LJILJANA ARAMBAŠIĆ

GORAN MUIĆ

PAVLE PANDŽIĆ

KOMPLEKSNA ANALIZA

MATEMATIČKI ODSJEK
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Verzija
15/4/2021

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Vrlo kratko o povijesti kompleksnih brojeva

Pojam kompleksnih brojeva prvi put susrećemo u srednjoškolskoj matematici kod pronalaženja rješenja kvadratne jednadžbe. Mogli bismo iz toga zaključiti da su kompleksni brojevi upravo zbog toga i uvedeni (to jest, izmišljeni) - kako bi svaka kvadratna jednadžba imala rješenje. Međutim, povijesno gledajući, to nije tako bilo, nisu kvadratne jednažbe te koje su motivirale definiranje nove vrste brojeva, nego kubne. Iako nam se to na prvi pogled može činiti čudno, zapravo je vrlo logično.

Promatrajmo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 + px + q = 0.$$

Njeno rješavanje možemo interpretirati na više načina, a mi ćemo navesti dva.

Prvi način je da (1.1) napišemo pomoću punog kvadrata

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}. \tag{1.1}$$

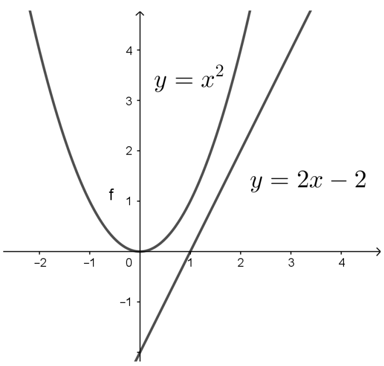
Ako je $p^2 - 4q \geq 0$, onda dobivamo rješenje. Ako je pak $p^2 - 4q < 0$, onda naprosto možemo reći da rješenje ne postoji i tu nam ne mora ništa biti neobično, jer kada rješavamo jednažbe tipa $x^2 = a$, geometrijski to interpretiramo kao da tražimo kolika je stranica x kvadrata čija površina iznosi a. Ako je ta površina negativna, onda takav kvadrat ne postoji.

Jednadžba $x^2 - 2x + 2 = 0$ se može napisati kao $(x-1)^2 = -1$. Ne postoji kvadrat površine -1, pa ova jednadžba nema rješenja (naravno, u $\mathbb{R}$).

Drugi način je da rješenje jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ shvaćamo kao rješenje sustava

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -px - q, \end{cases}$$

što geometrijski znači da tražimo presjek pravca i parabole. Geometrijski je jasno da postoje parabole i pravci koji se međusobno ne sijeku, pa nam je ovo još jedna potvrda da nema ništa neobično u tome da, u nekim slučajevima, jednadžba (1.1) neće imati rješenje.



Pravac i parabola se ne sijeku, pa $x^2 - 2x + 2 = 0$ nema (realnih) rješenja.

Iz ovog zaključujemo da geometrijske interpretacije rješenja kvadratne jednadnažbe niti ne sugeriraju da bi svaka kvadratna jednadžba trebala imati rješenje, pa se ne vidi potreba da se uvode neki "imaginarni" brojevi koji će biti rješenja.

Promatrajmo sada kubnu jednadžbu oblika

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1.2}$$

S obzirom da je izraz $x^3 + px + q$ pozitivan za dovoljno velike pozitivne x, te negativan za dovoljno velike negativne x, ova jednadžba sigurno ima rješenje. Del Ferro, Tartaglia i Cardano (16. stoljeće) su pokazali da je rješenje ove jednadžbe dano formulom

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}.$$

U ovom izrazu se može pojaviti drugi korijen iz negativnog broja, ali čak i kada se desi takva situacija, ne možemo reći da zadana jednadžba nema rješenja (kako je to opravdano bilo moguće u slučaju kvadratne jednadžbe). Cardano, a nakon njega i Bombelli, pretpostavljaju da su sumandi u izrazu za rješenje jednadžbe oblika $a + b\sqrt{-1}$ i $a - b\sqrt{-1}$, pa se zbrajanjem taj "problematični" dio poništi. Točnije, Bombelli je razmatrao jednadžbu $x^3 = 15x + 4$. U ovom slučaju formula (1.2) daje $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Bombelli je otkrio da je

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Zbrajajući ova dva izraza dobivamo 4, što je upravo željeno rješenje. Ovime se vidjelo da za neke probleme realne prirode trebaju brojevi koji nisu realni. Ovo otkriće se smatra "rođenjem" kompleksnih brojeva.

Trebalo je dugo vremena za geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva. Iako je bilo i ranijih pokušaja, tek krajem 18. stoljeća Wessell, Argand i Gauss, neovisno jedan o drugome, dolaze na ideju da se kompleksni brojevi prikažu kao točke u ravnini - tu travninu nazivamo kompleksna ravnina (ponekad se naziva i Gaussova ravnina) i označavamo ju s $\mathbb{C}$. U njoj su kompleksni brojevi $a + bi$ prikazani kao točke (a, b) u ravnini, odnosno vektori s početkom u ishodištu i krajem u točki (a, b). Nakon Gaussovog rada, teorija koja se bavi proučavanjem kompleksnih brojeva i kompleksnih funkcija se brzo razvija. Mnogi fundamentalni rezultati kompleksne analize su dobivenu u periodu između 1814. i 1851. godine i na njima su radili veliki matematičari poput Cauchyja, Riemanna i drugih.

Za više detalja o povijesti kompleksnih brojeva preporučujemo Tristan Needham, Visual complex analysis, or John Stillwell, History of mathematics.

1.2 *Osnovni pojmovi i definicije*

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Svaki kompleksni broj možemo zapisati u obliku

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, a i je **imaginarna jedinica**, $i^2 = -1$. Realne brojeve x i y nazivamo **realnim iimaginarnim dijelom** od z i označavamo $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$. Gornji zapis kompleksnog broja nazivamo **pravokutnim** zapisom. Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Broj $\bar{z} = x - iy$ nazivamo **konjugirani kompleksni broj** broja $z = x + iy$. Očito je

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z - \bar{z}).$$

Modul ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja z je broj $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometrijski gledano, $|z|$ predstavlja udaljenost točke z u kompleksnoj ravnini od ishodišta. **Argument kompleksnog broja** $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiramo kao realni broj $\varphi \in (-\pi, \pi]$ koji predstavlja veličinu kuta između pozitivnog dijela osi x i zrake iz ishodišta koja prolazi kroz z. Ponekad ćemo označavati $\varphi = \arg z$. Lako se vidi da za svaki $z \neq 0$ vrijedi

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi,$$

pa je

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z| e^{i\varphi},$$

gdje smo uveli oznaku

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi}$$

(u ovom trenutku ovo je samo oznaka jer za sada znamo računati e^x samo kada je x realan broj.) Svaki kompleksni broj $z \neq 0$ potpuno je određen svojim modulom i argumentom ($z = 0$ je potpuno određen svojim modulom - to je jedini kompleksni broj čiji je modul jednak 0). Zapis $z = |z| e^{i\varphi}$ nazivamo **trigonometrijskim zapisom** kompleksnog broja.

Napomenimo da se za interval vrijednosti argumenta kompleksnog broja može uzeti i neki drugi interval duljine 2π, na primjer, često se uzima $[0, 2\pi)$. Međutim, izbor upravo intervala $(-\pi, \pi]$ ima veze s definicijom logaritamske funkcije kompleksne varijable.

Osnovne operacije s kompleksnim brojevima svode se na istoimene operacije s realnim brojevima podrazumijevajući svojstvo distributivnosti. Ako je $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ tada je

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Dijeljenje se svodi na množenje proširujući razlomak

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2},$$

te imajući na umu daje $|z_2|^2 \in \mathbb{R}$; naravno, mora biti $z_2 \neq 0$.

Množenje i dijeljenje su znatno jednostavniji ako su z_1 i z_2 napisani u trigonometrijskom obliku. Ako je $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$, tada je

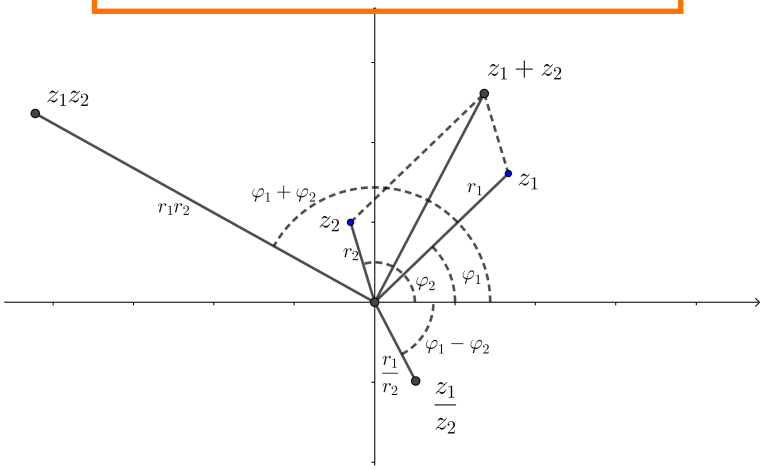
$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Posebno, ako je $z = re^{i\varphi}$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi},}$$

odnosno, vrijedi

$$\boxed{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).}$$



Operacije s kompleksnim brojevima

Za svaki $z \in \mathbb{C}$ i svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n međusobno različitih kompleksnih brojeva čija je n-ta potencija jednaka z; te brojeve nazivamo n-tim korijenima kompleksnog broja z. Ako je $z = re^{i\varphi}$, tada su n-ti korijeni od z jednaki

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Udaljenost točaka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ računa se kao modul njihove razlike, dakle

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

U trokutu kojemu su vrhovi $0, z_1$ i $z_1 + z_2$ duljine stranice iznose $|z_1|, |z_2|, |z_1 + z_2|$, odakle slijedi takozvana **nejednakost trokuta**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Ovu ćemo nejednakost često koristiti. Iz nje se dobije i obrnuta nejednakost trokuta

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r, dakle

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Zatvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$\overline{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Kružnica s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$S(z_0, r) = \partial K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Očito je $S(z_0, r) = \{z = z_0 + re^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **otvoren** ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$. Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **zatvoren** ako je njegov komplement $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ otvoren. [1]

[1] U smislu ovih definicija, za sve $z_0 \in \mathbb{C}$ i sve $r > 0$ skup $K(z_0, r)$ je otvoren, a $\overline{K}(z_0, r)$ zatvoren, pa su njihovi nazivi opravdani. Iako su otvoreni skupovi unije otvorenih krugova, zatvoreni skupovi se ne moraju moći prikazati kao unije zatvorenih krugova. Npr. segment $[0, 1]$ je zatvoren skup u $\mathbb{C}$, jer mu je komplement otvoren, ali ne sadrži nikakve zatvorene krugove u $\mathbb{C}$.

Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je **ograničen** ili **omeđen** ako postoji $M > 0$ tako da je $|z| \leq M$ za sve $z \in S$, to jest, $S \subseteq \overline{K}(0, M)$.

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je **kompaktan** ako je zatvoren i ograničen. Zatvoren krug i kružnica su primjeri kompaktnih skupova.

Neka je K kompaktan skup i $\{K(z_j, r_j) : j \in J\}$ familija otvorenih krugova tako da je $K \subseteq \cup_{j \in J} K(z_j, r_j)$. Tada postoji *konačan podskup* $\{j_1, \ldots, j_n\} \subseteq J$ tako da je $K \subseteq \cup_{k=1}^{n} K(z_{j_k}, r_{j_k})$. Drugim riječima, svaki otvoreni pokrivač skupa kompaktnog skupa K se može reducirati na konačan potpokrivač.

Otvoren skup Ω u $\mathbb{C}$ je **povezan** ako se ne može napisati kao disjunktna unija svoja dva otvorena neprazna podskupa. Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji akko neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo **put**) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Otvoren skup Ω koji je ujedno i povezan naziva se **područjem**. [2]

[2] Na primjer, svaki otvoren krug je područje. Unija dva disjunktna otvorena kruga nije područje, već samo otvoren skup kojemu su ta dva kruga komponente povezanosti.

Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva (moguće konačna) unija disjunktnih područja, koje nazivamo **komponente povezanosti** od Ω.

Sjetimo se i osnovnih pojmova o nizovima. Niz kompleksnih brojeva $(z_n)_n$ **konvergira** prema kompleksnom broju z_0, pišemo $\lim_n z_n = z_0$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (ovisan o ε) tako da vrijedi

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Gornje možemo reformulirati kao

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon).$$

Ako je $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$ i $z_0 = x_0 + iy_0$ tada vrijedi:

$$\lim_n z_n = z_0 \Leftrightarrow (\lim_n x_n = x_0 \text{ i } \lim_n y_n = y_0).$$

Na primjer, ako je $z_n = \dfrac{\sin n}{n} + i\dfrac{n^2+1}{2n^2-1}, n \in \mathbb{N}$ tada je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} + i \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2}i.$$

Niz kompleksnih brojeva $(z_n)_n$ je **Cauchyjev** niz ili **C-niz** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi

$$n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Lako se provjeri da je $(z_n)_n$ Cauchyjev niz ako i samo ako su $(\operatorname{Re} z_n)_n$ i $(\operatorname{Im} z_n)_n$ Cauchyjevi nizovi. Nadalje, vrijedi da je niz kompleksnih brojeva konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev - ovo svojstvo govori da je $\mathbb{C}$ potpun prostor. [kao i u R]

Zatvoreni skupovi u $\mathbb{C}$ se mogu opisati pomoću nizova: $F \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako i samo ako za svaki konvergentan niz $(z_n)_n \subseteq F$ vrijedi da je $\lim_n z_n$ element skupa F.

Uz pojma niza blisko je povezan pojam reda. Neka je $(a_n)_{n\geq 0}$ niz kompleksnih brojeva. **Red** $\sum a_n$ je uređeni par nizova $((a_n)_n, (s_n)_n)$, gdje je (s_n) niz parcijalnih suma definiran formulom

$$s_n = a_0 + \ldots + a_n, \quad n \geq 0.$$

Ako niz $(s_n)_n$ konvergira, tada njegov limes $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ nazivamo **sumom reda** $\sum a_n$ i kažemo da red $\sum_n a_n$ **konvergira**. Nužan uvjet konvergencije reda je da mu opći član teži u 0, dakle, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kao primjer navedimo **geometrijski red** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, gdje je $q \in \mathbb{C}$. Ako je $|q| \geq 1$, tada nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije reda, zato red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergira. S obzirom da je, za $q \neq 1$,

$$s_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergira za $|q| < 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

1.3 *Kompleksne funkcije realne varijable*

Prije nego prijeđemo na proučavanje kompleksnih funkcija kompleksne varijable, zadržimo se kratko na na kompleksnim funkcijama realne varijable. Neka je

$$\gamma : D \to \mathbb{C}, \quad D \subseteq \mathbb{R}.$$

(Na primjer, D može biti otvoreni interval (a, b), gdje su mogući i slučajevi $a = -\infty$ ili $b = \infty$, ili segment $[a, b]$.) Za svaki $t \in D$ označimo

$$\alpha(t) = \operatorname{Re} \gamma(t) \quad \text{i} \quad \beta(t) = \operatorname{Im} \gamma(t).$$

Time smo dobili dvije realne funkcije realne varijable $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\gamma = \alpha + i\beta,$$

a koje nazivamo **realnim i imaginarnim dijelom** funkcije γ.

Na primjer, neka je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \frac{t+i}{t-i}$. Tada je

$$\gamma(t) = \frac{t+i}{t-i} = \frac{(t+i)^2}{(t-i)(t+i)} = \frac{t^2-1+2ti}{t^2+1} = \frac{t^2-1}{t^2+1} + i\frac{2t}{t^2+1},$$

pa je

$$\alpha(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \beta(t) = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Funkcija $\gamma : D \to \mathbb{C}$ je **neprekidna u** $t_0 \in D$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $t \in D, |t - t_0| < \delta$ vrijedi da je $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Drugim riječima, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $t \in D, t \in \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle$ vrijedi da je $f(t) \in K(f(t_0), \varepsilon)$. Funkcija $\gamma : D \to \mathbb{C}$ je **neprekidna na** D ako je neprekidna u svakoj točki $t_0 \in D$. Lako se vidi da je (kompleksna funkcija realne varijable) γ neprekidna ako i samo ako su (realne funkcije realne varijable) α i β neprekidne.

Reći ćemo da je $\gamma : D \to \mathbb{C}$ **derivabilna u točki** $t_0 \in D$ ako postoji

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \tag{1.3}$$

Ako ovaj limes postoji, označit ćemo ga s $\gamma'(t_0)$ i nazivati **derivacija funkcije** γ **u** t_0. Funkcija $\gamma : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je **derivabilna na** D ako je derivabilna u svakoj točki $t_0 \in D$.

Kao i kod neprekidnosti, i svojstvo derivabilnosti funkcije γ ekvivalentno je derivabilnosti funkcija α i β : γ je derivabilna u t_0 ako i samo su α i β derivabilne u t_0 te vrijedi

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma(t_0)}{dt} = \alpha'(t_0) + i\beta'(t_0). \tag{1.4}$$

Na primjer, ako je $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \gamma(t) = t^2 + ie^t$ tada je $\gamma'(t) = 2t + ie^t$.

Pojam integrabilnosti se također, preko realnog i imaginarnog dijela, svodi na realnu analizu. Neka je $\gamma = \alpha + i\beta : [a, b] \to \mathbb{C}$. Reći ćemo da je γ **integrabilna na** $[a, b]$ ako su α i β integrabilne na $[a, b]$ (kao realne funkcije realne varijable). Tada definiramo integral

$$\boxed{\int_a^b \gamma(t)dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt.}$$

Na primjer, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = t^2 + ie^t$ je integrabilna na $[0, 1]$ jer su realne funkcije $\alpha(t) = t^2$ i $\beta(t) = e^t$ integrabilne na $[0, 1]$, te vrijedi

$$\int_0^1 \gamma(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + i\int_0^1 e^t dt = (\frac{1}{3}t^3 + ie^t)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + i(e-1).$$

1.4 Kompleksne funkcije kompleksne varijable

Tipična funkcija u ovom kolegiju bit će *kompleksna funkcija kompleksne varijable*, dakle funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Podsjetimo se nekih pojmova i fiksirajmo notaciju. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

- f je **ograničena** ako postoji $M \geq 0$ tako da je $|f(z)| \leq M, \forall z \in \Omega$.

- **Modul** funkcije f je funkcija $|f| : \Omega \to [0, \infty)$ definirana formulom $|f|(z) = |f(z)|$.

- Funkcija f je **neprekidna u** z_0 ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i
$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$
$$\text{to jest, } z \in K(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in K(f(z_0), \varepsilon).$$

- Funkcija f je **neprekidna na** Ω ako je neprekidna u svakoj točki skupa Ω.

- Kažemo da funkcija f **postiže maksimum** u točki $z_0 \in \Omega$ ako
$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \forall z \in \Omega,$$
te da **postiže minimum** u točki $z_0 \in \Omega$ ako
$$|f(z)| \geq |f(z_0)|, \quad \forall z \in \Omega.$$

- Vrijedi: *Neprekidna funkcija $f : K \to \mathbb{C}$ na kompaktu $K \subseteq \mathbb{C}$* postiže svoj minimum i maksimum.

- Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, uz identifikaciju $z = x + iy \Leftrightarrow (x, y)$ uvodimo oznake
$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$
Na taj način smo definirali funkcije
$$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
koje nazivamo **realni i imaginarni dio od** f. Pišemo
$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f, \quad f = u + iv.$$
Funkciju f sada možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s [3]
$$f : (x, y) \mapsto (u(y), v(x, y)).$$

Prisjetimo se sada i pojmova parcijalnih derivacija i diferencijabilnosti realnih funkcija dviju realnih varijabli.

[3] Na primjer, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana s $f(z) = z^2$. Tada je $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$. Dakle,
$u(x, y) = x^2 - y^2$
$v(x, y) = 2xy$
$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Neka je $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. **Parcijalne derivacije** funkcije u u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ definirane su na sljedeći način:

$$u_x(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0},$$
$$u_y(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je **diferencijabilna u točki** $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoje realni brojevi A i B tako da vrijedi

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|u(x, y) - u(x_0, y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Ako je u diferencijabilna u (x_0, y_0), onda postoje parcijalne derivacije od u u (x_0, y_0) i vrijedi $A = u_x(x_0, y_0)$ i $B = u_y(x_0, y_0)$, tako da imamo

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{|u(x,y) - u(x_0,y_0) - u_x(x_0,y_0)(x - x_0) - u_y(x_0,y_0)(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Obrat ne vrijedi.

Sama egzistencija parcijalnih derivacija funkcije u u (x_0, y_0) nije dovoljna za zaključak da je u diferencijabilna u (x_0, y_0). Upravo zbog toga je sljedeći test koristan u ispitivanju diferencijabilnosti od u u (x_0, y_0): ako postoje parcijalne derivacije na nekoj okolini točke (x_0, y_0) i ako su one neprekidne na toj okolini, tada je u diferencijabilna u točki (x_0, y_0).

Funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je **diferencijabilna u točki** $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Vrijedi:

- $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ je diferencijabilna u $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako i samo ako su u i v diferencijabilne u $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- Ako je f diferencijabilna u (x_0, y_0) onda postoje parcijalne derivacije od u i v u (x_0, y_0).

- Ako parcijalne derivacije od u i v postoje i neprekidne su na nekoj okolini točke (x_0, y_0), tada je f diferencijabilna u točki (x_0, y_0).

2 Elementarne kompleksne funkcije kompleksne varijable

Sada ćemo definirati elementarne kompleksne funkcije kompleksne varijable: polinome, racionalne funkcije, eksponencijalnu i logaritamsku funkciju, te trigonometrijske funkcije. Naravno, te će funkcije proširivati istoimene realne funkcije realne varijable.

2.1 Polinomi

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, pri čemu je $a_n \neq 0$. **Polinom** stupnja n je funkcija $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oblika

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma p.

Nulpolinom je funkcija koja u svakom kompleksnom broju poprima vrijednost 0. Stupanj nulpolinoma se ne definira.

Na primjer, funkcija $p(z) = z^3 - (3 + i)z + 12$ je (kompleksni) polinom trećeg stupnja.

2.2 Racionalne funkcije

Racionalna funkcija je funkcija oblika

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

gdje su p i q polinomi i q nije nul-polinom. Prirodna domena racionalne funkcije r je skup

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}.$$

Svaki polinom je racionalna funkcija, to jest, racionalne funkcije možemo smatrati generalizacijom polinoma.

Prema osnovnom teoremu algebre (a taj ćemo teorem dokazati i u ovom kolegiju), polinom n-tog stupnja ima točno n nultočaka u $\mathbb{C}$, računajući njihove kratnosti. Prema tome, prirodna domena racionalne funkcije je skup $\mathbb{C}$ iz kojeg je izbačeno konačno mnogo kompleksnih brojeva (nultočaka polinoma u nazivniku). Posebno, domena racionalne funkcije je otvoren skup. Uočimo da su polinomi jedine racionalne funkcije čija je domena cijeli $\mathbb{C}$, upravo zbog spomenutog osnovnog teorema algebre.

Na primjer, funkcija

$$r(z) = \frac{z^3 - 3z + 12}{z^2 + 1}$$

je jedna racionalna funkcija i njena domena je

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}.$$

2.3 *Eksponencijalna i logaritamska funkcija*

Kompleksna eksponencijalna funkcija je funkcija $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana formulom

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Osim $\exp(z)$ koristit ćemo i oznaku e^z. [1]

Najprije uočimo da smo gornjom definicijom proširili dobro nam poznatu realnu eksponencijalnu funkciju: ako je $z = x \in \mathbb{R}$ (to jest, ako je $y = 0$) tada je

$$\exp(z) = \exp(x + i \cdot 0) = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x.$$

Također, za $x \in \mathbb{R}$ smo već ranije uveli oznaku $e^{ix} := \cos x + i \sin x$. Sada to više ne moramo smatrati samo oznakom, jer iz definicije kompleksne eksponencijalne funkcije imamo

$$\exp(ix) = \exp(0 + i \cdot x) = e^0 (\cos x + i \sin x) = \cos x + i \sin x.$$

[1] Uočimo da je izraz na desnoj strani prethodne formule dobro definiran za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ jer su $x, y \in \mathbb{R}$, pa su izrazi $e^x, \sin y, \cos y$ dobro definirani.

Proučimo neka svojstva eksponencijalne funkcije.

- Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

  $$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^x > 0.$$

  Odavde zaključujemo da je

  $$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

  Zato 0 nije u slici eksponencijalne funkcije, a iz definicije se može zaključiti da svi ostali kompleksni brojevi jesu. Prema tome, eksponencijalna funkcija je surjekcija na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Direktno po definiciji provjerimo da vrijede formule

  $$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

  za sve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zbog $e^z \neq 0$, i druga formula je uvijek dobro definirana.

- Eksponencijalna funkcija je periodična s periodom $2\pi i$ jer je

  $$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^z \end{aligned}$$

  za sve $z \in \mathbb{C}$. Posebno, zaključujemo da $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nije injekcija, pa niti bijekcija.

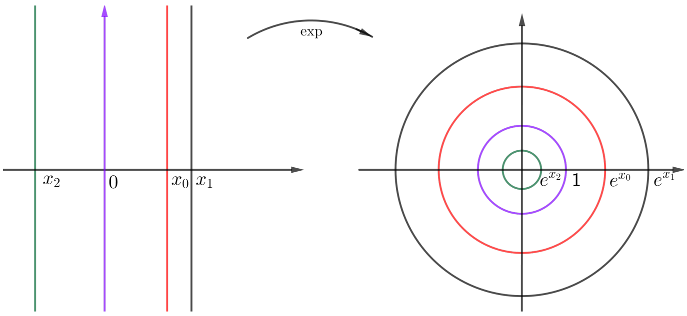
Promotrimo sada ponašanje eksponencijalne funkcije na nekim podskupovima domene. Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$, proizvoljan i fiksiran broj. Skup

$$\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

je vertikalni pravac koji realnu os siječe u x_0. Slika tog pravca po eksponencijalnoj funkciji je skup

$$\{e^{x_0+iy} : y \in \mathbb{R}\} = \{e^{x_0}(\cos y + i \sin y) : y \in \mathbb{R}\},$$

dakle, to kružnica sa središtem u ishodištu radijusa e^{x_0}. Prema tome, vertikalni pravci domene se preslikavaju u kružnice sa središtem u ishodištu.



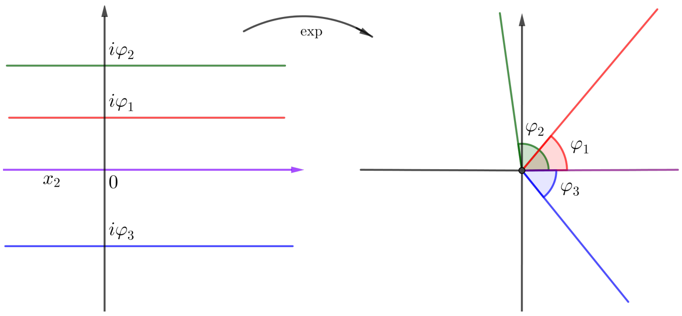
Uzmimo sada $y_0 \in \mathbb{R}$, opet proizvoljan i fiksiran broj. Skup

$$\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$$

je horizontalni pravac koji imaginarnu os siječe u iy_0. Njegova slika po eksponencijalnoj funkciji je skup

$$\{e^{x+iy_0} : x \in \mathbb{R}\} = \{e^{x}(\cos y_0 + i \sin y_0) : x \in \mathbb{R}\},$$

što je polupravac (zraka) iz ishodišta (bez ishodišta) koja s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut y_0. Prema tome, horizontalni pravci domene se preslikavaju u zrake iz ishodišta.



Već smo utvrdili da je $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjekcija, a sada smo se još jednom u to uvjerili; naime, svim ovim polupravcima (kao i svim spomenutim kružnicama) popunjen je cijeli skup $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Štoviše, sada uočavamo da, ako označimo

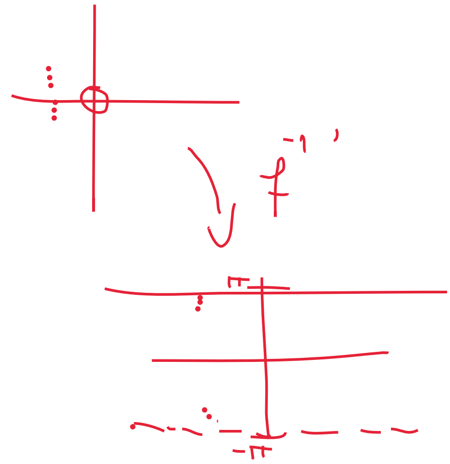
$$\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \langle -\pi, \pi]\},$$

tada je restrikcija eksponencijalne funkcije

$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]} : \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi] \to \mathbb{C}\setminus\{0\} \tag{2.1}$$

surjekcija, jer su horizontalni pravci sadržani u domeni ove restrikcije dovoljni da se točno jednom prekrije cijela kodomena $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Za provjeru injektivnosti ove restrikcije uočimo da je $e^z = e^w$ ako i samo ako $z = w + 2\pi i k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$; stoga, ako su $z, w \in \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi]$, tada $e^z = e^w$ ako i samo ako $z = w$. Prema tome, ova restrikcija je bijekcija.

Međutim, lako se vidi da njen inverz neće biti neprekidna funkcija. Zato se iz domene izbacuje i rubni horizontalni pravac kroz $i\pi$, koji se preslikao u negativni dio realne osi. Tako dolazimo do bijekcije



$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle} : \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle \to \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x \le 0\}. \tag{2.2}$$

čiji će inverz biti neprekidna funkcija, a nazivat ćemo ga logaritamska funkcija. Za određivanje formule inverzne funkcije računamo sljedeće: za $z \in \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x\le 0\}$ tražimo $w = u + iv \in \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle$ tako da je $e^w = z$. Tada

$$\begin{aligned} e^w = z \quad &\Leftrightarrow \quad e^u e^{iv} = |z|e^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \quad e^u = |z| \text{ i } e^{iv} = e^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \quad u = \ln|z| \text{ i } v = \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad w = \ln|z| + i\varphi. \end{aligned}$$

Sada možemo definirati logaritamsku funkciju.

(Glavna grana) logaritamske funkcije je funkcija

$$\ln : \mathbb{C}\setminus\langle-\infty,0] \to \mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle, \quad \boxed{\ln(z) = \ln|z| + i\arg z.}$$

Domena funkcije ln je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka iz ishodišta - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem.

Naziv "glavna grana" sugerira da postoje i druge grane. Radi se o tome da smo, umjesto restrikcije eksponencijalne funkcije na $\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle$, mogli promatrati i restrikciju na, na primjer, $\mathbb{R}\times\langle 0,2\pi\rangle$. U tom slučaju dobili bismo bijekciju

$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle 0,2\pi\rangle} : \mathbb{R}\times\langle 0,2\pi\rangle \to \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : x\ge 0\},$$

čiji bi inverz također bio neprekidna funkcija, a taj bi se inverz s punim pravom mogao nazivati (nekom granom) logaritamske funkcije. Ono što možemo zamjerati ovoj grani logaritamske funkcije je to što ona ne proširuje realnu funkciju ln, iz jednostavnog razloga što nije definirana za pozitivne realne brojeve koji čine domenu realne funkcije ln.

Zapravo, za svaki $\varphi \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$\exp|_{\mathbb{R}\times\langle\varphi,\varphi+2\pi\rangle} : \mathbb{R}\times\langle\varphi,\varphi+2\pi\rangle \to \mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R} : \arg x \ne \varphi\},$$

bijekcija, a njen inverz je neka grana logaritamske funkcije. Ovo će nam ponekad biti vrlo korisno u dokazima.

2.4 Trigonometrijske i hiperbolne kompleksne funkcije

Kompleksne trigonometrijske funkcije sin i cos definiraju se pomoću eksponencijalne funkcije. Prije same definicije sjetimo se da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Odavde imamo da je

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Zbrajajući i oduzimajući ove dvije relacije dolazimo do izraza

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. S obzirom da smo već definirali kompleksnu eksponencijalnu funkciju, izrazi na desnim stranama prethodnih relacija imaju smisla i ako realni broj x zamijenimo kompleksnim brojem z. Upravo na taj način ćemo definirati kompleksne trigonometrijske funkcije i one će automatski proširivati istoimene realne funkcije.

Kompleksne trigonometrijske funkcije $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiramo formulama

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.}$$

Direktnim računom provjerimo da za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijede sljedeće relacije (čiji realni analogoni su nam dobro poznati):

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$

$$\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z, \quad \cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z.$$

Nadalje, za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\underline{e^{iz} = \cos z + i \sin z},$$

kao i adicijske formule

$$\begin{aligned} \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \end{aligned}$$

za sve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Uvrštavajući $z_1 = z$ i $z_2 = -z$ u prethodnu formulu proširujemo dobro poznati identitet

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

cos(z)=1/2*(cos(x)(e^y+e^(-y))+isin(x)(e^(-y)-e^y))
gdje je z=x+yi

Lako se pokaže da kompleksne trigonometrijske funkcije sin i cos nisu ograničene.[2] To ćemo kasnije dobiti i kao posljedicu jednog važnog teorema.

kojeg?

Kompleksne funkcije tangens i kotangens definiramo formulama

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

[2] Kompleksne funkcije $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ i $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nisu ograničene funkcije.

za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje gornji izrazi imaju smisla. Lako je pokazati (provedite račun) da je $\sin z = 0$ ako i samo ako je $z = k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, te da je $\cos z = 0$ ako i samo ako je $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Prema tome, domena tangensa je $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a domena kotangensa $\mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Konačno, navedimo da se kompleksne funkcije sinus i kosinus mogu izraziti isključivo u terminima realnih funkcija. Za sve $z \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x+iy) \\
&= \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \\
&= \sin x \cdot \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} + \cos x \cdot \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \\
&= \sin x \cdot \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + \cos x \cdot \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} \\
&= \sin x \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i \cos x \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\
&= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

Slično provjerimo da za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Ovdje smo koristili definicije hiperbolnih funkcija realne varijable: za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Iz dosad prezentiranog načina razmišljanja kod proširivanje realnih funkcija, jasno je da nam upravo ove formule omogućuju definiciju istoimenih kompleksnih funkcija.

Hiperbolne kompleksne funkcije sh i ch se definiraju kao

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sada poznajemo znatno više primjera kompleksnih funkcija kompleksne varijable nego na početku ovog poglavlja, pa možemo započeti s proučavanjem njihovih svojstava. Već u idućem poglavlju proučavamo derivabilnost kompleksnih funkcija.

3 Derivacija kompleksne funkcije

Pojam derivabilnosti kompleksne funkcije kompleksne varijable definira se "istom" formulom kao u realnom slučaju.

Definicija 3.1. *Neka je zadana funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *i* $z_0 \in \Omega$. *Funkcija* f *je* ***derivabilna*** *u točki* z_0 *ako postoji*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{3.1}$$

Ukoliko taj limes postoji, označavamo ga s $f'(z_0)$ *i nazivamo* ***derivacija funkcije*** f ***u točki*** z_0.

Funkcija f *je* ***derivabilna na*** Ω *ako je derivabilna u svakoj točki skupa* Ω *(još kažemo da je* f ***holomorfna na*** Ω*); u tom slučaju možemo definirati funkciju* $f' : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto f'(z)$ *koju nazivamo* ***derivacija funkcije*** f.

Funkcija f *je* ***cijela*** *ako je derivabilna na cijelom* $\mathbb{C}$.

Zamjenom varijabli $z = z_0 + h$ u (3.1) dobijemo još jedan zapis istog limesa

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{3.2}$$

Nekad je spretnije koristiti ovu formulu.

Primjer 3.2. Izračunajmo, ako postoji, derivaciju funkcije $f(z) = z^2$ u proizvoljnoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$. Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0. \end{aligned}$$

S obzirom da je z_0 bila proizvoljno odabrana točka, derivacija funkcije f je zadana s $f'(z) = 2z$.

Primjer 3.3. Provjerimo postoji li derivacija funkcije $f(z) = \operatorname{Re} z$. Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0 + h) - \operatorname{Re} z_0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} h - \operatorname{Re} z_0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}. \end{aligned}$$

!!!!!! S obzirom da je $h \in \mathbb{C}$ i h teži u 0, ako ovaj limes postoji onda mora vrijediti

$$\lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} = \lim_{h \in i\mathbb{R}, h \to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

Međutim, ova jednakost ne vrijedi jer

$$\lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} = \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

dok je

$$\lim_{h \in i\mathbb{R}, h \to 0} \frac{\operatorname{Re} h}{h} = \lim_{h \in i\mathbb{R}, h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Prem tome, funkcija $f(z) = \operatorname{Re} z$ nije derivabilna niti u jednoj točki iz $\mathbb{C}$. [1]

[1] Na isti način provjerite postoji li derivacija funkcije $f(z) = \bar{z}$.

Lako se provjere sljedeće tvrdnje (to jest, na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable).

Neka su zadane funkcije $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ i točka $z_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:

(i) Ako je f derivabilna u z_0, onda je f neprekidna u z_0. Posebno, ako je f derivabilna na Ω onda je i neprekidna na Ω. Zaista, ako postoji $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tada je

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = 0.$$

(ii) Ako su f i g derivabilne u z_0 tada:

(1) Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ derivabilna u z_0 i

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

(2) fg je derivabilna u z_0 i

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(3) Ako $g(z_0) \neq 0$, onda je $\dfrac{f}{g}$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

(iii) Neka je $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, gdje je Ω_1 otvoren skup koji sadrži $f(\Omega)$. Ako je f derivabilna u točki z_0 i g derivabilna u $f(z_0)$, tada je $g \circ f$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Iz gornjih formula odmah slijedi da su polinomi derivabilne funkcije. Preciznije, ako je

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, tada je

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Racionalne funkcije su također derivabilne na svojoj domeni.

Sjetimo se da smo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pisali u obliku $f = u + iv$, gdje je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. Također, funkcija f je u jednoznačnoj korespondenciji s funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanom s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

(Iako se formalno radi o različitim funkcijama, možemo ih označavati istim slovom jer su jedna drugom potpuno i jednoznačno određene i iz domene i kodomene je jasno na koju od njih mislimo u konkretnoj situaciji.)

Vratimo se primjeru $f(z) = z^2$. Tada je

$$f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy,$$

pa je

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Kako su u i v funkcije realnih varijabli x i y možemo računati njihove parcijalne derivacije. Tako je

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = -2y, \quad v_x(x, y) = 2y, \quad v_y(x, y) = 2x.$$

Već smo izračunali da je $f'(z) = 2z$, odnosno

$$f'(z) = f'(x + iy) = 2x + i \cdot 2y.$$

Iz ovog primjera uočavamo da je

- $u_x(x, y) = v_y(x, y)$,
- $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$
- $f' = u_x + iv_x$.

Da ova zapažanja nisu specifičnost funkcije kvadriranja dokazujemo u sljedećem teoremu u kojem proučavamo vezu derivabilnosti kompleksne funkcije f i diferencijabilnosti realnih funkcija u i v dviju realnih varijabli.

Teorem 3.4. ***(Cauchy–Riemannovi uvjeti)*** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$. Tada je f derivabilna u točki z_0 (to jest, postoji limes (3.1)) ako i samo ako je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u točki (x_0, y_0) i vrijede* ***Cauchy–Riemannovi uvjeti****:*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0),$$
$$u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema vrlo jednostavno slijedi iz gornjih razmatranja i definicija, ali zahtijeva dosta pisanja.

$\boxed{\Rightarrow}$ Definicija 3.1 se može zapisati kao

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uočimo da $(x, y) \to (x_0, y_0)$ zapravo znači $z \to z_0$, jer je

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Neka je $f'(z_0) = a + ib$. Tada

$$\begin{aligned}
&|f(z) - f(z_0) - (a + ib)(z - z_0)|^2 = \\
&= (u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0))^2 + \\
&+ (v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0))^2 .
\end{aligned}$$

Uočimo da je lijeva strana ovog izraza veća ili jednaka od svakog sumanda na desnoj strani. Kako su ti sumandi nenegativni, (3.3) povlači

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Dakle, u i v su diferencijabilne i vrijedi

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = a, \\ u_y(x_0, y_0) = -b, \\ v_x(x_0, y_0) = b, \\ v_y(x_0, y_0) = a, \end{cases}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\
u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavljeni Cauchy–Riemannovi uvjeti pokazuju da možemo definirati realne brojeve a i b kao

$$\begin{aligned}
a &= u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\
-b &= u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pokazat ćemo da je $f'(z_0) = a + ib$. Pretpostavka da je u diferencijabilna u (x_0, y_0) može se u ovim oznaka napisati kao:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|u(x, y) - u(x_0, y_0) - a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Slično je i s v

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|v(x, y) - v(x_0, y_0) - b(x - x_0) - a(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Još jednom istaknimo da je ovo moguće zahvaljujući relaciji (3.4). Sada, na isti način kao u prvom dijelu dokaza, raspišemo izraz kod limesa te dobivamo

$$\lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - (a + ib) \right| = 0,$$

odakle slijedi $f'(z_0) = a + ib$. □

U sljedećem korolaru dajemo formulu za računanje derivacije $f'(z_0)$. Dokaz slijedi iz dokaza Teorema 3.4.

K

Korolar 3.5. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Ako je f derivabilna u točki z_0, onda vrijedi*

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).}$$

Već smo spomenuli da sama egzistencija parcijalnih derivacija funkcije u (odnosno, v) ne garantira njihovu diferencijabilnost. Dovoljni uvjeti za diferencijabilnost od u i v su postojanje parcijalnih derivacija i njihova neprekidnost. To nam daje sljedeći korolar koji ćemo često koristiti u zadacima.

K

Korolar 3.6. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Ako parcijalne derivacije funkcija u i v postoje i neprekidne su na nekoj okolini točke (x_0, y_0), te vrijede Cauchy–Riemannovi uvjete u z_0, tada je f derivabilna u točki z_0.*

K

Korolar 3.7. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ako postoje parcijalne derivacije funkcija u i v i neprekidne su na Ω, te ako f zadovoljava Cauchy–Riemannove uvjete na Ω, tada je f derivabilna na Ω i vrijedi*

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Primjenom korolara 3.7 sada lako dobivamo da je eksponencijalna funkcija derivabilna na cijelom $\mathbb{C}$, te da je

$$(e^z)' = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Zaista, imamo $u(x, y) = e^x \cos y$ i $v(x, y) = e^x \sin y$. Zato

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos y, \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y \\ v_x(x, y) &= e^x \sin y, \quad v_y(x, y) = e^x \cos y. \end{aligned}$$

Očito su parcijalne derivacije neprekidne na $\mathbb{C}$ i vrijedi $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$ na $\mathbb{C}$. Dakle, eksponencijalna funkcija je cijela funkcija (derivabilna na $\mathbb{C}$) i

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Sada se lako vidi i da su sin i cos cijele funkcije, te da vrijedi

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Može se pokazati da je ln derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0]$, te da vrijedi (očekivana) formula

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

ln(x+yi)=ln(sqrt(x^2+y^2))+arcctg(x/y)*i na y>0

(Provjerite to.) Dokaz ove formule ćemo dati kasnije na drugi način, koristeći integrale.

inače stavimo za y<0 (arcctg(x/y)-pi)

Ovu sekciju završavamo s još nekoliko važnih posljedica Teorema 3.4.

Teorem 3.8. *Neka je Ω područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $f'(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$. Tada je f konstantna funkcija.*

Dokaz. Korolar 3.5 daje

$$0 = f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y), \quad \forall z \in \Omega,$$

pa je $u_x = v_x = 0$ na Ω. Sada Cauchy–Riemmanovi uvjeti daju $u_y = v_y = 0$ na Ω. Ovim smo se prebacili na odgovarajuću situaciju iz diferencijalnog računa funkcija više realnih varijabli, pa slijedi da je u konstantna na Ω. Isto zaključimo i za v i tvrdnja teorema slijedi iz relacije $f = u + iv$. □

Ako Ω nije područje tada, po prethodnom teoremu, iz $f' = 0$ na Ω slijedi da je f konstantna na svakoj komponenti povezanosti od Ω; prema tome, ako Ω ima više od jedne komponente povezanosti, tada funkcija nije nužno konstantna nego "po dijelovima" konstantna. Na primjer, za funkciju

$$f(z) = \begin{cases} 1, & z \in K(1, 1); \\ 2, & z \in K(-1, 1), \end{cases}$$

vrijedi $f'(z) = 0$ za sve z iz njene domene, ali funkcija nije konstantna. Naravno, f je konstantna na svakoj svojoj komponenti povezanosti.

Korolar 3.9. *Neka je Ω područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija koja poprima samo realne ili samo imaginarne vrijednosti. Tada je f konstanta.*

Dokaz. Pretpostavimo da f poprima samo realne vrijednosti, to jest, da je $f(z) \in \mathbb{R}$ za sve $z \in \Omega$. Tada je $v = 0$ i zato $v_x = v_y = 0$. Iz Cauchy–Riemannovih uvjeta je tada $u_x = u_y = 0$, pa je $f'(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$. Tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema.

Slično u slučaju kada f poprima samo imaginarne vrijednosti. □

Za vježbu ostavljamo dokaz sljedećeg korolara i jedan zadatak.

Korolar 3.10. *Neka je Ω područje i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija takva da je $|f(z)| = c$ za svaki $z \in \Omega$. Tada je f konstantna funkcija.*

dokaz:promatramo konstantnu i dif. fj-u |f|

Zadatak 3.1. Postoji li derivabilna nekonstantna funkcija $f = u + iv$ tako da je $u_x = 0$ na cijeloj domeni?

f(x,y)=y-x*i

4 Integral kompleksne funkcije. Primitivna funkcija

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$. Svako neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ naziva se **put (u Ω)**. Točke $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ su **početak** i **kraj** puta γ. Put je **zatvoren** ako je $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sliku puta (to jest, skup $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$) ponekad označavamo s γ^*. Ako je zadana neka krivulja u kompleksnoj ravnini, onda svaki put čija se slika podudara sa zadanom krivuljom nazivamo **parametrizacijom** te krivulje.

Na primjer, gornja polukružnica sa središtem u ishodištu radijusa 1 parametrizirana je funkcijom

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it},$$

ali i funkcijom

$$\delta : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \delta(t) = \cos(\pi t) + i \sin(\pi t) = e^{i\pi t}.$$

Segment $[z_1, z_2]$ označavat će nam dužinu u $\mathbb{C}$ koja spaja z_1 i z_2. Jedna parametrizacija segmenta $[z_1, z_2]$ je

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Put $\gamma = \alpha + i\beta$ je **gladak** (ili **klase** C^1) ako je funkcija γ derivabilna i derivacija γ' je neprekidna. Znamo da je to ekvivalentno s tim da su realne funkcije realne varijable α i β glatke.

Put $\gamma = \alpha + i\beta$ je **po dijelovima gladak** (ili **po dijelovima klase** C^1) ako je gladak osim u konačno mnogo točaka, to jest, ako postoje točke

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$$

tako da su restrikcije

$$\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

glatke funkcije.

Za zadani put $\gamma : [a, b] \to \Omega$, put

$$\gamma^- : [a, b] \to \Omega, \quad \gamma^-(t) = \gamma^-(a + b - t)$$

nazivamo **suprotnim putom** od γ. Očito je $\gamma([a, b]) = \gamma^-([a, b])$, a početak i kraj puta γ su upravo kraj i početak od γ^-.

Duljina puta $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definirana se kao $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Definicija 4.1. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija, te $\gamma : [a, b] \to \Omega$ gladak put.* ***Integral funkcije*** *f* ***duž puta*** *γ definiramo kao kompleksni broj*

$$\boxed{\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.}$$

Ako je γ po dijelovima gladak put, te $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ točke takve da su $\gamma|_{[t_k,t_{k+1}]}, k = 0, \ldots, n-1$, glatke funkcije, onda se ***integral funkcije*** *f* ***duž puta*** *γ definira kao*

$$\int_\gamma f \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Mi ćemo često u iskazima pretpostavljati da je γ po dijelovima gladak put, a ipak u dokazima koristiti prvu formulu iz prethodne definicije. To ćemo raditi zato jer će nam zapis biti jednostavniji i dokaz razumljiviji, a opći slučaj će lako slijediti iz ovog posebnog slučaja.

Napomena 4.2. Ovako uveden pojam integrala po putu funkcije kompleksne varijable proširuje već poznati nam pojam integrala realne funkcije realne varijable. Naime, ako su $a, b \in \mathbb{R}$, tada je segment $[a, b]$ jedini put od a do b u $\mathbb{R}$, a njegova parametrizacija je dana s $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}, \gamma(t) = t$. Za svaku neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ imamo

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Primjer 4.3. Ako su $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tada je

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

parametrizacija dužine $\overline{z_1 z_2}$. Tada je $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ i zato

$$\int_{[z_1,z_2]} f \stackrel{def}{=} \int_\gamma f = (z_2 - z_1) \int_0^1 f(z_1 + t(z_2 - z_1))dt.$$

Zadatak 4.1. Dokažite sljedeće tvrdnje:

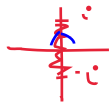
- Ako je γ po dijelovima gladak put, onda je i γ^- po dijelovima gladak put.
- Za svaku neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $\gamma : [a, b] \to \Omega$ vrijedi $\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$.
- Neka su $\gamma : [a, b] \to \Omega$ i $\delta : [c, d] \to \Omega$ po dijelovima glatki putovi, pri čemu je $\gamma(b) = \delta(c)$. Definiramo put $\eta : [a, d - c + b] \to \Omega$ formulom

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t), & a \le t \le b; \\ \delta(t + c - b), & b \le t \le d - c + b. \end{cases}$$

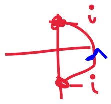
  Tada je η po dijelovima gladak put i vrijedi

$$\int_\eta f = \int_\gamma f + \int_\delta f.$$

Primjer 4.4. Izračunajmo $\int_{\gamma_1} |z|dz$ i $\int_{\gamma_2} |z|dz$, ako su γ_1 i γ_2 dva puta s početkom u $-i$ te krajem u i zadana s



$$\gamma_1(t) = it, \quad t \in [-1, 1],$$



$$\gamma_2(t) = e^{it}, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Očito je prvi put segment od $-i$ do i, a drugi desna polukružnica s centrom u ishodištu od $-i$ do i. Prema definiciji integrala je

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} |z|dz &= \int_{-1}^{1} |\gamma_1(t)|\gamma_1'(t)dt = \int_{-1}^{1} |t|idt = i, \\
\int_{\gamma_2} |z|dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\gamma_2(t)|\gamma_2'(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{it}dt = 2i.
\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo različite vrijednosti pri računanju integrala iste funkcije po γ_1 i γ_2, iako su to putovi s istim početkom i krajem. Uočimo da podintegralna funkcija nije derivabilna.

Primjer 4.5. Neka je $f(z) = \bar{z}^2$. [1] Izračunajmo integral funkcije f po tri različita puta s istim početkom i krajem.

(a) Integriramo najprije po segmentu $[0, 1+i]$. Tada je $\gamma(t) = t + it$ za $t \in [0, 1]$. Imamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_0^1 \overline{\gamma(t)}^2 \gamma'(t))dt = \int_0^1 (t - it)^2(1+i)dt \\
&= \int_0^1 (2 - 2i)t^2 dt = \frac{2}{3}(1 - i).
\end{aligned}$$

(b) Sada integriramo po dijelu parabole $y = x^2$ od 0 do $1 + i$. Tada je $\delta(t) = t + it^2$ za $t \in [0, 1]$ i kao maloprije

$$\begin{aligned}
\int_\delta f &= \int_0^1 \overline{\delta(t)}^2 \delta'(t))dt = \int_0^1 \overline{t + it^2}^2 (1 + 2it)dt \\
&= \int_0^1 (t - it^2)^2(1 + 2it)dt = \frac{14}{15} - \frac{1}{3}i.
\end{aligned}$$

(c) Za posljednji primjer integriramo po putu koji se sastoji iz dva segmenta: $\eta = [0, 1] \cup [1, 1+i]$. Tada su $\gamma_1(t) = t, t \in [0, 1]$ i $\gamma_2(t) = 1 + it, t \in [0, 1]$ parametrizacije segmenata $[0, 1]$ i $[1, 1+i]$, redom. Prema trećem dijelu prethodnog zadatka je $\int_\eta f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_0^1 t^2 \cdot 1dt + \int_0^1 \overline{1 + it}^2 \cdot idt = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$.

[1] Je li f derivabilna na svojoj domeni?

Lema 4.6. (***Fundamentalna ocjena integrala***) *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcije i $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put. Tada je*

$$\left| \int_\gamma f \right| \le M \cdot \ell(\gamma),$$

pri čemu je $\ell(\gamma)$ duljina puta γ, te

$$M = \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|.$$

Dokaz. Prvo uočimo da M postoji: $\gamma([a,b])$ je kompaktan skup (jer je γ neprekidna funkcija i $[a,b]$ kompaktan), pa neprekidna funkcija $|f|$ na tom kompaktnom skupu dostiže svoj maksimum.

Označimo $I := \int_\gamma f$. Ako je $I = 0$ onda nemamo što dokazivati. Zato pretpostavimo da je $I \neq 0$. Kompleksni broj I zapišimo u polarnoj formi $I = |I|e^{i\varphi}$, gdje je $\varphi = \arg I$. Tada je

$$\begin{aligned} |I| &\overset{\text{trik}}{=} e^{-i\varphi} I = e^{-i\varphi} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt. \end{aligned}$$

Kako je $|I| \in \mathbb{R}$, dobivamo $\int_a^b \mathrm{Im}\,(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt = 0$ i

$$|I| = \int_a^b \mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t))dt.$$

Sada, jer je $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ za sve $z \in \mathbb{C}$, slijedi

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_a^b \left| e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t) \right| dt = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\, dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M\ell(\gamma). \quad \square \end{aligned}$$

I pojam primitivne funkcije uvodimo po uzoru na realni slučaj.

Definicija 4.7. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija.* ***Primitivna funkcija*** *od f na Ω je funkcija $F : \Omega \to \mathbb{C}$ koja zadovoljava*

$$F'(z) = f(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Propozicija 4.8. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija koja ima primitivnu funkciju F na Ω. Tada za svaki po dijelovima gladak put $\gamma : [a,b] \to \Omega$ vrijedi*

$$\boxed{\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).}$$

tj. tada f ne ovisi o putu integracije

Posebno, $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.

Dokaz. Pretpostavimo da $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ima primitivnu funkciju F. Za svaki po dijelovima gladak put $\gamma : [a,b] \to \Omega$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = (F\circ\gamma)(t)|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square \end{aligned}$$

Prema tome, ako f ima primitivnu funkciju na Ω te su γ_1 i γ_2 dva puta u Ω s istim početkom z_1 i krajem z_2, tada je

$$\int_{\gamma_1} f = F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma_2} f,$$

što znači da integral funkcije f ne ovisi o putu koji spaja točke z_1 i z_2 i po kojem integriramo.

Situacija je drukčija ukoliko f nema primitivnu funkciju, što nam potvrđuju i primjeri 4.4 i 4.5. Uvedimo prvo pojam neovisnosti o putu integracije, a onda i dokažimo teorem o egzistenciji primitivne funkcije.

Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ za sve po dijelovima glatke putove γ_1, γ_2 u Ω koje imaju isti početak i kraj, onda kažemo da je integral od f **neovisan o putu integracije.** Neovisnost integrala funkcije o putu integracije može se izreći i kao: $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoreni put u Ω (to slijedi iz jednostavne opservacije da se svaki zatvoreni po dijelovima gladak put u Ω može rastaviti na dva po dijelovima glatka puta u Ω s istim početkom i krajem, te obratno, da svaka dva po dijelovima glatka zatvoren puta u Ω s istim početkom i krajem definiraju jedan po dijelovima gladak zatvoren put u Ω).

Pokažimo sada da je egzistencija primitivne funkcije ekvivalentna neovisnosti integrala po putu.

Teorem 4.9. *(Cauchyjev teorem za derivaciju). Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija. Tada vrijedi: f ima primitivnu funkciju na Ω ako i samo je $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.*

Dokaz. U prethodnoj tvrdnji smo dokazali da egzistencija primitivne funkcije od f implicira neovisnost integrala funkcije f po putu.

Dokažimo obrat. Pretpostavimo da je Ω povezan. (Ukoliko Ω nije povezan, promatramo pojedine komponente povezanosti. To možemo jer je svaki put γ u Ω, zbog svoje neprekidnosti, sadržan u točno jednoj komponenti povezanosti od Ω.)

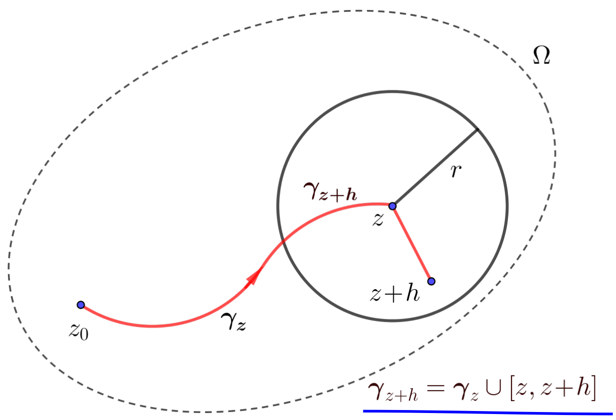
Odaberimo $z_0 \in \Omega$ na proizvoljan način i fiksirajmo ga. Za svaki $z \in \Omega$ neka je γ_z po dijelovima gladak put u Ω od z_0 do z. Definiramo

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \boxed{F(z) = \int_{\gamma_z} f.}$$

Uočimo najprije da vrijednost $F(z)$ ne ovisi o odabiru puta γ_z (koji počinje u z_0 i završava u z). Naime, iz pretpostavke da je $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω slijedi da, ako su γ_z i δ_z dva puta iz z_0 u z, onda γ_z i δ_z^- čine jedan zatvoren put γ i iz pretpostavke (1) dobivamo $\int_{\gamma_z} f = \int_{\delta_z} f$.

Pokazat ćemo da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$.

Zbog otvorenosti skupa Ω slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(z, r) \subseteq \Omega$. Tada za sve $h \in \mathbb{C}, |h| < r$ vrijedi $z + h \in K(z, r)$. Ako je γ_z put od z_0 do z, tada ćemo za γ_{z+h} uzeti put koji se sastoji (u smislu Zadatka 4.1(iii)) od γ_z i segmenta $[z, z + h]$.



Imamo da je

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} f - \int_{\gamma_z} f\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)(\underset{z}{\cancel{t}} + th)'dt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)dt = (\ f \text{ je neprekidna }) \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)dt = \int_0^1 f(z)dt = f(z)\int_0^1 dt = f(z). \quad \square
\end{aligned}$$

Za kraj ove točke primijenimo prethodni teorem na funkcije $z \mapsto z^n$.

Primjer 4.10. Neka je $r > 0$ i $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Za $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\int_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Ove formule možemo dokazati direktno po definiciji integrala. Međutim, slučaj $n \neq -1$ slijedi iz prethodnog teorema, jer su funkcije $z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ primitivne funkcije od $z \mapsto z^n$ na $\mathbb{C}$, odnosno $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Prema prethodnom teoremu, egzistencija primitivnih funkcija dovoljna je da zaključimo da, za svaki $n \neq -1$, vrijedi $\int_\gamma z^n dz = 0$.

Za $n = -1$ ne možemo postupiti kao maloprije, jer ne znamo ima li funkcija $z \mapsto \frac{1}{z}$ primitivnu funkciju na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zato gornji integral računamo po definiciji:

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^{-1} rie^{it} dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Sada opet koristimo prethodni teorem zat.: s obzirom da smo za funkciju $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z}$ našli put γ u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tako da je $\int_\gamma f \neq 0$, zaključujemo da primitivna funkcija od f ne postoji na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Kasnije ćemo dokazati da restrikcija ove funkcije na prikladno odabrani podskup domene ima primitivnu funkciju.)

5 Cauchyjev teorem za zvjezdast skup

U teoremu 4.9 smo dokazali da su za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $\int_\gamma f = 0$ za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω.

(2) f ima primitivnu funkciju na Ω.

U ovoj točki ćemo pokazati da za *derivabilnu* funkciju na *zvjezdastom* skupu ove dvije (ekvivalentne) tvrdnje uvijek vrijede, bez da pretpostavimo jednu od njih.

Za prvi teorem koji dokazujemo trebamo uvesti pojam trokuta. **Trokut** je konveksna ljuska tri točke. Ako su z_0, z_1 i z_2 te tri točke (to jest, vrhovi trokuta), tada pišemo $\Delta =< z_0, z_1, z_2 >$. Rub trokuta Δ sastoji se iz tri segmenta i zato je

$$\int_{\partial\Delta} f = \int_{[z_0,z_1]} f + \int_{[z_1,z_2]} f + \int_{[z_2,z_0]} f.$$

bitna orijentacija?

Već smo naučili kako računamo integral po segmentu, npr.

$$\begin{aligned} \int_{[z_0,z_1]} f &= \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_0 + t(z_1 - z_0))' dt \\ &= (z_1 - z_0) \int_0^1 f(z_0 + t(z_1 - z_0)) dt. \end{aligned}$$

Teorem 5.1. (**Goursat-Pringsheim**) *Ako je f derivabilna funkcija na Ω, tada je*

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall \Delta \subseteq \Omega.$$

Dokaz. Induktivno ćemo konstruirati niz trokuta

$$\Delta = \Delta_0 \supseteq \ldots \supseteq \Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \ldots$$

sa svojstvima:

(a) $\left| \int_{\partial\Delta_n} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_{n+1}} f \right|$;

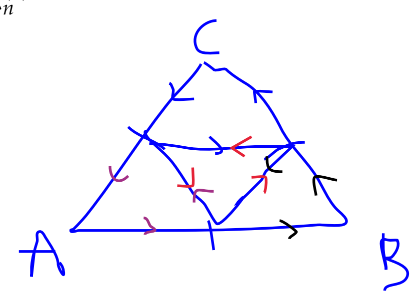
(b) opseg od Δ_n je dvostruko veći od opsega od Δ_{n+1}.

Dokaz provodimo induktivno. Prvi trokut Δ_0 već imamo. Ako pretpostavimo da smo kontruirali Δ_n, pokažimo kako dođemo do Δ_{n+1}.

Trokut Δ_n razdijelimo njegovim srednjicama na trokute $\Delta_n^{(1)}$, $\Delta_n^{(2)}$, $\Delta_n^{(3)}$, $\Delta_n^{(4)}$. Neka Δ_{n+1} bude onaj među trokutima $\Delta_n^{(1)}, \Delta_n^{(2)}, \Delta_n^{(3)}, \Delta_n^{(4)}$ koji ima svojstvo da je

$$\left| \int_{\partial\Delta_{n+1}} f \right| \geq \left| \int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f \right|, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

-srednjica trokuta je dužina koja spaja dva polovišta stranica



Tada je

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| = \left|\sum_{i=1}^{4}\int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f\right| \le \sum_{i=1}^{4}\left|\int_{\partial\Delta_n^{(i)}} f\right| \le 4\left|\int_{\partial\Delta_{n+1}} f\right|,$$

pa je (a) ispunjeno.

Za svaki $i = 1, \dots, 4$ su stranice trokuta $\Delta_n^{(i)}$ dvostruko manje od odgovarajućih stranica trokuta Δ_n, pa je ispunjeno i (b).

Sada imamo niz zatvorenih padajućih (s obzirom na inkluziju) skupova čiji dijametar teži u 0, pa po Cantorovom teoremu o presjeku slijedi da postoji $w \in \Omega$ tako da je

$$\bigcap_{n\ge 0} \Delta_n = \{w\}.$$

Funkcija f je derivabilna u w, što po definiciji znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $K(w,\delta) \subseteq \Omega$ i

$$(z \in K(w,\delta), z \neq w) \Rightarrow \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(w)\right| < \varepsilon. \qquad (5.1)$$

Uz oznaku $r(z) := f(z) - f(w) - f'(w)(z-w)$, (5.1) daje

$$|r(z)| \le \varepsilon |z-w|, \quad \forall z \in K(w,\delta). \qquad (5.2)$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

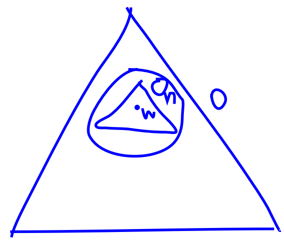
$$\int_{\partial\Delta_n} r(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz - \int_{\partial\Delta_n} (f(w) + f'(w)(z-w))dz.$$

Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju, za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω, pa posebno i za $\partial\Delta_n$ vrijedi

$$\int_{\partial\Delta_n} (\underbrace{f(w) + f'(w)}_{\text{konst.}}(z-w))dz = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(jer podintegralna funkcija ima primitivnu funkciju). Prema tome, imamo

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} r(z)dz, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (5.3)$$



Odaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\Delta_n \subseteq K(w,\delta)$ za sve $n \ge n_0$. Neka je O opseg trokuta Δ i O_n opseg trokuta Δ_n za $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da vrijedi

$$|z-w| \le O_n, \quad z \in \partial\Delta_n, \qquad (5.4)$$

pa iz (5.2) imamo

$$\max_{z\in\partial\Delta_n} |r(z)| \le \varepsilon O_n \overset{(b)}{=} \frac{\varepsilon}{2^n} O.$$

Prema fundamentalnoj ocjeni integrala (lema 4.6) slijedi

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} r\right| \le \max_{z\in\partial\Delta_n} |r(z)| \cdot O_n \le \left(\frac{\varepsilon}{2^n}\cdot O\right)\left(\frac{1}{2^n}\cdot O\right) = \frac{\varepsilon}{4^n}\cdot O^2. \qquad (5.5)$$

Konačno, imamo

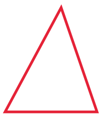
$$\left|\int_{\partial\Delta} f\right| \overset{(a)}{\le} 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} f\right| \overset{(5.3)}{=} 4^n \left|\int_{\partial\Delta_n} r\right| \overset{(5.5)}{\le} \varepsilon \cdot O^2.$$

Zbog proizvoljnosti od ε slijedi $\left|\int_{\partial\Delta} f\right| = 0$, odnosno $\int_{\partial\Delta} f = 0$. $\square$

Zadatak 5.1. Formulirajte analogon prethodnog teorema tako da umjesto trokuta koristite pravokutnike čije su stranice paralelne realnoj i imaginarnoj osi. Dokažite taj teorem na sličan način kao i teorem 5.1.

Definicija 5.2. *Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je **zvjezdast** ako postoji $z_0 \in \Omega$ sa svojstvom da je $[z_0, z] \subseteq \Omega$ za sve $z \in \Omega$. Točku z_0 s ovim svojstvom nazivamo **centrom zvjezdastog skupa** Ω.*

Na primjer, trokut i krug su zvjezdasti skupovi, dok kružni vijenac to nije. U slučaju kruga i trokuta, za točku z_0 možemo uzeti bilo koju točku trokuta, odnosno kruga. Uočite da je svaki konveksan skup zvjezdast, dok obratno ne vrijedi (nađite primjer).



Teorem 5.3. *(**Cauchyjev teorem za zvjezdast skup**) Neka je Ω zvjezdast skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada f ima primitivnu funkciju na Ω.*

Dokaz. Konstruirat ćemo primitivnu funkciju F za f.

Neka $z_0 \in \Omega$ centar zvjezdastog skupa Ω. Tada je $[z_0, z] \in \Omega$ za sve $z \in \Omega$, pa možemo definirati funkciju

$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \boxed{F(z) = \int_{[z_0,z]} f.}$$

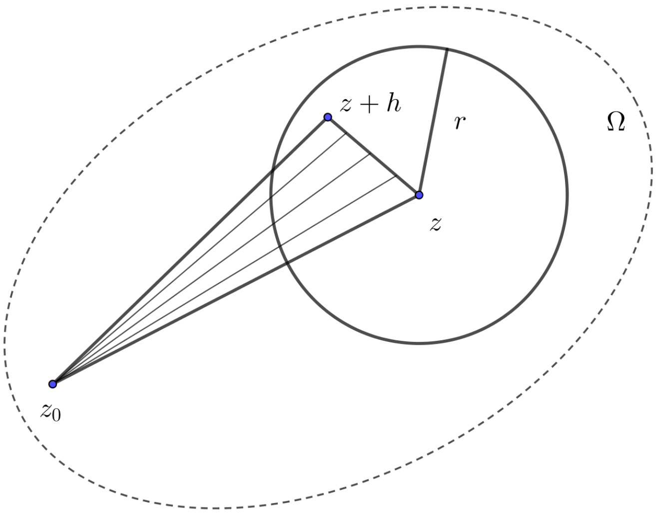
Pokažimo da je $F'(z) = f(z), z \in \Omega$.

Uzmimo neki $z \in \Omega$. Kako je Ω otvoren, možemo naći $r > 0$ takav da je $K(z, r) \subseteq \Omega$. Za sve $h \in K(0, r)$ vrijedi $z + h \in K(z, r)$, pa onda i $[z, z + h] \subseteq \Omega$. Kako je Ω zvjezdast (sa središtem z_0), to je

$$[z_0, w] \subseteq \Omega, \quad \forall w \in [z, z + h],$$

pa je

$$\Delta_h := < z_0, z, z + h > \subseteq \Omega, \quad \forall h \in K(0, r).$$



Sada nam Goursat-Pringsheimov teorem daje

$$\int_{\partial \Delta_h} f = 0, \quad \forall h \in K(0, r). \tag{5.6}$$

Raspisivanjem dobijemo da za svaki $h \in K(0,r)$ vrijedi

$$0 = \int_{\partial\Delta_h} f = \int_{[z_0,z]} f + \int_{[z,z+h]} f + \int_{[z+h,z_0]} f,$$

odakle je

$$\int_{[z,z+h]} f = \int_{[z_0,z+h]} f - \int_{[z_0,z]} f = F(z+h) - F(z).$$

Sada ponavljamo račun proveden u dokazu Cauchyjevog teorema za derivaciju:

$$\begin{aligned}
F'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)(z+th)'dt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 f(z+th)dt = (\ f \text{ je neprekidna }) \\
&= \int_0^1 \lim_{h\to 0} f(z+th)dt = f(z) \int_0^1 dt = f(z).
\end{aligned}$$

Time je dokaz gotov. □

Prema Cauchyjevom teoremu za derivaciju i prethodnom teoremu dobivamo ekvivalentnu formulaciju Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup.

K

Korolar 5.4. *Neka je Ω zvjezdast skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija. Tada je*

$$\int_\gamma f = 0$$

za svaki po dijelovima gladak zatvoren put γ u Ω. [1]

[1] Goursat-Pringsheimov teorem se ponekad, iz očitim razloga, naziva Cauchyjevim teoremom za trokute.

Primjer 5.5. (a) Funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definirana kao $f(z) = \frac{1}{z}$ je derivabilna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Već smo uočili da f nema primitivnu fukciju na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sjetimo se, zahvaljujući Cauchyjevom teoremu za derivaciju dovoljno je bilo pronaći po dijelovima gladak zatvoren put γ u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ takav da je $\int_\gamma \frac{1}{z}dz \neq 0$. Primjer takvog puta je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \gamma(t) = re^{it},$$

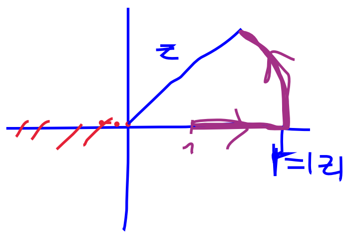
gdje je r bilo koji pozitivan broj.

(b) Promatrajmo sada restrikciju funkcije f, odnosno, uzmimo manju domenu, neku koja ne sadrži upravo spomenute kružnice.

Uzmimo $\Omega := \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Očito je Ω zvjezdast skup, jer za npr. $z_0 = 1$ vrijedi $[z_0, z] \subseteq \Omega$ za sve $z \in \Omega$. Prema Cauchyjevom teoremu za zvjezdast skup zaključujemo da $f(z) = \frac{1}{z}$ ima primitivnu funkciju na Ω. Još znamo i to da je primitivna funkcija zadana formulom

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z}dz,$$

gdje je γ_z proizvoljan po dijelovima gladak put u Ω od z_0 do z. Odaberimo γ_z koji se sastoji od segmenta $[1, r]$, gdje je $r = |z|$, te luka kružnice $\partial K(0,r)$ od r do z u pozitivnom smjeru.



Tada je

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 \frac{1}{1+(r-1)t}(1+(r-1)t)'dt + \int_0^{\arg(z)} \frac{1}{re^{i\varphi}}(re^{i\varphi})'d\varphi \\ &= \ln r + i\arg(z) = \ln z. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0].$$

Zadatak 5.2. Neka je $f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za sve trokute $\Delta \subseteq K(z_0, r)$. Dokažite da tada f ima primitivnu funkciju.

(Uputa: Analizirajte dokaz Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup i uočite da nam je derivabilnost od f trebala da bismo mogli primijeniti Goursat-Pringsheimov teorem i dobili da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za sve trokute $\Delta \subseteq K(z_0, r)$, što je u ovom zadatku pretpostavljeno da već vrijedi.)

Korolar 5.6. *Neka je Ω zvjezdast skup i $z_0 \in \Omega$ njegovo središte. Ako je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija na $\Omega \setminus \{z_0\}$, tada f ima primitivnu funkciju na Ω.*

Dokaz. I ovdje ćemo, kao i u dokazu Teorema 5.3, funkciju F definirati kao

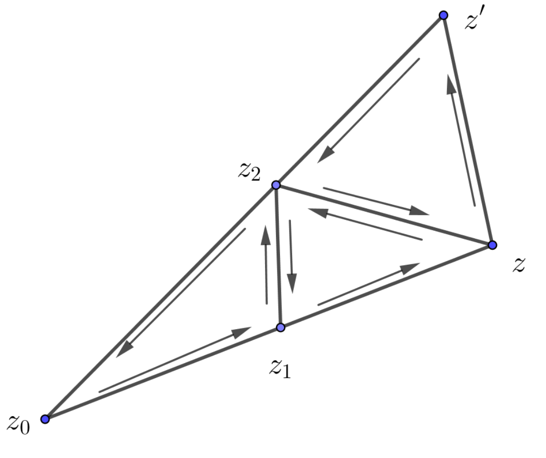
$$F : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \int_{[z_0, z]} f,$$

te pokazati da vrijedi $F'(z) = f(z), z \in \Omega$.

Dovoljno je dokazati da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za sve $\Delta \subseteq \Omega$, jer nakon toga možemo nastaviti kao u dokazu Teorema 5.3 (dio nakon formule (5.6)).

Za sve trokute koji su sadržani u $\Omega \setminus \{z_0\}$ to vrijedi prema Goursat-Pringsheimovom teoremu, jer je f derivabilna na $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Neka je sada $\Delta = < z_0, z, z' >$. Odaberimo bilo koje točke $z_1 \in [z_0, z]$ i $z_2 \in [z_0, z']$.



Tada je

$$\int_{\partial < z_0, z, z' >} f = \int_{\partial < z_0, z_1, z_2 >} f + \int_{\partial < z_1, z, z_2 >} f + \int_{\partial < z, z', z_2 >} f.$$

Prema Goursat-Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial<z_1,z,z_2>} f = \int_{\partial<z,z',z_2>} f = 0,$$

jer su trokuti $< z_1, z, z_2 >$ i $< z, z', z_2 >$ sadržani u $\Omega \setminus \{z_0\}$, gdje je f derivabilna. Zato je

$$\int_{\partial<z_0,z,z'>} f = \int_{\partial<z_0,z_1,z_2>} f, \quad \forall z_1 \in [z_0, z], \forall z_2 \in [z_0, z'].$$

Zbog neprekidnosti of f, prema fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi da je

$$\left| \int_{\partial<z_0,z_1,z_2>} f \right| \leq M(z_1, z_2) \left(|z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0| \right),$$

gdje je $M(z_1, z_2) = \max\{|f(z)| : z \in \partial < z_0, z_1, z_2 >\}$. Odavde, jer se približavanjem z_1 i z_2 točki z_0 vrijednost broja $M(z_1, z_2)$ smanjuje, a vrijednost od $|z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_2 - z_0|$ teži u 0, slijedi

$$\int_{\partial<z_0,z_1,z_2>} f \to 0 \text{ kada } z_1 \to z_0 \text{ i } z_2 \to z_0.$$

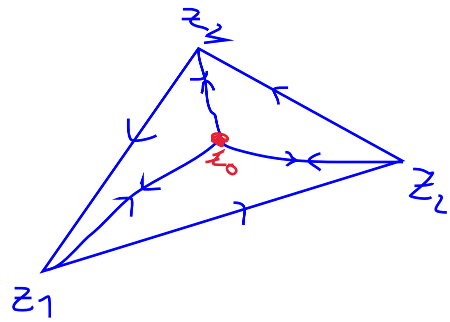
Zato je

$$\int_{\partial<z_0,z,z'>} f = 0, \quad \forall z, z' \in \Omega.$$

Time smo riješili sve trokute kojima je jedan vrh u točki z_0. Što ako je z_0 unutrašnja točka trokuta $< z_1, z_2, z_3 >$? Tada je

$$\int_{\partial<z_1,z_2,z_3>} f = \int_{\partial<z_1,z_2,z_0>} f + \int_{\partial<z_2,z_3,z_0>} f + \int_{\partial<z_3,z_1,z_0>} f = 0.$$

Slično kada je z_0 na nekoj stranici trokuta. □



Zadatak 5.3. Pretpostavimo da je f derivabilna funkcija na Ω. Neka su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi od Ω na kojima f ima primitivne funkcije, dakle, postoje funkcije $F_i : \Omega_i \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ takve da je $F_i'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega_i$, $i = 1, 2$. Ako je $\Omega_1 \cap \Omega_2$ povezan skup, onda f ima primitivnu funkciju na $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Rješenje. Očito je $F_1' - F_2' = 0$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$, pa zbog povezanosti presjeka postoji konstanta C takva da je $F_1 - F_2 = C$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Tada je funkcija

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in \Omega_1; \\ F_2(z) + C, & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

dobro definirana na $\Omega_1 \cup \Omega_2$ i za sve $z \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ vrijedi $F'(z) = f(z)$. □

6 Cauchyjeva integralna formula

Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$ parametrizacija kružnice sa središtem u z_0 radijusa r. Tada je

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0, \quad n \neq 1,$$

jer podintegralna funkcija ima primitivnu funkciju na otvoren skupu $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Za $n = 1$ direktno (to jest, po definiciji integrala) izračunamo da je

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \tag{6.1}$$

(To smo napravili u primjeru 4.10 za posebni slučaj $z_0 = 0$.)

U sljedećoj lemi ćemo vidjeti da vrijednost integrala ostaje ista i ako umjesto središta kružnice z_0 stavimo bilo koju točku u krugu $K(z_0, r)$.

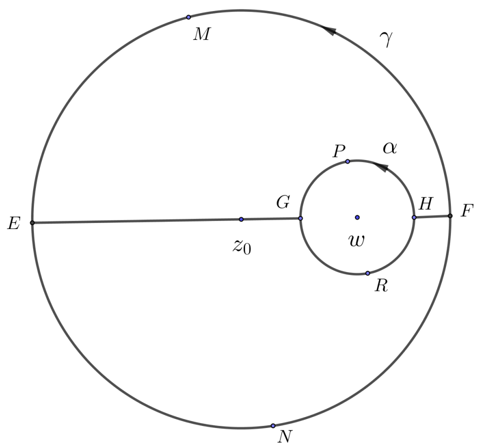
Lema 6.1. *Neka je* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. *Tada je*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - w} = 2\pi i, \quad \forall w \in K(z_0, r).$$

Dokaz. Tvrdnja je već dokazana za slučaj $w = z_0$.

Neka je $w \neq z_0$ i $\delta > 0$ takav da je $z_0 \notin K(w, \delta)$ i $K(w, \delta) \subseteq K(z_0, r)$. Neka je α parametrizacija kružnice $\partial K(w, \delta)$ dana s

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \alpha(t) = w + \delta e^{it}.$$

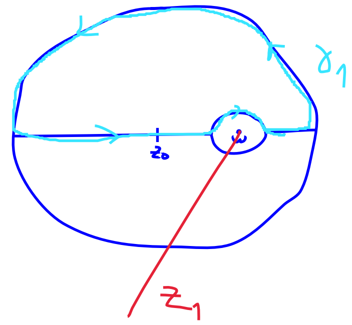


Neka je γ_1 krivulja koja se sastoji od luka kružnice γ od točke F preko M do E, zatim od segmenta $[E, G]$, pa od luka kružnice α od točke G preko P do H, i na kraju od segmenta $[H, F]$.

Neka je γ_2 krivulja koja se sastoji od luka kružnice γ od točke E preko N do F, zatim od segmenta $[F, H]$, pa od luka kružnice α kroz od H preko R do G, i na kraju od segmenta $[G, E]$. Očito je

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-w} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-w} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} - \int_{\alpha} \frac{dz}{z-w}. \tag{6.2}$$

Pokažimo prvo da su oba integrala s lijeve strane jednaka nuli.



Odaberimo zraku Z_1 u $\mathbb{C}$ s početkom u w tako da je γ_1 sadržan u $\mathbb{C} \setminus Z_1$ (točnije, slika od γ_1 je sadržana u $\mathbb{C} \setminus Z_1$). Kako je $\mathbb{C} \setminus Z_1$ zvjezdast skup, a funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ je derivabilna funkcija na tom skupu, po Cauchyjevom teorem za zvjezdaste skupove možemo zaključiti da je

$$\int_{\eta} \frac{dz}{z-w} = 0$$

za svaki po dijelovima gladak zatvoren put η u $\mathbb{C} \setminus Z_1$. Posebno, ako za η uzmemo γ_1, imamo

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-w} = 0. \tag{6.3}$$

Uzmimo sada zraku Z_2 u $\mathbb{C}$ s početkom u w tako da je γ_2 sadržan u $\mathbb{C} \setminus Z_2$. Opet imamo derivabilnu funkciju $z \mapsto \frac{1}{z-w}$ na zvjezdastom skupu $\mathbb{C} \setminus Z_2$, pa po Cauchyjevom teorem za zvjezdaste skupove zaključujemo da je

$$\int_{\eta} \frac{dz}{z-w} = 0$$

za svaki po dijelovima gladak zatvoren put η u $\mathbb{C} \setminus Z_2$. Jedan takav put je γ_2, pa imamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-w} = 0. \tag{6.4}$$

Uvrštavajući (6.3) i (6.4) u (6.2) dobivamo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \int_{\alpha} \frac{dz}{z-w}.$$

Uočite da je (u integralu s desne strane jednakosti) w središte kružnice α; zato prema formuli (6.1) zaključujemo da je $\int_\alpha \frac{1}{z-w} dz = 2\pi i$, odakle je

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i.$$

□

Napomena 6.2. Ako je $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$ tada je $\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 0$ (ovo zaključujemo na potpuno isti način kao što smo u prethodnom dokazu zaključili da je $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-w} = 0$). Uočimo još da $\int_\gamma \frac{dz}{z-w}$ nije definiran za w s kružnice γ, jer tada kružnica γ po kojoj integriramo nije u domeni. Prema tome, možemo napisati proširenu verziju prethodne leme:

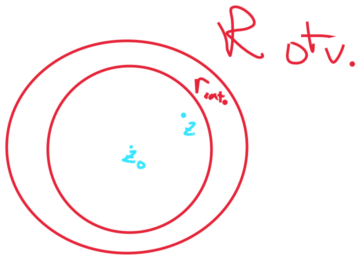
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-w} = \begin{cases} 2\pi i, & w \in K(z_0, r); \\ 0, & w \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r); \\ \text{nedefinirano}, & w \in \partial \overline{K}(z_0, r). \end{cases}$$

Prethodna lema važna je za dokaz sljedećeg teorema, onog po kojem ova lekcija i nosi naslov. Također, prethodna lema je specijalan slučaj sljedećeg teorema (kada je $f(z) = 1$ za sve $z \in \Omega$).

Teorem 6.3 (Cauchyjeva integralna formula za krug). *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.



Dokaz. Fiksirajmo $z \in K(z_0, r)$. Iz kompaktnosti skupa $\overline{K}(z_0, r)$ slijedi da postoji $R > 0$ tako da je $\overline{K}(z_0, r) \subseteq K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Definiramo funkciju $g : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$ kao

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Funkcija g je neprekidna na $K(z_0, R)$. Naime, g je očito neprekidna na $K(z_0, R) \setminus \{z\}$ jer je na tom dijelu zadana kao kvocijent neprekidnih funkcija $z \mapsto f(w) - f(z)$ i $z \mapsto z - w$, pri čemu funkcija iz nazivnika nema nultočku u $K(z_0, R) \setminus \{z\}$. Nadalje, f je derivabilna u z pa je

$$\lim_{w \to z} g(w) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = f'(z),$$

što nam daje neprekidnost od g i u preostaloj točki točki z.

Osim toga, funkcija g je derivabilna na $K(z_0, R) \setminus \{z\}$, jer je zadana kao kvocijent derivabilnih funkcija na tom skupu.

Sada možemo primijeniti korolar 5.6 i zaključiti da funkcija g ima primitivnu funkciju na $K(z_0, R)$ i zato je $\int_\gamma g = 0$. Uočimo da je za w koji leže na krivulji γ funkcija g zadana formulom iz prvog reda iz definicije od g (jer γ ne prolazi kroz z). Zato je

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \cdot 2\pi i, \end{aligned}$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz leme 6.1. Slijedi tvrdnja teorema. □

K

Korolar 6.4. *Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilne funkcije i $\overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Ako je $f(w) = g(w)$ za sve w koji leže na kružnici γ, tada je $f(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.*

Dokaz. Funkcije f i g zadovoljavaju pretpostavke teorema 6.3, pa zato za sve $z \in K(z_0, r)$ vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z} dw = g(z).$$

□

To znači da, ako imamo derivabilnu funkciju u čijoj se domeni nalazi neki zatvoreni krug, te ako znamo kako ta funkcija djeluje na rubu tog kruga, onda je time jednoznačno određeno djelovanje funkcije unutar kruga.

Napomena 6.5. Slično kao u napomeni 6.2 dokazujemo da, uz pretpostavke kao u teoremu 6.3, vrijedi

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz = \begin{cases} \cancel{f(z)}, \quad 0 & w \in K(z_0,r); \\ 0, & w \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,r); \\ \text{nedefinirano}, & w \in \partial \overline{K}(z_0,r); \end{cases}$$

(u slučaju $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,r)$ funkcija $z \mapsto \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ je derivabilna na nekom zvjezdastom skupu u kojem se nalazi γ).

Pokazat će se da je Cauchyjeva integralna formula ključna tvrdnja o holomorfnoj funkciji f, jer je podintegralna funkcija u formuli vrlo jednostavna kao funkcija od z. Već ćemo u sljedećem teoremu vidjeti da deriviranjem ispod znaka integrala dobivamo postojanje svih derivacija funkcije f, kao i formulu za te derivacije. Kasnije ćemo vidjeti da se koristeći Cauchyjevu integralnu formulu funkciju f može razviti u red potencija.

Trebat će nam sljedeća tehnička lema.

Lema 6.6. *Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$ i $f : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial z}(t,z)$ i neprekidna je. Tada je funkcija*

$$g : \Omega \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \int_a^b f(t,z)dt$$

derivabilna na Ω i vrijedi

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)dt.$$

Dokaz. Prisjetimo se da iz Integrala funkcija više varijabli znamo analognu tvrdnju za realne funkcije: Neka je $F : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da za sve $(t,x) \in [a,b] \times [c,d]$ postoji parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x}F(t,x)$, i da je $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)$ neprekidna funkcija na $[a,b] \times [c,d]$. Tada je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zadana sa $g(x) = \int_a^b F(t,x)dt$ derivabilna i vrijedi $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}F(t,x)dt$. (Vidi Teorem 11.1 u skriptama Integrali funkcija više varijabli, dostupno na web stranici
https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/)

Neka je sada $z = x + iy = (x,y)$, $f(t,z) = f(t,x,y) = u(t,x,y) + iv(t,x,y)$; tada je

$$g(z) = \int_a^b f(t,z)dt = \int_a^b u(t,x,y)dt + i\int_a^b v(t,x,y)dt = \\ = U(x,y) + iV(x,y).$$

Po gornjoj tvrdnji za realne funkcije, U i V su derivabilne po x,y i njihove parcijalne derivacije dobivaju se deriviranjem pod znakom integrala. Sada Cauchy–Riemannovi uvjeti za U i V slijede iz Cauchy–Riemannovih uvjeta za u, v, pa je g derivabilna i vrijedi formula za $g'(z)$. □

Teorem 6.7. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $\overline{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada za sve $n \geq 1$ vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

gdje je

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}.$$

*Posebno, f ima derivaciju **svakog** reda.*

Dokaz. Prema Teoremu 6.3 je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \forall \cancel{w}\, z \in K(z_0, r).$$

Odavde, prema prethodnoj lemi, slijedi

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \right) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dz} \left(\int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \right) \\ &\stackrel{6.6}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \end{aligned}$$

što daje tvrdnju za $n = 2$. Na isti način se induktivno dokaže tvrdnja za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Sjetimo se da smo derivabilne funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nazivali još i holomorfnim funkcijama. Kažemo da je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ **holomorfna u** $w \in \Omega$ ako je derivabilna na nekom otvorenom krugu $K(w, r) \subseteq \Omega$. Skup svih holomorfnih, to jest derivabilnih funkcija na Ω, označavamo s $H(\Omega)$. Iz teorema 6.7 slijedi

$$f \in H(\Omega) \Rightarrow (f^{(n)} \in H(\Omega), n \in \mathbb{N}). \tag{6.5}$$

K

Korolar 6.8. *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna na Ω i derivabilna na Ω osim možda u konačno mnogo točaka $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$. Onda je f derivabilna i u točkama $w_1, \ldots, w_n$, dakle na cijelom skupu Ω.*

Dokaz. Promatrajmo prvo točku w_1. Neka $r_1 > 0$ takav da je $K(w_1, r_1) \subseteq \Omega$ i $w_2, \ldots, w_n \notin K(w_1, r_1)$ (takav $r_1 > 0$ postoji jer je skup $\Omega \setminus \{w_2, \ldots, w_n\}$ otvoren skup). Dokažimo da je f derivabilna na $K(w_1, r_1)$ - to je dovoljno da zaključimo da je f derivabilna u w_1.

Kako je restrikcija funkcije f na $K(w_1, r_1)$ neprekidna na $K(w_1, r_1)$ i derivabilna na $K(w_1, r_1) \setminus \{w_1\}$, prema Korolaru 5.6 slijedi da f ima primitivnu funkciju F na $K(w_1, r_1)$. Iz $F'(z) = f(z), \forall z \in K(w_1, r_1)$ slijedi da je F derivabilna na $K(w_1, r_1)$. Prema prethodnom teoremu, F ima derivaciju svakog reda, što znači da i f ima derivaciju svakog reda na $K(w_1, r_1)$. Slijedi da je f derivabilna u w_1.

Sada postupak ponovimo za ostale točke. $\square$

Primjer 6.9. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ derivabilna funkcija i $z_0 \in \Omega$. Definiramo funkciju $g : \Omega \to \mathbb{C}$ formulom

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \neq z_0; \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Na isti način kao u dokazu teorema 6.3 zaključimo da je g neprekidna na Ω i derivabilna na $\Omega \setminus \{w\}$. Sada, nakon što smo dokazali prethodni korolar, možemo zaljučiti da je g je derivabilna i u z_0, dakle na cijelom Ω.

Poseban slučaj je sljedeća funkcija, dobivena biranjem $z_0 = 0$ i $f(z) = \sin z$:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0; \\ 1, & z = 0. \end{cases}.$$

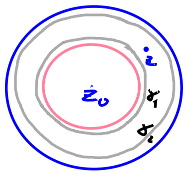
Zaključujemo da je g derivabilna na $\mathbb{C}$.

Kružni vijenac sa središtem u z_0 radijusa $0 \leq r < R \leq \infty$ označavat ćemo s $V(z_0; r, R)$. Prema tome,

$$V(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Uočite da dopuštamo da je $r = 0$ i $R = \infty$. Očito je

$$\begin{aligned} V(z_0; 0, R) &= K(z_0, R) \setminus \{z_0\}, \\ V(z_0; r, \infty) &= \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r), \\ V(z_0; 0, \infty) &= \mathbb{C} \setminus \{z_0\}. \end{aligned}$$



Teorem 6.10 (Cauchyjeva integralna formula za kružni vijenac). *Neka je $V = V(z_0; r, R)$ kružni vijenac, te f derivabilna funkcija na V. Tada vrijedi*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

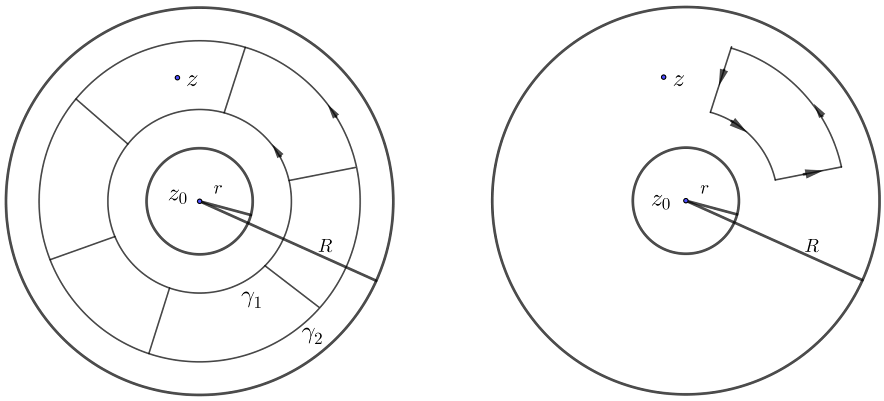
gdje su γ_1 i γ_2 kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$.

Dokaz. Neka je $z \in V$ proizvoljno odabran. Definiramo funkciju

$$g : V \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z; \\ f'(z), & w = z. \end{cases}$$

Prema prethodnom primjeru, g je derivabilna na V.

S obzirom da želimo primijeniti Cauchyjev teorem za zvjezdast skup, uvest ćemo nove krivulje koje će se moći smjestiti u zvjezdaste podskupove od V te će se na svaki od njih primijeniti Cauchyjev teorem za zvjezdast skup. Tako će se $\int_{\gamma_2} g - \int_{\gamma_1} g$ izraziti kao suma integrala po zatvorenim i po dijelovima glatkim krivuljama (jedna od njih je izdvojena na slici desno).



Kako je g je derivabilna funkcija na V, a svaka od "manjih" krivulja se može smjestiti u zvjezdast podskup od V, svaki od tih integrala bit će jednak nuli. Stoga

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

odnosno

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w - z} = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w - z}.$$

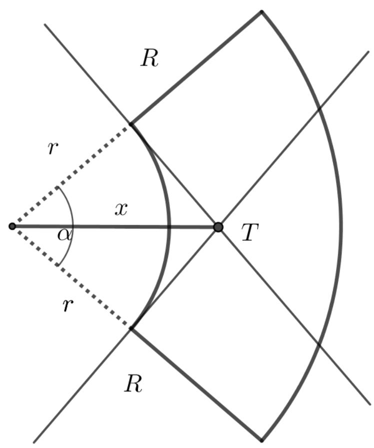
Drugi integral s lijeve strane je jednak $f(z) \cdot 2\pi i$ (lema 6.1), a drugi integral na desnoj strani jednak nuli (teorem 5.3). Slijedi

Nap. 6.2

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i f(z) = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

odakle tvrdnja odmah slijedi izražavanjem $f(z)$.

Preostaje dokazati da je doista moguće podijeliti kružni vijenac V na isječke kao gore, koji su sadržani u zvjezdastim podskupovima od V. Za to je dovoljno dokazati da je za dovoljno mali kut α isječak kružnog vijenca V sa središnjim kutem α zvjezdast skup.



Neka je T sjecište tangenti na manju kružnicu u vrhovima isječka (vidi sliku). Isječak će biti zvjezdast ako je točka T unutar isječka, odnosno ako je udaljenost x od T do središta kružnog vijenca manja od R. (Tada upravo T možemo uzeti za centar zvjezdastog skupa.)

Kako je

$$x = \frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$x < R$ je ekvivalentno sa $\cos\frac{\alpha}{2} > \frac{r}{R}$, odnosno s

$$\alpha < 2\arccos\frac{r}{R},$$ *arccos je padajuća!

što je ispunjeno za dovoljno mali kut α. □

I ovdje možemo zaključiti slično kao u korolaru 6.4

K **Korolar 6.11.** *Neka je $V = V(z_0; r, R)$ kružni vijenac, γ_1 i γ_2 kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$. Ako su f i g derivabilne funkcije na V za koje vrijedi $f(w) = g(w)$ za sve w koji leže na kružnicama γ_1 i γ_2, tada je $f(z) = g(z)$ za sve $z \in V(z_0; \rho_1, \rho_2)$.*

Jedna od posljedica Cauchyjeve integralne formule za krug je Liouvilleov teorem. Prvo uvedimo pojam cijele funkcije.

Definicija 6.12. Cijela funkcija *je kompleksna funkcija čija je domena cijeli $\mathbb{C}$ i koja je derivabilna (na $\mathbb{C}$).*

Teorem 6.13. *Svaka cijela ograničena funkcija je konstantna.*

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| < M$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Uzmimo proizvoljan $z_0 \in \mathbb{C}$. Za svaki $r > 0$ je kružnica

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$$

sadržana u domeni funkcije f (zato je bitno da je f definirana na cijelom $\mathbb{C}$).

Prema teoremu 6.7 je

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w - z_0)^2}dw.$$

Prema lemi 4.6 imamo

$$\begin{aligned} |f'(z_0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\max\{\frac{|f(w)|}{|w-z_0|^2} : w \in \gamma_r([0,2\pi])\}\ell(\gamma_r) \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^2}\cdot 2r\pi \\ &\leq \frac{M}{r}. \end{aligned}$$

Za odabrani z_0 dobili smo da vrijedi $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$ za svaki r. S obzirom da je $\lim_{r\to\infty}\frac{M}{r} = 0$ slijedi da je $f'(z_0) = 0$. Kako je z_0 bio proizvoljan, imamo $f'(z) = 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$, a onda je nužno f konstantna funkcija. □

Sljedeći teorem je verzija Liouvilleovog teorema za odozdo ograničene funkcije.

Korolar 6.14. *Neka je f cijela funkcija koja je odozdo ograničena. Dokažite da je f konstanta.*

Dokaz. Kako je f odozdo ograničena, postoji $m > 0$ takav da je $|f(z)| > m$ za sve z iz domene od f, dakle, za sve $z \in \mathbb{C}$. Sada je dobro definirana funkcija

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Funkcija g je cijela i ograničena i prema Liouvilleovom teoremu zaključujemo da je g konstantna funkcija. Tada je, naravno, i f konstantna funkcija. □

Sada iz Liouvilleovog teorema možemo dokazati osnovni teorem algebre.

Teorem 6.15 (Osnovni teorem algebre)**.** *Neka je*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinom stupnja $n \geq 1$. Tada postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $p(z_0) = 0$. Drugim riječima, svaki polinom stupnja većeg ili jednakog od 1 ima bar jednu nultočku u $\mathbb{C}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest, da je $p(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Tada je dobro definirana funkcije

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

Očito, f je cijela funkcija. Zbog

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0,$$

po definiciji limesa slijedi da postoji $R > 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq R.$$

Nadalje, postoji $M > 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq R$$

(neprekidna funkcija na kompaktu). Ako označimo $M_1 = \max\{1, M\}$ tada vrijedi

$$|f(z)| \leq M_1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

dakle, f je ograničena cijela funkcija. Prema Louvilleovom teoremu je tada f konstantna funkcija. No tada je i p konstantna funkcija, što ne može biti. □

Sada lako slijedi proširena verzija osnovnog teorema algebre.

Teorem 6.16 (Osnovni teorem algebre 2)**.** *Neka je*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinom stupnja $n \geq 1$. *Tada* p *ima točno* n *nultočaka u* $\mathbb{C}$ *računajući njihove kratnosti.*

Dokaz. Prema osnovnom teoremu algebre postoji $z_1 \in \mathbb{C}$ nultočka od p. Ako je $n = 1$ onda smo gotovi, a ako je $n \geq 2$ tada postoji polinom q stupnja $n - 1 \geq 1$ takav da je $p(z) = (z - z_1)q(z)$. Sada isto napravimo za polinom q i nakon (ukupno) n dolazimo do tvrdnje. $\square$

7 Opći Cauchyjev teorem

Ovaj dio teorije izlažemo samo informativno; rezultati ove točke neće se koristiti u ostatku predavanja.

Vidjeli smo da Cauchyjev teorem vrijedi za zvjezdast skup Ω, ali ne vrijedi za svako područje Ω; npr. ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Postavlja se pitanje da li vrijedi za općenitije skupove od zvjezdastih. Vidjet ćemo da Cauchyjev teorem vrijedi za jednostavo povezana ili 1-povezana područja, koja su intuitivno govoreći područja "bez rupa".

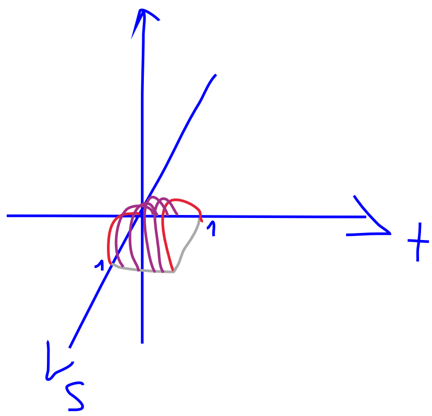
Primijetimo također da smo za funkciju $1/z$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ vidjeli da njezin integral po jediničnoj kružnici oko ishodišta nije 0. Međutim ista funkcija ima integral nula po mnogim drugim krivuljama u $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ - na primjer, po svakoj kružnici koja ne sadrži ishodište u svojoj unutrašnjosti. Intuitivno, te se druge kružnice mogu "neprekidno stisnuti u točku" unutar $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dok se to ne može napraviti za jediničnu kružnicu oko ishodišta.

Da bismo točnije definirali "neprekidno stiskanje", uvodimo pojam homotopije. Neka su $\alpha, \beta : [a, b] \to \Omega$ dva puta u Ω, oba od z_1 do z_2, to jest, $\alpha(a) = \beta(a) = z_1$, $\alpha(b) = \beta(b) = z_2$. Kažemo da su α i β homotopni ako postoji neprekidna funkcija

$$H : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega,$$

takva da je

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(s, 1) &= \beta(s), & \forall s &\in [a, b]; \\ H(a, t) &= z_1, & H(b, t) &= z_2, & \forall t &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

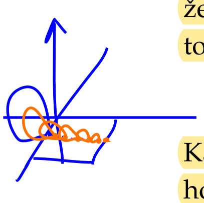


Funkciju H možemo zamišljati kao familiju krivulja $s \mapsto H(s, t)$ indeksiranu parametrom t, ili kao "putujuću krivulju" od z_1 do z_2, koja je u trenutku t jednaka krivulji $s \mapsto H(s, t)$ i koja se neprekidno kreće od α (za $t = 0$) do β (za $t = 1$).

Nas posebno zanima slučaj kad su α i β zatvoreni putevi odnosno petlje, to jest, početak i kraj im je isti kompleksni broj $z_0 \in \Omega$. Kažemo da je petlja $\alpha : [a, b] \to \Omega$ nul-homotopna u Ω, ako je homotopna konstantnom putu

zatvoren put se može neprekidno stisnuti u točku

$$\gamma(s) = z_0, \qquad s \in [a, b].$$



Kažemo da je područje Ω 1-povezano ako je svaka petlja u Ω nul-homotopna u Ω.

Opći Cauchyjev teorem Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Tada:

1. Za svaku po dijelovima glatku petlju γ u Ω koja je nul-homotopna u Ω, $\int_\gamma f = 0$.
2. Ako je Ω 1-povezano područje, onda je $\int_\gamma f = 0$ za svaku po dijelovima glatku petlju u Ω.

Indeks po dijelovima glatke petlje γ u odnosu na točku z koja nije u slici od γ definira se kao

$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

Indeks $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj. Intuitivno, to je broj obilazaka γ oko z u smjeru suprotno od kazaljke na satu.

Na primjer, ako je γ pozitivno orijentirana kružnica, onda znamo da je $\nu(\gamma, z) = 1$ za z unutar γ, i da je $\nu(\gamma, z) = 0$ za z izvan γ.

Lako je vidjeti da je funkcija $z \mapsto \nu(\gamma, z)$ neprekidna; ona je štoviše lokalno konstantna.

Opća Cauchyjeva integralna formula Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Neka je γ po dijelovima glatka nul-homotopna petlja u Ω i neka je z kompleksan broj koji nije u slici od γ. Tada je

$$\nu(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Zadatak. Dokažite opću Cauchyjevu integralnu formulu koristeći opći Cauchyjev teorem.

8 Lokalno uniformna konvergencija

Promatrajmo niz kompleksnih funkcija definiranih na istom skupu S. Ako za svaki $z \in S$ niz kompleksnih brojeva $(f_n(z))_n$ konvergira, onda je tim limesima definirana nova funkcija na S. Nazovimo tu funkciju f. Dakle, vrijedi

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in S.$$

Ovakvu vrstu konvergencije nazivamo konvergencija po točkama ili obična konvergencija.

Na primjer, promatrajmo niz funkcija

$$f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f_n(z) = (1 + \frac{1}{n})z.$$

Tada za svaki $z \in \mathbb{C}$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})z = z.$$

Tada je $f(z) = z$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Po definiciji limesa niza brojeva $(f_n(z))_n$ to znači sljedeće: za svaki $z \in \mathbb{C}$ i svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. U našem konkretnom primjeru, fiksiramo li z i odaberemo proizvoljan $\varepsilon > 0$ imamo

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \Leftrightarrow |(1 + \frac{1}{n})z - z| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{|z|}{\varepsilon},$$

što znači da n_0 mora biti neki prirodan broj za koji vrijedi

$$n_0 \geq \frac{|z|}{\varepsilon}.$$

Ovdje je važno uočiti da n_0 ovisi ne samo o ε nego i o odabranom z, te da nije moguće odabrati n_0 tako da je $n_0 \geq \frac{|z|}{\varepsilon}$ za sve z iz domene funkcija f_n, to jest, iz S. Dakle, ne postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$. Za niz funkcija za koje takav n_0 postoji kažemo da uniformno konvergira prema funkciji f. Ovo je, naravno, znatno jači uvjet od konvergencije po točkama i zato nije iznenađujuće da će uniformna konvergencija čuvati neka svojstva funkcija f_n (u smislu da će i funkcija f zadržati ta svojstva). Na primjer, ako niz neprekidnih funkcija (f_n) uniformno konvergira prema f, tada će i f biti neprekidna funkcija.

Pokazat će se da je često dovoljno da niz funkcija uniformno konvergira na nekom podskupu od S, ne nužno na cijelom S. Tako dolazimo do pojma lokalno uniformne konvergencije: za svaki $z \in S$ postoji okolina na kojoj niz restrikcija funkcija na tu okolinu konvergira uniformno.

Pogledajmo to na prethodnom primjeru. Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo proizvoljan $z_0 \in \mathbb{C}$ i promatrajmo $K(z_0, 1)$. Neka je n_0 takav da je $n_0 \geq \frac{|z_0|+1}{\varepsilon}$. Kako je tada $n_0 \geq \frac{|z|}{\varepsilon}$ za sve $z \in K(z_0, 1)$, to je prema prethodnom računu

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall z \in K(z_0, 1).$$

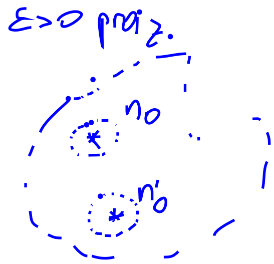
Drugim riječima, niz funkcija $f_n|_{K(z_0,1)}$ uniformno konvergira prema $f|_{K(z_0,1)}$. To znači da niz funkcija $(f_n)_n$, $f_n(z) = (1 + \frac{1}{n})z$ lokalno uniformno konvergira prema funkciji $f(z) = z$ na $\mathbb{C}$.

Time smo došli do tri vrste konvergencije niza funkcija. Navedimo sada njihove precizne definicije.

Definicija 8.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : S \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija, te neka je $f : S \to \mathbb{C}$.*

*(a) Kažemo da niz (f_n) **konvergira funkciji f po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konvergira prema $f(z)$ za svaki $z \in S$. Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.*

*(b) Kažemo da niz (f_n) **uniformno konvergira funkciji** f ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$. Pišemo $f_n \rightrightarrows f$.*



ne mora n_0=n_0'!!!

*(c) Kažemo da niz (f_n) **lokalno uniformno konvergira funkciji** f ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq S$ i da niz funkcija $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$. Pišemo $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.*

Teorem 8.2 (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije). *Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $f_n \xrightarrow{L.U.} f$;
2. *za svaki kompaktan podskup K od Ω vrijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$;*
3. *za svaki $\overline{K(z,r)} \subseteq \Omega$ vrijedi $f_n|_{\overline{K(z,r)}} \rightrightarrows f|_{\overline{K(z,r)}}$.*

Dokaz. (1)⇒(2) Iz pretpostavke slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$. Uočimo da je skup

$$\{K(z, r_z) : z \in K\}$$

otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K, pa postoje $z_1, \ldots, z_k \in K$ tako da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i}).$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ imamo da niz $(f_n|_{K(z_i, r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z, r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ tada

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})).$$

Kako je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, imamo

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K).$$

Slijedi (2).

Ostale implikacije su očite. $\square$

Teorem 8.3 (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa). *Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada je f neprekidna funkcija.*

Dokaz. Uzmimo $z_0 \in \Omega$ i pokažimo da je f neprekidna u z_0.

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo naći $\delta > 0$ tako da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i da za $z \in K(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$, dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Posebno za $n = n_0$ imamo

$$|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, r), \tag{8.1}$$

a uvrštavanjem $z = z_0$ u (8.1) slijedi

$$|f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.2}$$

Kako je f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta \in (0, r]$ takav da je

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, \delta). \tag{8.3}$$

Konačno, iz (8.1), (8.2) i (8.3) slijedi da je za svaki $z \in K(z_0, \delta)$

$$\begin{aligned} &|f(z) - f(z_0)| \leq \\ &\quad |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$ $\square$

Lema 8.4 (o zamjeni limesa i integrala). *Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

za svaki po dijelovima gladak put γ u Ω.

Dokaz. Neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put u Ω. Označimo $K := \gamma([a, b])$. Neka je $\varepsilon > 0$.

Prema prethodnoj tvrdnji, f je neprekidna funkcija, pa je izraz $\int_\gamma f$ dobro definiran.

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i teorema 8.2 slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$, pa za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{8.4}$$

Sada, koristeći lemu o ocjeni integrala i (8.4), dobivamo

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| &= \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \\ &\leq \max\{|(f_n - f)(z)| : z \in K\} \cdot \ell(\gamma) \leq \varepsilon \ell(\gamma).\end{aligned}$$

Slijedi tvrdnja. $\square$

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Teorem 8.5 (Morera). *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da je $\int_{\partial\Delta} f = 0$ za sve $\Delta \subseteq \Omega$. Tada je f holomorfna na Ω.*

Dokaz. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Ako je $g = f|_{K(z_0,r)} : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$, tada iz pretpostavke slijedi $\int_{\partial\Delta} g = 0$ za sve $\Delta \subseteq K(z_0, r)$. Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju. (Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Dakle, postoji $G : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ tako da je $G'(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Funkcija G je holomorfna na $K(z_0, r)$, pa je onda, prema generaliziranoj Cauchyjevojintegralnoj formuli, i $G' = g$ holomorfna na $K(z_0, r)$. Slijedi da je f holomorfna na $K(z_0, r)$, a zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi tvrdnja. $\square$

Teorem 8.6 (Weierstrassov teorem o limesu niza holomorfnih funkcija). *Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz holomorfnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$. Tada je $f \in H(\Omega)$ i*

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Prvo uočimo da je f neprekidna funkcija prema teoremu 8.3. Kako su sve funkcije f_n holomorfne, prema Goursat–Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial\Delta} f_n = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada lema 8.4 o zamjeni limesa i integrala povlači da je

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega,$$

1°

a onda preostaje samo, primjenom Morerinog teorema, zaključiti da je $f \in H(\Omega)$.

2°

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$. Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Prema generaliziranoj Cauchyjevoj integralnoj formuli za f_n i f imamo

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Primjenom leme o ocjeni integrala slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw\right|$$

$$\le \frac{k!}{2\pi} \cdot \max\{\frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w-z|^{k+1}} : w \in \gamma([0, 2\pi])\} \cdot \ell(\gamma).$$

Neka je $\rho \in (0, r)$. Za sve $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|w - z| \ge |w - z_0| - |z - z_0| > r - \rho > 0,$$

pa je

$$\frac{1}{|w-z|^{k+1}} < \frac{1}{(r-\rho)^{k+1}}, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Sada je za sve $z \in K(z_0, \rho)$. Označimo li $M = \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} = \frac{rk!}{(r-\rho)^{k+1}}$, slijedi da je

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \le M \cdot \max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in \gamma([0, 2\pi])\} \tag{8.5}$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$.

Neka je $K = \gamma([0, 2\pi])$. Zbog kompaktnosti od K, prema teoremu 8.2, iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$, pa za proizvoljno odabrani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad \forall w \in K, \forall n \ge n_0,$$

dakle,

$$\max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \ge n_0.$$

Iz (8.5) sada slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \le \varepsilon M, \quad \forall z \in K(z_0, \rho), \forall n \ge n_0,$$

to jest,

$$f_n^{(k)}|_{K(z_0,\rho)} \rightrightarrows f^{(k)}|_{K(z_0,\rho)}.$$

Zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}.$$

□

U daljnjem ćemo se prvenstveno baviti redovima funkcija. Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_n f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω. Analogno se definira obična ili uniformna konvergencija reda funkcija.

Teorem 8.7 (Weierstrassov M-test). *Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija. Neka je $(M_n)_n$, $M_n \geq 0$, niz brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Ako vrijedi*

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega,$$

tada red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno i uniformno na Ω.

Dokaz. Iz $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n, z \in \Omega$, prema kriteriju uspoređivanja slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ apsolutno konvergira za svaki $z \in \Omega$. Tada, za svaki $z \in \Omega$, red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (obično) konvergira, te možemo definirati funkciju

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Iz konvergencije reda $\sum_n M_n$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k>n} M_k < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. Tada za sve $z \in \Omega$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Slijedi uniformna konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ prema funkciji f. □

Primjer 8.8. Red funkcija $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ konvergira uniformno na $K(0,1)$. Zaista, ako za $k \in \mathbb{N}$ stavimo

$$f_k(z) = \frac{z^k}{k^2} \quad \text{i} \quad M_k = \frac{1}{k^2},$$

tada su zadovoljene pretpostavke prethodnog teorema i slijedi tvrdnja.

9 Redovi potencija

Red potencija je red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{9.1}$$

Prvo je pitanje za koje $z \in \mathbb{C}$ red (9.1) konvergira. Kad odgovorimo na to pitanje, onda ćemo proučavati funkciju f definiranu sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Posebno, vidjet ćemo da ako red (9.1) konvergira na nekom otvorenom krugu, onda je funkcija $f(z)$ holomorfna na tom krugu.

Lema 9.1 (Abelova lema). *Neka je $z' \neq z_0$. Ako red **brojeva***

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z' - z_0)^n$$

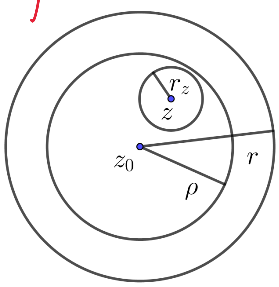
konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Dokaz. Prema nužnom uvjetu konvergencije reda brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z' - z_0)^n$ slijedi $\lim_{n\to\infty} |a_n (z' - z_0)^n| = 0$, zbog čega je niz $(|a_n (z' - z_0)^n|)_n$ ograničen. Dakle, postoji $M > 0$ tako da je $|a_n (z' - z_0)^n| < M$ za sve $n \geq 0$.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

za sve $n \geq 0$. Označimo $M_n = M \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n, n \geq 0$. Tada je $\sum_n M_n$ suma geometrijskog reda kvocijenta manjeg od 1, pa ovaj red konvergira. Prema Weierstrassovom M-testu tada i red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$. To vrijedi za svaki $\rho \in (0, r)$.



Neka je $z \in K(z_0, r)$ (slika desno). Tada postoji $\rho \in (0, r)$ takav da je $z \in K(z_0, \rho)$. Neka je $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq K(z_0, \rho)$. Prema dokazanom, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$, pa onda i na $K(z, r_z)$. Slijedi tvrdnja. $\square$

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (9.1) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga. Pri tome prazan skup i cijeli $\mathbb{C}$ također smatramo otvorenim krugovima: prazan skup je otvoren krug radijusa 0, a $\mathbb{C}$ je otvoren krug radijusa $+\infty$.

U sljedećem teoremu ćemo vidjeti kako se radijus tog maksimalnog kruga konvergencije može izraziti pomoću koeficijenata a_n. Prije toga jedna napomena.

Napomena 9.2. (a) Prisjetimo se definicije limesa superiora niza $(\rho_n)_n$, gdje su $\rho_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je (ρ_n) neograničen, tada je $\limsup_n \rho_n = \infty$, a ako je ograničen, tada je $\limsup_n \rho_n$ najveće gomilište tog niza. (Svaki ograničen niz ima bar jedno gomilište. Zadatak: dokažite da za ograničen niz postoji najveće gomilište, odnosno da je supremum skupa svih gomilišta i sam gomilište niza (ρ_n).)

Očito, u slučaju konvergentnog niza vrijedi $\limsup_n \rho_n = \lim \rho_n$. Na primjer, ako je $\rho_n = 3 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, tada je to ograničen niz s gomilištima 2 i 4, pa je $\limsup_n \rho_n = 4$.

(b) **Cauchyjev kriterij za konvergenciju.** Neka je $\sum_n a_n$ red kompleksnih brojeva. Tada:

1. Ako postoji pozitivan realan broj $A < 1$ takav da je $\sqrt[n]{|a_n|} \leq A$ za sve $n \in N$ počevši od nekog n_0, onda red $\sum_n a_n$ apsolutno konvergira.

2. Ako je $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$, onda red $\sum_n a_n$ divergira.

Radi kompletnosti, podsjetimo se dokaza ove tvrdnje (detaljnije u skriptama prof. Guljaša, Teorem 6.9, https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf). Tvrdnja (1) slijedi iz usporedbe reda $\sum_n |a_n|$ s geometrijskim redom $\sum_n A^n$, dok tvrdnja (2) slijedi iz nužnog uvjeta konvergencije: ako $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ za beskonačno mnogo n tada $|a_n| > 1$ za beskonačno mnogo n, pa niz (a_n) ne teži u 0.

(c) Neka su (α_n) i (β_n) dva niza nenegativnih brojeva. Pretpostavimo da postoji $\beta = \lim_n \beta_n$. Tada je

$$\limsup_n (\alpha_n \beta_n) = \limsup_n \alpha_n \lim_n \beta_n,$$

$$\limsup_n (\alpha_n^{\beta_n}) = (\limsup_n \alpha_n)^{\lim_n \beta_n}.$$

Teorem 9.3 (Cauchy–Hadamard). *Neka je zadan red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Neka je*

$$r = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(Pritom, ako je $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ tada je $r = \infty$, te ako je $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ tada je $r = 0$.) Tada

(1) red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$;

(2) za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$ red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergira.

Dokaz. (1) Neka je $z' \in K(z_0, r)$. Prema Cauchyjevom kriteriju, red brojeva $\sum_n |a_n (z' - z_0)|^n$ konvergira apsolutno, jer je

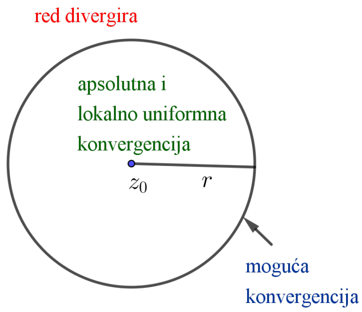
$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n (z' - z_0)^n|} = |z' - z_0| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Prema Abelovoj lemi tada i red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $K(z_0, |z'-z_0|)$. Zbog proizvoljnosti $z' \in K(z_0, r)$ slijedi tvrdnja (vidjeti kraj dokaza Abelove leme).

(2) Prema Cauchyjevom kriteriju za konvergenciju redova, ako je z takav da je $|z-z_0| > r$ tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ divergira. $\square$

Za red potencija red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ broj

$$r = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$



nazivamo **radijus konvergencije**, a $K(z_0, r)$ **krug konvergencije reda potencija**. Pritom podrazumijevamo da mogu nastupiti slučajevi $r = 0$ i $r = \infty$.

Prema prethodnom teoremu, na $K(z_0, r)$ red potencija konvergira apsolutno i lokalno uniformno, a izvan njega divergira; za točke s kružnice nemamo nikakav zaključak. Iz toga slijedi da je krug konvergencije reda potencija najveći krug oko z_0 na kojem zadani red potencija konvergira.

Primjer 9.4. Odredimo radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & \text{ako } n \text{ neparan;} \\ 3^n, & \text{ako } n \text{ paran.} \end{cases}$$

Kako je $(\sqrt[n]{a_n}) = (2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, ...)$ slijedi da je $\limsup_n = 3$. Zato je traženi radijus konvergencije jednak $\frac{1}{3}$.

Teorem 9.5 (Holomorfnost reda potencija). *Neka je $r > 0$ radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Definiramo funkciju*

$$f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Tada je f holomorfna na $K(z_0, r)$ i za svaki $m \geq 0$ vrijedi

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(z-z_0)^{n-m} \tag{9.2}$$

za sve $z \in K(z_0, r)$. Pritom je, za svaki $m \geq 0$, radijus konvergencije reda za $f^{(m)}$ također r.

Dokaz. S obzirom da zadani red potencija na krugu konvergencije $K(z_0, r)$ konvergira lokalno uniformno, prema Weierstrassovom teoremu o nizu holomorfnih funkcija slijedi da red $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ možemo derivirati član po član, odakle slijedi (9.2). Nadalje, radijus konvergencije reda za f' iznosi

$$\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}} = \frac{1}{\limsup_n \left(\sqrt[n+1]{n+1} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\left(\lim_n \sqrt[n+1]{n+1} \limsup_n \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\left(1 \cdot \frac{1}{r}\right)^1} = r.$$

Odavde slijedi da će i svakom narednom derivacijom reda potencija, novodobiveni red potencija zadržati isti radijus konvergencije r. $\square$

Uočimo da smo u ovom teoremu krenuli od reda potencija i na osnovi njega definirali funkciju f - ta funkcija je holomorfna na krugu konvergencije zadanog reda, a iz (9.2) slijedi veza između koeficijenata reda i funkcije f:

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}, \quad \forall m \geq 0.$$

Prema tome, imamo sljedeću jednakost

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Možemo li, krenuvši od proizvoljne holomorfne funkcije f, doći do ovakvog razvoja? Sljedeći teorem govori upravo o tome, da se svaka holomorfna funkcija može lokalno razviti u red potencija, to jest, oko svake točke domene holomorfne funkcije postoji okolina na kojoj je moguće funkciju razviti u red potencija.

Teorem 9.6 (Taylorov razvoj holomorfne funkcije). *Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ te $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada je*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r), \tag{9.3}$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira.

Dokaz. Neka je $\rho \in \langle 0, r\rangle$ i neka je γ kružnica s centrom u z_0 radijusa ρ. Tada za svaki $z \in K(z_0, \rho)$, prema Cauchyjevoj integralnoj formuli, vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}dw. \tag{9.4}$$

Neka je $z \in K(z_0, \rho)$. Tada za sve w na kružnici γ vrijedi

$$M := \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\rho}\right| < 1.$$

Zato geometrijski red $\sum_n M^n$ konvergira, pa prema Weierstrassovom M-testu slijedi da red

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n$$

konvergira uniformno (po w) na γ i vrijedi

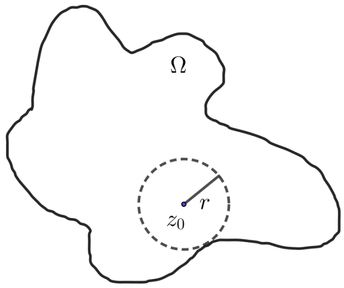
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}.$$

Sada iz (9.4), koristeći lemu o zamjeni limesa i integrala te generaliziranu Cauchyjevu integralnu formulu, zaključujemo da je

niz neprekidnih fj-a L.U. konvergira k podintegralnoj funkciji iz 9.4.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \boxed{\frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \quad \square \end{aligned}$$

Uočimo da je u prethodnom teoremu, za $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$, radijus $r > 0$ odabran tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.



Na tom krugu red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno, što znači da je njegov radijus konvergencije veći ili jednak od radijusa svakog kruga oko z_0 koji je sadržan u Ω.

Razvoj holomorfne funkcije u red potencija oko točaka iz domene je jedinstven. Naime, ako $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i ako vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, r), \tag{9.5}$$

pri čemu ovaj red lokalno uniformno konvergira na $K(z_0, r)$, tada je nužno

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \geq 0.$$

To slijedi iz teorema 9.5 o holomorfnosti reda potencija jer sada funkciju $f|_{K(z_0,r)}$ možemo promatrati kao funkciju definiranu preko reda potencija.

Primjer 9.7. Primijenimo prethodni teorem na funkciju $f(z) = e^z$ za slučaj $z_0 = 0$. Kako je $f^{(n)}(z) = e^z$ za svaki $n \geq 0$ imamo da je $f^{(n)}(0) = 1$ za svaki $n \geq 0$. Sada je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

za sve $z \in K(0, r)$, pri čemu je $r > 0$ takav da je $K(0, r)$ sadržan u domeni funkcije f. Kako je u našem slučaju f cijela funkcija, to je $K(0, r) \subseteq \mathbb{C}$ za sve $r > 0$, pa je

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Iz ovog se sada lako dobiju Taylorovi razvoji za kompleksne funkcije sinus[1] i kosinus[2].

[1] $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

[2] $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

Formulu (9.3) nazivamo **Taylorov razvoj funkcije** f u red potencija u okolini točke z_0.

Definicija 9.8. *Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$.*

*(a) z_0 je **nultočka od f konačnog reda** $m \in \mathbb{N}$ ako je*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(Ako je $f(z_0) \neq 0$ ponekad ćemo reći da je z_0 nultočka reda 0.)

*(b) z_0 je **nultočka od f beskonačnog reda** ako je*

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

*(c) z_0 je **izolirana nutočka od** f ako postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

Sljedeći teorem govori o izoliranosti nultočke konačnog reda holomorfne funkcije.

Teorem 9.9. *Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ nultočka od f konačnog reda $m \geq 0$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i postoji $g \in H(K(z_0, r))$ tako da je*

(1) $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$,

(2) $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Posebno, $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Dokaz. Neka je $\rho > 0$ takav da $K(z_0, \rho) \subseteq \Omega$. Prema teoremu 9.6 je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho),$$

pri čemu gornji red lokalno uniformno konvergira na $K(z_0, \rho)$. Kako je z_0 nultočka reda m imamo

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} (z - z_0)^n,$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$. Neka je

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Lako se vidi da je radijus konvergencije ovog reda potencija jednak radijusu konvergencije reda potencija $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, a taj je $r \geq \rho$. Prema teoremu 9.5 o holomorfnosti reda potencija zaključujemo da je

$$g \in H(K(z_0, \rho)).$$

Kako je z_0 je nultočka reda m funkcije f, imamo da je

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0,$$

a zbog neprekidnosti od g u z_0 tada postoji $r < \rho$ tako da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$. $\square$

Teorem 9.10 (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Taylorovog reda). *Neka je $f \in H(\Omega)$, te $z_0 \in \Omega$ i $R > 0$ takvi da je $K(z_0, R) \subseteq \Omega$. Tada za svaki $r < R$ vrijedi*

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \tag{9.6}$$

pri čemu je $M(r) = \max\{|f(w)| : w \in \partial K(z_0, r)\}$.

Dokaz. Prema generaliziranoj Cauchyjevoj integralnoj formuli je

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Primjenom leme o ocjeni integrala slijedi

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \left\{ \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} \right\} \ell(\gamma) \\ &= \frac{2r\pi}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \left\{ \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} \right\} = \frac{M(r)}{r^n}. \quad \square \end{aligned}$$

Na sljedeći teorem možemo gledati kao na neku vrstu generalizacije Liouvilleovog teorema. Podsjetimo se Liouvilleovog teorema: svaka cijela ograničena funkcija je konstantna.

Teorem 9.11. *Neka je f cijela funkcija takva da postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom da je*

$$|f(z)| \leq |z|^m, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tada je f polinom stupnja manjeg ili jednakog od m.

Dokaz. Neka je $r > 0$ proizvoljno odabran. Uz oznake kao u prethodnom teoremu i izbor $z_0 = 0$, iz pretpostavke slijedi

$$M(r) = \max\{|f(w)| : w \in \partial K(z_0, r)\} \leq r^m.$$

Prema (9.6) imamo

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{r^m}{r^n} = r^{m-n}, \quad \forall n \geq 0.$$

S obzirom da je r bio proizvoljno odabran pozitivan broj, te da je $\lim_{r \to \infty} r^{m-n} = 0$ za $n > m$, zaključujemo da je

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n > m.$$

Sada iz teorema 9.6 slijedi da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

za sve $z \in \mathbb{C}$. □

Za kraj ove lekcije naučimo i ovaj važan rezultat.

Teorem 9.12 (Princip jedinstvenosti holomorfne funkcije). *Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$. Neka je*

$$N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Ako N ima gomilište[3] *u Ω, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$.*

Dokaz. Neka je $w \in \Omega$ gomilište skupa N. Tada postoji niz (w_n) u N takav da je $w_n \neq w$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i $w = \lim_n w_n$. Kako je f neprekidna, slijedi $f(w) = \lim_n f(w_n) = 0$. Prema tome, w je također nultočka od f. Zbog postojanja niza nultočaka od f (različitih od w) koji teže u w, očito je da w nije izolirana nultočka od f. Kako su sve nultočke konačnog reda izolirane (teorem 9.9), zaključujemo da je w nultočka beskonačnog reda.

Uvedimo sada skupove

$$U = \{z \in \Omega : \; z \text{ je nultočka od } f \text{ beskonačnog reda}\},$$

$$V = \{z \in \Omega : \; z \text{ je nultočka od } f \text{ konačnog reda } m,\, m \geq 0\}.$$

Očito je

$$U \cap V = \emptyset, \quad U \cup V = \Omega, \quad U \neq \emptyset,$$

[3] Prisjetimo se: w je gomilište skupa N ako svaka okolina od w sadrži bar jednu točku iz N različitu od w.

(ovo zadnje vrijedi jer $w \in U$). Ako još pokažemo da su U i V otvoreni skupovi, tada će zbog povezanosti od Ω slijediti da je $V = \emptyset$. Onda je $\Omega = U$ i zato je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$, pa je tada tvrdnja dokazana.

Pokažimo najprije otvorenost od U. Neka je $z_0 \in U$ i neka je $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada je, prema teoremu 9.6,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

a kako je z_0 nultočka beskonačnog reda, slijedi

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in K(z_0, r),$$

pa je tada za sve $z \in K(z_0, r)$

$$f^{(m)}(z) = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

Zato je $K(z_0, r)$ sadržan u U. Time smo pokazali da je U otvoren skup.

Pokažimo otvorenost od V. Neka je $z_0 \in V$, to jest neka je z_0 nultočka konačnog reda $m \geq 0$. Prema teoremu 9.9 postoji $r > 0$ tako da je $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. No, tada su sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ nultočke reda $m = 0$, pa je $K(z_0, r) \subseteq V$ i gotovi smo. $\square$

Sljedeći korolar malo bolje pojašnjava zašto se prethodni teorem naziva princip jedinstvenosti holomorfne funkcije.

K **Korolar 9.13.** *Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje. Ako skup*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

ima gomilište u Ω, tada je $f = g$.

Dokaz. Primijenimo Princip jedinstvenosti na funkciju $f - g$. $\square$

Ovaj korolar možemo koristiti za brzo dokazivanje analogona formula iz realne analize za istoimene kompleksne funkcije koje ih proširuju. Na primjer, kako je $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda primjenom prethodnog korolara na funkcije $f(z) = \sin(2z)$ i $g(z) = 2\sin z \cos z$ (jer skup $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ sadrži $\mathbb{R}$ i zato ima gomilište u $\Omega = \mathbb{C}$) slijedi $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$. Dakle, vrijedi $\sin(2z) = 2\sin z \cos z$ za sve $z \in \mathbb{C}$. (Tvrdnju dokažite i direktno iz formula za sin i cos.)

Zadatak. Odredite sve cijele funkcije za koje vrijedi

1. $f(q) = 0$ za sve $q \in \mathbb{Q}$;
2. $f(x) = \cos x + i \sin x$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Navedimo jedan primjer u kojem ilustriramo primjenu prethodnog teorema, a ujedno se i podsjećamo nekih ranijih rezultata.

Primjer 9.14. Neka su f i g cijele funkcije takve da je $\overline{f}g$ također cijela funkcija. Pokažimo da je tada ili f konstantna funkcija ili je g nulfunkcija.

Ako je g nulfunkcija, onda smo gotovi. Pretpostavimo da g nije nulfunkcija - tada postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ tako da je $g(z_0) \neq 0$. Zbog neprekidnosti funkcije g slijedi da postoji $r > 0$ takav da je $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$. Tada je dobro definirana funkcija

$$H : K(z_0, r) \to \mathbb{C}, \quad h(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

Štoviše, h je holomorfna na $K(z_0, r)$. Tada je i $\overline{f} = \overline{f}gh$ holomorfna na $K(z_0, r)$.

Sada imamo da su i f i $\overline{f}$ holomorfne na $K(z_0, r)$, pa su onda i njihov zbroj i razlika $f \pm \overline{f}$ holomorfne funkcije na $K(z_0, r)$. Međutim, holomorfne funkcije koje poprimaju samo realne ili samo čisto imaginarne vrijednosti su nužno konstantne funkcije (slijedi iz Cauchy–Riemannovih uvjeta), pa je stoga $f = \frac{1}{2}((f + \overline{f}) + (f - \overline{f}))$ konstantna funkcija na krugu $K(z_0, r)$.

Tvrdnja ovog zadatka je da je f konstantna na cijelom $\mathbb{C}$, a ne samo na nekom podskupu od $\mathbb{C}$ kako smo za sada dobili. Međutim, zahvaljujući principu jedinstvenosti holomorfne funkcije, dovoljno je bilo provjeriti da je f konstantna na nekom podskupu od $\mathbb{C}$ koji ima gomilište u $\mathbb{C}$, a takav je svakako skup $K(z_0, r)$. Time smo dokazali tvrdnju.

10 Laurentov razvoj funkcije

Red oblika

$$b_0 + b_1(z-z_0)^{-1} + b_2(z-z_0)^{-2} + \ldots + b_n(z-z_0)^{-n} + \ldots \qquad (10.1)$$

gdje su $(b_n), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, z i z_0 kompleksni brojevi (opet z smatramo varijabilnim, a z_0 fiksiranim) može se, uz supstituciju $w = \frac{1}{z-z_0}$ promatrati kao red potencija $\sum_{n \geq 0} b_n w^n$. Iz Cauchy-Hadamardovog teorema zaključujemo da će red (10.1) konvergirati lokalno uniformno izvan nekog $\overline{K}(z_0, r)$ (osim, naravno, u slučaju kada je $r = \infty$). Kombinirajući s (običnim) redovima potencija, dolazimo do reda oblika

```
red suma_n b_n w_n konvergira za neki
r' oko z_0;
tj. konvergira za sve z td.
|z-z_0|>1/r'=:r
```

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad (10.2)$$

kojeg smatramo **konvergentnim** ako oba reda $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiraju. S obzirom da će prvi red lokalno uniformno konvergirati na $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$, a drugi na $K(z_0, R)$ za neke r i R, obostrani red (10.2) će lokalno uniformno konvergirati na kružnom vijencu $V(z_0; r, R)$ sa središtem u z_0 radijusa r i R. Funkcija

$$f : V(z_0; r, R) \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

će biti holomorfna na $V(z_0; r, R)$ (prema Weierstrassovom teoremu o limesu niza holomorfnih funkcija). Prema tome, obostrani red potencija definira holomorfnu funkciju na kružnom vijencu.

Ilustrirajmo to na jednom primjeru.

Primjer 10.1. Promatrajmo obostrani red

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Na kojem skupu taj red konvergira i prema kojoj funkciji?

Radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ je 2 i na $K(0, 2)$ on lokalno uniformno konvergira prema funkciji $z \mapsto \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$. [1] Red $\sum_{n=-1}^{-\infty} z^{-n}$ uz supstituciju $w = \frac{1}{z}$ postaje red potencija $\sum_{n=1}^{\infty} w^n$ čiji je radijus konvergencije 1 i koji lokalno uniformno na $K(0, 1)$ konvergira prema funkciji $w \mapsto \frac{w}{1-w}$; stoga red $\sum_{n=-1}^{-\infty} z^{-n}$ konvergira prema funkciji $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ izvan $\overline{K}(0, 1)$. Ako označimo

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{2-z} = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

[1] Suma geometrijskog reda:
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ ako je } |q| < 1.$$

tada je

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = f(z), \quad z \in V(0;1,2).$$

Isto kao i u prethodnom poglavlju, sada ćemo krenuti obrnutim putem, to jest, od holomorfne funkcije čija domena sadrži $V(z_0;r,R)$, te pokazati da se takva funkcija uvijek može razviti u obostrani red po potencijama $(z-z_0)^n, n \in \mathbb{Z}$.

Teorem 10.2 (Laurentov razvoj funkcije). *Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, te r i R takvi da je $V(z_0;r,R)$ sadržan u Ω. Tada je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in V(z_0;r,R), \tag{10.3}$$

pri čemu ovaj red konvergira lokalno uniformno. Nadalje, vrijedi

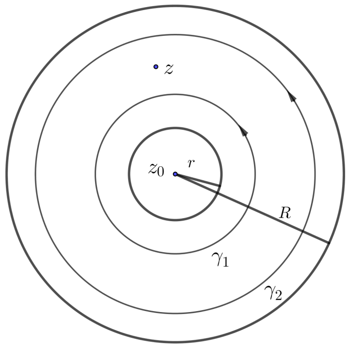
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdje je γ bilo koja pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u z_0 radijusa $\rho \in \langle r, R\rangle$.

Razvoj (10.3) nazivamo **Laurentov razvoj funkcije** f na $V(z_0;r,R)$.

Dokaz. Neka je $z \in V := V(z_0;r,R)$. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli za kružni vijenac imamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$$



pri čemu su γ_1 i γ_2 proizvoljne kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R$.

Definiramo funkcije

$$f_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,r) \to \mathbb{C}, \quad f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

$$f_2 : K(z_0,R) \to \mathbb{C}, \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

gdje su γ_1 i γ_2 kao gore. Uočimo da su funkcije f_1 i f_2 dobro definirane na svojim domenama i da ne ovise o izboru γ_1 i γ_2, uz uvjet $r < \rho_1 < |z-z_0| < \rho_2 < R$. (To je zato jer su podintegralne funkcije holomorfne na svojim domenama i tada dvije različite kružnice u domeni možemo spajati kao u dokazu Cauchyjeve integralne formule za kružni vijenac u po dijelovima zatvorene putove koje se mogu smjestiti u zvjezdaste skupove). Imamo

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in V. \tag{10.4}$$

Kako je $f_2 \in H(K(z_0,R))$, razvojem u Taylorov red oko z_0 dobivamo

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in K(z_0,R).$$

Ovaj red lokalno uniformno konvergira i vrijedi $a_n = \frac{f_2^{(n)}(z_0)}{n!}$. Koristeći Lemu 6.6 dobivamo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0.$$

Nadalje, $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$. Uvedimo nove varijable: $w' = \frac{1}{w - z_0}$ i $z' = \frac{1}{z - z_0}$. Tada je $w = z_0 + \frac{1}{w'}$ i $z = z_0 + \frac{1}{z'}$, a integriranje po pozitivno orijentiranoj kružnici γ_1 se prevodi u integriranje po negativno orijentiranoj kružnici $|w'| = \frac{1}{\rho_1}$. Dakle, ako je $\delta_1(t) = \frac{1}{\rho_1} e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ tada

$$f_1(z_0 + \frac{1}{z'}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_1} \frac{z'}{w'} \frac{f(z_0 + \frac{1}{w'})}{w' - z'} dw' \tag{10.5}$$

za sve $z' \in K(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}$. Funkcija $h : K(0, \frac{1}{r}) \to \mathbb{C}$ definirana kao

$$h(z') = \begin{cases} f_1(z_0 + \frac{1}{z'}), & z' \in K(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}; \\ 0, & z' = 0 \end{cases}$$

je neprekidna na $K(0, \frac{1}{r})$ i derivabilna na $K(0, \frac{1}{r}) \setminus \{0\}$. Stoga je h derivabilna na $K(0, \frac{1}{r})$ pa se može razviti u Taylorov red oko 0. Dakle, s obzirom da je $h(0) = 0$, vrijedi

$$h(z') = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z')^n, \quad z' \in K(0, \frac{1}{r})$$

odnosno, uz oznake $a_{-n} = b_n, n \geq 1$ i vraćajući se u varijablu z

$$f_1(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r).$$

Pritom gornji red konvergira lokalno uniformno.

Nadalje, vrijedi $b_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}, n \geq 1$, odakle, koristeći lemu 6.6 u (10.5) te vraćajući se u varijablu w, dobivamo

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_1} \frac{f(z_0 + \frac{1}{w'}) dw'}{w'^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{-(n-1)}}, \quad n \geq 1,$$

Označimo li $a_n = b_{-n}$, tada je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \leq -1.$$

Konačno, kao i kod definicije funkcija f_1 i f_2, na isti način zaključujemo da je

$$\int_{\gamma_1} F(w) dw = \int_{\gamma_2} F(w) dw = \int_{\gamma} F(w) dw = 2\pi i a_n,$$

gdje je γ kao u iskazu teorema i $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Sjetimo se da smo pri razvoju holomorfne funkcije $f \in H(\Omega)$ imali Taylorov razvoj funkcije f oko z_0 i jednakost (9.3) je vrijedila na svakom krugu oko z_0 koji je bio sadržan u Ω, pa smo uzimali maksimalan takav krug. Slično je ovdje, samo pri razvoju oko z_0 umjesto krugova promatramo kružne vijence sa središtem u z_0 koji su sadržani u Ω. Takvi kružni vijenci nisu uvijek jedinstveni, kao što ćemo vidjeti na sljedećem primjeru.

Primjer 10.3. Nađimo Laurentov razvoj funkcije $f(z) = \frac{2z}{z^2+1}$ oko $z_0 = i$.

Uočimo prvo da je domena funkcije $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Tada su kružni vijenci $V(i;0,2)$ i $V(i;2,\infty)$ sadržani u domeni od f i možemo gledati Laurentove razvoje od f na svakom od njih. Prvo uočimo da je

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i}.$$

Funkcija $z \mapsto \frac{1}{z-i}$ je već razvijena u Laurentov razvoj.

Promatrajmo prvo razvoj na $V(i;0,2)$. Tada je $|z-i| < 2$ pa je

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n,$$

i traženi razvoj na $V(i;0,2)$ je zadan s

$$f(z) = \frac{1}{z-i} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}(z-i)^n.$$

Promatrajmo sada razvoj na $V(i;2,\infty)$. Tada je $|z-i| > 2$ i tada je

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2i}{z-i}\right)^n,$$

pa je traženi razvoj na $V(i;2,\infty)$ zadan s

$$f(z) = \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}} = \frac{2}{z-i} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+1}}.$$

Uočimo iz ovog primjera da Laurentov razvoj funkcije ovisi na kojem kružnom vijencu oko zadane točke razvijamo funkciju. $\square$

Uz oznake kao u dokazu prethodnog teorema vidimo da smo dobili dvije holomorfne funkcije

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0,R),$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0,r).$$

Prema tome, ako je $f \in H(V(z_0;r,R))$ tada postoje funkcije $\cancel{f_1}$ 2 $\in H(K(z_0,R))$ i f_2 1 $\in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0,r)})$ takve da vrijedi

$$\boxed{f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad z \in V(z_0;r,R),} \tag{10.6}$$

Funkciju f_1 nazivamo **singularni dio** Laurentovog razvoja funkcije f, a f_2 **regularni dio** Laurentovog razvoja funkcije f. Primijetimo još da je

$$\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0.$$

Rastav funkcije f na zbroj dvije funkcije sa svojstvima kao što ih imaju f_1 i f_2 je jedinstven. (Ovdje treba uočiti razliku s prethodnim primjerom kada smo imali dva Laurentova razvoja funkcije, ali radi se o rastavima na različitim kružnim vijencima.)

Teorem 10.4. *Neka je $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, te r i R takvi da je $V(z_0; r, R)$ sadržan u Ω. Neka su g_1 i g_2 funkcije za koje vrijedi*

(1) $g_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)})$, $g_2 \in H(K(z_0, R))$,

(2) $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ *za sve* $z \in V(z_0; r, R)$,

(3) $\lim_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$.

Tada je $f_1 = g_1$ *i* $f_2 = g_2$.

Dokaz. Definiramo funkciju

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \begin{cases} g_2(z) - f_2(z), & |z - z_0| < R; \\ f_1(z) - g_1(z), & |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Zbog prethodnog teorema i (2) slijedi da je F dobro definirana. Također, F je cijela funkcija.

Iz $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$ slijedi da je F ograničena funkcija. (Naime, po definiciji limesa slijedi da postoji $\rho > 0$ takav da je $|F(z)| < 1$ za sve z takve da je $|z| > \rho$. Također, zbog neprekidnosti od F, postoji $M > 0$ takav da je $|F(z)| \leq M$ za sve $z \in \overline{K(0, R)}$.)

Prema Liouvilleovom teoremu sada slijedi da je F konstantna funkcija, a kako je njen limes u beskonačnosti jednak 0, to je F nulfunkcija. Slijedi tvrdnja. □

Odavde slijedi jedinstvenost koeficijenata Laurentovog razvoja (na zadanom kružnom vijencu). Naime, ako je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in V,$$

tada prema prethodnom teoremu imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in K(z_0, R),$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K(z_0, r)}.$$

Iz jedinstvenosti koeficijenata u Taylorovom razvoju zaključujemo da je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

11 Izolirani singulariteti

Proučavanje kompleksnih funkcija kompleksne varijable započeli smo proučavanjem derivabilnosti, to jest holomorfnosti funkcija na otvorenim skupovima. Također, većina rezultata s kojima smo se upoznali odnosila se na holomorfne funkcije na nekom otvorenom skupu. U ovoj točki proučavamo holomorfne funkcije na otvorenim skupovima oblika $U \setminus \{z_0\}$, gdje je U otvoren skup u $\mathbb{C}$ i $z_0 \in U$. Naravno, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostavljati da je U otvoreni krug oko z_0. Prema tome, proučavamo funkcije f koje nisu holomorfne u z_0, ali su holomorfne na nekoj okolini od z_0, što omogućuje proučavanje te funkcije u točkama vrlo bliskim točki z_0. Prvo od pitanja koja se pritom nameću je, naravno, može li se f nekako "popraviti" do funkcije koja će biti holomorfna na cijelom skupu U.

Na primjer, ako je $f(z) = \frac{z^2+1}{z+i}$, tada je f holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$. U $z = -i$ funkcija f nije definirana, ali je očito da je $f(z) = z - i$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pa je $z \mapsto z - i$ prirodno proširenje funkcije f do holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$. Drugim riječima, stavljajući $f(-i) = -2i$ funkciju f možemo dodefinirati u $-i$ do holomorfne funkcije na $\mathbb{C}$. uklonjiv sing.

Međutim, to neće uvijek biti moguće, na primjer, to ne možemo napraviti u slučaju funkcije $g(z) = \frac{1}{z}$ i točke $z_0 = 0$, jer je ovdje $\lim_{z \to z_0} |g(z)| = \infty$. pol

Pogledajmo još i funkciju $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Kada z teži u 0 po negativnoj realnoj osi, tada $h(z)$ teži i 0, a kada z teži u 0 po pozitivnoj realnoj osi, tada $h(z)$ teži u ∞. Prema tome, funkcija h se u okolini točke 0 ponaša različito nego v sto se oko 0 ponašaju f i g. bitan

Ovakve točke z_0 nazivat ćemo singularitetima, a s obzirom da u nekoj okolini od z_0 nema drugih singulariteta, govorimo o izoliranim singularitetima. Koristeći Laurentov razvoj funkcije oko z_0 singularitete ćemo podijeliti u tri skupine, a pokazat ćemo da se funkcija f vrlo različito ponaša u okolini različitih vrsta singulariteta. Krenimo sada s preciznim definicijama.

Definicija 11.1. *Točka $z_0 \in \mathbb{C}$ je **(izolirani) singularitet** funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ako f nije holomorfna u z_0, ali postoji $R > 0$ tako da je $K^*(z_0, R) \subseteq \Omega$ i f holomorfna na $K^*(z_0, R)$.* [1]

[1] $K^*(z_0, R) = K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Ako je z_0 singularitet od f tada je f holomorfna na kružnom vijencu $K^*(z_0, R))$ pa imamo Laurentov razvoj

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots. \qquad (11.1)$$

Ovisno o broju članova s negativnim potencijama u (11.2) singularitete dijelimo na uklonjive, polove i bitne singularitete.

Definicija 11.2. *Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Kažemo da je z_0* ***uklonjiv*** *singularitet od f ako $a_{-n} = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to jest, ako u Laurentovom razvoju od f oko z_0 nema članova s negativnim potencijama.*

Prema tome, ako je z_0 uklonjiv singularitet od f, tada na $K^*(z_0, R)$ imamo

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots . \tag{11.2}$$

Tada se, stavljajući $f(z_0) = a_0$, funkcija f dodefinira ili predefinira do holomorfne funkcije na $K(z_0, R)$. To znači da smo singularitet uklonili.

Na primjer, $z_0 = 0$ je uklonjiv singularitet funkcije $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, jer je

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots .$$

Stavljajući $f(0) = 1$ dolazimo do cijele funkcije f.

Drugi tip singulariteta su polovi.

Definicija 11.3. *Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Kažemo da je z_0* ***pol*** *m-tog reda ($m \geq 1$) funkcije f ako je $a_{-m} \neq 0$ i $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \dots = 0$, to jest, z_0 je pol ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko z_0 ima samo konačno (ali bar jedan) članova s negativnim potencijama.*

Na primjer, $f(z) = \frac{1}{z^5}$ ima pol petog reda u $z_0 = 0$.

Ako f ima pol reda m u z_0 tada za $z \in K^*(z_0, R)$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \big(\underbrace{a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots}_{=:g(z)} \big). \end{aligned}$$

Prema tome, ako je z_0 pol m-tog reda funkcije f, tada postoji $R > 0$ i $g \in H(K(z_0, R))$, $g(z_0) \neq 0$ tako da je

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Vrijedi i obrat, to jest, ako je $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$, pri čemu je $g \in H(K(z_0, R))$ i $g(z_0) \neq 0$, tada razvijanjem funkcije g u Taylorov red oko z_0 lako zaključujemo da f u z_0 ima pol m-tog reda.

Sada odmah zaključujemo da, na primjer, funkcija $f(z) = \frac{e^z}{z^5}$ također ima pol petog reda u $z_0 = 0$.

Zadatak. Neka je $g \in H(K(0, R))$ i $f(z) = \frac{g(z)}{z^5}$. Je li 0 singularitet od f, te ako da, koje vrste i, ako je pol, kojeg reda?

Preostala je još jedna vrsta singulariteta.

Definicija 11.4. *Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Kažemo da f ima u z_0* ***bitan*** *singularitet ako ne postoji $m \geq 1$ tako da je $a_{-n} = 0$ za sve $n > m$, to jest, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama.*

Na primjer, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ima bitan singularitet u 0, jer je

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}.$$

Teorem 11.5 (Karakterizacija singulariteta). *Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Tada vrijedi:*

1. *z_0 je uklonjiv singularitet od f ako i samo ako je funkcija f ograničena na $K^*(z_0, r)$ za neki $r < R$.*
2. *z_0 je pol od f ako i samo ako je $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.*
3. *z_0 je bitan singularitet od f ako i samo ako za svaki $r < R$ vrijedi $\overline{f(K^*(z_0, r))} = \mathbb{C}$. (Casorati-Weierstrassov teorem)*

Dokaz. (1) Ako je z_0 uklonjiv singularitet, tada f dodefiniramo u z_0 i dobijemo holomorfnu funkciju na $K(z_0, R)$. Za svaki $r < R$ je f ograničena na $\overline{K(z_0, r)}$ (kao neprekidna funkcija na kompaktu), a onda i na $K^*(z_0, r)$.

Obratno, pretpostavimo da za neki $r < R$ postoji $M \geq 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in K^*(z_0, r).$$

Neka je $\rho < r$ i $\gamma = \partial K(z_0, \rho)$ pozitivno orijentirana kružnica. Za sve $n \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{\ell(\gamma)}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} \\ &\leq \frac{2\rho\pi \cdot M}{2\pi \cdot \rho^{n+1}} = M\rho^{-n}. \end{aligned}$$

Posebno, $|a_{-n}| \leq M\rho^n$ za sve $n \geq 1$. Kako to vrijedi za sve $\rho < r$, a s obzirom da je $\lim_{\rho \to 0} M\rho^n = 0$ za sve $n \geq 1$, slijedi $a_{-n} = 0$ za sve $n \geq 1$. Zato je u z_0 uklonjiv singularitet.

(2) Ako je z_0 pol reda $m \geq 1$ tada postoji $g \in H(K(z_0, R)), g(z_0) \neq 0$, tako da je

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Tada

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Po definiciji limesa, za $\varepsilon = 1$ postoji $r \in \langle 0, R \rangle$ tako da je $|f(z)| > 1$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$. Tada je dobro definirana funkcija

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \quad z \in K^*(z_0, r).$$

Očito je g holomorfna na $K^*(z_0, r)$, a zbog

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < 1, \quad \forall z \in K^*(z_0, r),$$

prema dokazanoj tvrdnji slijedi da g ima uklonjiv singularitet u z_0. Da bismo dodefinirali g u z_0 računamo

$$|g(z_0)| = \lim_{z \to z_0} |g(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0.$$

Dakle, stavljajući $g(z_0) = 0$ dobivamo $g \in H(K(z_0, r))$.

Prema tome, z_0 je nultočka od g, a s obzirom da je $g(z) \neq 0$ za $z \in K^*(z_0, r)$, z_0 je izolirana nultočka. Kao što znamo, nultočke beskonačnog reda nisu izolirane, pa z_0 mora biti nultočka konačnog reda $m \geq 1$. Tada je $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, gdje je h holomorfna na nekom $K(z_0, r')$ za neki $r' < r$ i $h(z) \neq 0$ za $z \in K(z_0, r')$. Znajući ovo, vratimo se u izraz za f :

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)} = \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z - z_0)^m}.$$

Još uočimo da je funkcija $H(z) := \frac{1}{h(z)}$ holomorfna na $K(z_0, r')$ i $H(z_0) \neq 0$, pa f u z_0 ima pol m-tog reda.

(3) Pretpostavimo da je z_0 bitan singularitet od f, ali da postoji $r < R$ tako da $f(K^*(z_0, r))$ nije gust u $\mathbb{C}$. To znači da postoji $w \in \mathbb{C}$ i $\varepsilon > 0$ tako da je $|w - f(z)| > \varepsilon$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$. Fiksirajmo taj w i taj ε. Definiramo funkciju

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}, \quad z \in K^*(z_0, r).$$

Tada je g holomorfna na $K^*(z_0, r)$ i

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} < \frac{1}{\varepsilon}$$

na $K^*(z_0, r)$, dakle, g ima uklonjiv singularitet u z_0. Dodefiniramo g u z_0.

Vratimo se funkciji f. Imamo da je

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}, \quad z \in K^*(z_0, r).$$

Ako $g(z_0) \neq 0$ tada f ima uklonjiv singularitet u z_0, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Ako $g(z_0) = 0$ tada, na isti način kao i u prošlom dokazu, f ima pol u z_0, što je opet u kontradikciji s pretpostavkom.

Obratno, pretpostavimo da je $f(K^*(z_0, r))$ gust u $\mathbb{C}$ za sve $r < R$.

Ako bi u z_0 bio uklonjiv singularitet od f, tada bi f bila ograničena funkcija na $K^*(z_0, r)$ za neki $r < R$. Tada bi postojao $M \geq 0$ tako da je $|f(z)| \leq M$ za sve $z \in K^*(z_0, r)$. Ali tada bi bilo $f(K^*(z_0, r)) \subseteq K(0, M)$, pa $f(K^*(z_0, r))$ ne bi bio gust u $\mathbb{C}$. Kontradikcija s pretpostavkom.

Ako bi u z_0 bio pol, tada $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$, pa bi za npr. $\varepsilon = 1$ postojao r takav da je $|f(z)| > 1$ za $z \in K^*(z_0, r)$. Tada $f(K^*(z_0, r)) \subseteq \mathbb{C} \setminus K(0, 1)$, pa opet $f(K^*(z_0, r))$ ne bi bio gust u $\mathbb{C}$.

Time smo eliminirali mogućnosti da je u z_0 uklonjiv singularitet ili pol, pa zaključujemo da je z_0 bitan singularitet funkcije f. $\square$

Zadatak 11.1. Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$. Tada vrijedi:

1. z_0 je uklonjiv singularitet od f ako i samo ako je
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0.$$

2. z_0 je pol od f ako i samo ako je
$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{m+1} f(z) = 0$$
za neki $m \in \mathbb{N}$. (Najmanji takav m je red pola z_0.)

12 Teorem o reziduumima

Ako je f holomorfna na $K^*(z_0, R)$ tada je možemo razviti Laurentov razvoj oko z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K^*(z_0, R).$$

Pritom se koeficijenti računaju kao

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z},$$

gdje je γ pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa $\rho < R$. Uočimo da za $n \neq -1$ članovi $a_n(z - z_0)^n$ definiraju funkcije koje imaju primitivne funkcije na $\mathbb{C}$, odnosno $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Za $n = -1$ to nije slučaj. Zato, ako integriramo funkciju f po nekoj zat krivulji γ unutar $K^*(z_0, r)$ preostat će samo član za $n = -1$. Nije zato čudno da upravo koeficijent a_{-1} u razvoju funkcije u Laurentov red ima posebno ime i da se zove upravo reziduum (ostatak).

Definicija 12.1. *Neka je $f \in H(K^*(z_0, R))$.* ***Reziduum funkcije f u z_0*** *je*

$$\operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w) dw.$$

Odmah uočavamo da, ako je $f \in H(K(z_0, R))$ ili ako f ima uklonjiv singularitet u z_0, tada je $\operatorname{res}(f, z_0) = 0$.

Ako je γ po dijelovima gladak zatvoren put i $z \in \mathbb{C}$ točka koja ne leži na krivulji γ (preciznije, z nije u slici funkcije γ), tada definiramo **indeks krivulje γ s obzirom na** z kao

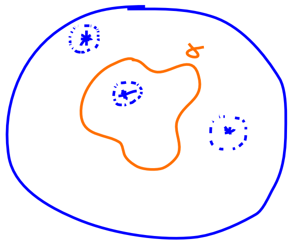
$$\nu(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Teorem 12.2 (teorem o reziduumima). *Neka je Ω otvoren i zvjezdast skup, te $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ različite točke. Ako je f holomorfna funkcija na $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, tada je*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \nu(\gamma, z_j) \operatorname{res}(f, z_j)$$

za svaki $\gamma : [a, b] \to \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ po dijelovima gladak zatvoren put. [1]

[1] Uočimo da Teorem o reziduumima generalizira Cauchyjev teorem za zvjezdast skup.



Dokaz. Za svaki $j = 1, \dots, k$ odaberemo $r_j > 0$ tako da je $K(z_j, r_j)$ sadržan u Ω i ne siječe γ (to jest, $K(z_j, r_j) \subseteq \Omega \setminus \gamma([a,b])$). Za svaki $j = 1, \dots, k$ je f holomorfna na kružnom vijencu $K^*(z_j, r_j)$, pa prema (10.6) f možemo rastaviti na regularni i singularni dio

$$f = f_j^{reg} + f_j^{sing}.$$

Pritom, funkcija f_j^{reg} je holomorfna na $K(z_j, r_j)$ i f_j^{sing} holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$.

Definiramo sada novu funkciju

$$\boxed{F : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} f_j^{sing}(z).}$$

F je holomorfna na $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$, ali i u $z_1, \dots, z_k$. Na primjer, F je holomorfna u z_1 jer je

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) - f_1^{sing}(z) - \sum_{j=2}^{k} f_j^{sing}(z) \\ &= f_1^{reg}(z) - \sum_{j=2}^{k} f_j^{sing}(z), \end{aligned}$$

a funkcije f_1^{reg} te $f_2^{sing}, \dots, f_k^{sing}$ su holomorfne u z_1. Dakle, $F \in H(\Omega)$.

Sada prema Cauchyjevom teoremu za holomorfne funkcije na zvjezdastom skupu slijedi

$$\int_\gamma F(z)dz = 0$$

odakle je

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma f_j^{sing}(z)dz.$$

Još ostaje vidjeti da za svaki $j = 1, \dots, k$ vrijedi

$$\begin{aligned} \int_\gamma f_j^{sing}(z)dz &= \int_\gamma \left(\frac{a_{-1}^j}{z - z_j} + \frac{a_{-2}^j}{(z - z_j)^2} + \dots \right) dz \\ &= \int_\gamma \frac{a_{-1}^j}{z - z_j} dz + \int_\gamma \frac{a_{-2}^j}{(z - z_j)^2} dz + \dots \\ &= 2\pi i a_{-1}^j \nu(\gamma, z_j) \\ &= 2\pi i \operatorname{res}(f, z_j) \nu(\gamma, z_j), \end{aligned}$$

jer za svaki $m \geq 2$ funkcija $z \mapsto \frac{1}{(z - z_j)^m}$ ima primitivnu funkciju na $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. $\square$

Prema napomeni 6.2 znamo da za pozitivno orijentiranu kružnicu γ vrijedi da je $\nu(\gamma, z) = 1$ za sve z koje su unutar kružnice γ, te $\nu(\gamma, z) = 0$ za sve z unutar kružnice γ. To vrijedi i općenitije, a ne samo za kružnice. Naime, ako je γ pozitivno orijentirana kontura[2], tada je

$$\nu(\gamma, z) = \begin{cases} 1, & z \text{ unutar } \gamma; \\ 0, & z \text{ izvan } \gamma. \end{cases}.$$

[2] Kontura je po dijelovima gladak zatvoren put koji sam sebe ne presijeca, to jest, neprekidna funkcija $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ takva da je $\gamma|_{[a,b\rangle}$ injekcija.

Uočimo da pozitivno orijentirana kontura γ obiđe točno jednom sve točke koje se nalaze unutar nje, te nijednom (0 puta) sve točke izvan nje; drugim riječima, pozitivno orijentirana kontura γ obiđe točku z točno $\nu(\gamma, z)$ puta. Može se pokazati da je uvijek, za sve po dijelovima glatke zatvorene putove, broj $\nu(\gamma, z)$ broj obilazaka puta γ oko z u pozitivnom smjeru. Posebno, $\nu(\gamma, z)$ je uvijek cijeli broj.

Korolar 12.3 (teorem o reziduumima za konture). *Neka je Ω otvoren i zvjezdast skup, te neka su $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ različite točke, γ kontura u $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ tako da su $z_1, \ldots, z_k$ unutar i $z_{k+1}, \ldots, z_n$ izvan konture γ. Ako je $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorfna, tada je*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}(f, z_j).$$

Napomena 12.4. Uočimo da Cauchyjevu integralnu formulu za krug sada možemo promatrati kao specijalan slučaj teorema o reziduumima. Naime, ako je f holomorfna na Ω takva da je $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$, te γ pozitivno orijentirana kružnica radijusa r oko z_0, tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ funkcija $\boxed{g_z(w) = \frac{f(w)}{w-z}}$ ima singularitet jedino u točki z, koja je pol prvog reda za g_z i vrijedi $\operatorname{res}(g_z, z) = f(z)$. Također, $\nu(\gamma, z) = 1$ za sve $z \in K(z_0, r)$ i zato je, prema teoremu o reziduumima,

$$\int_\gamma g_z(w)dw = 2\pi i \nu(\gamma, z) \operatorname{res}(g_z, z),$$

odnosno,

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z).$$

S obzirom da je z bila proizvoljna točka u $K(z_0, r)$, dobili smo Cauchyjevu integralnu formulu za krug.

Teorem o reziduumima može olakšati računanje integrala kompleksne funkcije, ali samo ako znamo način kako efikasno izračunati reziduume funkcije s obzirom na njene singularitete, te indeks krivulje s obzirom na te singularitete. U slučaju konture, indeks krivulje s obzirom na singularitete se svodi na detektiranje koji su singulariteti unutar, a koji izvan krivulje.

Određivanje reziduuma funkcije u njenom bitnom singularitetu može biti teže, ali u slučaju polova (i, naravno, uklonjivih singulariteta u kojim je reziduum uvijek jednak 0) to je obično lakši zadatak. Za funkcije koje nemaju bitne singularitete možemo dobiti i neke dodatne rezultate.

Definicija 12.5. *Funkcija f je **meromorfna** na Ω ako ili nema singularitete ili su joj svi singulariteti izolirani, i to ili uklonjivi singulariteti ili polovi.*

Pretpostavljat ćemo da smo uklonjive singularitete uklonili, te da su ostali samo polovi.

Uočimo odmah da, ako su f i g holomorfne funkcije na Ω i g nije nulfunkcija, tada je njihov kvocijent $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ meromorfna funkcija na Ω.

kada bi imala gomilište nultočaka fj-a g [tj. fj-a h bi imala NEizoliran singularitet], tada bi g bila nulfunkcija
*princip o jedinstvenosti holomorfnih fj-a

Teorem 12.6 (Princip argumenta). *Neka je Ω otvoren zvjezdast skup, γ kontura u Ω, te f meromorfna funkcija na Ω koja nema ni nultočaka ni polova na γ. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\gamma(f) - P_\gamma(f),$$

pri čemu je $N_\gamma(f)$ broj nultočaka od f unutar γ računajući redove nultočaka, a $P_\gamma(f)$ je broj polova od f unutar γ računajući redove polova. [3]

[3] Drugim riječima, $N_\gamma(f)$ je ukupan broj nultočaka od f unutar γ pri čemu svaku nultočku brojimo onoliko puta koliki je njen red. Isto tako, $P_\gamma(f)$ je ukupan broj polova od f unutar γ, pri čemu svaki pol brojimo onoliko puta koliki je njegov red.

Dokaz. Primijetimo najprije da su nultočke od f unutar γ nužno izolirane, dakle i konačnog reda. Primijetimo najprije da su nultočke od f nužno izolirane, dakle i konačnog reda. U suprotnom bi zbog principa jedinstvenosti vrijedilo $f = 0$ na Ω, što je u kontradikciji s pretpostavkom da f nema nultočaka na γ.

Primijenimo teorem o reziduumima za konture na funkciju

$$\boxed{F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.}$$

Dobivamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma F(z)dz = \cancel{2\pi i}\sum_j \operatorname{res}(F, z_j), \tag{12.1}$$

gdje su z_j singulariteti od F unutar γ.

Singulariteti funkcije F su upravo nultočke ili polovi od f, pa su stoga izolirani. Trebamo, dakle, računati $\operatorname{res}(F, w)$ gdje je w nultočka ili pol od f.

Ako je w nultočka od f reda m tada se f, na nekoj okolini od w, može napisati kao $f(z) = (z-w)^m g(z)$, pri čemu je g holomorfna funkcija na toj okolini i $g(w) \neq 0$. Tada je

$$F(z) = \frac{m(z-w)^{m-1}g(z) + (z-w)^m g'(z)}{(z-w)^m g(z)} = \frac{m}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

a kako je $g(w) \neq 0$, to je $\operatorname{res}(F, w) = m$. Prema tome, reziduumi podintegralne funkcije u nultočkama funkcije f su upravo redovima tih nultočaka.

Slično, ako je w pol od f reda m tada se f, na nekoj okolini od w, može napisati kao $f(z) = \frac{g(z)}{(z-w)^m} = (z-w)^{-m}g(z)$, pri čemu je g holomorfna funkcija na toj okolini i $g(w) \neq 0$. Tada je

$$F(z) = \frac{-m(z-w)^{-m-1}g(z) + (z-w)^{-m}g'(z)}{(z-w)^{-m}g(z)} = \frac{-m}{z-w} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

a kako je $g(w) \neq 0$, to je $\operatorname{res}(F, w) = -m$. Zaključujemo da su, u slučaju polova od f, reziduumi podintegralne funkcije jednaki suprotnoj vrijednosti reda pola.

Prema tome, dobili smo

$$\operatorname{res}(F, w) = \begin{cases} \text{red nultočke } w \text{ od } f, & \text{ako je } w \text{ nultočka od } f; \\ -\text{ red pola } w \text{ od } f, & \text{ako je } w \text{ pol od } f. \end{cases}$$

Preostaje dobiveno uvrstiti u (12.1). $\square$

Korolar 12.7. *Neka je Ω otvoren zvjezdast skup, γ kontura u Ω, te f holomorfna funkcija na Ω koja nema ni nultočaka ni polova na γ. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_\gamma(f),$$

pri čemu je $N_\gamma(f)$ broj nultočaka od f unutar γ računajući redove nultočaka.

Napomena 12.8. (a) Primijetimo da je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))' = (\ln|f(z)| + i\arg f(z))'.$$

Slijedi da je integral

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

povezan s promjenom argumenta $f(z)$ kad z obiđe γ. To objašnjava ime "princip argumenta".

(b) Princip argumenta i njegov korolar vrijede i bez pretpostavke da je Ω zvjezdast, uz pretpostavku da je unutrašnje područje od γ sadržano u Ω (to je automatski ispunjeno ako je Ω zvjezdast skup). Dokaz koristi općenitiju verziju teorema o reziduumima, koja slijedi iz općeg Cauchyjevog teorema.

(c) Vrijedi i općenitija verzija principa argumenta, a dokazuje se na sličan način kao i prethodni teorem.

Neka je Ω otvoren zvjezdast skup, γ kontura u Ω, te f meromorfna funkcija na Ω koja na γ nema ni nultočaka ni polova. Tada za svaku funkciju $h \in H(\Omega)$ vrijedi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{\substack{w\in B \\ w \text{ nultočka od } f}} h(w)r(w,f) - \sum_{\substack{w\in B \\ w \text{ pol od } f}} h(w)r(w,f).$$

pri čemu je $r(w,f)$ red nultočke/pola w funkcije f, a B je unutrašnje područje konture γ.

Jedna od posljedica prethodnog teorema je Roucheov teorem koji olakšava određivanje broja nultočaka pojedinih funkcija. Ugrubo govoreći, ideja je funkciju h, kojoj trebamo odrediti broj nultočaka, zapisati kao zbroj dvije funkcije f i g, tako da f dominira g i da funkciji f znamo odrediti broj nultočaka.

Kao i prije, $N_\gamma(f)$ označava ukupan broj nultočaka od f računajući njihove redove, to jest, kratnosti.

Teorem 12.9 (Rouche-ov teorem). *Neka je Ω otvoren zvjezdast skup i γ kontura u Ω. Neka su $f, g \in H(\Omega)$ takve da vrijedi*

$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$

Tada f i $f+g$ imaju unutar γ jednak broj nultočaka, računajući njihove kratnosti, to jest, vrijedi

$$N_\gamma(f) = N_\gamma(f+g).$$

Dokaz. Za svaki $t \in [0,1]$ definiramo funkciju

$$F_t : \Omega \to \mathbb{C}, \quad F_t(z) = f(z) + tg(z).$$

Pokažimo prvo da funkcije F_t nemaju nultočaka na γ. Zaista, ako bi bilo $F_t(z) = 0$ za neki $z \in \gamma$ tada

$$f(z) + tg(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| = |-tg(z)| \leq |g(z)|.$$

To je u kontradikciji s pretpostavkom.

Prema tome, za svaki $t \in [0,1]$ je F_t holomorfna funkcija na Ω koja nema nultočaka na γ, pa imamo

$$N_\gamma(F_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F_t'(z)dz}{F_t(z)}.$$

nije holomorfna na omega jer fj-a u nazivniku može imati nultočaka na omega!!!

to jest,

$$N_\gamma(f + tg) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz, \quad \forall t \in [0,1].$$

Kako je $N_\gamma(f + tg) \in \mathbb{Z}$ za svaki $t \in [0,1]$, funkcija

$$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz$$

je neprekidna i poprima cjelobrojne vrijednosti. Neprekidne funkcije segment preslikavaju u segment, a kako su jedini segmenti u $\mathbb{Z}$ jednočlani skupovi, slijedi da je α konstantna funkcija. Posebno, $\alpha(0) = \alpha(1)$, dakle $N_\gamma(f) = N_\gamma(f + g)$. $\square$

Kao ilustraciju navodimo još jedan dokaz osnovnog teorema algebre.

Teorem 12.10 (Osnovni teorem algebre). *Neka je $n \geq 1$. Polinom*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

ima n nultočaka u $\mathbb{C}$, računajući njihove kratnosti.

Dokaz. Rastavimo polinom p na zbroj dvije funkcije. Neka je $f(z) = z^n$ i $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$. Tada je

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} = \lim_{|z|\to\infty} \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n} \right| = 0.$$

Za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ tako da je $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ za sve z takve da je $|z| \geq r$, to jest, $|g(z)| < |f(z)|$ za sve z takve da je $|z| \geq r$.

Neka je $R \geq r$ i $\gamma_R = S(0,R)$. Sada je

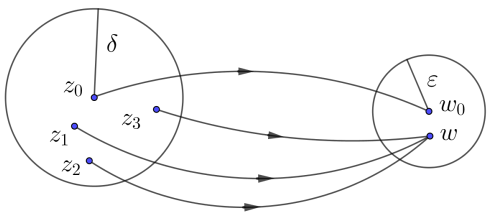
$$|g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma_R,$$

odakle, prema Roucheovom teoremu, $N_{\gamma_R}(f) = N_{\gamma_R}(f + g)$. Znamo $N_{\gamma_R}(f) = n$, dakle $N_{\gamma_R}(p) = n$ za svaki $R > r$, to jest, p ima n nultočaka u $K(0,R)$ za svaki $R \geq r$, a kako svaka nultočka od p pripada nekom (dovoljno velikom) krugu $K(0,R)$, slijedi da p ima n nultočaka u $\mathbb{C}$. $\square$

13 Weierstrassov pripremni teorem i neke posljedice

U ovom poglavlju dokazat ćemo neke važne i zanimljive teoreme poput teorema o otvorenom preslikavanju, princip maksimuma (minimuma) modula i teorem o holomorfnom izomorfizmu.

Teorem 13.1 (Weierstrassov pripremni teorem)**.** *Neka je $f \in H(\Omega)$. Neka je $z_0 \in \Omega$; stavimo $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda, i neka je taj red jednak m ($m \geq 1$). Tada postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$, funkcija $z \mapsto f(z) - w$ ima točno m različitih jednostrukih nultočki u krugu $K(z_0, \delta)$. Drugim riječima, postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$ postoje međusobno različite točke $z_1, \ldots, z_m \in K(z_0, \delta)$ takve da je $f(z_i) = w$ za $i = 1, \ldots, m$.*



Weierstrassov pripremni teorem za $m = 3$

Dokaz. Fiksirajmo $K(z_0, r) \subseteq \Omega$. Označimo $F(z) = f(z) - w_0$. Iz činjenice da je z_0 nultočka holomorfne funkcije F konačnog reda m, slijedi da je z_0 izolirana nultočka od F. Također, z_0 je nultočka holomorfne funkcije F' reda $m - 1 \geq 0$, pa je z_0 izolirana nultočka i od F'. Zato postoji $\delta \in \langle 0, r \rangle$ takav da je

$$F(z) \neq 0, \quad F'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{K^*(z_0, \delta)}.$$

Posebno, $|z - z_0| = \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - w_0| \neq 0$.

Budući da je funkcija F neprekidna, ona postiže minimum na kompaktnom skupu $S(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| = \delta\}$, dakle, dobro je definiran

$$\varepsilon = \min\{|F(z)| : |z - z_0| = \delta\}.$$

Kako je $F(z) \neq 0$ za $z \in S(z_0, \delta)$, slijedi da je i $\varepsilon > 0$.

Neka je $w \in K(w_0, \varepsilon)$. Tada za svaki $z \in S(z_0, \delta)$ vrijedi

$$|w - w_0| < \varepsilon \leq |F(z)|, \qquad \forall z \in S(z_0, \delta). \tag{13.1}$$

Ako označimo $G(z) = w_0 - w$, tada je G holomorfna funkcija. Sada su F i G holomorfne funkcije na zvjezdastom skupu $K(z_0, r)$, a kružnica γ radijusa δ sa središtem u z_0 je kontura u $K(z_0, r)$ čija je unutrašnjost sadržana u $K(z_0, r)$, te vrijedi $|G(z)| < |F(z)|$ za svaki z na γ. Zato možemo primijeniti Rouchéov teorem i zaključiti da funkcije F i $F + G$ imaju jednak broj nultočki unutar γ računajući kratnosti, dakle,

$$N_\gamma(F) = N_\gamma(F + G).$$

Uočimo da je

$$(F + G)(z) = f(z) - w.$$

Kako je $N_\gamma(F) = m$ (jedina nultočka je z_0, s kratnosti m), slijedi da je i $N_\gamma(F + G) = m$. Svaka od tih m nultočki od $F + G$ je jednostruka, jer je

$$(F + G)'(z) = f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in K^*(z_0, \delta). \quad \square$$

Korolar 13.2. *Neka je f holomorfna na Ω, $z_0 \in \Omega$ i $w_0 = f(z_0)$. Pretpostavimo da funkcija $z \mapsto f(z) - w_0$ ima u z_0 nultočku konačnog reda. Tada postoje $\delta, \varepsilon > 0$ takvi da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$.*

Dokaz. Ako su ε, δ kao u WPT, onda slijedi da je svaki $w \in K^*(w_0, \varepsilon)$ u $f(K(z_0, \delta))$. Također je i $w_0 = f(z_0)$ u $f(K(z_0, \delta))$. $\square$

Teorem 13.3 (o otvorenom preslikavanju). *Neka je $f \in H(\Omega)$. Pretpostavimo da f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od Ω. Tada je za svaki otvoren skup $U \subseteq \Omega$ skup $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ također otvoren.*

Dokaz. Neka je $w_0 \in f(U)$, dakle $w_0 = f(z_0)$ za neki $z_0 \in U$. Neka je i ovdje F zadana s $F(z) = f(z) - w_0$. Funkcija F ima u z_0 nultočku konačnog reda. (Naime, ako bi to bila nultočka beskonačnog reda onda bi F bila 0 na nekoj okolini od z_0. Tada bi po principu jedinstvenosti F bila 0 na komponenti povezanosti od Ω koja sadrži z_0, pa bi f bila konstanta w_0 na toj komponenti povezanosti, što je kontradikcija s pretpostavkom.)

Zato možemo primijeniti prethodni korolar i zaključiti da postoje $\delta, \varepsilon > 0$ takvi da je $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(K(z_0, \delta))$. Ako je potrebno, možemo smanjiti δ tako da još bude i $K(z_0, \delta) \subseteq U$. U tom slučaju vidimo da je $K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(U)$, pa smo našli otvoren krug oko w_0 koji je sadržan u $f(U)$. Kako je $w_0 \in f(U)$ bio proizvoljan, to dokazuje otvorenost skupa $f(U)$. $\square$

Primjer 13.4. Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$. Petpostavimo da f poprima samo realne vrijednosti.

Već smo ranije diskutirali ovakve funkcije (provjerite C-R uvjete) i zaključili da je f nužno konstantna funkcija. Sada to možemo zaključiti i preko teorema o otvorenom preslikavanju. Naime, ako bi f bila nekonstantna, tada bi $f(\Omega)$ bio otvoren skup, a kako je $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$, to je nemoguće.

Teorem 13.5 (o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije). *Neka je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ tako da je $f'(z_0) \neq 0$. Tada postoje otvoreni skupovi $U \subseteq \Omega$, $V \subseteq f(\Omega)$ takvi da je $z_0 \in U$, da je $f\big|_U : U \to V$ bijekcija, i da je $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$ holomorfna funkcija.*

Nadalje, vrijedi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \qquad w \in V.$$

Dokaz. Za funkciju $F(z) = f(z) - w_0$ vrijedi $F'(z_0) = f'(z_0) \neq 0$, pa funkcija F ima nultočku reda 1 u z_0. Sada Weierstrassov pripremni teorem povlači da postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takvi da za svaki $w \in K(w_0, \varepsilon)$, funkcija ima točno jednu nultočku u $K(z_0, \delta)$, odnosno postoji jedinstven $z \in K(z_0, \delta)$ takav da je $f(z) = w$.

Sada definiramo otvorene skupove

$$V = K(w_0, \varepsilon) \subseteq f(\Omega) \quad \text{i} \quad U = f^{-1}(K(w_0, \varepsilon)) \cap K(z_0, \delta) \subseteq \Omega.$$

Iz gornjega vidimo da je $f\big|_U : U \to V$, dakle postoji funkcija $(f\big|_U)^{-1} :$
bijekcija
$V \to U$.

Iz dokaza WPT vidimo da je $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in K(z_0, \delta)$, pa f nije konstanta niti na jednoj komponenti povezanosti od U. Zato prema teoremu o otvorenom preslikavanju slijedi da je $(f\big|_U)^{-1} : V \to U$ neprekidna funkcija.

Sada za $z \in U$ označimo $w = f(z) \in V$. Zbog neprekidnosti f i f^{-1} slijedi da je $z' \to z$ ekvivalentno sa $w' = f(z') \to f(z) = w$, pa vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{w' \to w} \frac{f^{-1}(w') - f^{-1}(w)}{w' - w} &= \lim_{w' \to w} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} \\ &= \lim_{z' \to z} \frac{z' - z}{f(z') - f(z)} = \frac{1}{f'(z)}. \end{aligned}$$

Odatle slijedi da je f^{-1} holomorfna i da vrijedi

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}. \qquad \square$$

Teorem 13.6 (Teorem o holomorfnom izomorfizmu). *Neka je Ω područje i neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ injektivna i holomorfna funkcija. Tada*

(1) $f'(z) \neq 0$, za svaki $z \in \Omega$;

(2) $V = f(\Omega)$ je otvoren skup;

(3) $f^{-1} : V \to \Omega$ je holomorfna funkcija.

Dokaz. Kako je f nekonstantna injektivna funkcija, svaki $z_0 \in \Omega$ je nultočka od $z \mapsto f(z) - f(z_0)$ konačnog reda.

(1) Pretpostavimo da je $f'(z_0) = 0$ za neki $z_0 \in \Omega$. Označimo $w_0 = f(z_0)$. Tada je z_0 nultočka reda $m \geq 2$ funkcije $z \mapsto f(z) - w_0$, pa postoje $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da za $w \in K(w_0, \varepsilon)$ postoje različite $z_1, z_2 \in K(z_0, \delta)$ takve da je $f(z_1) = w = f(z_2)$. To je kontradikcija s injektivnošću.

(2) je dokazano u teoremu o otvorenom preslikavanju.

(3) Prema teoremu o lokalnoj invertibilnosti holomorfne funkcije za svaki $z \in \Omega$ postoji otvoren skup $U_z \subseteq \Omega$ oko z tako da je $f|_{U_z} : U_z \to V_z = f(U_z)$ bijekcija i njen inverz je holomorfna funkcija. Zbog jedinstvenosti inverzne funkcije slijedi

$$(f|_{U_z})^{-1} = f^{-1}|_{V_z},$$

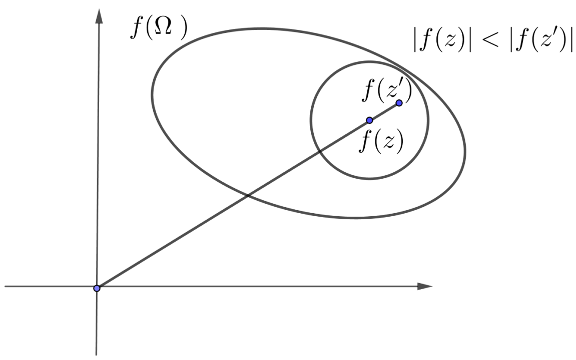
a kako je $(f|_{U_z})^{-1}$ holomorfna na V_z, slijedi da je f^{-1} holomorfna na V_z. Zbog proizvoljnosti od z slijedi tvrdnja. □

U sljedećem teoremu podrazumijevamo da funkcija $|f|$ postiže maksimum na Ω ako postoji $z_0 \in \Omega$ tako da je $|f(z_0)| \geq |f(w)|$ za sve $w \in \Omega$.

[redacted] **Teorem 13.7 (Princip maksimuma modula).** *Ako je Ω područje i $f \in H(\Omega)$ nekonstantna funkcija, tada funkcija $|f|$ ne postiže maksimum na Ω.*

Dokaz. Neka je $z \in \Omega$ fiksiran. Po Teoremu o otvorenom preslikavanju, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(f(z), \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$.

Kako u svakom krugu postoje točke koje imaju veći modul od središta kruga, slijedi da postoji $f(z') \in K(f(z), \varepsilon)$ sa svojstvom $|f(z')| > |f(z)|$. To povlači tvrdnju.



□

Logično je pitati se vrijedi li prethodna tvrdnja i ako riječ *maksimum* zamijenimo riječju *minimum*. Kako ne možemo uvijek zaključiti da u svakom krugu postoje točke koje imaju manji modul od središta kruga (ali za svaki krug čije središte nije u ishodištu to vrijedi), iskaz je nužno malo modificarati. Sljedeći korolar bismo mogli nazvati princip minimuma modula.

K **Korolar 13.8.** *Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Ako $|f|$ postiže minimum u $z_0 \in \Omega$, tada je $f(z_0) = 0$.*

Dokaz. Ako postoji $z_0 \in \Omega$ u kojoj $|f|$ postiže minimum i ako je $f(z_0) \neq 0$, tada holomorfna nekonstantna funkcija $\frac{1}{|f|}$ postiže maksimum na Ω, što prema principu maksimuma modula nije moguće. Prema tome, ako se minimum postiže na Ω, on iznosi 0. □

Teorem 13.9 (Princip maksimuma modula za krug). *Neka je zadana neprekidna funkcija $f : \overline{K}(z_0, r) \to \mathbb{C}$. Pretpostavimo da je f holomorfna na $K(z_0, r)$. Tada je*

$$\max_{|z-z_0| \leq r} |f(z)| = \max_{|z-z_0| = r} |f(z)|.$$

Drugim riječima, maksimum funkcije $|f|$ na $\overline{K}(z_0, r)$ se postiže u točki s ruba tog kruga. [1]

[1] Ako je $f(z) = 1 - |z|$, tada se maksimum funkcije $|f|$ na $\overline{K}(0,1)$ postiže u 0, dakle u unutrašnjoj točki kruga. Protivi li se ovo principu maksimuma modula?

Dokaz. Za početak, neprekidna funkcija $|f|$ na kompaktnom skupu $\overline{K}(z_0, r)$ zaista postiže maksimum.

Pretpostavimo da se taj maksimum ne postiže na kružnici. Tada se maksimum postiže na otvorenom krugu $K(z_0, r)$. Sada princip maksimuma modula povlači da f mora biti konstanta na $K(z_0, r)$, a onda je zbog neprekidnosti konstanta i na $\overline{K}(z_0, r)$. Međutim, tada se maksimum ipak postiže na kružnici pa smo dobili kontradikciju. Slijedi tvrdnja. □

Zadatak 13.1. Odredite maksimum funkcije $|f|$ na $\overline{K}(0,1)$ ako je

$$f(z) = \frac{z+3i}{z-3i}.$$

Teorem 13.10 (Schwarzova lema). *Neka je $f : K(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija takva da je $f(K(0,1)) \subseteq K(0,1)$ i $f(0) = 0$. Tada je istinita točno jedna od sljedeće dvije tvrdnje:*

1. $|f(z)| < |z|$ *za svaki* $z \in K^*(0,1)$ *i* $|f'(0)| < 1$;
2. *postoji* $\alpha \in \mathbb{R}$ *takav da je* $f(z) = e^{i\alpha}z$ *za svaki* $z \in K(0,1)$, *to jest,* f *je rotacija oko* 0 *za kut* α.

Dokaz. Zbog $f(0) = 0$, Taylorov razvoj funkcije f oko 0 je

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \ldots, \qquad z \in K(0,1).$$

Dijeljenjem sa z vidimo da funkcija $\frac{f(z)}{z}$ ima uklonjiv singularitet u 0, i da je funkcija

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

holomorfna na $K(0,1)$ (Taylorov red funkcije g na $K(0,1)$ je $f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}z + \ldots$).

Za $z \in K(0,1)$ uzmimo r između $|z|$ i 1. Po principu maksimuma modula za krug, vrijedi

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)|. \tag{13.2}$$

Kako je $f(w) \in K(0,1)$ vrijedi $|f(w)| < 1$, pa iz $|w| = r$ slijedi

$$|g(w)| = \frac{|f(w)|}{|w|} < \frac{1}{r}.$$

Dakle (13.2) povlači da je $|g(z)| < \frac{1}{r}$, za svaki r između $|z|$ i 1. Za $r \to 1$ dobivamo $|g(z)| \leq 1$. To vrijedi za svaki $z \in K(0,1)$.

Sada imamo dvije mogućnosti:

1. $|g(z)| < 1$, $\forall z \in K(0,1)$. Odavde odmah slijedi da vrijedi tvrdnja (1) iz iskaza.

2. $|g(z)| = 1$ za neki $z \in K(0,1)$. Tada $|g|$ postiže maksimum na $K(0,1)$, pa po principu maksimuma modula g mora biti konstanta. Štoviše, ta konstanta mora biti modula 1, dakle oblika $e^{i\alpha}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Odavde slijedi tvrdnja (2) iz iskaza.

□

Za kraj navodimo Riemmanov teorem o preslikavanju, ali dokazat ćemo samo jedinstvenost. Dokaz egzistencije je znatno teži i zahtijeva više rezultata.

Teorem 13.11 (Riemannov teorem o preslikavanju)**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ jednostavno povezano područje. Neka je $z_0 \in \Omega$. Tada postoji jedinstven holomorfni izomorfizam $F : \Omega \to K(0,1)$ takav da vrijedi*

1. $F(z_0) = 0$;

2. $F'(z_0)$ *je pozitivan realan broj.*

Napomena 13.12. Tvrdnja Riemannovog Teorema o preslikavanju ne vrijedi za $\Omega = \mathbb{C}$. Naime, po Liouvilleovom teoremu, svaka holomorfna funkcija $F : \mathbb{C} \to K(0,1)$ mora biti konstanta, pa ne može biti holomorfni izomorfizam.

Dokaz jedinstvenosti. Pretpostavimo da su $F, G : \Omega \to K(0,1)$ dva holomorfna izomorfizma takva da vrijedi $F(z_0) = G(z_0) = 0$ i da su $F'(z_0)$ i $G'(z_0)$ pozitivni realni brojevi. Tada je $f = G \circ F^{-1} : K(0,1) \to K(0,1)$ holomorfna bijekcija koja zadovoljava

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) \in \mathbb{R}^+.$$

Nadalje, funckija f^{-1} zadovoljava ista ta svojstva.

Po Schwarzovoj lemi zaključujemo da je ili

$$|f(z)| < |z|,\ \forall z \in K(0,1) \qquad \text{i} \qquad f'(0) < 1, \tag{13.3}$$

ili postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{13.4}$$

Posebno je

$$|f(z)| \le |z|, \qquad \forall z \in K(0,1). \tag{13.5}$$

Isto vrijedi i za f^{-1}; posebno vrijedi

$$|f^{-1}(w)| \le |w|, \qquad \forall w \in K(0,1). \tag{13.6}$$

Za $w = f(z)$ imamo $z = f^{-1}(w)$, pa (13.6) povlači $|z| \le |f(z)|$, $\forall z \in K(0,1)$, što zajedno s (13.5) daje $|f(z)| = |z|$, $\forall z \in K(0,1)$.

Slijedi da funkcija f zadovoljava tvrdnju (13.4), a ne tvrdnju (13.3). Dakle $f(z) = e^{i\alpha} z$, $\forall z \in K(0,1)$, odakle slijedi

$$f'(z) = e^{i\alpha}, \qquad \forall z \in K(0,1).$$

Kako također vrijedi $f'(0) > 0$, slijedi da je $e^{i\alpha} = 1$, pa je $f(z) = z$, $\forall z \in K(0,1)$. Slijedi da je $F = G$. □

Napomena 13.13. Iz dokaza vidimo što se dešava s jedinstvenosti ako izbacimo uvjet $F'(z_0) \in \mathbb{R}^+$. Tada je F jedinstven do na rotaciju kruga $K(0,1)$, to jest, ako su F i G dva holomorfna izomorfizma $\Omega \to K(0,1)$ takva da je $F(z_0) = G(z_0) = 0$, onda postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $G(z) = e^{i\alpha}F(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Dokaz egzistencije je znatno teži i dulji i zahtijeva korištenje nekoliko drugih netrivijalnih rezultata. Skicu dokaza pomoću Dirichletovog principa za harmonijske funkcije, uz dodatne pretpostavke na Ω, možete vidjeti na

https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_mapping_theorem

Potpuni dokaz pomoću Montelovog teorema i Hurwitzovog teorema možete vidjeti na

https://math.berkeley.edu/~vvdatar/m185f16/notes/Riemann_Mapping.pdf

Nešto drukčiji dokaz dostupan je na

https://www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2007-complex/ComAna-Lectures.pdf