0, 1\rangle$ takva da je

$$(1, 1) - (0, 0) = (1 - 0)f'(c) = f'(c).$$

Kako je $f'(c) = (2c, 3c^2)$, odavde slijede dvije jednadžbe za c

$$1 = 2c, \qquad 1 = 3c^2,$$

čije rješenje ne postoji.

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$. Skupove

$$\begin{aligned} [x, y] &= \{(1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^n : 0 \le t \le 1\}, \\ \langle x, y\rangle &= \{(1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^n : 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

nazivamo segment i interval u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 13.1 (Teorem srednje vrijednosti za realne funkcije). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na A. Za svaki segment $[x, y]$ sadržan u A postoji točka $c \in \langle x, y\rangle$ takva da vrijedi*

$$f(y) - f(x) = \mathrm{D}f(c)(y - x).$$

Dokaz. Neka su $x, y \in A$ takvi da je $[x, y] \subset A$. Kako je A otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(1 - t)x + ty \in A$ za sve $t \in \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle$. Stoga možemo definirati funkciju $\gamma : \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle \to A$ formulom

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty.$$

Funkcija $g : \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}$ definirana s

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t)$$

je neprekidna i diferencijabilna na $\langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle$. Stoga možemo primijeniti Lagrangeov teorem srednje vrijednosti za realne funkcije realne varijable, pa postoji $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0).$$

Jer je $g(1) = f(y)$, $g(0) = f(x)$ i

$$g'(t_0) = \mathrm{D}f((1 - t_0)x + t_0 y)(y - x)$$

slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Jednostavna poslijedica na vektorske funkcije dana je u narednom korolaru. Primijetite da za svaku komponentu postoji općenito različita točka u kojoj se postiže jednakost.

Korolar 13.2. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na A. Za svaki segment $[x, y]$ sadržan u A postoje točke $c_1, \dots, c_m \in \langle x, y\rangle$ takve da vrijedi*

$$f_i(y) - f_i(x) = \mathrm{D}f_i(c_i)(y - x), \qquad i = 1, \dots, m.$$

Korolar 13.3. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i konveksan i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na A. Ako je $\mathrm{D}f = 0$ na A tada je f konstanta na A.

Dokaz. Naime prema korolaru teorema srednje vrijednosti za svaku komponentu f_i i svake dvije točke $x, y \in A$ postoji $c_i \in \langle x, y\rangle$ tako da vrijedi

$$f_i(y) - f_i(x) = \mathrm{D}f_i(c_i)(y - x).$$

Kako je $\mathrm{D}f = 0$ slijedi $\mathrm{D}f_i = 0$, pa je $f_i(y) = f_i(x)$, a onda i $f(y) = f(x)$. □

Zadatak 13.4. *Vrijedi li tvrdnja Korolara 13.3 i bez pretpostavke da je skup A konveksan?*

Za vektorske funkcije ulogu teorema srednje vrijednosti preuzima nejednakost srednje vrijednosti.

Teorem 13.5 (Nejednakost srednje vrijednosti za vektorske funkcije). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija. Ako je*

$$\|\mathrm{D}f\|_\infty = \sup\{\|\mathrm{D}f(x)\|_o : \ x \in A\} < \infty,$$

tada za svaki segment $[x, y]$ sadržan u A vrijedi

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|\mathrm{D}f\|_\infty \|y - x\|. \tag{13.1}$$

Posebno, ako je A konveksan, tada je f Lipschitzova na A.

Dokaz. Neka su $x, y \in A$ takvi da je $[x, y] \subset A$. Kako je A otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $(1 - t)x + ty \in A$ za sve $t \in \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle$. Stoga možemo definirati funkciju $\gamma : \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle \to A$ formulom

$$\gamma(t) = (1 - t)x + ty.$$

Jer je f diferencijabilna na A i γ diferencijabilna na $\langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle$ slijedi da je kompozicija $f \circ \gamma : \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na svojoj domeni. Stoga je i funkcija

$$g : \langle -\varepsilon, 1 + \varepsilon\rangle \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = ((f \circ \gamma)(t)|f(y) - f(x))$$

diferencijabilna na $\langle -\varepsilon, 1+\varepsilon\rangle$, pa ako na $[0, 1]$ primijenimo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti (g je realna funkcija realne varijabla u varijabli t!), dobivamo da postoji $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)(1 - 0).$$

Kako je $g(1) = (f(y)|f(y) - f(x))$, $g(0) = (f(x)|f(y) - f(x))$ i

$$g'(t_0) = (\mathrm{D}f(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)|f(y) - f(x)) = (\mathrm{D}f(\gamma(t_0))(y - x)|f(y) - f(x))$$

dobivamo

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = (\mathrm{D}f(\gamma(t_0))(y-x)|f(y) - f(x)).$$

Primjenom nejednakosti Schwarz–Cauchy-Bunjakovskog na desnu stranu jednakosti dobivamo

$$\|f(y) - f(x)\|^2 \leq \|\,\mathrm{D}f(\gamma(t_0))(y-x)\|\|f(y) - f(x)\|.$$

Ako je $f(x) = f(y)$, tvrdnja teorema je trivijalno zadovoljana, a ako je $f(x) \neq f(y)$ kraćenjem člana $\|f(y) - f(x)\|$ u gornjoj nejednakosti, te primjenom ograničenosti operatora diferencijala slijedi

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|\,\mathrm{D}f(\gamma(t_0))\|_o\|y - x\|.$$

Odavde sada slijedi ocjena iz iskaza teorema. □

Zadatak 13.6. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i konveksan skup te $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna funkcija. Dokažite da je f Lipschitzova na A ako i samo ako su sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ ograničene na A.

Zadatak 13.7. Koristeći Zadatak 13.6 ponovo ispitajte Lipschitzovost funkcija iz Zadatka 7.19.

14 Derivacije i diferencijali višeg reda

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna. Tada dobivamo novo preslikavanje $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Kao što znamo, na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ imamo definiranu operatorsku normu, pa možemo govoriti o neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcija s vrijednostima u skupu linearnih operatora.

Ponekad je praktičnije uzeti i druge norme na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Njih možemo dobiti na sljedeći način: Ako na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ fiksiramo dvije baze (npr. kanonske baze), onda linearne operatore iz $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ možemo poistovjetiti s prostorom realnih matrica $M_{mn}(\mathbb{R})$ tipa $m \times n$, tako da linearnom operatru iz $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ pridružimo njegov matrični prikaz u paru tih baza. Prostor $M_{mn}(\mathbb{R})$ zatim možemo identificirati s $\mathbb{R}^{mn}$, npr. preko izomorfizma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad (a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}).$$

Na taj način svaku normu (metriku, topologiju) na $\mathbb{R}^{mn}$ možemo prenijeti na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Budući da je $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ konačnodimenzionalan vektorski prostor (dimenzije mn), sve te norme će biti ekivalentne, pa definicija neprekidnosti (odnosno diferencijabilnosti) funkcija sa skupom vrijednosti u $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ neće ovisiti o izboru konkrentne norme. Nadalje, ako je $F : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ neka funkcija i ako $F(x)$ u paru kanonskih baza ima matrični prikaz $(a_{ij}(x)) \in M_{mn}(\mathbb{R})$, tada je pitanje neprekidnosti (odnosno diferencijabilnosti) preslikavanja F u točki $c \in A$ ekvivalentno pitanju neprekidnosti (odnosno diferencijabilnosti) svih njegovih matričnih vrijednosti $x \mapsto a_{ij}(x)$ u c, kao funkcija s A u $\mathbb{R}$.

Definicija 14.1. *Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je* ***neprekidno diferencijabilna*** *ili* ***diferencijabilna klase*** *C^1, ako je f diferencijabilna na A i funkcija $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je neprekidna na A.*

Skup svih neprekidno diferencijabilnih funkcija s A u $\mathbb{R}^m$ označavmo s $C^1(A, \mathbb{R}^m)$, a u slučaju $m = 1$ s $C^1(A)$.

Napomena 14.2. Ako je $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna tada je prema Teoremu 11.17, $\mathrm{D}f(x)$ u paru kanonskih baza reprezentiran Jacobijevom matricom $\nabla f(x)$. Dakle, pitanje neprekidnosti (odn. diferencijabilnosti) preslikavanja $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se svodi na pitanje neprekidnosti (odn. diferencijabilnosti) svih parcijalnih derivacija $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ na A.

Korolar 14.3. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Tada vrijedi $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ ako i samo ako sve parcijalne derivacije postoje i neprekidne su na A.*

Dokaz. Ako je $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ slijedi da je funkcija diferencijabilna i da je diferencijal neprekidna funkcija. Stoga prema Teoremu 11.17 postoje sve parcijalne derivacije od f. Prema Napomeni 14.2 one su i neprekidne na A.

Obratno, ako postoje sve parcijalne derivacije i neprekidne su, po Teoremu 12.23 funkcija je diferencijabilna. Pozivajući se ponovo na Napomenu 14.2 vidimo da preslikavanje $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mora biti neprekidno na A. Stoga je funkcija klase C^1. $\square$

Za novo preslikavanje $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ osim neprekidnosti možemo proučavati diferencijabilnost i parcijalne derivacije.

Parcijalne derivacije višeg reda u točki c definiraju se na isti način kao parcijalne derivacije u Definiciji 11.15, pa se jednako tako lako i računaju. Npr. derivacije drugog reda dane su s

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(c).$$

Za $i = j$ koristimo i oznaku $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(c)$. Za navedene parcijalne derivacije koriste se i oznake

$$\partial_i \partial_j f(c), \qquad \partial_i^2 f(c).$$

Primjer 14.4. Za funkciju $f(x, y) = (x^2, x^3 y, x^4 y^2)$ ranije smo izračunali parcijalne derivacije. Parcijalne derivacije drugog reda dane su s

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial y}(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial x}(x,y) = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial y}(x,y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial x}(x,y) = 12x^2y^2, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x,y) = 8x^3y, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}(x,y) = 8x^3y, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial y}(x,y) = 2x^4.$$

Dobivene funkcije možemo dalje parcijalno derivirati te dobiti parcijalne derivacije trećeg i viših redova.

S druge strane, kod diferencijala višeg reda situacija je složenija.

Definicija 14.5. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ diferencijabilna na A. Ako je funkcija $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ diferencijabilna u točki $c \in A$ kažemo da je f* ***dva puta diferencijabilna****. Pripadni diferencijal $\mathrm{D}(\mathrm{D}f)(c) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ označavamo s $\mathrm{D}^2 f(c)$ i zovemo* ***drugi diferencijal*** *ili* ***diferencijal drugog reda****.*

Napomena 14.6. Neka su V, W i Z vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$. Za preslikavanje $\phi : V \times W \to Z$ kažemo da je bilinearno ako je ϕ linearno u svakoj varijabili, tj. vrijedi

$$\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \phi(v_1, w) + \alpha_2 \phi(v_2, w)$$

i

$$\phi(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 \phi(v_1, w) + \alpha_2 \phi(v_2, w)$$

za sve $v_1, v_2, v \in V$, $w_1, w_2, w \in W$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Označimo s $BL(V \times W, Z)$ skup svih bilinearnih preslikavanja $\phi : V \times W \to Z$. Primijetimo da $BL(V \times W, Z)$ ima strukturu vektorskog prostora uz operacije po točkama i da su prostori $L(V, L(W, Z))$ i $BL(V \times W, Z)$ prirodno izomorfni. Zaista, definirajmo funkcije $\Sigma : L(V, L(W, Z)) \to BL(V \times W, Z)$ i $\Omega : BL(V \times W, Z) \to L(V, L(W, Z))$ s

$$\Sigma(T)(v, w) := (Tv)(w) \qquad \text{i} \qquad \Omega(\phi)(v) = \phi(v, \cdot),$$

gdje su $v \in V$ i $w \in W$. Tada se lako provjeri da su Ω i Σ linearna preslikavanja koja su međusobno inverzna. Posebno, ako su V, W i Z konačnodimenzionalni, imamo

$$\dim BL(V \times W, Z) = \dim L(V, L(W, Z)) = \dim V \cdot \dim L(W, Z) = \dim V \cdot \dim W \cdot \dim Z.$$

Kada je riječ od drugim diferencijalima, imamo $\mathrm{D}^2 f(c) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ i bilinearno preslikavanje $\Sigma(\mathrm{D}^2 f(c)) \in BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ je također uobičajeno označavati istom oznakom $\mathrm{D}^2 f(c)$ i zvati drugim diferencijalom od f u točki c.

Napomena 14.7. U specijalnom slučaju kada je $Z = \mathbb{R}$ preslikavanja $BL(V \times W, \mathbb{R})$ se zovu **bilinearni funkcionali**. Pretpostavimo sada da je $V = W = \mathbb{R}^n$. Tada prostor $BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ možemo identificirati s prostorom $M_n(\mathbb{R})$ svih kvadratnih matrica reda n sljedeći način: Neka je $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Za $\phi \in BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definirajmo matricu

$$H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \qquad \text{gdje je} \qquad h_{ij} = \phi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \ \ \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Time smo bilinearnom funcionalu ϕ pridružili matricu H. Sada zbog bilinearnosti funkcionala ϕ za $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n v_i \boldsymbol{e}_i$ i $\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n w_j \boldsymbol{e}_j$ imamo

$$\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \phi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} v_i w_j = (H\underline{\boldsymbol{w}}|\underline{\boldsymbol{v}}). \tag{14.1}$$

Iz ove veze sada vidimo i da svakoj matrici $H \in M_n(\mathbb{R})$ možemo pridružiti bilinearni funkcional iz $BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tako da definiramo $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto (H\underline{\boldsymbol{w}}|\underline{\boldsymbol{v}})$. Na taj način smo dobili identifikaciju prostora $BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ i prostora matrica $M_n(\mathbb{R})$.

Teorem 14.8. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna u točki c. Tada postoje sve parcijalne derivacije drugog reda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)$ te je matrica drugog diferencijala $\mathrm{D}^2 f(c) \in BL(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ u kanonskoj bazi dana **Hesseovom matricom od f u točki** c*

$$H_f(c) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(c) \end{pmatrix},$$

tj. $(H_f(c))_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)$.

Dokaz. Prema pretpostavci funkcija f je dva puta diferencijabilna, tj. postoji drugi diferencijal. To znači da vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{\| \mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(c) - \mathrm{D}^2 f(c)(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0,$$

gdje je norma u brojniku neka norma na $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (npr. operatorska norma).

Posebno, za vektore oblika $x = c + t\boldsymbol{e}_i \in A$ dobivamo

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{D}f(c + t\boldsymbol{e}_i) - \mathrm{D}f(c) - t\,\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{e}_i}{t} = 0.$$

Stoga je za svaki $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{k} = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{D}f(c + t\boldsymbol{e}_i) - \mathrm{D}f(c)}{t}\boldsymbol{k}.$$

Posebno, za $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_j$ $(1 \le j \le k)$ dobivamo

$$(\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(c + t\boldsymbol{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)}{t}.$$

Odavde zaključujemo da postoje sve parcijalne derivacije drugog reda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)$ te da je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = (\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j.$$

Napokon, ako je $H \in M_n(\mathbb{R})$ matrična reprezentacija od $\mathrm{D}^2 f(c)$, imamo

$$(H)_{ij} = \mathrm{D}^2 f(c)(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = (H_f(c))_{ij}.$$

Dakle, $H = H_f(c)$ i time je dokaz teorema završen. $\square$

Napomena 14.9. Dakle, uz iste pretpostavke kao u Teoremu 14.8 imamo

$$(\mathrm{D}^2 f(c)\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = \mathrm{D}^2 f(c)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (H\underline{\boldsymbol{w}}|\underline{\boldsymbol{v}}), \quad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n.$$

Više diferencijale definiramo na analogan način, tako da proučavamo diferencijabilnost drugog, odnosno viših diferencijala. Analogno kao što smo drugi diferencijal $\mathrm{D}^2 f(c) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ identificirali s bilinearnim preslikavanjem $\mathrm{D}^2 f(c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tako i treći diferencijal $\mathrm{D}^3 f(c) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$ identificiramo s trilinearnim preslikavanjem $\mathrm{D}^3 f(c) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Kako je $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))) \cong \mathbb{R}^{n^2 m}$, koristeći neki fiksni izomorfizam prostor $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ možemo normirati tako da preuzmemo neku normu s $\mathbb{R}^{n^2 m}$. Ponovo, pitanja vezana uz neprekidnosti i diferencijabilnosti preslikavanja $\mathrm{D}^2 f$ neće ovisiti o izboru konkretne norme na $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ budući da su sve one ekvivalentne. Analogno postupamo i s diferencijalima višeg reda.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : A \to \mathbb{R}$ tri puta diferencijabilna funkcija. Računamo diferencijale u paru kanonskih baza:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(c)\boldsymbol{h} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c) h_i, \\ \mathrm{D}^2 f(c)(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) h_i k_j. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Djelovanje trećeg diferencijala možemo odrediti kao u dokazu Teorema 14.8. Za tri puta diferencijabilnu funkciju i $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} ((\mathrm{D}^3 f(c)\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{k})\boldsymbol{l} &= \left(\left(\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{D}^2 f(c + t\boldsymbol{e}_i) - \mathrm{D}^2 f(c)}{t}\right)\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{l} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p}(c + t\boldsymbol{e}_i) k_j l_p - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p}(c) k_j l_p}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\sum_{j,p=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p}(c + t\boldsymbol{e}_i) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_p}(c)\right) k_j l_p}{t} \\ &= \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_p}(c) k_j l_p. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\mathrm{D}^3 f(c)(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) = \sum_{i,j,p=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_p}(c) h_i k_j l_p.$$

Definicija 14.10. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ dva puta diferencijabilna funkcija na A. Ako je preslikavanje $\mathrm{D}^2 f : A \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ neprekidno na A, onda kažemo da je f **klase** C^2 na skupu A. Skup svih takvih preslikavanja označavamo s $C^2(A, \mathbb{R}^m)$, odnosno s $C^2(A)$ kad je $m = 1$.*

*Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je **klase** C^k, $k \in \mathbb{N}$, ako postoje diferencijali svakog reda do uključivo reda k i svi oni su neprekidni na A. Skup svih takvih funkcija označavamo s $C^k(A, \mathbb{R}^m)$, odnosno s $C^k(A)$ kad je $m = 1$. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je **klase** C^∞ ako je klase C^k za svaki $k \in \mathbb{N}$. Skup svih takvih funkcija označavamo s $C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$, odnosno s $C^\infty(A)$ kad je $m = 1$.*

Zadatak 14.11. *Dokažite da su skupovi $C^k(A, \mathbb{R}^m)$ vektorski prostori te da je diferencijal linearni operator s $C^{k+1}(A, \mathbb{R}^m)$ u $C^k(A, \mathbb{R}^m)$.*

Iz Korolara 14.3 sijedi karakterizacija prostora C^k.

Korolar 14.12. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. Funkcija $f : A \to \mathbb{R}^m$ je klase C^k ako i samo ako postoje sve parcijalne derivacije k-tog reda funkcije f i neprekidne su na A.*

Dokaz. Za $k = 1$ tvrdnja je upravo tvrdnja Korolara 14.3.

Dokažimo tvrdnju za $k = 2$. Za veće k dokaz je analogan. Zbog odnosa neprekidnosti vektorske funkcije i njenih kompomenti bez smanjenja općenitosti možemo tvrdnju dokazivati samo za skalarne funkcije. Neka je $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^n$. Ako $L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ opskrbimo normom

$$\|T\| = \max\{|T(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j)| : \ i, j = 1, \ldots, n\}$$

vidimo da je funkcija $F : A \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$ neprekidna (odnosno diferencijabilna) ako i samo ako su sve realne funkcije $x \mapsto F(x)(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j)$ neprekidne (odnosno diferencijabilne) na A.

Neka je $f \in C^2(A)$. Po definiciji to znači da postoje $\mathrm{D}f$ i $\mathrm{D}^2 f$ na A i da su neprekidne na A. Prema Korolaru 14.3 sve prve parcijalne derivacije od f postoje i neprekidne su na A. Nadalje, prema Teoremu 14.8 za svako $x \in A$ postoje sve parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ i vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \mathrm{D}^2 f(x)(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j). \tag{14.3}$$

Iz početne opservacije sada slijedi neprekidnost drugih parcijalnih derivacija na A.

Neka sada postoje sve parcijalne derivacije drugog reda funkcije f i neka su neprekidne na A. Posebno, postoje parcijalne derivacije prvog reda i neprekidne su na A, pa prema Korolaru 14.3 slijedi da je f klase C^1. Dakle $\mathrm{D}f$ postoji i neprekidan je na A. Prema Napomeni 14.2, preslikavanje $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ će biti diferencijabilno u točki $x \in A$ ako i samo ako će sve parcijalne derivacije prvog reda od f biti diferencijabilne u točki x. Budući da postoje sve parcijalne derivacije od f drugog reda na A i neprekidne su, prema Teoremu 12.23 slijedi diferencijabilnost parcijalnih derivacija prvog reda od f. Stoga za sve $x \in A$ postoji $\mathrm{D}^2 f(x)$. Napokon, neprekidnost preslikavanja $x \mapsto \mathrm{D}^2 f(x)$ slijedi iz jednakosti (14.3) i početne opservacije. $\square$

Sada lako slijedi glatkoća kompozicije funkcija.

Korolar 14.13. *Kompozicija funkcija klase C^k je funkcija klase C^k.*

Važno svojstvo parcijalnih derivacija drugog reda, a koje se prenosi i na više parcijalne derivacije, dano je u narednom teoremu.

Teorem 14.14 (Schwarzov teorem). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2. Tada je $\mathrm{D}^2 f(c)$ simetrična bilinearna forma za svaki $c \in A$, tj.*

$$\mathrm{D}^2 f(v, w) = \mathrm{D}^2 f(w, v), \qquad v, w \in \mathbb{R}^n$$

tj. Hesseova matrica je simetrična, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c), \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}. \tag{14.4}$$

Dokaz. Iz Teorema 14.8 slijedi da je simetričnost bilinearne forme ekvivalentna simetričnosti Hesseove matrice, tj. svojstvu (14.4).

Radi jednostavnosti oznaka mi ćemo dokaz teorema provesti kada je $n = 2$, tako da je $A \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $f \in C^2(A)$. Neka je $(x, y) \in A$ i $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Promotrimo funkciju

$$S(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

slika pravokutnik

definiranu na nekoj okolini $(0, 0)$ (jer je A otvoren). Označimo li sa

$$g(u, k) = f(u, y + k) - f(u, y)$$

slijedi

$$S(h, k) = g(x + h, k) - g(x, k).$$

Prema Teoremu srednje vrijednosti slijedi da postoji $c_{h,k}$ između x i $x + h$ takav da je

$$S(h, k) = \frac{\partial g}{\partial x}(c_{h,k}, k)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c_{h,k}, y + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(c_{h,k}, y)\right) h.$$

Primjenjujući još jednom Teorem srednje vrijednosti slijedi da postoji $d_{h,k}$ između y i $y + k$ takav da je

$$S(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c_{h,k}, d_{h,k})hk.$$

Prvo grupiranje u funkciji S možemo napraviti i drukčije

$$S(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y),$$

te ponoviti postupak za prva i zadnja dva clana u ovom zapisu. Sijedi da postoje $\tilde{c}_{h,k}$ između x i $x + h$ i $\tilde{d}_{h,k}$ između y i $y + k$ takvi da je

$$S(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{c}_{h,k}, \tilde{d}_{h,k})hk.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza za S, dijeljenjem s hk, te puštanjem limesa $(h, k) \to 0$, zbog neprekinutosti drugih derivacija, slijedi (14.4). □

Napomena 14.15. Može se pokazati da je u prethodnom teoremu dovoljno pretpostaviti da je funkcija f klase C^1, te da jedna parcijalna derivacija (npr. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) postoji i neprekidna je. Dakle, u tom slučaju postoji i druga parcijalna derivacija i neprekidna je.

Za realne funkcije realne varijable poopćenje Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti je Taylorov teorem (srednje vrijednosti). Isto vrijedi i za realne funkcije više varijabli. Kako Lagrangeov teorem srednje vrijednosti ne vrijedi za vektorske funkcije ne vrijedi ni Taylorov teorem u tom slučaju.

Teorem 14.16 (Taylorov teorem). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ klase C^{k+1}. Neka su $x_0, x \in A$ takve da je $[x_0, x] \subset A$. Tada postoji točka $c \in \langle x_0, x\rangle$ takva da je*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \mathrm{D}^j f(x_0)(x - x_0, \ldots, x - x_0) + \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{D}^{k+1} f(c)(x - x_0, \ldots, x - x_0).$$

Označimo li $h = x - x_0$ teorem možemo iskazati i sa: postoji $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da vrijedi

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \mathrm{D}^j f(x_0)(h, \ldots, h) + \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{D}^{k+1} f(x_0 + \theta h)(h, \ldots, h).$$

Polinom

$$T_k(x_0, h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \mathrm{D}^j f(x_0)(h, \ldots, h)$$

u varijablama $h_1, \ldots, h_n$ naziva se **Taylorov polinom stupnja k u točki** x_0.

Dokaz. Definirajmo $\gamma(t) = x_0 + th$. Funkcija $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$ realna je funkcija realne varijable definirana na nekoj okolini $[0, 1]$. Kompozicija afine funkcije i funkcije klase C^{k+1} je ponovo klase C^{k+1}, pa na nju možemo primijeniti Taylorov teorem za funkcije jedne varijable. Dakle, postoji $\theta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je

$$g(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(\theta).$$

Primijetimo $g(1) = f(x_0 + h)$ $g(0) = f(x_0)$, te izračunajmo $g^{(j)}(0)$. Kako je $g = f \circ \gamma$ slijedi

$$g'(t) = \mathrm{D}f(x_0 + th)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th)h_i,$$

Analogno,

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0 + th)h_j h_i = \mathrm{D}^2 f(x^0 + th)(h, h)$$

(vidjeti (14.2)). Induktivno zaključujemo da za sve $1 \leq i \leq k + 1$ vrijedi

$$g^{(i)}(t) = \mathrm{D}^i f(x_0 + th)(h, \ldots, h),$$

odakle slijedi tvrdnja teorema. □

Za početak evo jednog primjera funkcije jedne varijable.

Primjer 14.17. Odredite aproksimaciju vrijednosti $\sqrt{26}$ korištenjem Taylorovog razvoja.

Promatramo funkciju $f(x) = \sqrt{x}$. Tada je

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}, \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2},$$
$$f''''(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}x^{-(2n-1)/2}, n \geq 2.$$

Sada je

$$f(25) = 5, \qquad f'(25) = \frac{1}{2}5^{-1}, \qquad f''(25) = -\frac{1}{4}5^{-3}, \qquad f'''(25) = \frac{3}{8}5^{-5},$$
$$f''''(25) = -\frac{15}{16}5^{-7}, \ldots, f^{(n)}(25) = (-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}5^{-(2n-1)}, n \geq 2,$$

pa je, jer je $h = 26 - 25 = 1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{26} &\approx T_0(25,1) = 5,\\
\sqrt{26} &\approx T_1(25,1) = 5 + \frac{1}{2}5^{-1} = 5.1,\\
\sqrt{26} &\approx T_2(25,1) = 5 + \frac{1}{2}5^{-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}5^{-3} = 5.1 - 1/1200 = 5.0991\dot{6},\\
\sqrt{26} &\approx T_3(25,1) = 5 + \frac{1}{2}5^{-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}5^{-3} + \frac{1}{6}\frac{3}{8}5^{-5} = 5.1 - 1/1200 + 1/50000 = 5.09902,\\
\sqrt{26} &\approx T_4(25,1) = 5 + \frac{1}{2}5^{-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}5^{-3} + \frac{1}{6}\frac{3}{8}5^{-5} - \frac{1}{24}\frac{15}{16}5^{-7}\\
&= 5.1 - 1/1200 + 1/50000 - 1/2000000 = 5.0990195.
\end{aligned}$$

Aproksimacija na 14 decimala je

$$\sqrt{26} \approx 5.09901951359278.$$

Izračunajte sami ocjenu pogreške iz Taylorovog teorema.

Primjer 14.18. Taylorov polinom stupnja 1 u točki $(0,0)$ funkcije $f(x,y) = x + x^2 + xy$ dan je sa

$$T_1(0,0,h_1,h_2) = h_1,$$

dok je Taylorov polinom stupnja 2 u točki $(0,0)$ dan sa

$$T_1(0,0,h_1,h_2) = h_1 + h_1^2 + h_1h_2.$$

Provjerite.

Računamo:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0,\\
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} 1+2x+y & x \end{pmatrix},\\
\nabla f(0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Točka oko koje razvijamo je $(x, y) = (0, 0)$, a vektor je $h = (h_1, h_2)$. Stoga je

$$\begin{aligned}
T_1((0,0),(h_1,h_2)) &= f(0,0) + \mathrm{D}f(0,0)(h_1,h_2) = 0 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1, \\
T_2((0,0),(h_1,h_2)) &= f(0,0) + \mathrm{D}f(0,0)(h_1,h_2) + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(0,0)((h_1,h_2),(h_1,h_2)) \\
&= h_1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\
&= h_1 + \frac{1}{2}(2h_1^2 + h_2 h_1 + h_1 h_2) = h_1 + h_1^2 + h_1 h_2.
\end{aligned}$$

Ocjena pogre'ške polinoma T_1 dana je sa

$$\frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f((0,0)+\theta h)(h,h) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2 + h_1 h_2,$$

dok je u slučaju aproksimacije polinomom T_2 ocjena dana trećim diferencijalom koji je jednak 0, jer je originalna funkcija zapravo polinom stupnja 2.

Zašto su ovi rezultati očekivani?

Primjer 14.19. Odredite Taylorov polinom stupnja 1 u točki $(1, 2)$ funkcije $f(x, y) = x+x^2+xy$.

Kao u računu u prethodnom zadatku vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
f(1,2) &= 4, \\
\nabla f(1,2) &= \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Točka oko koje razvijamo je $(x, y) = (1, 2)$, a vektor je $h = (h_1, h_2)$. Stoga je

$$T_1((1,2),(h_1,h_2)) = f(1,2) + \mathrm{D}f(1,2)(h_1,h_2) = 4 + \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 4 + 5h_1 + h_2.$$

Ni ovaj rezultat ne treba čuditi jer je $h_1 = x - 1, h_2 = y - 2$ i vrijedi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x - 1 + 1 + (x-1+1)^2 + (x-1+1)(y-2+2) \\
&= (x-1) + 1 + (x-1)^2 + 2(x-1) + 1 + (x-1)(y-2) + 2(x-1) + (y-2) + 2 \\
&= 4 + 5(x-1) + (y-2) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2).
\end{aligned}$$

Primjer 14.20. Odredite Taylorov polinom trećeg stupnja funkcije $f(x, y) = \sin x + x^2 y + 2x$ oko točke $(0, 0)$.

Računamo

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0,\\
\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} \cos x + 2xy + 2 & x^2 \end{pmatrix},\\
\nabla f(0,0) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix},\\
H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} -\sin x + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix},\\
H_f(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\\
\partial_{xxx} f(x,y) &= -\cos x,\\
\partial_{xxy} f(x,y) &= \partial_{xyx} f(x,y) = \partial_{yxx} f(x,y) = 2,\\
\partial_{xyy} f(x,y) &= \partial_{yxy} f(x,y) = \partial_{yyx} f(x,y) = 0,\\
\partial_{yyy} f(x,y) &= 0,\\
\partial_{xxx} f(0,0) &= -1,\\
\partial_{xxy} f(0,0) &= \partial_{xyx} f(0,0) = \partial_{yxx} f(0,0) = 2,\\
\partial_{xyy} f(0,0) &= \partial_{yxy} f(0,0) = \partial_{yyx} f(0,0) = 0,\\
\partial_{yyy} f(0,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
T_3((0,0),(h_1,h_2)) &= f(0,0) + \mathrm{D} f(0,0)(h_1,h_2) + \frac{1}{2}\mathrm{D}^2 f(0,0)((h_1,h_2),(h_1,h_2))\\
&\quad + \frac{1}{6}\mathrm{D}^3 f(0,0)((h_1,h_2),(h_1,h_2),(h_1,h_2))\\
&= 0 + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + 0\\
&\quad + \frac{1}{6}\left(\partial_{xxx} f(0,0) h_1^3 + 3\partial_{xxy} f(0,0) h_1^2 h_2 + 3\partial_{xyy} f(0,0) h_1 h_2^2 + 3\partial_{yyy} f(0,0) h_2^3\right)\\
&= 3h_1 - \frac{1}{6}h_1^3 + h_1^2 h_2.
\end{aligned}$$

Vratimo li se u (x,y) koordinate dobivamo

$$T_3((0,0),(x,y)) = 3x - \frac{1}{6}x^3 + x^2 y.$$

I ovaj rezultat je očekivan jer razvijemo li funkciju sin u Taylorov red oko 0 slijedi

$$f(x,y) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5) + x^2 y + 2x = 3x - \frac{1}{6}x^3 + x^2 y + O(x^5).$$

Primjer 14.21. Odredite Taylorov polinom drugog stupnja funkcije $f(x,y) = \sin x + x^2 y + 2x$ oko točke $(\pi, 0)$.

Iz prethodnog primjera dobivamo

$$\begin{aligned}
f(\pi,0) &= 2\pi,\\
\nabla f(\pi,0) &= \begin{pmatrix} 1 & \pi^2 \end{pmatrix},\\
H_f(\pi,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}
T_2((\pi,0),(h_1,h_2)) &= f(\pi,0) + \mathrm{D}f(\pi,0)(h_1,h_2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 f(\pi,0)((h_1,h_2),(h_1,h_2)),\\
&= 2\pi + \begin{pmatrix} 1 & \pi^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\\
&= 2\pi + h_1 + \pi^2 h_2 + \frac{1}{2}\,(4\pi h_1 h_2)\\
&= 2\pi + h_1 + \pi^2 h_2 + 2\pi h_1 h_2.
\end{aligned}$$

U (x,y) koordinatama imamo

$$T_2((\pi,0),(x-\pi,y)) = 2\pi + (x-\pi) + \pi^2 y + 2\pi(x-\pi)y$$

Zadatak 14.22. Odredite Taylorov polinom stupnja 2 funkcije

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

oko točaka $(0,0)$ i $(1,2)$, te odredite oblik ostatka.

Zadatak 14.23. Dokažite da za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klase C^3 vrijedi $\mathrm{D}^3 f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^3$ ako i samo ako postoje simetrična matrica $T \in M_3(\mathbb{R})$, vektor $b \in \mathbb{R}^3$ i realan broj $c \in \mathbb{R}$ takvi da je $f(x) = (Tx|x) + (b|x) + c$ za sve $x \in \mathbb{R}^3$.

Zadatak 14.24. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $c \in A$ i $f : A \to \mathbb{R}^m$ funkcija klase C^1 takva da je $\|\,\mathrm{D}f(c)\|_o < 1$. Dokažite da tada postoji otvorena okolina $U \subseteq A$ oko c na kojoj je funkcija f kontrakcija.

15 Lokalni ekstremi

Važna primjena Taylorovog teorema odnosi se na analizu lokalnih ekstrema (minimuma odnosno maksimuma) relanih funkcija (više varijabli).

Za $n = 1$ i $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ako funkcija ima lokalni minimum ili maksimum u točki $c \in \langle a, b\rangle$ i ako je funkcija diferencijabilna u c, tada je $f'(c) = 0$. Ako je još funkcija dva puta diferencijabilna u točki c i $f''(c) < 0$, tada je c (strogi) lokalni maksimum, a ako je $f''(c) > 0$, tada je c (strogi) lokalni minimum. U nastavku poopćujemo ove rezultate za realne funkcije više varijabli.

Definicija 15.1. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $f : A \to \mathbb{R}$ i $c \in A$.*

- *Ako postoji okolina $U(c)$ od c na kojoj je $f(c)$ maksimalna vrijednost od f, tj.*

$$f(x) \le f(c) \qquad \forall x \in U(c),$$

  *onda kažemo da je c **lokalni maksimum**, a $f(c)$ je vrijednost lokalnog maksimuma.*

- *Ako postoji okolina $U(c)$ od c na kojoj je $f(c)$ minimalna vrijednost od f, tj.*

$$f(c) \le f(x) \qquad \forall x \in U(c),$$

  *onda kažemo da je c **lokalni minimum**, a $f(c)$ je vrijednost lokalnog minimuma.*

- *Za točku c kažemo da je **lokalni ekstrem** od f ako je lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije f.*

- *Za točku c kažemo da je **stacionarna točka** ako je funkcija f diferencijabilna u c i $\mathrm{D}f(c) = 0$.*

Teorem 15.2 (Nužan uvjet za lokalni ekstrem). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funckija u točki $c \in A$. Ako je c lokalni ekstrem funkcije f onda je $\mathrm{D}f(c) = 0$ (tj. c je stacionarna točka funkcije f).*

Dokaz 1. Pretpostavimo da $\mathrm{D}f(c) \neq 0$. Slijedi da postoji vektor $h \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathrm{D}f(c)h = p \neq 0$. Pretpostavimo $p > 0$ (ako nije uzmemo $-h$). Slijedi

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(c + \lambda h) - f(c) - \lambda\, \mathrm{D}f(c)h}{\lambda} = 0.$$

Stoga je

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(c + \lambda h) - f(c)}{\lambda} = \mathrm{D}f(c)h = p > 0.$$

Sada slijedi da za $\lambda > 0$ u okolini $\lambda = 0$ vrijedi

$$f(c + \lambda h) > f(c),$$

a za $\lambda < 0$ u okolini $\lambda = 0$ vrijedi

$$f(c + \lambda h) < f(c),$$

pa c nije lokalni ekstrem, što je kontradikcija. $\square$

Dokaz 2. Za $j \in \{1, \dots, n\}$ na nekoj okolini 0 definiramo funkcije

$$g_j(h) = f(c + h\boldsymbol{e}_j).$$

Svaka od ovih funkcija ima u 0 lokalni ekstrem, pa mora vrijediti

$$0 = g_j'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(c).$$

Jer je funkcije f diferencijabilna slijedi da je $\mathrm{D}f(c) = 0$. $\square$

Napomena 15.3. Primijetite da smo dokaz zapravo sveli na realnu funkciju realne varijable.

Rezultat je zapravo intuitivno jasan. Ako funkcija ima lokalni maksimum u točki c niti u jednom smjeru ne smije rasti. Stoga ako je diferencijabilna diferencijal mora biti jednak 0.

S druge strane stacionarne točke ne moraju biti ekstremi. Poznat primjer je $f(x) = x^3$ gdje je u 0 točka infleksije. Primjeru dvije dimenzije dan je formulom

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

Vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Stoga je $(0, 0)$ stacionarna točka. No, promatramo li ponašanje funkcije na osi y vidimo da je vrijednost funkcije pozitivna, a na osi x negativna. Stoga $(0, 0)$ nije lokalni ekstrem. Takve točke imaju posebno ime.

Definicija 15.4. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Za točku $c \in A$ kažemo da je* ***sedlasta točka*** *funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ ako je c stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem od f.*

Definicija 15.5. *Za simetričnu matricu $H \in M_n(\mathbb{R})$ kažemo da je:*

- ***Pozitivno definitna*** *(pišemo $H > 0$) ako je*

$$(Hx|x) > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

- ***Pozitivno semidefinitna*** *(pišemo $H \geq 0$) ako je*

$$(Hx|x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- ***Negativno definitna*** *(pišemo $H < 0$) ako je*

$$(Hx|x) < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

- ***Negativno semidefinitna*** *(pišemo $H \leq 0$) ako je*

$$(Hx|x) \leq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- ***Indefinitna*** *ako nije ni pozitivno ni negativno semidefinitna.*

Prisjetimo se da svaka simetrična matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ ima realne svojstvene vrijednosti te je ortogonalno slična s dijagonalnom matricom D, tj. postoji ortogonalna matrtica $T \in M_n(\mathbb{R})$ $(T^tT = TT^t = I)$ takva da je

$$A = T^t DT.$$

Stoga će A biti pozitivno definitna ako i samo ako vrijedi

$$0 < (Ax|x) = (T^t DTx|x) = (DTx|Tx) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (Dx|x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Dakle, zahtjev pozitivne definitnosti na matricu A je ekvivalentan istom zahtjevu na matricu D. No dijagonalna matrica je pozitivno definitna ako i samo ako su sve njene vrijednosti pozitivne, odakle zaključujemo da je naša matrica A pozitivno definitna ako i samo ako su sve njene svojstvene vrijednosti pozitivne. Sličnu karakterizaciju možemo dati i za druga svojstva, npr. negativno definitna ima samo negativne svojstvene vrijednosti, a indefinitna i pozitivne i negativne.

Neka je $H \in M_n(\mathbb{R})$ pozitivno definitna matrica. Promatrimo preslikavanje

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = (Hx|x).$$

To preslikavanje je kvadratni polinom u n varijabli, te je stoga neprekidno na čitavom $\mathbb{R}^n$. Specijalno, neprekidno je na jediničnoj sferi $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ u $\mathbb{R}^n$. Stoga na S^{n-1} funkcija f poprima globalni minimum H_m, tj.

$$f(x) = (Hx|x) \geq H_m \qquad \forall x \in S^{n-1}.$$

Kako je H pozitivno definitna, mora biti $H_m > 0$. Sada za proizvoljan $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ je $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, pa vrijedi

$$\left(H\frac{x}{\|x\|} \middle| \frac{x}{\|x\|} \right) \geq H_m, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Množenjem s $\|x\|^2$ dobivamo

$$(Hx|x) \geq H_m \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{15.1}$$

S druge strane (15.1) očito povlači da je H pozitivno definitna. Stoga smo pokazali prvu tvrdnju narednog teorema. Druga tvrdnja slijedi analogno.

Teorem 15.6. *(a) Simetrična matrica H je pozitivno definitna ako i samo ako postoji $H_m > 0$ takav da je*

$$(Hx|x) \geq H_m \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Simetrična matrica H je negativno definitna ako i samo ako postoji $H_M < 0$ takav da je

$$(Hx|x) \leq H_M \|x\|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Napomena 15.7. Neka je H pozitivno definitna. Već smo komentirali da je to ekvivalentno pozitivnosti svih svojstvenih vrijednosti matrice H. Neka su svojstvene vrijednosti dane redom

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n,$$

s pripadnom ortonormiranom bazom svojstvenih vektora $v_1, \ldots, v_n$. Neka je za $x \in \mathbb{R}^n$ raspis u bazi dan sa

$$x = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n.$$

Sada iz (15.1), uvrštavanjem vektora x, slijedi

$$(Hx|x) = \lambda_1 c_1^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2 \geq \lambda_1(c_1^2 + \cdots + c_n^2) = \lambda_1 \|x\|^2.$$

Stoga je najveći H_m iz (15.1) zapravo najmanja svojstvena vrijednost od H.

Teorem 15.8 (Dovoljni uvjeti za lokalni ekstrem). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren i $f : A \to \mathbb{R}$ klase C^2.*

(i) Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $H_f(c)$ je negativno definitna matrica onda f ima lokalni maksimum u c.

(ii) Ako f ima lokalni maksimum u c onda je $H_f(c)$ negativno semidefinitna.

(iii) Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $H_f(c)$ je pozitivno definitna matrica onda f ima lokalni minimum u c.

(iv) Ako f ima lokalni minimum u c onda je $H_f(c)$ pozitivno semidefinitna.

(v) Ako je $c \in A$ stacionarna točka i $H_f(c)$ je indefinitna matrica onda f nema u točki c lokalni ekstrem, tj. c je sedlasta točka funkcije f.

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnje (i) i (ii). Tvrdnje (iii) i (iv) slijede iz (i) i (ii) za funkciju $-f$, a tvrdnja (v) iz (ii) i (iv).

(i) Neka je $\mathrm{D}f(c) = 0$ i $H_f(c) < 0$. Prema Teoremu 15.6 postoji $\varepsilon > 0$ takav da vrijedi

$$(H_f(c)x|x) \leq -\varepsilon \|x\|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{15.2}$$

Jer je f klase C^2 slijedi da je matrična funkcija

$$H_f : A \to M_n(\mathbb{R}), \qquad H_f : x \mapsto H_f(x)$$

neprekidna na A s obzirom na proizvoljnu normu na $M_n(\mathbb{R})$ (vidjeti Zadatak 8.7). Posebno, ako $M_n(\mathbb{R})$ opskrbimo s operatorskom normom $\|\cdot\|_o$, tada iz neprekidnosti funkcije H_f točki c dobivamo $\delta > 0$ takav da vrijedi $K(c,\delta) \subseteq A$ i

$$(\forall x \in A)\,(\|x - c\| < \delta \implies \|H_f(x) - H_f(c)\|_o < \frac{\varepsilon}{2}). \tag{15.3}$$

Fiksirajmo $x \in K(c,\delta)$. Jer je $K(c,\delta)$ konveksan, Taylorov teorem nam daje točku $\overline{c} \in K(c,\delta)$ takvu da vrijedi

$$f(x) - f(c) = \mathrm{D}f(c)(x-c) + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}^2 f(\overline{c})(x-c, x-c). \tag{15.4}$$

Jer je

$$\mathrm{D}f(c) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathrm{D}^2 f(\overline{c})(x-c, x-c) = (H_f(\overline{c})(x-c)|x-c),$$

jednakost (15.4) je ekvivalentna s

$$f(x) - f(c) = \frac{1}{2}(H_f(\overline{c})(x-c)|x-c). \tag{15.5}$$

Koristeći redom nejednakost trokuta, nejednakost Schwarz–Cauchy-Bunjakovskog, svojstvo operatorske norme, (15.2) i (15.3) dobivamo ocjenu

$$
\begin{aligned}
(H_f(\overline{c})(x-c)|x-c) &\leq (H_f(c)(x-c)|x-c) + |([H_f(\overline{c}) - H_f(c)](x-c)|x-c)| \\
&\leq (H_f(c)(x-c)|x-c) + \|[H_f(\overline{c}) - H_f(c)](x-c)\|\|x-c\| \\
&\leq (H_f(c)(x-c)|x-c) + \|H_f(\overline{c}) - H_f(c)\|_o\|x-c\|^2 \\
&\leq -\varepsilon\|x-c\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|x-c\|^2 \\
&= -\frac{\varepsilon}{2}\|x-c\|^2,
\end{aligned}
$$

Koristeći tu ocjenu iz (15.5) dobivamo

$$f(x) - f(c) \leq -\frac{\varepsilon}{4}\|x-c\|^2.$$

Kako je $x \in K(c,\delta)$ bio proizvoljan, zaključujemo

$$f(x) < f(c) \qquad \forall x \in K(c,\delta)\backslash\{c\}$$

pa je c lokalni maksimum funkcije f.

(ii) Neka je sada c lokalni maksimum funkcije f. Pretpostavimo da $H_f(c)$ nije negativno semidefinitna. To znači da postoji $x \in \mathbb{R}^n$ takav da je

$$(H_f(c)x|x) > 0.$$

Jer je A otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $c + tx \in A$ za sve $t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle$. Stoga možemo definirati funkciju

$$g : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to \mathbb{R} \qquad \text{s} \qquad g(t) = f(c+tx).$$

Primijetimo da je g klase C^2 kao kompozicija dviju funkcija klase C^2. Nadalje, iz dokaza Taylorovog teorema slijedi

$$g'(0) = \mathrm{D}f(c)x = 0 \qquad \text{i} \qquad g''(0) = (H_f(c)x|x) > 0.$$

Dakle, funkcija g u 0 ima strogi lokalni minimum pa postoji $0 < \delta \leq \varepsilon$ takav da za sve $0 < |t| < \delta$ vrijedi

$$f(c) = g(0) < g(t) = f(c+tx).$$

Posebno, c nije točka lokalnog maksimuma funkcije f, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

$\square$

Napomena 15.9. Primijetimo da iz dokaza Teorema 15.8 slijedi da za $f \in C^2(A)$ iz $\mathrm{D}f(c) = 0$ i $H_f(c) < 0$ slijedi da f u c ima strogi lokalni maksimum, tj. postoji otvorena okolina $U \subseteq A$ oko c takva da je

$$f(x) < f(c) \qquad \forall x \in U \setminus \{c\}.$$

Analogno, iz $\mathrm{D}f(c) = 0$ i $H_f(c) > 0$ slijedi da f u c ima strogi lokalni minimum.

Kako za danu matricu nije lako odrediti njenu definitnost iz same definicije, donosimo jednostavni kriterij čiji se dokaz može naći u standardnim udžbenicima iz Linearne algebre.

Teorem 15.10 (Sylvesterov kriterij). *Neka je $H = (h_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Označimo redom determinante*

$$\Delta_1 = h_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}.$$

- *H je pozitivno definitna ako i samo ako je $\Delta_i > 0$ za sve $i = 1, \ldots, n$.*
- *H je negativno definitna ako i samo ako je*

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots.$$

Napomena 15.11. - Sylvesterov kriterij je lagano provjeriti za dijagonalne matrice.

- U slučaju $n = 2$ nadopunjavanjem do punog kvadrata dobivamo

$$\begin{aligned}(Hx|x) &= h_{11}x_1^2 + 2h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2 \\ &= h_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{h_{12}}{h_{11}}x_1x_2 + \frac{h_{12}^2}{h_{11}^2}x_2^2\right) + \frac{-h_{12}^2 + h_{11}h_{22}}{h_{11}}x_2^2 \\ &= h_{11}\left(x_1 + \frac{h_{12}}{h_{11}}x_2\right)^2 + \frac{\det H}{h_{11}}x_2^2.\end{aligned}$$

Odavde lako iščitavamo da je H pozitivno definitna ako i samo ako je $h_{11} > 0$ i $\det H > 0$, odnosno negativno definitna ako i samo ako je $h_{11} < 0$ i $\det H > 0$.

Zadatak 15.12. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane s $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Zadatak 15.13. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 čiji je Taylorov polinom drugog stupnja u $(0, 0, 0)$ dan s

$$T_2((0, 0, 0), (h_1, h_2, h_3)) = 1 - 2h_2^2 - 3h_3^2.$$

(a) Što možemo reći o karakteru točke $(0, 0, 0)$ za f?

(b) Za svaki od navedenih slučajeva u (a) napišite po jedan primjer takve funkcije f.

Zadatak 15.14. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $c \in A$ i $f : A \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 takva da je $H_f(c) > 0$. Dokažite da tada postoji otvorena okolina $U \subseteq A$ oko c takva da vrijedi

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

za sve $x, y \in U$.

16 Teorem o inverznom preslikavanju

Za sustav linearnih jednadžbi zadan matricom $T \in M_n(\mathbb{R})$ i desnom stranom jednadžbe $y \in \mathbb{R}^n$

$$Tx = y$$

rješivost sustava svela se na pitanje regularnosti matrice T, tj. zahtjev $\det T \neq 0$. Prirodno se onda nameće pitanje rješivosti sustava nelinearnih jednadžbi danog funkcijom $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i desnom stranom jednadžbe $y \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$f(x) = y,$$

odnosno po komponentama

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n. \end{aligned}$$

Ako postoji jedinstven $x \in A$ koji zadovoljava sve ove jednadžbe pišemo $x = f^{-1}(y)$. Stoga je pitanje rješivosti i jednoznačnosti rješenja zapravo pitanje invertibilnosti funkcije f. Uvjet koji će se pokazati da zamjenjuje uvjet $\det T \neq 0$ u linearnom slučaju dan je s $J_f(x) \neq 0$, gdje je $J_f(x)$ Jakobijeva determinanta od f u x, tj.

$$J_f(x) = \det \mathrm{D}f(x) = \det \nabla f(x).$$

U dimenziji $n = 1$ za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ klase C^1, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, zahtjev $f'(c) \neq 0$ $(c \in I)$ povlači da je funkcija strogo monotona na nekoj okolini od c, pa onda i invertibilna na nekoj okolini točke c. Stoga iz invertibilnosti najbolje afine aproksimacije funkcije f u točki c slijedi i invertibilnost funkcije f na nekoj okolini od c. S druge strane ukoliko je $f'(c) = 0$, tada se bez daljnje analize ne može ništa zaključiti. Primjeri su funkcije $x \mapsto x^2$ i $x \mapsto x^3$ (prva nije invertibilna ni na kojoj okolini 0, dok je druga globalno invertibilna).

Dva svojstva još možemo primijetiti u slučaju realne funkcije realne varijable. Jednadžba

$$f(x) = x^2 = y$$

nema rješenja za $y < 0$. Također za $y = 1$ postoje dva rješenja, $x = 1$ i $x = -1$, pa nema globalne jedinstvenosti.

To nam sugerira da iz uvjeta $J_f(c) \neq 0$ evenutalno možemo očekivati samo *lokalnu invertibilnost od f u točki c*, tj. injektivnost od f na nekoj otvorenoj okolini U oko c, tako da za svaki $y \in f(U)$ možemo naći jedinstveni $x \in U$ takav da je $y = f(x)$.

Teorem 16.1 (**Teorem o inverznoj funkciji**). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $c \in A$ i $f : A \to \mathbb{R}^n$ funkcija klase C^1 takva da je $J_f(c) \neq 0$. Tada postoji otvorena okolina $U \subseteq A$ točke c i otvorena okolina $W \subseteq \mathbb{R}^n$ točke $f(c)$ tako da je $f(U) = W$ i $f|_U : U \to W$ je bijekcija čiji je inverz $(f|_U)^{-1} : W \to U$ klase C^1. Štoviše, za $y \in W$ i $x = (f|_U)^{-1}(y) \in U$ vrijedi*

$$\mathrm{D}(f|_U)^{-1}(y) = \mathrm{D}f(x)^{-1}. \tag{16.1}$$

Nadalje, ako je f klase C^p, $p \geq 1$, tada je i $(f|_U)^{-1}$ klase C^p.

Napomena 16.2. Egizistencija okolina U od c i W od $f(c)$ na kojima je funkcija f invertibilna zapravo znači da za svaki $y \in W$ postoji jedinstveni $x \in U$ takav da je $y = f(x)$, odnosno da za $y \in W$ sustav nelinearnih jednadžbi $f(x) = y$ ima jedinstveno rješenje na U.

Definicija 16.3. *Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi i $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je:*

- *C^p-**difeomorfizam**, ako je f bijekcija klase C^p i njen inverz $f^{-1} : B \to A$ je također funkcija klase C^p.*

- ***Lokalni C^p-difeomorfizam u točki** $c \in A$ ako postoje otvorene okoline $U \subseteq A$ oko c i $W \subseteq B$ oko $f(c)$ takve da je $f(U) = W$ i restrikcija $f|_U : U \to W$ je C^p-difeomorfizam.*

Napomena 16.4. (a) Teorem 16.1 sada možemo kratko iskazati na sljedeći način: Ako je $f : A \to \mathbb{R}^n$ funkcija klase C^p i $c \in A$ takva da je $J_f(c) \neq 0$, onda je f lokalni C^p-difeomorfizam u točki c.

(b) Neka su $U, W \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi i $g : U \to W$ diferencijabilna bijekcija čiji je inverz $g^{-1} : W \to U$ također diferencijabilan. Koristeći formulu za diferencijal kompozicije, iz $g^{-1} \circ g = 1_U$ dobivamo

$$\mathrm{D}g^{-1}(g(x)) \circ \mathrm{D}g(x) = I \qquad \forall x \in U.$$

Posebno, $\mathrm{D}g^{-1}(y)$ je regularan linearan operator za sve $y \in W$ te je

$$\mathrm{D}g^{-1}(y) = [\mathrm{D}g(g^{-1}(y))]^{-1} \qquad \forall y \in W. \tag{16.2}$$

Odavde odmah dobivamo jednakost (16.9) (tako da u (16.2) stavimo $g = f|_U$).

(c) Koristeći (a) i (b), zaključujemo da nam Teorem 16.1 daje nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija $f : A \to \mathbb{R}^n$ klase C^p bila lokalni C^p-difeomorfizam u točki $c \in A$: ako i samo ako je $J_f(c) \neq 0$.

(d) Osnovni primjer diferencijabilne bijekcije čiji inverz nije diferencijabilan je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Štoviše, f je bijekcija klase C^∞, ali $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ nije diferencijabilna u 0. Posebno, f nije C^1-difeomorfizam.

Teorem 16.1 dokazujemo koristeći Banachov teorem o fiksnoj točki (Teorem 10.3). Od koristi će se pokazati i naredna tehnička lema. Kao u odjeljku 14 i ovdje ćemo skup linearnih operatora $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ identificirati s $\mathbb{R}^{n^2}$, čiju topologiju dobro poznajemo. S $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ označavamo skup svih invertiblnih linearnih operatora (matrica) (tzv. *opća linearna grupa*), tj.

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det T \neq 0\}.$$

Označimo s $\mathcal{L}^{-1} : \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ preslikavanje koje invertibilnom operatoru pridružuje njegov inverz, tj.

$$\mathcal{L}^{-1}T = T^{-1}.$$

Lema 16.5. *Vrijedi*

(i) $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *je otvoren podskup od* $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(ii) $\mathcal{L}^{-1}$ *je klase* C^∞.

Dokaz. (i) Preslikavanje $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ je polinom n-tog stupnja u n^2 varijabli. Stoga je klase C^∞. S druge strane je

$$\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}),$$

pa je $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ otvoren.

(ii) Inverz regularne matrice $T \in M_n(\mathbb{R})$ možemo zapisati u obliku

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} T^*,$$

pri čemu je T^* adjunkta (matrica s elementima $T^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det T^{ji}$, gdje je matrica T^{ji} dobivena iz matrice T tako da su izbrisani j-ti redak i i-ti stupac). Kako je funkcija det klase C^∞, zaključujemo i da je preslikavanje $T \mapsto T^*$ klase C^∞, pa slijedi tvrdnja (ii). □

Dokaz teorema o inverznoj funkciji. 1. korak. Svođenje na jednostavniji slučaj: Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c = 0$, $f(c) = 0$ i $\mathrm{D}f(c) = I$.

Označimo s $T = \mathrm{D}f(c)$. Prema pretpostavci, operator T je invertibilan. Definirajmo funkciju $g : A \to \mathbb{R}^n$ s $g = T^{-1} \circ f$. Koristeći formulu za diferencijal kompozicije, imamo

$$\mathrm{D}g(c) = \mathrm{D}T^{-1}(f(c))\,\mathrm{D}f(c) = T^{-1}\,\mathrm{D}f(c) = I.$$

Stoga, uz pretpostavku da teorem vrijedi za funkciju g, dobivamo otvorene okoline U od c i $\hat{W}$ od $g(c) = T^{-1}f(c)$ takve da je g bijekcija s U na $\hat{W}$ i $g^{-1} : \hat{W} \to U$ je klase C^1. Slijedi da je $W = T\hat{W} = (T^{-1})^{-1}\hat{W}$ otvorena okolina točke $f(c)$, te da je $f^{-1} = g^{-1} \circ T^{-1} : W \to U$ funkcija klase C^1. Odavde zaključujemo da nam je dovoljno dokazati teorem za funkciju kojoj je $\mathrm{D}f(c) = I$.

Pretpostavimo još da smo teorem dokazali za slučaj kada je $c = 0$ i funkcije $h : A \to \mathbb{R}^n$ za koje vrijedi $h(c) = 0$. Ako je f kao u iskazu teorema, definirajmo $h : A \to \mathbb{R}^n$ s $h(x) = f(x+c) - f(c)$. Sada je $h(0) = 0$ i $\mathrm{D}h(0) = \mathrm{D}f(c)$ pa prema pretpostavci postoje otvorene okoline $\hat{U}$ i $\hat{W}$ od 0 takve da je h bijekcija s $\hat{U}$ na $\hat{W}$ i $h^{-1} : \hat{W} \to \hat{U}$ je klase C^1. Stavimo $U = \hat{U} + c$ i $W = \hat{W} + f(c)$. Tada je U otvorena okolina od c, W otvorena okolina od $f(c)$, f je bijekcija s U na W čija je inverzna funkcija $f^{-1} : W \to U$ dana formulom

$$f^{-1}(y) = h^{-1}(y - f(c)) + c.$$

Zaista, za $x \in U$ i $y \in W$ imamo $x - c \in \hat{U}$ i $y - f(c) \in \hat{W}$ pa zbog invertibilnosti od $h : \hat{U} \to \hat{W}$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff f(x) - f(c) = y - f(c) \\ &\iff h(x-c) = y - f(c) \\ &\iff x = h^{-1}(y - f(c)) + c. \end{aligned}$$

Kako je h^{-1} klase C^1, slijedi i da je f^{-1} klase C^1.

2. korak. Primjena Banachovog teorema o fiksnoj točki i egzistencija inverza.

Definiramo funkciju $g : A \to \mathbb{R}^n$ formulom

$$g(x) = x - f(x).$$

Očito je g klase C^1 i $\mathrm{D}g(0) = 0$. Neprekidnost funkcije $\mathrm{D}g$ u 0 povlači

$$(\exists r > 0)\,(\forall x \in A)\,\left(\|x\| \le r \implies \|\,\mathrm{D}g(x)\|_o \le \frac{1}{2}\right). \tag{16.3}$$

Jer je A otvoren, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\overline{K}(0,r) \subseteq A$ (u protivnom smanjimo r). Kako je $K(0,r)$ otvoren i konveksan, iz (16.3) i nejednakosti srednje vrijednosti (Teorem 13.5) slijedi da je g Lipschitzova na $K(0,r)$ s konstantom manjom ili jednakom $1/2$. Jer je g neprekidna na $\overline{K}(0,r) \subseteq A$ isto vrijedi i na $\overline{K}(0,r)$. Dakle,

$$(\forall x_1, x_2 \in \overline{K}(0,r))\,(\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|). \tag{16.4}$$

Kako je $g(0) = 0$, posebno je

$$g(\overline{K}(0,r)) \subseteq \overline{K}(0,r/2). \tag{16.5}$$

Za fiksirani $y \in K(0,r/2)$ definirajmo funkciju $g_y : \overline{K}(0,r) \to \mathbb{R}^n$ s

$$g_y(x) = y + x - f(x).$$

Primijetimo da je

$$g_y(\overline{K}(0,r)) \subseteq K(0,r). \tag{16.6}$$

Zaista, koristeći (16.5), za $x \in \overline{K}(0,r)$ imamo

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Nadalje, iz (16.4) zaključujemo da je g_y Lipschitzova na $\overline{K}(0,r)$ s konstantom manjom ili jednakom $1/2$. Kako je $y \in K(0,r/2)$ bio proizvoljan, prema Banachovom teoremu o fiksnoj točki (Teorem 10.3) slijedi da za svaki $y \in K(0,r/2)$ postoji jedinstvena fiksna točka $x \in \overline{K}(0,r)$ funkcije g_y, tj.

$$(\forall y \in K(0,r/2))\,(\exists! x \in \overline{K}(0,r))\,(x = g_y(x) = y + x - f(x)).$$

Iz (16.6) slijedi da niti jedna od tih fiksnih točka nije na sferi $S(0,r)$. Time smo dokazali da za svaki $y \in K(0,r/2)$ postoji jedinstveni $x \in K(0,r)$ takav da je $f(x) = y$. Dakle, ako stavimo

$$U = f^{-1}(K(0,r/2)) \cap K(0,r) \qquad \text{i} \qquad W = K(0,r/2),$$

onda su U i W otvorene okoline od 0, $f(U) = W$ i $f|_U : U \to W$ je bijekcija čiji inverz kratko označavamo s f^{-1}. Dakle, $f^{-1} : W \to U$.

3. korak. Neprekidnost inverza.

Kako je g kontrakcija na $K(0,r)$ s Lipschitzovom konstantom manjom ili jednakom $1/2$, za $x_1, x_2 \in K(0,r)$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|f(x_1) + g(x_1) - (f(x_2) - g(x_2))\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \|g(x_1) - g(x_2)\| \\
&\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|. \tag{16.7}$$

Za proizvoljne $y_1, y_2 \in W$ imamo $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in U \subseteq K(0,r)$, pa iz (16.7) dobivamo

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq 2\|y_1 - y_2\|.$$

Dakle, f^{-1} je Lipschitzova, pa onda i neprekidna na W.

4. korak. Diferencijabilnost inverza.

Prema pretpostavci Teorema je $\mathrm{D}f(0) = I \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Prema Lemi 16.5 skup $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je otvoren u $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Jer je f klase C^1 na A, funkcija $\mathrm{D}f : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ je neprekidna na A. Stoga postoji kompaktna okolina $K \subseteq A$ oko 0 takva da je $\mathrm{D}f(x)$ invertibilan operator za sve $x \in K$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $U \subset K$, jer u protivnom možemo odmah u (16.3) smanjiti r tako da vrijedi $K(0,r) \subset K$ te kao i prije definirati $U = f^{-1}(K(0,r/2)) \cap K(0,r)$. Zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto \mathrm{D}f(x)^{-1} = (\mathcal{L}^{-1} \circ \mathrm{D}f)(x)$ na kompaktnom skupu K imamo

$$M = \sup_{x \in K} \| \mathrm{D}f(x)^{-1} \|_o < \infty,$$

odnosno po definiciji operatorske norme

$$(\forall x \in K)\,(\forall h \in \mathbb{R}^n)\,(\| \mathrm{D}f(x)^{-1} h\| \le M\|h\|). \tag{16.8}$$

Za $y_1, y_2 \in W$, $y_1 \neq y_2$, izaberimo jedinstvene $x_1, x_2 \in U$ takve da je $f(x_1) = y_1$ i $f(x_2) = y_2$. Očito je $x_1 \neq x_2$ i

$$\begin{aligned}\frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - \mathrm{D}f(x_2)^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|} &= \frac{\|x_1 - x_2 - \mathrm{D}f(x_2)^{-1}(f(x_1) - f(x_2))\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|} \\ &= \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|f(x_1) - f(x_2)\|} \frac{\| \mathrm{D}f(x_2)^{-1}\left(\mathrm{D}f(x_2)(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\right)\|}{\|x_1 - x_2\|}.\end{aligned}$$

Korištenjem (16.7) i (16.8) dobivamo

$$\frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2) - \mathrm{D}f(x_2)^{-1}(y_1 - y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|} \le 2M \frac{\| \mathrm{D}f(x_2)(x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2))\|}{\|x_1 - x_2\|}. \tag{16.9}$$

Zbog diferencijabilnosti funkcije f u točki x_2, izraz na desnoj strani od (16.9) teži prema nuli kada $x_1 \to x_2$. Stoga i izraz na lijevoj strani od (16.9) teži 0 kada $y_1 \to y_2$. Dakle, f^{-1} je diferencijabilna u točki y_2 i vrijedi

$$\mathrm{D}f^{-1}(y_2) = \mathrm{D}f(x_2)^{-1}.$$

5. korak. Ako je f klase C^p, onda je i f^{-1} klase C^p.

Do sada znamo da je f^{-1} diferencijabilna na $K(0,r/2)$ i da vrijedi

$$\mathrm{D}f^{-1}(y) = \mathrm{D}f(f^{-1}(y))^{-1} = (\mathcal{L}^{-1} \circ \mathrm{D}f \circ f^{-1})(y) \qquad \forall y \in K(0,r/2). \tag{16.10}$$

Kako je prema Lemi 16.5 operator $\mathcal{L}^{-1}$ klase C^∞, $\mathrm{D}f$ neprekidna na čitavom A, a f^{-1} neprekidna na $K(0,r/2)$, iz jednakosti (16.10) zaključujemo da je $\mathrm{D}f^{-1}$ neprekidna na $K(0,r/2)$, odnosno f^{-1} je klase C^1.

Pretpostavimo li sada da je f klase C^p slijedi da je $\mathrm{D}f$ klase C^{p-1}. Opet iz (16.10) slijedi da je $\mathrm{D}f^{-1}$ klase C^1, pa je f^{-1} klase C^2. Induktivno zaključujemo da je f^{-1} klase C^p. □

Dokažimo i jednu korisnu posljedicu Teorema o inverznoj funkciji.

Korolar 16.6. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^n$ funkcija klase C^1 takva da je $J_f(x) \neq 0$ za sve $x \in A$. Tada je f* ***otvoreno preslikavanje****, tj. slika $f(V)$ svakog otvorenog skupa $V \subseteq A$ je otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Posebno, $f(A)$ je otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $V \subseteq A$ otvoren skup i $d \in f(V)$ proizvojna točka. Izaberimo točku $c \in A$ takvu da je $d = f(c)$. Jer je $J_f(c) \neq 0$, prema Teoremu 16.1 postoje otvorene okoline $U \subseteq V$ oko c i $W \subseteq \mathbb{R}^n$ oko d takve da je $f(U) = W$ i $f|_U : U \to W$ je C^1-difeomorfizam. Posebno, $W = f(U)$ je otvorena okolina točke d koja je sadržana u $f(V)$. Kako je točka $d \in f(V)$ bila proizvoljna, zaključujemo da je skup $f(V)$ otvoren. $\square$

Napomena 16.7. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1, gdje je I otvoreni interval u $\mathbb{R}$, čija je derivacija suvgdje različita od 0. Tada je f (globalno) invertibilna. Naime, kako je $f'(x) \neq 0$ za sve $x \in I$, tada zbog neprekidnosti prve derivacije mora biti (globalno) ili $f' > 0$ ili $f' < 0$. U svakom slučaju f je strogo monotona funkcija, stoga i invertibilna. Štoviše, prema Korolaru 16.6 i Teoremu 16.1, $J = f(I)$ je otvoreni interval i $f : I \to J$ je (globalni) C^1-difeomorfizam.

Slični zaključak općenito ne vrijedi za funkcije dviju ili više varijabli, tj. lokalna invertibilnost funkcije u svakoj točki njene domene ne mora povlačiti globalnu invertibilnost. Npr. promotrimo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiranu s

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Imamo

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix},$$

pa je

$$J_f(x, y) = \det \nabla f(x, y) = e^{2x} \neq 0$$

za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prema Teoremu o inverznoj funkciji f je lokalno invertibilna u svakoj točki iz $\mathbb{R}^2$. S druge strane, f nije globalno invertibilna jer je periodična po varijabli y (s periodom 2π).

Primjer 16.8. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ formulom

$$f(x, y, z) = (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y, z^3).$$

(a) Odredite sve točke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalni C^1-difeomorfizam. Za svaku takvu točku (x, y, z) izračunajte Jacobijevu determinantu lokalnog inverza u točki $f(x, y, z)$.

(b) Odredite sve točke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalno invertibilna (tj. injektivna na nekoj otvorenoj okolini od (x, y, z)).

Najprije primijetimo da je f klase C^∞.

(a) Označimo s S_0 skup svih točaka u $\mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalni C^1-difeomorfizam. Dakle, točka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pripada skupu S_0 ako i samo ako postoje otvorene okoline U oko (x, y, z) i W oko $f(x, y, z)$ takve da je $f|_U : U \to W$ bijekcija i $(f|_U)^{-1} : W \to U$ je funkcija klase C^1. Prema Napomeni 16.4 imamo

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : J_f(x, y, z) \neq 0\}. \tag{16.11}$$

Za $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ imamo

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\sin y & 0 \\ \cos x & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{pmatrix},$$

tako da je

$$J_f(x,y,z) = \det \nabla f(x,y,z) = 3z^2 \sin(y-x) \neq 0 \quad \iff \quad y-x \notin \mathbb{Z}\pi \ \ \& \ \ z \neq 0. \quad (16.12)$$

Sada direktno iz (16.11) i (16.12) dobivamo

$$S_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y-x \notin \mathbb{Z}\pi \ \& \ z \neq 0\}.$$

Nadalje, uz iste oznake kao i prije, za $(x,y,z) \in S_0$ iz jednakosti (16.9) dobivamo

$$\det[\nabla(f|_U)^{-1}(f(x,y,z))] = \det[\nabla f(x,y,z)^{-1}] = \frac{1}{\det[\nabla f(x,y,z)]} = \frac{1}{3\sin(y-x)z^2}.$$

(b) Označimo s S skup svih točaka iz $\mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalno invertibilna. Očito je $S_0 \subseteq S$. Kako nam Teorem o inverznoj funkciji ne daje odgovor o lokalnoj invertibilnosti od f u točkama iz skupa $\mathbb{R}^3 \setminus S_0$, u tim točkama je potrebno provesti pomniju analizu.

Neka su $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s

$$\varphi(x,y) := (\cos x + \cos y, \sin x + \sin y) \qquad \text{i} \qquad \psi(z) := z^3.$$

Kako je

$$f(x,y,z) = (\varphi(x,y), \psi(z)) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

te kako je ψ globalno invertibilna (tj. invertibilna na čitavoj svojoj domeni), zaključujemo da je f lokalno invertibilna u točki $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ako i samo ako je φ lokalno invertibilna u točki (x,y). Dakle,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi \text{ je lokalno invertibilna u točki } (x,y)\}. \quad (16.13)$$

Za $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\nabla\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & -\sin y \\ \cos x & \cos y \end{pmatrix},$$

tako da je

$$J_\varphi(x,y) = \det \nabla\varphi(x,y,z) = \sin(y-x).$$

Iz Teorema o inverznoj funkciji slijedi da je φ svakako lokalno invertibilna u svakoj točki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ čije koordinate zadovoljavaju $y - x \notin \mathbb{Z}\pi$. Tvrdimo da su to zapravo sve točke u kojima je φ lokalno invertibilna. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $x_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ i $r > 0$ takvi da je φ injektivna na krugu $U := K((x_0, x_0 + k\pi), r)$. Razlikujemo dva slučaja:

- k je neparan. U tom slučaju je $\varphi(x, x+k\pi) = (0,0)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. S druge strane, U sadrži beskonačno mnogo točaka oblika $(x, x+k\pi)$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je φ injektivna na U.
- k je paran. U tom slučaju su $(r/2 + x_0, x_0 + k\pi)$ i $(x_0, r/2 + x_0 + k\pi)$ različite točke iz U sa svojstvom

  $$\varphi(r/2 + x_0, x_0 + k\pi) = \varphi(x_0, r/2 + x_0 + k\pi),$$

  što je ponovo kontradikcija s pretpostavkom da je φ injektivna na U.

Stoga iz (16.13) zaključujemo da je

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x \notin \mathbb{Z}\pi\}.$$

Primjer 16.9. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Primijetimo da je f diferencijabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (štoviše, klase C^∞) te je

$$f'(x) = 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Koristeći Teorem o sendviču lako dobivamo da postoji i $f'(0)$, te $f'(0) = 1 \neq 0$.

S druge strane f nije lokalno invertibilna u 0. Naime, pretpostavimo da postoji interval I oko 0 na kojem je f injektivna. Onda je f strogo monotona na I (jer je f neprekidna) pa je f' konstantnog predznaka na I (jer je f derivabilna). Za $k \in \mathbb{N}$ neka je $x_k = \frac{1}{k\pi}$. Izaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{2k_0-1} \in I$. Imamo $f'(x_{2k_0-1}) = 3 > 0$. Također, $x_{2k_0} \in I$ i $f'(x_{2k_0}) = -1 < 0$; kontradikcija.

Primijetimo da ovaj primjer nije u kontradikciji s Teoremom o inverznoj funkciji, budući da f' ima prekid u 0 pa stoga $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

Zadatak 16.10. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ formulom

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Odredite sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima je f lokalni C^1-difeomorfizam i za svaku takvu točku izračunajte $\nabla f^{-1}(f(x, y))$. Je li f u tim točkama i lokalni C^∞-difeomorfizam?

(b) Odredite sve točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ u kojima je f lokalno invertibilna.

Zadatak 16.11. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ formulom

$$f(x, y, z) = (xy, yz, zx).$$

(a) Odredite sve točke $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalni C^1-difeomorfizam. Za svaku takvu točku (x, y, z) izračunajte Jacobijevu determinantu lokalnog inverza u točki $f(x, y, z)$.

(b) Odredite skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ koji se sastoji od svih točaka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ u kojima je f lokalno invertibilna.

(c) Je li restrikcija $f|_S$ invertibilna?

Zadatak 16.12. Može li se sustav

$$\begin{aligned} u &= x + xyz, \\ v &= y + zy, \\ w &= z + 2x + 3z^2 \end{aligned}$$

jednoznačno riješiti po (x, y, z) u nekoj okolini točke $(u, v, w) = (0, 0, 0)$?

17 Implicitno definirane funkcije

Neka su x i y ovisni kroz jednadžbu

$$F(x, y) = 0.$$

Ukoliko znamo jednadžbu riješiti po y, tada ćemo zapravo naći funkciju f sa svojstvom

$$y = f(x).$$

Onda kažemo da je gornjom jednadžbom funkcija f dana implicitno. Najčešće nije moguće jednadžbu riješiti, tj. naći eksplicitni oblik ovisnosti y o x. Ipak i tada nas zanima definira li jendndžba $F(x, y) = 0$ funkcijsku ovisnost y o x i uz koje uvjete, te možemo li štogod reći o diferencijabilnosti funkcije f.

Primjer 17.1. Neka je dana funkcija $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Skup točaka ravnine (krivulja) koje zadovoljavaju jednadžbu čine jediničnu kružnicu. Funkcija f je "rješenje" jednadžbe ako vrijedi $F(x, f(x)) = 0$ za sve x. Za svaki x mora biti $f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, tako da rješenje svakako nije jedinstveno; štoviše postoji neprebrebrojivo mnogo rješenja, od kojih su samo dva neprekidna. Ipak, znamo li (x^0, y^0) takvu da je $F(x^0, y^0) = 0$ možemo se pitati postoji li diferencijabilna funkcija f takva da je $F(x, f(x)) = 0$, $y^0 = f(x^0)$ koja još i jedinstvena na nekoj okolini x_0. Za sve $x \neq \pm 1$ takva funkcija postoji i dana je jednim od gornjih korijena (y^0 određuje koji je predznak korijena). Za točke $x = \pm 1$ ne postoji rješenje koje je definirano na okolinama ovih točaka. Npr. f dana gornjim formulama nije diferencijabilna u ± 1. Te izdvojene točke točno su one u kojima je $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$.

Problem kojim se bavimo još je malo općenitiji. Za $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ promatramo jednadžbu

$$F(x, y) = 0$$

ili po koordinatama

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0. \end{aligned}$$

Cilj je riješiti ovaj sustav za nepoznanice $y_1, \ldots, y_m$, tj. izraziti ih pomoću $x_1, \ldots, x_n$. Označimo

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Teorem 17.2 (**Teorem o implicitnoj funkciji**). *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ otvoren, $F : A \to \mathbb{R}^m$ klase C^p, $p \geq 1$. Pretpostavimo da $(x^0, y^0) \in A$ zadovoljava $F(x^0, y^0) = 0$ i neka je $\frac{\partial F}{\partial y}(x^0, y^0)$ regularna matrica. Tada postoje otvorena okolina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ od x^0, otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^m$ od y^0 i jedinstvena funkcija $f : U \to V$ klase C^p takva da vrijedi*

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad x \in U.$$

Dokaz. Ideja dokaza je primijeniti Teorem o inverznoj funkciji. Stoga definiramo funkciju $G : A \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ formulom

$$G(x,y) = (x, F(x,y)).$$

Jer je F klase C^p slijedi i da je G klase C^p. Jacobijeva matrica funkcije G dana je s

$$\nabla G = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Zbog strukture ove matrice vrijedi

$$J_G(x,y) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Stoga je $J_G(x^0, y^0) \neq 0$ pa možemo primijeniti Teorem o inverznoj funkciji. Dakle, postoji otvorena okolina W točke $(x^0, 0)$, otvorena okolina S točke (x^0, y^0) (vrijedi $W = G(S)$), te inverzna funkcija $G^{-1} : W \to S$ klase C^p. Jer je S otvoren postoje otvorena okolina U od x^0 i otvorena okolina V od y^0 takve da je $U \times V \subset S$. Jer je G^{-1} neprekidna skup $Y = G(U \times V) \subseteq W$ je otvoren. Stoga je $G : U \times V \to Y$ C^p-difeomorfizam. Vrijedi

$$(x,y) = G^{-1}(G(x,y)) = G^{-1}(x, F(x,y)), \qquad (x,y) \in U \times V.$$

Za $(x,y) \in U \times V$ za koje je $F(x,y) = 0$ slijedi da su ovisni kroz

$$(x,y) = G^{-1}(x, 0).$$

Stoga definiramo $f : U \to V$ sa

$$f(x) = \pi_2 \circ G^{-1}(x, 0),$$

gdje je $\pi_1(x,y) = x, \pi_2(x,y) = y$. Jer su π_2 i G^{-1} klase C^p i funkcija f je klase C^p. Sada još koristimo drugu kompoziciju

$$\begin{aligned} (x,0) &= G(G^{-1}(x,0)) = G(\pi_1 \circ G^{-1}(x,0), \pi_2 \circ G^{-1}(x,0)) \\ &= (\pi_1 \circ G^{-1}(x,0), F(\pi_1 \circ G^{-1}(x,0), \pi_2 \circ G^{-1}(x,0))), \end{aligned}$$

da zaključimo

$$x = \pi_1 \circ G^{-1}(x,0), \qquad 0 = F(\pi_1 \circ G^{-1}(x,0), \pi_2 \circ G^{-1}(x,0)).$$

Iz definicije funkcije f slijedi

$$0 = F(x, f(x)), \qquad x \in U.$$

Ostaje dokazati jedinstvenost takve funkcije f. Pretpostavimo da je $g : U \to V$ neka druga funkcija klase C^p, gdje su U i V kao iz prvog dijela dokaza, takva da vrijedi $F(x, g(x)) = 0$ za sve $x \in U$. Onda je

$$G(x, f(x)) = (x, 0) = G(x, g(x)) \quad \forall x \in U. \tag{17.1}$$

Jer je $(x, f(x)), (x, g(x)) \in U \times V$ za sve $x \in U$, a G je injektivna na $U \times V$, jednakost (17.1) povlači $f(x) = g(x)$ za sve $x \in U$, odnosno $f = g$. $\square$

Napomena 17.3. Dovoljni uvjeti iz teorema o implicitnoj funkciji nisu i nužni. Npr. funkcija $F(x,y) = x^3 - y^3$ jedinstveno definira funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(x) = x$ iako pretpostavka teorema $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$ nije zadovoljena.

Za funkciju f zadanu implicitno jednadžbom $F(x, f(x)) = 0$ možemo odrediti diferencijal bez da eksplicitno izrazimo funkciju f. Naime, temeljem derivacije kompozicije funkcija vrijedi

$$0 = \nabla F(x, f(x)) \begin{pmatrix} I \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \nabla f(x)$$

Slijedi

$$\nabla f(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Time smo dokazali naredni korolar.

Korolar 17.4. *Za implicitno definiranu funkciju iz Teoremu 17.2 vrijedi*

$$\nabla f(x) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)).$$

Primjer 17.5. Vratimo se na Primjer 17.1. Za funkciju $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ računamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Stoga za $y \neq 0$ možemo primijeniti Teorem o implicitno definiranoj funkciji i zaključiti, sukladno intuiciji, jednadžba $F(x,y) = 0$ definira funkcijsku ovisnost y o x (i to glatku). Za točke za koje je $y = 0$ (onda je $x = \pm 1$) teorem ne možemo primijeniti. Štoviše, vidi se da u okolini tih točaka glatka funkcijska ovisnost ne postoji jer svaka okolina točke $(1,0)$ sadrži točke s kružnice s pozitivnom i negativnom y koordinatom. S druge strane u tim točkama će jednadžba $F(x,y) = 0$ definirati glatku funkcijsku ovisnost x o y.

Primjer 17.6. Usporedite funkcijsku ovisnost x o y za funkcije $F(x,y) = y - x^2 = 0$ i $F(x,y) = y - x^3 = 0$ u okolini točke $(0,0)$.

Lako se vidi da u oba slučaja

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0,$$

pa nam Teorem o implicitno definiranoj funkciji ne daje nikakav odgovor. U slučaju kvadratne funkcije funkcijske ovisnosti nema, dok u slučaju kubne funkcije imamo $x = \sqrt[3]{y}$ (što nije difernecijabilna funkcija u $y = 0$).

Primjer 17.7. Jedinična sfera u $\mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

definira funkcijsku ovisnost treće varijable o prethodne dvije osim u slučaju kružnice u ravnini $z = 0$. Naime, za $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ vrijedi da je $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z$, pa primjenom teorema o implicitnoj funkciji slijedi da za sve točke za koje je $z \neq 0$ postoji funkcijska ovisnost z o x i y na nekoj okolini točke. Kako i u slučaju kružnice za $z = 0$ takve funkcijske ovisnosti nema. Ipak i tu je definirana funkcijska ovisnost jedne varijable o preostale dvije za dobar odabir koordinata.

Primjer 17.8. Za koje točke jednadžba

$$y^2 + y + 3x + 1 = 0$$

određuje funkcijsku ovisnost y o x?

Direktnim računom vidimo da je gornja jednadžba ekvivalentna jednadžbi

$$x = -\frac{1}{3}(y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Stoga se radi o paraboli s osi paralelnoj osi x i tjemenom u točki $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. U okolici tjemena parabola neće zadavati funkcijsku ovisnost y o x. Primijetite da jednadžba očito zadaje funkcijsku ovisnost x o y.

Primjenom Teorema o implicitno definiranoj funkciji imamo za $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y + 1.$$

Za $y = -1/2$ nismo u uvjetima Teorema o implicitno definiranoj funkciji, što je prema gornjem i očekivano. Primijetite da je $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3$, pa iz Teorema o implicitno definiranoj funkciji u okolini svake točke imamo funkcijsku ovisnost x o y (što također znamo odozgo).

Primjer 17.9. Razmotrite rješivost sustava jednadžbi

$$\begin{aligned}
&3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0, \\
&4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0, \\
&x + z + w + u^2 + 2 = 0,
\end{aligned}$$

po u, v, w u okolini točke $x = y = z = u = v = 0, w = -2$.

Definiramo funkciju

$$F(x, y, z, u, v, w) = \begin{pmatrix} 3x + 2y + z^2 + u + v^2, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2, \\ x + z + w + u^2 + 2, \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$\mathbf{M} = \frac{\partial F}{\partial(u, v, w)} = \begin{pmatrix} 1 & 2v & 0 \\ 2u & 1 & 1 \\ 2u & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinanta od $\mathbf{M}$ je $\det \mathbf{M} = 1$, stoga prema Teoremu o implicitno definirajnoj funkcji imamo traženu funkcijsku ovisnost (i to u okolini svih točaka koje zadovoljavaju jednadžbe). Označimo tu funkciju s f $((u, v, w) = f(x, y, z))$. Matrica $\mathbf{M}$ je invertibilna i inverz joj je dan s

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2v & 2v \\ 0 & 1 & -1 \\ -2u & 4uv & 1 - 4uv \end{pmatrix}.$$

Također

$$\frac{\partial F}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sada iz Korolara 17.4 slijedi

$$\nabla f(x,y,z) = -\frac{\partial F}{\partial(u,v,w)}(x,y,z,f(x,y,z))^{-1}\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(x,y,z,f(x,y,z))$$
$$= -\begin{pmatrix} 1 & -2f_2(x,y,z) & 2f_2(x,y,z) \\ 0 & 1 & -1 \\ -2f_1(x,y,z) & 4f_1(x,y,z)f_2(x,y,z) & 1-4f_1(x,y,z)f_2(x,y,z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 17.10. Diskutirajte rješivost sustava

$$y + x + uv = 0,$$
$$uxy + v = 0$$

po u, v u okolini točke $x = y = u = v = 0$.

Vrijedi

$$\frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ xy & 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$\det \frac{\partial F}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = v - uxy,$$

pa nisu ispunjene pretpostavke Teorema o implicitno definiranoj funkciji u okolini točke $(0,0,0,0)$.

Direktna analiza kaže da je $v = -xyu$, pa nakon uvrštavanja u prvu jednadžbu dobivamo

$$y + x - xyu^2 = 0.$$

Sada je

$$u^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

što očito nije dobro definirano za $(x,y) = (0,0)$.

Primjer 17.11. Promotrimo presjek dviju jediničnih sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Taj presjek je krivulja (kružnica) u prostoru. Definiramo funkciju

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1, (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1\right),$$

pa slijedi da je $m = 2$ i $n = 1$, te

$$\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 2z \end{pmatrix},$$

što je singularna matrica, te ne možemo izraziti y, z pomoću x (jedan je parametar, radi se o krivulji). To je i očekivano jer se navedena kružnica nalazi u ravnini $x = \frac{1}{2}$. Ipak

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2(x-1) & 2y \end{pmatrix},$$

te je

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x,y)}(x,y,z) = 4y.$$

Stoga za točke za koje je $y \neq 0$ slijedi ovisnost x, z o y.

Primjer 17.12. Dokažimo da postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ klase C^∞ takva da vrijedi
$$xf(x) + \ln f(x) - \ln x = 0 \tag{17.2}$$
za sve $x \in \mathbb{R}_+$ te odredimo lokalne ekstreme funkcije f.

Zaista, definirajmo funkciju $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ formulom
$$F(x, y) = xy + \ln y - \ln x.$$
Očito je F klase C^∞. Za fiskirano $x_0 \in \mathbb{R}_+$ definirajmo funkciju $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ formulom
$$\varphi_{x_0}(y) = F(x_0, y) = x_0 y + \ln y - \ln x_0.$$
Imamo
$$\varphi'_{x_0}(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y) = x_0 + 1/y > 0$$
za sve $y \in \mathbb{R}_+$. Posebno, φ_{x_0} je strogo rastuća, a kako je
$$\lim_{y \to 0+} \varphi_{x_0}(y) = -\infty \quad \text{te} \quad \lim_{y \to +\infty} \varphi_{x_0}(y) = +\infty,$$
zaključujemo da postoji jedinstven $y_0 \in \mathbb{R}_+$ takav da je $F(x_0, y_0) = \varphi_{x_0}(y_0) = 0$. Drugim riječima, postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takva da vrijedi $F(x, f(x)) = 0$, odnosno
$$xf(x) + \ln f(x) - \ln x = 0 \tag{17.3}$$
za sve $x \in \mathbb{R}_+$. Dokažimo da je f klase C^∞. Za to ćemo iskoristiti Teorem o implicitnoj funkciji. Fiksirajmo proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ takvu da je $F(x_0, y_0) = 0$. Kako je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, Tereom o implicitnoj funkciji nam garantira egzistenciju otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}_+$ oko x_0, otvorenog intervala $J \subseteq \mathbb{R}_+$ oko y_0 te jedinstvene funkcije $g : I \to J$ klase C^∞ takve da vrijedi $F(x, g(x)) = 0$ za sve $x \in I$. Kako za $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ imamo $F(x, y) = 0$ ako i samo ako je $y = f(x)$, slijedi da je $f|_I = g$. Kako je svojstvo "biti klase C^∞" lokalno svojstvo, zaključujemo da je f klase C^∞ na $\mathbb{R}_+$.

Ostaje odrediti lokalne ekstreme od f. Deriviranjem jednakosti (17.3) dobivamo
$$f(x) + xf'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} = 0 \tag{17.4}$$
za sve $x \in \mathbb{R}_+$. Dakle, $x_0 \in \mathbb{R}_+$ je stacionarna točka od f ako i samo ako vrijedi $f(x_0) = 1/x_0$, što zajedno s (17.3) daje $x_0 = \sqrt{e}$. Deriviranjem jednakosti (17.4) dobivamo
$$2f'(x) + xf''(x) + \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2} + \frac{1}{x^2} = 0,$$
pa uvrštavanjen $x = x_0 = \sqrt{e}$ dobivamo
$$f''(x_0) = -\frac{1}{2e\sqrt{e}} < 0.$$
Dakle, f u x_0 ima lokalni maksimum.

Zadatak 17.13. Neka je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana sa $F(x, y) = x + \sin y$. Dokažite da u okolini točke $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$ postoji jedinstvena funkcija f klase C^1 sa svojstvom $F(x, f(x)) = 0$ i $f(0) = 0$. Možete li funkciju f odrediti eksplicitno?

Zadatak 17.14. Dokažite da postoji jedinstvena funkcija $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klase C^1 za koju vrijedi

$$x + y + g(x, y) = e^{-(x+y+g(x,y))}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Izračunajte $\mathrm{D}g(x, y)$. Je li g i veće glatkoće od C^1? Možete li g odrediti eksplicitno?

Zadatak 17.15. Dokažite da postoje okoline U točke $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ i V točke $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ te funkcija $f = (f_1, f_2) : U \to V$ klase C^1 t.d. vrijedi

$$\left(\frac{v f_1(u, v)}{u} + \ln f_2(u, v)\right)^2 + \left(f_1(u, v) + f_2(u, v)^2 + u^3 + v^4 - 3\right)^2 = 0.$$

Izračunajte $\mathrm{D}f(1, 0)$.

Zadatak 17.16. Dokažite da postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$f(x, y)^3 = xy \cos(xyf(x, y)) - x^2y^2 f(x, y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}.$$

Je li f klase C^1?

Zadatak 17.17. Dokažite da postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klase C^1 takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x^2 f(x)^3 + 3x^3 f(x)^2 + (5x^4 + 1)f(x) = \cos(f(x)).$$

Na kraju ovog odjeljka navedimo jednu poslijedicu Teorema o inverznoj funkciji.

Teorem 17.18. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren, $g : A \to \mathbb{R}$ klase C^p, $p \geq 1$. Neka je $x_0 \in A$ i $g(x_0) = 0$, $\mathrm{D}g(x_0) \neq 0$. Tada postoje otvoren skup $U \subseteq \mathbb{R}^n$, otvorena okolina $V \subseteq A$ od x_0 i C^p-difeomorfizam $h : U \to V$ takav da je*

$$g(h(x_1, \dots, x_n)) = x_n \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Ovaj teorem zapravo kaže da uz navedene pretpostavke možemo lokalno uvesti nove koordinate u domenu A tako da je funkcija g konstanta na ravninama okomitim na $\boldsymbol{e}_n$. Teorem 17.18 je od posebne važnosti kod ploha u diferencijalnoj geometriji.

Dokaz. Prema pretpostavci teorema je $\mathrm{D}g(x_0) \neq 0$, pa postoji $i \in \{1, \dots, n\}$ takav da je $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \neq 0$. Ako je $i \neq n$ uvedemo zamjenu varijabli

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_i).$$

ψ je permutacija, pa je linearna, pa je onda ψ i klase C^∞. Stoga je kompozicija $f = g \circ \psi$ klase C^p jer je g klase C^p. Označimo $\bar{x}_0 = \psi(x_0)$. Jer je $(\psi \circ \psi)(x) = x$, slijedi da je $\psi(\bar{x}_0) = x_0$, te da je ψ sama sebi inverz. Derivacijom kompozicije sada dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) = \mathrm{D}g(\psi(\bar{x}_0))\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(\bar{x}_0) = \mathrm{D}g(x_0)\boldsymbol{e}_i \neq 0.$$

Označimo s $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ortogonalni projektor na prvih $n - 1$ koordinata. Sada kao u dokazu Teorema o implicitno definiranoj funkciji definiramo funkciju $G : A \to \mathbb{R}^n$ s

$$G(x', y) = (x', f(x', y)).$$

Sada je lako vidjeti da je $\det \nabla G(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \neq 0$, pa možemo primijeniti Teorem o inverznom preslikavanju na funkciju G koja je klase C^p. Stoga postoje W otvorena okolina točke $\bar{x}_0$ i U otvorena okolina točke $(\bar{x}_0', f(\bar{x}_0)) = (\bar{x}_0', g(x_0)) = (\bar{x}_0', 0)$ takva da je $G : W \to U$ C^p-difeomorfizam. Stoga je

$$G \circ G^{-1}(x) = x,$$

pa je uzimajući samo jednadžbu na zadnjoj koordinati

$$f \circ G^{-1}(x) = x_n.$$

Iz definicije od f slijedi

$$g \circ \psi \circ G^{-1}(x) = x_n.$$

Sada definiramo

$$V = \psi(W), \qquad h(x) = \psi \circ G^{-1}(x), \qquad h : U \to V.$$

Kako su ψ i G^{-1} invertibilne s inverzom klase barem C^p slijedi da je funkcija h C^p-difeomorfizam. Nadalje, skup V je otvoren i vrijedi

$$g(h(x)) = g(\psi \circ G^{-1}(x)) = g \circ \psi \circ G^{-1}(x) = f \circ G^{-1}(x) = x_n.$$

$\square$

18 Krivulje i plohe u $\mathbb{R}^n$

18.1 Krivulje u $\mathbb{R}^n$

Definicija 18.1. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ interval.* ***Parametrizirana krivulja*** *u $\mathbb{R}^n$ je svako preslikavanje $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ klase C^1.*

Napomena 18.2. (i) Interval I u gornjoj definiciji može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren. Nadalje, I može biti ograničen ili neograničen.

(ii) Ako I nije otvoren interval, tada za preslikavanje $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je klase C^1 ako se ono može proširiti do preslikavanja klase C^1 na nekom otvorenom intervalu koji sadrži I.

Definicija 18.3. ***Trag*** *parametrizirane krivulje $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definiramo kao skup $\gamma^* := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ (tj. kao sliku od γ) i često kažemo da je γ^* parametriziran s γ, odnosno da je γ njegova parametrizacija.*

Napomena 18.4. Primijetimo da je γ^* povezan poskup od $\mathbb{R}^n$ kao neprekidna slika intervala.

Definicija 18.5. *Za parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***regularna*** *ako vrijedi $\gamma'(t) \neq 0$ za sve $t \in I$. U tom slučaju za $t_0 \in I$ vektor $\gamma'(t_0)$ nazivamo* ***vektor brzine*** *ili* ***tangencijalni vektor*** *od γ u trenutku t_0, a njegovu normu $\|\gamma'(t_0)\|$ zovemo* ***brzina*** *od γ u trenutku t_0. Pravac*

$$\{\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) : \ t \in \mathbb{R}\}$$

se zove ***tangenta*** *na γ kroz točku $\gamma(t_0)$.*

Primjer 18.6. Svaki pravac u $\mathbb{R}^n$ je možemo dobiti kao trag regularne parametrizirane krivulje oblika

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma(t) = p_0 + tv,$$

za neke $p_0 \in \mathbb{R}^n$ i $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Primjer 18.7. Ako je $f : I \to \mathbb{R}^{n-1}$ funkcija klase C^1, tada njen graf Γ_f možemo parametrizirati s

$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$

Kako je $\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ za sve $t \in I$, γ je regularna parametrizacija od Γ_f .

Primjer 18.8. Kružnica u $\mathbb{R}^2$ s centrom u (p, q) radijusa r možemo dobiti kao trag regularne parametrizirane krivulje

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (p + r \cos t, q + r \sin t).$$

Primjer 18.9. Elipsa u $\mathbb{R}^2$ s centrom u (p, q) s poluosima $a, b > 0$ je trag regularne parametrizirane krivulje

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (p + a \cos t, q + b \sin t).$$

Prethodna dva primjera nam pokazuju da regularne parametrizirane krivulje općenito ne moraju biti injektivne. Naime, imamo $\gamma(t + 2\pi) = \gamma(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$. Injektivnost u tim primjerima možemo postići ako restringiramo γ na bilo koji poluotvoreni interval duljine 2π.

Primjer 18.10. Hiperbolu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ne možemo dobiti kao trag neke parametrizirane krivulje, budući da je ona nepovezan podskup od $\mathbb{R}^2$. S druge strane, desnu granu hiperbole možemo parametrizirati s

$$\gamma_d(t) = (a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t),$$

a lijevu s

$$\gamma_l(t) = (-a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t).$$

Primjer 18.11. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $F : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Pretpostavimo da je skup

$$C = \{(x, y) \in U : \ F(x, y) = 0\}$$

neprazan te da je grad $F(x, y) \neq 0$ za sve $(x, y) \in C$. Tada koristeći Teorem o implicitnoj funkciji vidimo da je na okolini svake svoje točke C (lokalno) trag neke regularne parametrizirane krivulje.

Primjer 18.12. Cilindričnu spiralu u $\mathbb{R}^3$ možemo definirati kao trag regularne parametrizirane krivulje

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$$

gdje su $r > 0$ i $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Primijetimo da je ona sadržana u cilindru $x^2 + y^2 = r^2$.

Važnost pojma regularnosti parametrizirane krivulje vidi se iz narednog primjera.

Primjer 18.13. Iako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, nije diferencijabilna u 0, njen graf možemo parametrizirati s $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, gdje je

$$\gamma_1(t) = t^3, \qquad \gamma_2(t) = \begin{cases} t^3 & t \geq 0, \\ -t^3 & t < 0. \end{cases}$$

Primijetimo da je γ zaista funkcija klase C^1 (tj. parametrizirana krvulja) te da je njen trag Γ_f. S druge strane, γ nije regularna, jer je $\gamma'(0) = 0$.

Zadatak 18.14. Ako je $f(x) = |x|$ kao u prethodnom primjeru, dokažite da ne postoji regularna parametrizacija od Γ_f.

Definicija 18.15. *Neka je $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ parametrizirana krivulja.* ***Parametarska transformacija*** *od γ je C^1-difeomorfizam $\varphi : J \to I$, gdje je $J \subset \mathbb{R}$ neki drugi interval. Za parametriziranu krivulju $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***reparametrizacija*** *od γ.*

Napomena 18.16. (a) Reparametrizacija ima isti trag kao i početna parametrizirana krivulja.

(b) Reparametrizacija regularne parametrizirane krivulje je također regularna.

(c) Ako je $\tilde{\gamma}$ reparametrizacija od γ (preko φ) onda je i γ reparametrizacija od $\tilde{\gamma}$ (preko φ^{-1}). Nadalje, ako je $\tilde{\gamma}$ reparametrizacija od γ (preko φ) te $\tilde{\tilde{\gamma}}$ reparametrizacija od $\tilde{\gamma}$ (preko ψ), onda je i $\tilde{\tilde{\gamma}}$ reparametrizacija od γ (preko $\psi \circ \varphi$). Dakle, svojstvo "biti reparametrizacija" definira relaciju ekvivalencije na skupu svih parametriziranih krivulja.

Definicija 18.17. - *Za parametarsku transformaciju $\varphi : J \to I$ kažemo da* ***čuva orijentaciju*** *ako je $\varphi'(t) > 0$ za sve $t \in J$. Ako je $\varphi'(t) < 0$ za sve $t \in J$ kažemo da φ* ***mijenja orijentaciju.***

- *Za regularnu parametriziranu krivulju γ i njenu reparametrizaciju $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ kažemo da su* ***iste orijentacije*** *ako φ čuva orijentaciju. U suprotnom kažemo da su γ i $\tilde{\gamma}$* ***suprotne orijentacije***.

Budući da smo pretpostavili da je svaka parametarska transformacija φ klase C^1, jasno je da φ ili čuva ili mijenja orijentaciju.

Definicija 18.18. ***Krivulja*** *je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja, pri čemu dvije parametrizirane krivulje smatramo ekvivalentnim ako se jedna iz druge može dobiti reparametrizacijom.* ***Trag krivulje*** *definiramo kao trag bilo koje njene regularne parametrizacije.*

Prema Napomeni 18.16 definicija traga krivulje je dobra.

Primjer 18.19. Regularne parametrizirane krivulje iz Primjera 18.6, 18.8, 18.9, 18.10 i 18.12 definiraju različite krivulje, budući da one sve imaju različite tragove.

Primjer 18.20. *Regularne parametrizirane krivulje*

$$\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, t)$$

i

$$\gamma_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (\ln t, \ln t)$$

su ekvivalentne, budući da je $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$ gdje je $\varphi(t) = e^t$. Dakle, γ_1 i γ_2 reprezentiraju istu krivulju.

Napomena 18.21. Krivulja općenito nije jednoznačno određena svojim tragom. Naime, sljedeće dvije regularne parametrizirane krivulje

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$$

i

$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

imaju isti trag (kružnica S^1), no one nisu ekvivalentne (u smislu Definicije 18.18). Naime γ_1 restringirana na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ je injektivna dok γ_2 nije.

S druge strane vrijedi sljedeće:

Zadatak 18.22. *Pretpostavimo da su γ_1 i γ_2 dvije injektivne regularne parametrizirane krivulje definirane na segmentu koje imaju isti trag. Dokažite da su γ_1 i γ_2 ekvivalentne.*

Primijetimo da krivulje nemaju intrinzičnu orijentaciju, budući da se ona može promijeniti parametarskim transformacijama. Zbog toga uvodimo sljedeći pojam:

Definicija 18.23. ***Orijentirana krivulja*** *je klasa ekvivalencije regularnih parametriziranih krivulja, pri čemu dvije parametrizirane krivulje smatramo ekvivalentnim ako se jedna iz druge može dobiti reparametrizacijom koja čuva orijentaciju.*

Očito svaka orijentirana krivulja određuje točno jednu krivulju. S druge strane, svaka krivulja ima točno dvije orijentacije, tj. postoje točno dvije orijentirane krivulje koje određuju danu krivulju.

Definicija 18.24. *Za regularnu parametriziranu krivulju $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***jedinične brzine*** *ili da je* ***parametrizirana duljinom luka*** *ako je $\|\gamma'(t)\| = 1$ za sve $t \in I$.*

Primjer 18.25. (a) U Primjeru 18.6, $\tilde{\gamma}(t) = p_0 + t\|v\|^{-1}v$ je reparametrizacija od γ duljinom luka.

(b) U Primjeru 18.8, $\tilde{\gamma}(t) = (p + r\cos(t/r), q + r\sin(t/r))$ je reparametrizacija od γ duljinom luka.

(c) U Primjeru 18.12, stavimo $\alpha := (r^2 + h^2)^{-1/2}$. Tada je $\tilde{\gamma}(t) = (r\cos\alpha t, r\sin\alpha t, \alpha h t)$ reparametrizacija od γ duljinom luka.

Sljedeći rezultat je od posebne važnosti:

Teorem 18.26. *Svaku regularnu parametriziranu krivulju možemo reparametrizirati duljinom luka.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ regularna parametrizirana krivulja i fiksirajmo $t_0 \in I$. Definiramo funkciju $\psi : I \to \mathbb{R}$ s

$$\psi(s) := \int_{t_0}^{s} \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

(Funkcija ψ se obično zove **funkcija duljine luka** od γ od točke $\gamma(t_0)$). Kako je $\psi'(s) = \|\gamma'(s)\| > 0$ za sve $s \in I$, preslikavanje ψ je strogo rastuće pa stoga injektivno. Dakle,

$$\psi : I \to J := \psi(I)$$

je parametarska transformacija koja čuva orijentaciju. Označimo njen glatki inverz s $\varphi := \psi^{-1} : J \to I$ (Teorem o inverznoj funkciji). Tada za prvu derivaciju od φ vrijedi

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\psi'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\gamma'(\varphi(t))\|}.$$

Koristeći lančano pravilo, za sve $t \in J$ imamo

$$\|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| = \|\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)\| = \varphi'(t)\|\gamma'(\varphi(t))\| = \frac{\|\gamma'(\varphi(t))\|}{\|\gamma'(\varphi(t))\|} = 1.$$

Dakle, reparametrizacija $\gamma \circ \varphi$ je parametrizirana duljinom luka. $\square$

Nadalje, sljedeći rezultat nam govori da je reparametrizacija duljinom luka jedinstvena do na kompoziciju s euklidskim gibanjem od $\mathbb{R}$, tj. preslikavanjem oblika $t \mapsto \pm t + t_0$:

Propozicija 18.27. *Pretpostavimo da su $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ i $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ dvije parametrizacije duljinom luka iste krivulje te neka je $\varphi : I_1 \to I_2$ parametarska transformacija takva da je $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Tada je*

$$\varphi(t) = \pm t + t_0 \tag{18.1}$$

za neko $t_0 \in \mathbb{R}$, pri čemu je predznak u (18.1) pozitivan ako su γ_1 i γ_2 iste orijentacije, odnosno negativan ako su γ_1 i γ_2 suprotne orijentacije.

Dokaz. Imamo

$$1 = \|\gamma_1'(t)\| = \|\gamma_2'(\varphi(t))\varphi'(t)\| = \|\gamma_2'(\varphi(t))\||\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|.$$

Dakle, ili je $\varphi'(t) = -1$ za sve $t \in I$ ili je $\varphi'(t) = 1$ za sve $t \in I$, tako da je $\varphi(t) = \pm t + t_0$ za neko $t_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

U nastavku želimo definirati duljinu parametrizirane krivulje $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Neka je P subdivizija segmenta $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b.$$

Definirajmo

$$|P| = \max_{j=1,\ldots,k} (t_j - t_{j-1}).$$

Subdivizija P određuje po dijelovima afinu parametriziranu krivulju određenu uzastopnim točkama $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$. Duljinu te po dijelovima linearne parametrizirane krivulje lako izrazimo pomoću

$$\ell(\gamma, P) := \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|.$$

To nas motivira za narednu definiciju.

Definicija 18.28. ***Duljina parametrizirane krivulje*** *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, u oznaci $\ell(\gamma)$, dana je s*

$$\ell(\gamma) := \lim_{|P| \to 0} \ell(\gamma, P), \tag{18.2}$$

ako gornji limes postoji, u smislu da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|P| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\ell(\gamma) - \ell(\gamma, P)| < \varepsilon.$$

Pokazuje se da ovaj limes uvijek postoji da se lako računa (tu je bitna pretpostavka neprekidnosti derivacije γ'):

Teorem 18.29. *Za svaku parametriziranu krivulju $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ postoji $\ell(\gamma)$ te vrijedi*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt. \tag{18.3}$$

Dokaz Teorema 18.29 ćemo dati na kolegiju "Integrali funkcija više varijabli".

Napomena 18.30. O putovima možemo razmišljati kao o gibanju čestice, pri čemu je $\gamma(t)$ položaj čestice u trenutku t. Onda je $\gamma'(t)$ vektor brzine čestice, a $\|\gamma'(t)\|$ iznos brzine kojom se čestica giba. Onda gornja formula kaže da je put koji prevali čestica jednak integralu iznosa brzine po vremenu. U slučaju $n = 1$ to je jednostavna poslijedica Newton-Leibnizove formule.

Korolar 18.31. *Duljina parametrizirane krivulje $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je invarijantna s obzirom na reparametrizaciju.*

Dokaz. Ako je $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ reparametrizacija od γ, gdje je $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$, tada koristeći supstituciju u određenom integralu dobivamo

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{a'}^{b'} \|(\gamma \circ \varphi)'(t)\| \, dt = \int_{a'}^{b'} \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| \, dt = \int_a^b \|\gamma'(s)\| \, ds = \ell(\gamma).$$

□

Korolar 18.31 nam opravdava da možemo govoriti o duljini krivulja, a ne samo o duljini parametriziranih krivulja. Naime, duljina ne ovisi o izboru konkretne parametrizacije.

Sada se također možemo uvjeriti zašto su parametrizacije duljinom luka posebno korisne. Naime, ako je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ krivulja parametrizirana duljinom luka, onda je

$$\ell(\gamma|_{[a,s]}) = \int_a^s 1\, dt = s - a$$

za svaki $s \in [a,b]$. Dakle, krivulja parametrizirana duljinom luka ima jednaku duljinu kao i njen parametarski interval.

18.2 Plohe u $\mathbb{R}^n$

Definicija 18.32. *Neka su $n, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $k < n$.* ***Parametrizirana k-ploha u $\mathbb{R}^n$*** *je preslikavanje $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ klase C^1, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren skup, takvo da je diferencijal $\mathrm{D}\varphi(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ injektivan, tj. ima maksimalan rang k, za svaku točku $x \in U$. Sliku $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ zovemo* ***tragom*** *parametrizirane plohe.*

Napomena 18.33.

- Paremetrizirane plohe su očito poopćenje regularnih parametriziranih krivulja; njih dobivamo za $k = 1$.
- Analogno kao i kod parametriziranih krivulja, kad pričamo o parametriziranim plohama $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, naglasak nije na tragu od φ, već na samom preslikavanju φ.

Primjer 18.34. *Neka je $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ funkcija klase C^1, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren. Tada je preslikavanje*

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(x) = (x, f(x))$$

paremetrizirana k-ploha u $\mathbb{R}^n$ čiji je trag graf od f.

Mi od parametrizirane plohe ne tražimo da je homeomorfizam na svoju sliku, čak niti da je injekcija, iako su oba svojstva lokalno istinita. To je tema iduće tvrdnje i njene posljedice:

Lema 18.35. *Neka je $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ parametrizirana k-ploha, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren. Tada za svaki $x_0 \in U$ postoje otvorena okolina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ od $(x_0, 0) \in U \times \mathbb{R}^{n-k}$, otvorena okolina $W \subseteq \mathbb{R}^n$ od $\varphi(x_0)$ i C^1-difeomorfizam $G : \Omega \to W$ takav da je $G(x, 0) = \varphi(x)$ za sve $(x, 0) \in \Omega \cap (U \times \{0\})$.*

Dokaz. Radi jednostavnosti oznaka dokaz provodimo u slučaju kada je $n = 3$ i $k = 2$. Prema definiciji parametrizirane plohe, diferencijal od $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ u x_0 je ranga 2, pa Jacobijeva matrica $\nabla\varphi(x_0)$ ima 2×2-minoru čija je determinanta različita od 0. Radi određenosti pretpostavimo da je ta minora dobivena brisanjem trećeg retka u $\nabla\varphi(x_0)$, tj.

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1,2} \neq 0.$$

Neka je $G : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funkcija definirana s

$$G(x_1, x_2, t) := \varphi(x_1, x_2) + t\boldsymbol{e}_3 = \varphi(x_1, x_2) + (0, 0, t).$$

(U slučaju da je pripadna minora s determinantom različitom od 0 dobivena brisanjem j-tog stupca, onda bismo definirali $G(x_1, x_2, t) = \varphi(x_1, x_2) + t\boldsymbol{e}_j$).

Očito je $G(x,0)=\varphi(x)$ za sve $x\in U$ i

$$\det \nabla G(x_0,0)=\det\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1,2}\neq 0.$$

Teorem o inverznoj funkciji nam garantira egzistenciju otvorene okoline $\Omega\subseteq U\times\mathbb{R}$ od $(x_0,0)$ i otvorenu okolinu $W\subseteq\mathbb{R}^3$ od $\varphi(x_0)$ tako da je $G|_\Omega$ difeomorfizam s Ω na W, kao što smo i htjeli dobiti. □

Korolar 18.36. *Neka je $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ parametrizirana k-ploha. Tada svaki $x_0\in U$ ima otvorenu okolinu $U_1\subseteq U$ takvu da je $\varphi|_{U_1}: U_1\to\mathbb{R}^n$ C^1-difeomorfizam na svoju sliku.*

Napomena 18.37. Neka su $A\subseteq\mathbb{R}^k$ i $B\subseteq\mathbb{R}^n$. Za preslikavanje $\psi: A\to B$ kažemo da je **C^p-difeomorfizam** $(p\geq 1)$ ako je ψ homeomorfizam te ako su ψ i ψ^{-1} preslikavanja klase C^p, u smislu da postoje otvoreni skupovi $\tilde{A}\subseteq\mathbb{R}^k$ i $\tilde{B}\subseteq\mathbb{R}^n$ takvi da je $A\subseteq\tilde{A}$ i $B\subseteq\tilde{B}$ te da se ψ i ψ^{-1} mogu redom proširiti do preslikavanja klase C^p definiranih na $\tilde{A}$ odnosno $\tilde{B}$.

Dokaz Korolara 18.36 Neka je $G:\Omega\to W$ difeomorfizam kojeg garantira Lema 18.35. Označimo s $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ projekciju na prvih k koordinata i stavimo $U_1:=\pi(\Omega\cap(U\times\{0\}))$. Tada je $U_1\subseteq U$ otvorena okolina od x_0 i $\varphi(x)=G(x,0)$ za sve $x\in U_1$. Stoga je $\varphi|_{U_1}: U_1\to\varphi(U_1)$ homeomorfizam s inverzom $(\varphi|_{U_1})^{-1}=\pi\circ(G^{-1}|_{\varphi(U_1)})$. Kako je preslikavanje G^{-1} definirano na otvorenom skupu $W\subseteq\mathbb{R}^n$ koji sadrži $\varphi(U_1)$, $(\varphi|_{U_1})^{-1}$ možemo formulom $\pi\circ G^{-1}$ proširiti do preslikavanja klase C^1 definiranog na W. Drugim riječima, $(\varphi|_{U_1})^{-1}$ je klase C^1 na $\varphi(U_1)$ pa je stoga $\varphi|_{U_1}: U_1\to\varphi(U_1)$ C^1-difeomorfizam. □

Definicija 18.38. *Neka su k i n prirodni brojevi takvi da je $k<n$. Za neprazan podskup $S\subset\mathbb{R}^n$ kažemo da je **ploha dimenzije k u $\mathbb{R}^n$** ili **k-ploha u $\mathbb{R}^n$** ako postoji preslikavanje $f: U\to\mathbb{R}^{n-k}$ klase C^1 definirano na nekom otvorenom podskupu $U\subseteq\mathbb{R}^n$ i točka $p\in\mathbb{R}^{n-k}$ tako da je $S=f^{-1}(p)$ i $\mathrm{D}f(x)$ je surjektivan za sve $x\in f^{-1}(p)$. Plohe dimenzije $n-1$ u $\mathbb{R}^n$ se također zovu **hiperplohe**.*

Napomena 18.39. Neka je $S=f^{-1}(p)$ k-ploha u $\mathbb{R}^n$. Ako je $x\in S$ onda je prema pretpostavci $\mathrm{D}f(x)$ surjektivan operator, odnosno Jacobijeva matrica $\nabla f(x)\in M_{n-k,n}(\mathbb{R})$ je maksimalnog ranga $n-k$. Kako su retci od $\nabla f(x)$ točno gradijenti komponentnih funkcija f_i u x, definiciju k-plohe u $\mathbb{R}^n$ možemo ovako reformulirati: k-ploha u $\mathbb{R}^n$ je neprazan podskup S od $\mathbb{R}^n$ oblika

$$S=f_1^{-1}(p_1)\cap\cdots\cap f_{n-k}^{-1}(p_{n-k})=\bigcap_{i=1}^{n-k} f_i^{-1}(p_i)$$

gdje su $f_1,\ldots,f_{n-k}: U\to\mathbb{R}$ funkcije klase C^1 definirane na nekom otvorenom podskupu U od $\mathbb{R}^n$ takve da je skup gradijenata

$$\{\operatorname{grad} f_1(x),\ldots,\operatorname{grad} f_{n-k}(x)\}$$

linearno nezavisan za sve $x\in S$. Posebno, svaka hiperploha S u $\mathbb{R}^n$ je oblika $S=f^{-1}(p)$ za neku glatku funkciju $f: U\to\mathbb{R}$ takvu da je $\operatorname{grad} f(x)\neq 0$ za sve $x\in S$.

Primjer 18.40. Hiperravnine u $\mathbb{R}^n$ su skupovi oblika

$$H=\{x\in\mathbb{R}^n:\ (x|a)=p\}$$

za neke $a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ i $p\in\mathbb{R}$. Kako je gradijent preslikavanja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definiranog s $f(x)=(x|a)$ u svakoj točki jednak a, zaključujemo da je $H=f^{-1}(p)$ hiperploha u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 18.41. Svaku k-dimenzionalnu ravninu u $\mathbb{R}^n$ možemo dobiti kao presjek od $n-k$ hiperravnina $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : (x|a_i) = p_i\}$ čiji su vektori normale a_i linearno nezavisni. Posebno, sve k-dimenzionalne ravinine u $\mathbb{R}^n$ su k-plohe.

Primjer 18.42. Sfera

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

je hiperploha u $\mathbb{R}^n$. Zaista, imamo $S^{n-1} = f^{-1}(1)$, gdje je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Nadalje, $\operatorname{grad} f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$, pa je svakako $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ za sve $x \in S^{n-1}$.

Primjer 18.43. Sličnim rezoniranjem kao u Primjeru 18.42 bismo zaključili da je svaki **elipsoid** u $\mathbb{R}^n$, tj. skup oblika

$$\left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1\right\},$$

gdje su $a_1, \ldots, a_n > 0$, hiperploha u $\mathbb{R}^n$.

Primjer 18.44. Ako je $g : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ funkcija klase C^1, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren, tada je njen graf Γ_g k-ploha u $\mathbb{R}^n$. Zaista, imamo $\Gamma_g = f^{-1}(0)$, gdje je $f : U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ definirana s

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_{k+1} - g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, x_n - g_{n-k}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Provjerite da je zaista $\nabla f(x)$ maksimalnog ranga $n-k$ za sve $x \in \Gamma_g$.

Primjer 18.45. Neka je

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

(tzv. **torus** u $\mathbb{R}^4$). Tada je $S = f^{-1}(1,1)$, gdje je $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definirana s

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2).$$

Kako je u svakoj točki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$ rang Jacobijeve matrice

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

jednak 2, S je 2-ploha u $\mathbb{R}^4$. Primijetite da je zapravo $S = S^1 \times S^1$.

Sljedeći teorem nam kaže da svaku k-plohu u $\mathbb{R}^n$ možemo lokalno dobiti kao trag neke parametrizirane k-plohe:

Teorem 18.46. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$. Tada za svaku točku $c \in S$ postoji otvoren podskup $V \subseteq \mathbb{R}^k$ i parametrizirana ploha $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ takva da je $c \in \varphi(V) \subseteq S$ i koja je C^1-difeomorfizam na svoju sliku.*

Dokaz. Radi jednostavnosti oznaka dokaz provodimo za slučaj kada je S hiperploha u $\mathbb{R}^n$.

Pretpostavimo da je $S = f^{-1}(p)$, gdje je $f : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 takva da je $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ za sve $x \in S$. Za $c \in S$ definirajmo funkciju $g : U \to \mathbb{R}$ s $g(x) = f(x) - p$. Tada g očito zadovoljava uvjete Teorema 17.18, pa postoji otvoren skup $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, otvorena okolina W u $\mathbb{R}^n$ oko c i C^1-difeomorfizam $h : U' \to W$ takav da je $g(h(x_1, \ldots, x_n)) = x_n$ za sve $(x_1, \ldots, x_n) \in U'$. Posebno, ako definiramo $V := \pi(U')$, gdje je $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ projekcija na prvih $n-1$ koordinata, i

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n \quad \text{s} \quad \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = h(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0),$$

vidimo da je $g \circ \varphi = 0$, odnosno $\varphi(V) \subseteq S$. Sličnim rezoniranjem kao u dokazu Korolara 18.36 bismo zaključili da je φ C^1-difeomorfizam s V na $\varphi(V)$ s inverzom $\pi \circ h^{-1}$. $\square$

Definicija 18.47. Za bilo koju parametriziranu plohu φ koja zadovoljava uvjete Teorema 18.46 kažemo da je **lokalna parametrizacija** od S oko točke c.

Definicija 18.48. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$. Za $c \in S$ definiramo* ***tangencijalni prostor*** *T_cS kao skup svih vektora $v \in \mathbb{R}^n$ za koje postoji parametrizirana krivulja $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ takva da je $\gamma(0) = c$ i $\gamma'(0) = v$. U slučaju $k = 2$ obično govorimo o* ***tangencijalnoj ravnini****.*

Propozicija 18.49. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$ te neka je $c \in S$. Ako je $\varphi : V \to S$ lokalna parametrizacija od S oko c s $\varphi(x_0) = c$, gdje je $V \subseteq \mathbb{R}^k$ otvoren, tada je $\mathrm{D}\varphi(x_0)$ izomorfizam između $\mathbb{R}^k$ i T_cS. Posebno, $T_cS = \mathrm{D}\varphi(x_0)(\mathbb{R}^k)$ je vektorski prostor dimenzije k te $\mathrm{D}\varphi(x_0)$ ne ovisi o izboru od φ nego samo o S i c.*

Dokaz. Kako je V otvoren, za dani $v \in \mathbb{R}^k$ možemo naći $\varepsilon > 0$ takav da je $x_0 + tv \in V$ za sve $t \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$. Stoga možemo definirati parametriziranu krivulju $\gamma_v : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ s $\gamma_v(t) := \varphi(x_0 + tv)$. Kako je $\gamma_v'(0) = \mathrm{D}\varphi(x_0)v$, slijedi da je $\mathrm{D}\varphi(x_0)(\mathbb{R}^k) \subseteq T_cS$.

Obratno, neka je $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ parametrizirana krivulja takva da je $\gamma(0) = c$. Smanjivanjem broja ε (po potrebi) možemo pretpostaviti da je čitav trag od γ sadržan u $\varphi(V)$. Tada je kompozicija $\gamma_0 := \varphi^{-1} \circ \gamma$ parametrizirana krivulja u V i $\gamma_0(0) = x_0$. Stavimo $v := \gamma_0'(0) \in \mathbb{R}^k$. Tada je

$$\mathrm{D}\varphi(x_0)v = (\varphi \circ \gamma_0)'(0) = \gamma'(0).$$

Odavde zaključujemo da je $T_cS \subseteq \mathrm{D}\varphi(x_0)(\mathbb{R}^k)$, što zajedno s prvim dijelom dokaza daje $T_cS = \mathrm{D}\varphi(x_0)(\mathbb{R}^k)$. Stoga je $\mathrm{D}\varphi(x_0) : \mathbb{R}^k \to T_cS$ surjektivan linearni operator, a kako je $\varphi : V \to \varphi(V)$ C^1-difeomorfizam, $\mathrm{D}\varphi(x_0)$ je također injektivan. Dakle, $\mathrm{D}\varphi(x_0)$ je izomorfizam s $\mathbb{R}^k$ na T_cS. $\square$

Korolar 18.50. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$ zadana kao*

$$S = \bigcap_{i=1}^{n-k} f_i^{-1}(p_i),$$

gdje su $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ funkcije kao u Napomeni 18.39. Tada za sve $c \in S$ imamo

$$T_cS = \{v \in \mathbb{R}^n : \ (\operatorname{grad} f_i(c)|v) = 0 \ \forall\, i = 1, \ldots, n-k\} \tag{18.4}$$

Dokaz. Izaberimo $v = (v_1, \ldots, v_n) \in T_cS$ i neka je $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ parametrizirana krivulja s $\gamma(0) = c$ i $\gamma'(0) = v$. Za svako $i = 1, \ldots, n-k$ diferenciranjem jednakosti $f_i \circ \gamma = p_i$ i uvrštavanjem $t = 0$ dobivamo

$$0 = \frac{d}{dt}(f_i \circ \gamma)|_{t=0} = (\operatorname{grad} f_i(\gamma(0))|\gamma'(0)) = (\operatorname{grad} f_i(c)|v).$$

Dakle, $v \perp \operatorname{grad} f_i(c)$ za sve $i = 1, \ldots, n$, što točno znači da je T_cS sadržan u potprostoru definiranom s desnom jednakosti u (18.4). Budući da su oba ta vektorska prostora iste dimenzije k, oni se moraju podudarati. $\square$

Napomena 18.51. *Upozorenje*: Prema našoj definiciji, tangencijalni prostor je vektorski potprostor od $\mathbb{R}^n$, tako da on uvijek prolazi ishodištem, bez obzira na položaj točke $c \in S$. Kada zamišljamo tangencijalni prostor kao prostor koji dira plohu, mi zapravo ne zamišljamo T_cS već s njim paralelni prostor $c + T_cS$ koji se zove **afin tangencijalni prostor** u c (odnosno **afina tangencijalna ravnina** ako je $k = 2$).

Izomorfizam između $\mathbb{R}^k$ i T_cS dobiven preko lokalnih parametrizacija nam omogućuje da odredimo posebne baze tangencijalne ravnine:

Napomena 18.52. Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$ te neka je $c \in S$. Ako je $\varphi : V \to S$ lokalna parametrizacija od S oko c takva da je $\varphi(x_0) = c$ te $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k)$ kanonska ortonormirana baza za $\mathbb{R}^k$, tada definiramo tangencijalne vektore $\partial_1|_c, \ldots, \partial_k|_c \in T_cS$ s

$$\partial_i|_c := \mathrm{D}\varphi(x_0)\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0).$$

Tada je $\{\partial_1|_c, \ldots, \partial_k|_c\}$ očito baza za T_cS, za koju kažemo da je **inducirana** s lokalnom parametrizacijom φ.

Primjer 18.53. Tangencijalna ravnina na plohu S određenu grafom funkcije $g(x, y) = x^2 + y^2$ u točki $(0, 0, 0)$ okomita je na gradijent funkcije $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$ u točki $(0, 0, 0)$. Kako $\operatorname{grad} f(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$, jednadžba (afine) tangencijalne ravnine na S u $(0, 0, 0)$ dana je s

$$((0, 0, 1)|(x, y, z)) = 0,$$

tj. $z = 0$. Alternativno, ako Γ_f parametriziramo s $\varphi(x, y) = (x, y, x^2+y^2)$, za $c = (0, 0, 0)$ imamo $\partial_1|_c = (1, 0, 0)$ i $\partial_2|_c = (0, 1, 0)$, pa je

$$T_cS = [\{\partial_1|_c, \partial_2|_c\}] = \{(x, y, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

U točki $(1, 1, 2)$ gradijent of f je

$$\operatorname{grad} f(1, 1, 2) = (-2, -2, 1),$$

pa je jednadžba afine tangencijalne ravnine na S u $(1, 1, 2)$ dana s

$$((-2, -2, 1)|(x - 1, y - 1, z - 2)) = 0.$$

Primjer 18.54. Neka je $S = \Gamma_g$, gdje je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $g(x, y) = x^2 + y$. Tada je $S = f^{-1}(0)$, gdje je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y, z) = g(x, y) - z = x^2 + y - z$. Imamo $\operatorname{grad} f(1, 2, 3) = (2, 1, -1)$, pa je jednadžba tangencijalne ravnine na S u točki $(1, 2, g(1, 2)) = (1, 2, 3)$ dana s

$$((x, y, z)|(2, 1, -1)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = 2x + y,$$

dok je afina tangencijalna ravnina u istoj točki dana s

$$((x - 1, y - 2, z - 3)|(2, 1, -1)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = 3 + 2(x - 1) + y - 2 = 2x + y - 1.$$

Alternativno, za tu plohu prirodna parametrizacija je dana s

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y).$$

Kako je

$$\nabla\varphi(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Stoga je afina tangencijalna ravnina u točki $c = (1,2,3) \in S$ dana s

$$\begin{aligned}
T_cS &= \{\varphi(1,2) + (x-1)\partial_1|_c + (y-2)\partial_2|_c : \ x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (x-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (y-2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y-1 \end{pmatrix} : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Zadatak 18.55. Odredite općenitu formulu za T_cS ako je S hiperploha u $\mathbb{R}^n$ definirana grafom neke glatke funkcije $g : U \to \mathbb{R}$, gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ otvoren.

Primjer 18.56. Neka je S torus u $\mathbb{R}^4$ (Primjer 18.45). Odredimo T_cS za $c = (1,0,0,-1)$. Imamo $S = f^{-1}(1,1)$, gdje je $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definirana s $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2)$. Kako je $\operatorname{grad} f_1(c) = (2,0,0,0)$ i $\operatorname{grad} f_2(c) = (0,0,0,-2)$, Imamo

$$\begin{aligned}
T_cS &= \{(x_2,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ (x_1,x_2,x_3,x_4) \perp \operatorname{grad} f_i(c),\ i = 1,2\} \\
&= \{(0,x_2,x_3,0) : \ x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

U nekim problemima moramo odrediti ekstreme funkcije (lokalne ili globalne), ali koji zadovoljavaju još neke dodatne uvjete. Npr. tražimo pravokutnik maksimalne površine, a zadanog opsega.

Teorem 18.57. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{R}^n$ definirana s $S = \bigcap_{i=1}^{n-k} f_i^{-1}(p_i)$, gdje su gdje su $f_i : U \to \mathbb{R}$ funkcije kao u Napomeni 18.39, te neka je $g : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Ako restrikcija $g|_S$ ima lokalni ekstrem u točki $c_0 \in S$, tada postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$\operatorname{grad} g(c_0) = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1(c_0) + \ldots + \lambda_{n-k} \operatorname{grad} f_{n-k}(c_0).$$

Dokaz. Ako je $c_0 \in S$ lokalni ekstrem funkcije $g|_S$ tada za svaku parametriziranu krivulju $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ takvu da je $\gamma(0) = c_0$, funkcija $t \mapsto g(\gamma(t))$ ima lokalni ekstrem u 0. Prema nužnom uvjetu za lokalni ekstrem imamo

$$\frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0} = 0,$$

odnosno

$$(\operatorname{grad} g(c_0) | \gamma'(0)) = 0.$$

Kako je svaki tangencijalni vektor $v \in T_{c_0}S$ oblika $v = \gamma'(0)$ za neku parametriziranu krivulju $\gamma : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle \to S$ takvu da je $\gamma(0) = c_0$, zaključujemo da je $\operatorname{grad} g(c_0)$ okomit na tangencijalni prostor $T_{c_0}S$. Prema Korolaru 18.50 zaključujemo da se $\operatorname{grad} g(c_0)$ nalazi u linearnoj ljusci razapetoj vektorima $\operatorname{grad} f_1(c_0), \ldots, \operatorname{grad} f_{n-k}(c_0)$ što je upravo tvrdnja teorema. □

Za probleme uvjetnih ekstrema u slučaju hiperploha Teorem 18.57 daje nužni uvjet za lokalni ekstrem, tj. daje način za određivanje stacionarnih točaka. Određujemo zapravo sve parove $(x_0, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ takve da je

$$\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0), \qquad f(x_0) = p.$$

Realan broj λ naziva se **Lagrangeov multiplikator**.

Primjer 18.58. Neka je $S \subset \mathbb{R}^2$ pravac $x - y = 1$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2$. Odredimo minimum funkcije g na S.

Imamo $S = f^{-1}(0)$, gdje je $f(x, y) = x - y - 1$. Nadalje,

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (1, -1),$$

dok je

$$\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y).$$

Prema Teoremu 18.57, sve stacionarne točke (x_0, y_0) od g na S su dane uvjetima

$$(2x_0, 2y_0) = (\lambda, -\lambda), \qquad x_0 - y_0 - 1 = 0.$$

Slijedi

$$x_0 = \frac{1}{2}, \qquad y_0 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda = 1.$$

S obzirom na definiciju funkcije g ta točka je minimum.

Primjer 18.59. Odredite lokalne ekstreme funkcije $g(x, y, z) = x+y+z$ pod uvjetima $x^2+y^2 = 2$ i $x + z = 1$.

Primijetimo da uvjeti definiraju 1-plohu u $\mathbb{R}^3$ danu s

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 2, \ x + z = 1\}.$$

Naime, imamo $S = f^{-1}(2, 1)$, gdje je $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definirana s

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2, x + z),$$

te je u svakoj točki $(x, y, z) \in S$ rang Jacobijeve matrice

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jednak 2. Dakle, tražimo lokalne ekstreme funkcije g na S, pa možemo primijeniti Teorem 18.57. Dakle, sve stacionarne točke (x, y, z) od g na S su određene jednadžbma

$$\begin{aligned} &\nabla g(x, y, z) = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1(x, y, z) + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2(x, y, z) \\ &(x, y, z) \in S \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1) = \lambda_1(2x, 2y, 0) + \lambda_2(1, 0, 1), \\ &x^2 + y^2 - 2 = 0, \ x + z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\lambda_2 = 1, \quad x = 0, \quad y = \frac{1}{2\lambda_1}, \quad y^2 = 2, \quad z = 1.$$

Zaključujemo da postoje dvije stacionarne točke

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= (0, \sqrt{2}, 1), \\ (x_2, y_2, z_2) &= (0, -\sqrt{2}, 1). \end{aligned}$$

Kako je S presjek beskonačnog cilidra i ravnine ograničen slijedi da je S kompaktan, pa na njemu svaka neprekidna realna funkcija postiže minimum i maksimum. Stoga je jedna od stacionarnih točaka (globalni) minimum, a druga (globalni) maksimum. Provjerom vrijednosti funkcije

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}, \qquad f(0, -\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}$$

zaključujemo da je prva točka maksimum, a druga minimum.

Zadatak 18.60. *Odredite udaljenost ravnine u* $\mathbb{R}^3$ *od ishodišta.*

Zadatak 18.61. *Odredite udaljenost pravca u* $\mathbb{R}^3$*, zadanog kao presjek dviju ravnina, od ishodišta.*