Sveučilište u Zagrebu

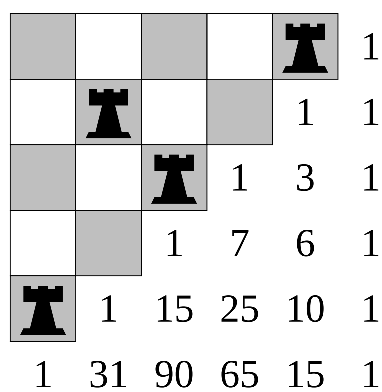
Prirodoslovno-matematički fakultet

Matematički odsjek

KOMBINATORIKA

Predavanja

Vedran Krčadinac



Akademska godina 2022./2023.

Verzija 6, 25.1.2023.

Sadržaj

1 Osnove prebrojavanja **1**

2 Diferencijski račun **9**

3 Bijektivni dokazi **17**
3.1 Catalanovi brojevi 17
3.2 Multiskupovi 19
3.3 Particije brojeva 20
3.4 Particije skupova 22
3.5 Stabla 27

4 Stirlingovi brojevi **33**

5 Topovski polinom i sparivanja **45**

6 Formula uključivanja-isključivanja **57**

7 Möbiusova inverzija **65**
7.1 Dokaz formule uključivanja-isključivanja 65
7.2 Klasična Möbiusova inverzija 68
7.3 Incidencijska algebra parcijalno uređenog skupa 70
7.4 Hasseovi dijagrami i Möbiusova funkcija 77

8 Lanci i antilanci **85**

9 Vjerojatnosna metoda **91**

10 Funkcije izvodnice **101**
10.1 Prsten formalnih redova potencija 101
10.2 Eksponencijalne funkcije izvodnice 114
10.3 Konvergencija u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ 117
10.4 Lagrangeova formula inverzije 125

Rješenja nekih zadataka **137**

Indeks **153**

Bibliografija **155**

Poglavlje 1

Osnove prebrojavanja

Kroz nekoliko primjera podsjetit ćemo se osnovnih tehnika prebrojavanja, s kojima ste se susreli na kolegijima *Diskretna matematika* [29, 31] ili *Kombinatorna i diskretna matematika.*

Primjer 1.1. *Koliko ima mogućih registarskih oznaka zagrebačkih automobila? Oznaka počinje slovima* ZG*, zatim slijede tri ili četiri znamenke, a na kraju jedno ili dva slova iz skupa* $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ *(ukupno* 22 *slova, bez* Č*,* Ć*,* Đ*,* Dž*,* Lj*,* Nj*,* Š *i* Ž*).*

Rješenje. Posebno ćemo prebrojati mogućnosti za znamenke i mogućnosti za slova. Nizova od tri znamenke ima $10^3 = 1000$, a nizova od četiri znamenke $10^4 = 10\,000$. Broj mogućnosti za znamenke je suma $1000 + 10\,000 = 11\,000$. Nizova od jednog slova ima 22, a nizova od dva slova $22^2 = 484$. Broj mogućnosti za slova je suma $22 + 485 = 506$. Ukupan broj registarskih oznaka je produkt $11\,000 \cdot 506 = 5\,566\,000$. $\square$

U prvom primjeru koristili smo se *principom produkta* i *principom sume.* Za konačne skupove $S_1, \ldots, S_n$ vrijedi $|S_1 \times \ldots \times S_n| = |S_1| \cdot \ldots \cdot |S_n|$. Ako su uz to međusobno disjunktni (tj. $S_i \cap S_j = \emptyset$ za $i \neq j$), onda vrijedi $|S_1 \cup \ldots \cup S_n| = |S_1| + \ldots + |S_n|$. Nizovi od tri znamenke su elementi Kartezijeva produkta $Z \times Z \times Z = Z^3$, a nizovi od četiri znamenke $Z \times Z \times Z \times Z = Z^4$. Pritom je $Z = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ skup znamenaka, koji ima $|Z| = 10$ elemenata. Po principu produkta je $|Z^3| = |Z|^3 = 10^3$ i $|Z^4| = |Z|^4 = 10^4$. Broj nizova znamenaka je po principu sume $|Z^3 \cup Z^4| = |Z^3| + |Z^4| = 10^3 + 10^4$. Na sličan način dobivamo broj nizova od jednog ili dva slova. Na kraju registarsku oznaku shvaćamo kao uređen par (niz znamenaka, niz slova) i konačan rezultat dobivamo po principu produkta.

Primjer 1.2. *Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva koji sadrže bar jednu parnu znamenku?*

Rješenje. Peteroznamenkastih prirodnih brojeva ima $9 \cdot 10^4 = 90\,000$ (prva znamenka ne smije biti nula). Peteroznamenkastih brojeva koji **ne** sadrže parnu znamenku, tj. sve znamenke su im iz skupa $N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, ima $|N^5| = |N|^5 = 5^5 = 3125$. Broj peteroznamenkastih brojeva koji sadrže bar jednu parnu znamenku dobivamo oduzimanjem $90\,000 - 3125 = 86\,875$. $\square$

U drugom primjeru koristili smo se *principom razlike* ili *komplementa*: za konačan skup X i njegov podskup $S \subseteq X$ vrijedi $|S^c| = |X \setminus S| = |X| - |S|$. Lakše je prebrojati peteroznamenkaste brojeve koji ne sadrže parnu znamenku, nego peteroznamenkaste brojeve koji sadrže bar jednu parnu znamenku.

Primjer 1.3. *Koliko ima podskupova n-članog skupa?*

Rješenje. Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup od n elemenata. Skup svih njegovih podskupova nazivamo *partitivnim skupom* i označavamo 2^S. Uspostavit ćemo bijekciju $f : 2^S \to \{0,1\}^n$ između partitivnog skupa i skupa svih binarnih nizova (nizova sastavljenih od nula i jedinica) duljine n. Podskupu $A \subseteq S$ pridružujemo niz $f(A) = (x_1, \ldots, x_n)$, pri čemu je

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako } a_i \in A, \\ 0, & \text{ako } a_i \notin A. \end{cases}$$

Funkcija f je bijekcija jer ima inverznu funkciju $g : \{0,1\}^n \to 2^S$, $g(x_1, \ldots, x_n) = \{a_i \mid x_i = 1\} \subseteq S$. Očito je $g \circ f$ identiteta na skupu 2^S, a $f \circ g$ je identiteta na skupu $\{0,1\}^n$. Stoga je broj elemenata od 2^S jednak broju elemenata od $\{0,1\}^n$. Po principu produkta je $|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$, pa je i $|2^S| = 2^n = 2^{|S|}$. □

Koristili smo se *principom jednakosti*: ako postoji bijekcija $f : S \to T$, onda skupovi S i T imaju jednako mnogo elemenata, tj. $|S| = |T|$. Bijekciju $f : S \to S$ sa skupa S na samog sebe nazivamo *permutacijom* skupa S. Ako je $S = \{1, \ldots, n\}$, bijekciju $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ nazivamo *permutacijom stupnja* n. Alternativno, možemo je definirati kao uređenu n-torku međusobno različitih elemenata skupa $\{1, \ldots, n\}$.

Propozicija 1.4. *Broj permutacija stupnja n je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.*

Dokaz. Element $f(1)$ možemo izabrati na n načina, element $f(2)$ na $n-1$ načina (jer mora biti različit od $f(1)$), element $f(3)$ na $n-2$ načina itd. Konačan rezultat dobivamo množenjem. □

Svaki k-člani podskup nekog skupa nazivamo njegovom *k-kombinacijom*, a skup svih k-kombinacija skupa S označavamo $\binom{S}{k}$.

Propozicija 1.5. *Broj k-kombinacija n-članog skupa je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.*

Dokaz. Izraz u brojniku $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ predstavlja broj uređenih k-torki međusobno različitih elemenata n-članog skupa S. Redoslijed elemenata u podskupu nije bitan, pa ga dijelimo s $k!$. Dakle, $\left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k} = \binom{n}{k}$. □

Broj $\binom{n}{k}$ nazivamo *binomnim koeficijentom* jer se javlja u razvoju n-te potencije binoma $x+y$. Dokazat ćemo formulu za taj razvoj metodom *dvostrukog prebrojavanja*: ako elemente istog skupa prebrojimo na dva načina i prvi puta dobijemo rezultat R_1, a drugi puta R_2, onda vrijedi $R_1 = R_2$.

Teorem 1.6 (Binomni teorem)**.** $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$

Dokaz. Na lijevoj i desnoj strani su polinomi u dvije varijable x i y. Ako se polinomi podudaraju za beskonačno mnogo vrijednosti varijabli, onda su identički jednaki. Dakle, dovoljno je provjeriti jednakost za sve $x, y \in \mathbb{N}$, pa ona vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Za $x, y \in \mathbb{N}$ broj $(x+y)^n$ predstavlja broj funkcija s n-članog u $(x+y)$-člani skup. Prebrojavamo skup $\mathcal{F} = T^S$ svih funkcija $f : S \to T$, pri čemu je $|S| = n$, $T = X \dot{\cup} Y$ (disjunktna unija), $|X| = x$, $|Y| = y$. Oznaka T^S za skup svih funkcija $f : S \to T$ izabrana je tako da vrijedi $\left|T^S\right| = |T|^{|S|}$. Rastavimo taj skup na disjunktne podskupove $\mathcal{F}_k$ svih funkcija $f : S \to T$ takvih da se točno k elemenata iz domene preslikava u Y, tj. $|f^{-1}(Y)| = |\{s \in S \mid f(s) \in Y\}| = k$. Vrijedi $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ jer prvo biramo k-člani podskup od S, zatim preslikavamo preostalih $n-k$ elemenata u X i na kraju preslikavamo izabranih k elemenata u Y. Zbog $\mathcal{F} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{F}_k$, desnu stranu dobivamo po principu sume. □

Primjer 1.7. *Koliko ima kombinacija u lotu 6/45? Kolika je vjerojatnost pogađanja "šestice", "petice", "četvorke" i "trojke"? Dopunski broj zanemarite.*

Rješenje. Broj kombinacija je $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$. Vjerojatnost pogađanja "šestice" je recipročna vrijednost $1/\binom{45}{6} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$. Za "peticu" povoljne mogućnosti su izbori pet brojeva od 6 dobitnih i jednog od 39 nedobitnih. Povoljnih mogućnosti ima $\binom{6}{5}\binom{39}{1} = 234$, a vjerojatnost dobivamo dijeljenjem s ukupnim brojem mogućnosti: $\frac{234}{8\,145\,060} \approx 2.9 \cdot 10^{-5}$. Na sličan način dobivamo vjerojatnost pogađanja "četvorke" $\binom{6}{4}\binom{39}{2}/\binom{45}{6} = \frac{11\,115}{8\,145\,060} \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$ i "trojke" $\binom{6}{3}\binom{39}{3}/\binom{45}{6} = \frac{182\,780}{8\,145\,060} \approx 2.2 \cdot 10^{-2}$. □

Primjer 1.8. *Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka?*

Rješenje. Podijelimo skup svih takvih brojeva u dva disjunktna podskupa: brojeve kojima je prva znamenka neparna i brojeve kojima je prva znamenka parna. U prvom slučaju imamo 5 mogućnosti za prvu znamenku (1, 3, 5, 7 ili 9), zatim biramo 0, 2 ili 4 od 5 mjesta za neparne znamenke: $\binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} = 16$ te na kraju pet puta biramo parnu ili neparnu znamenku iz skupa od 5 mogućnosti: $5^5 = 3125$. Ukupan broj mogućnosti u prvom slučaju je $5 \cdot 16 \cdot 3125 = 250\,000$. U drugom slučaju imamo 4 mogućnosti za prvu znamenku (2, 4, 6 ili 8), $\binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} = 16$ mogućnosti za mjesta na kojima su neparne znamenke te $5^5 = 3125$ mogućnosti za znamenke, što ukupno daje $4 \cdot 16 \cdot 3125 = 200\,000$ mogućnosti. Ukupan broj takvih prirodnih brojeva je $250\,000 + 200\,000 = 450\,000$. □

Rezultat možemo provjeriti na računalu s pomoću algoritma zapisanog u programskom jeziku C (program 1). Petlja po svim šesteroznamenkastim brojevima izvodi se na današnjim brzim računalima u djeliću sekunde. No ako bismo isti problem željeli riješiti za n-znamenkaste brojeve, vrijeme izvođenja ovog algoritma raslo bi eksponencijalno s n. S druge strane, uspostavljanjem bijekcije između skupa svih n-znamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka i skupa svih n-znamenkastih prirodnih brojeva s parnim brojem neparnih znamenaka možemo dokazati da takvih brojeva ima $45 \cdot 10^{n-2}$ (zadatak 1.6). Vrijednost ove formule možemo izračunati u vremenu koje raste linearno s n. O vezi enumerativne kombinatorike i algoritama pročitajte u zanimljivom članku [46].

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{ int i,j,nep,br;

  br=0;
  for (i=100000; i<1000000; ++i)
  { nep=0;
    j=i;
    while (j>0)
    { if ((j%10)%2==1) ++nep;
      j/=10;
    }
    if (nep%2==1) ++br;
  }

  printf("%d\n",br);
}
```

Program 1: Direktno prebrojavanje brojeve iz primjera 1.8.

Primjer 1.9. *Dokažite formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva* $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

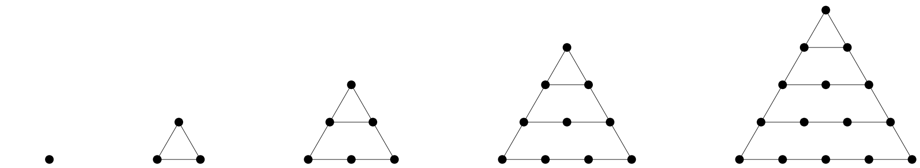
Rješenje. Označimo $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ i zbrojimo dvije takve sume napisane u suprotnom redoslijedu:

$$
\begin{array}{rrcccccccccc}
 & t_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + \ldots + & (n-1) & + & n \\
+ & t_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2t_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + \ldots + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}
$$

S desne strane imamo n pribrojnika $n+1$, pa je $2t_n = n(n+1)$, tj. $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

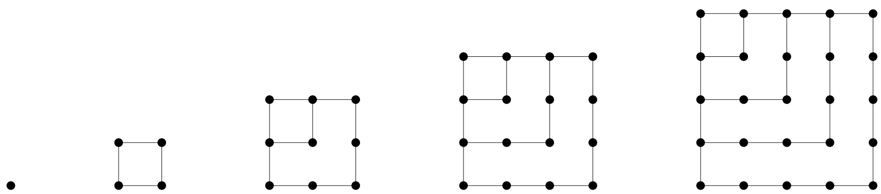
Carl Friedrich Gauss (1777.–1855.) navodno je u prvom razredu osnovne škole izračunao sumu prvih 100 prirodnih brojeva na način kao u primjeru 1.9, pa se taj dokaz naziva "Gaussovim trikom". Uočimo da je $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$, što nam daje ideju za drugi, kombinatorni dokaz. Parova prirodnih brojeva $\{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n+1\}$ ima isto kao i dvočlanih podskupova skupa $\{1,2,\ldots,n+1\}$, tj. $\binom{n+1}{2}$. S druge strane, podijelimo skup svih parova na disjunktne podskupove u ovisnosti o drugoj koordinati. Za $j = n+1$ parova ima n, za $j = n$ parova ima $n-1$, itd. Ukupan broj parova je po principu sume $n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \binom{n+1}{2}$.

Brojeve iz niza $(t_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ nazivamo *trokutnim brojevima* jer t_n možemo vizualizirati kao broj točaka u trokutu sastavljenom od n redova (slika 1.1). Analogno



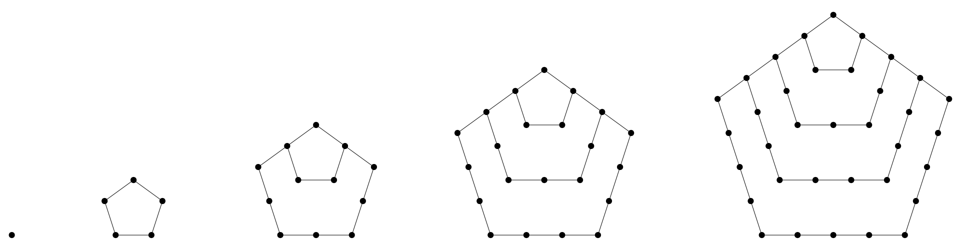
$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$ $t_5 = 15$

Slika 1.1: Trokutni brojevi.



$q_1 = 1$ $q_2 = 4$ $q_3 = 9$ $q_4 = 16$ $q_5 = 25$

Slika 1.2: Kvadratni brojevi.

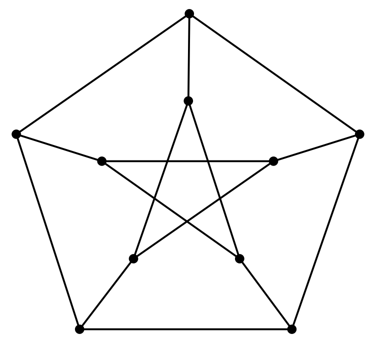


$p_1 = 1$ $p_2 = 5$ $p_3 = 12$ $p_4 = 22$ $p_5 = 35$

Slika 1.3: Peterokutni brojevi.

definiramo *kvadratne brojeve* (slika 1.2) i *peterokutne brojeve* (slika 1.3). Općenito takve nizove brojeve nazivamo *figurativnim* ili *poligonalnim*.

Na kraju ovog poglavlja podsjetit ćemo se nekih pojmova iz teorije grafova. *Graf* je uređen par $G = (V, E)$, pri čemu je V konačan skup *vrhova*, a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je skup dvočlanih podskupova od V koje zovemo *bridovima*. Broj vrhova označimo $n = |V|$. *Stupanj* vrha x je broj bridova koji ga sadrže; označavamo ga $d(x)$. Ako su svi vrhovi istog stupnja, kažemo da je graf *regularan*. Za vrhove $x, y \in V$ kažemo da su *susjedni* i pišemo $x \sim y$ ako je $\{x, y\} \in E$, a u suprotnom pišemo $x \not\sim y$. Za graf kažemo da je *jako regularan* s parametrima (n, k, λ, μ) ako ima n vrhova, regularan je stupnja k te svaka dva vrha imaju λ zajedničkih susjeda ako su susjedni, a μ zajedničkih susjeda ako nisu susjedni. Petersenov graf (slika 1.4) je primjer jako regularnog grafa s parametrima $(10, 3, 0, 1)$. Idući teorem pokazuje da parametri jako regularnog grafa nisu nezavisni.



Slika 1.4: Petersenov graf.

Teorem 1.10. *Ako postoji jako regularan graf s parametrima* (n, k, λ, μ)*, onda vrijedi*

$$k(k-1-\lambda) = (n-k-1)\mu.$$

Dokaz. Izaberemo vrh $z \in V$ i na dva načina prebrojimo elemente skupa

$$S = \{(x,y) \in V \times V \mid x \sim y,\ x \sim z,\ y \not\sim z\}.$$

Graf je k-regularan, pa vrhova x susjednih vrhu z ima k. Izabrani vrh x također ima k susjeda, a među njima je vrh z i λ zajedničkih susjeda od x i z. Zato vrh y koji je susjedan vrhu x i nije susjedan vrhu z možemo izabrati na $k-1-\lambda$ načina. Dakle, skup S sadrži $k(k-1-\lambda)$ parova (x,y).

Drugi puta brojimo parove u skupu S počevši od vrha y. Ukupan broj vrhova grafa n umanjen za vrh z i k njegovih susjeda je broj mogućih izbora za y: $n-1-k$. Sada imamo dva nesusjedna vrha z i y te tražimo njihovog zajedničkog susjeda x, a njih po definiciji jako regularnog grafa ima μ. Dakle, parova ima $(n-1-k)\mu$. Izjednačavanjem dobivamo jednakost $k(k-1-\lambda) = (n-k-1)\mu$. □

Prebrojavanje koliko ima jako regularnih grafova je težak problem. Za male parametre riješen je uz pomoć računala, a u nekim slučajevima dokazano je da su jako regularni grafovi s određenim parametrima jedinstveni do na izomorfizam. Za veće parametre čak i pitanje egzistencije odgovarajućih grafova može biti teško. Teorem 1.10 daje jedan nužan uvjet za postojanje. Na primjer, jako regularni grafovi s parametrima oblika $(10, 3, 1, \mu)$ ne postoje jer dobivamo $\mu = \frac{1}{2}$, što nije cijeli broj. Poznati su i drugi nužni uvjeti, a parametre koji ih sve zadovoljavaju zovemo *dopustivim*. Najmanji dopustivi parametri za koje nije poznato postoje li jako regularni grafovi su $(69, 20, 7, 5)$. Na internetu je dostupna tablica dopustivih parametara [6] s podacima o egzistenciji i broju jako regularnih grafova te opsežna knjiga [8].

Zadaci

Zadatak 1.1. *Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva koji su parni i nemaju znamenku* 3 *na prva dva mjesta?*

Zadatak 1.2. *Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva koji su neparni i u zapisu imaju bar jednu znamenku* 0*?*

Zadatak 1.3. *Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva s različitim znamenkama od kojih su* 3 *parne i* 3 *neparne?*

Zadatak 1.4. *Neka je* $|S| = n$ *i* $|T| = k$*. Koliko ima funkcija* $f : S \to T$*? Koliko ima injekcija* $f : S \to T$*?*

Zadatak 1.5. *Nađite nekoliko različitih dokaza binomnog teorema 1.6.*

Zadatak 1.6. *Dokažite da je za* $n \geq 2$ *broj* n*-znamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenaka jednak* $45 \cdot 10^{n-2}$*.*

Zadatak 1.7. *Koliko iznosi suma svih* n*-znamenkastih prirodnih brojeva s različitim znamenkama među kojima nije nula?*

Zadatak 1.8. *Dokažite sljedeće tvrdnje.*

(a) *Funkcija* $f : S \to T$ *je injekcija ako i samo ako postoji njezin lijevi inverz, tj. funkcija* $g : T \to S$ *takva da je* $g \circ f = id_S$*.*

(b) *Funkcija* $f : S \to T$ *je surjekcija ako i samo ako postoji njezin desni inverz, tj. funkcija* $g : T \to S$ *takva da je* $f \circ g = id_T$*.*

(c) *Funkcija* $f : S \to T$ *je bijekcija ako i samo ako postoji njoj inverzna funkcija, tj. funkcija* $g : T \to S$ *takva da je* $g \circ f = id_S$ *i* $f \circ g = id_T$*.*

(d) *Ako postoji inverzna funkcija od* $f : S \to T$*, onda je jedinstvena. To opravdava oznaku* $f^{-1} : T \to S$ *za inverznu funkciju.*

(e) *Ako postoji injekcija* $f : S \to T$*, onda je* $|S| \leq |T|$*.*

(f) *Ako postoji surjekcija* $f : S \to T$*, onda je* $|S| \geq |T|$*.*

Zadatak 1.9. *Gaussovim trikom dokažite formulu za sumu prvih* n *neparnih brojeva* $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ *i izvedite formulu za* n*-ti peterokutni broj* p_n*.*

Zadatak 1.10. *Dokažite da je zbroj svih stupnjeva vrhova grafa* $G = (V, E)$ *jednak dvostrukom broju bridova:*

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|.$$

Zadatak 1.11. *Dokažite* lemu o rukovanju*: u svakom grafu broj vrhova neparnog stupnja je paran.*

Zadatak 1.12. *Za niz nenegativnih cijelih brojeva* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ *kažemo da je* grafovski *ako postoji graf s* n *vrhova kojemu su to stupnjevi vrhova. Dokažite* Erdős[1]-Gallaijev[2] teorem*: niz je grafovski ako i samo ako je* $d_1 + \ldots + d_n$ *paran i za svaki* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\}.$$

[1]Paul Erdős (1913.-1996.), mađarski matematičar.
[2]Tibor Gallai (1912.-1992.), mađarski matematičar.

Poglavlje 2

Diferencijski račun

Rezultat prebrojavanja često dobivamo u obliku sume. Ponekad je sumu moguće pojednostaviti i zapisati u "zatvorenom obliku". U ovom poglavlju naučit ćemo tehnike koje nam to omogućuju, po uzoru na metode izračunavanja određenog integrala. Poglavlje je bazirano na dijelovima knjige [19].

Osnovni pojam diferencijalnog računa je pojam derivacije:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Df(x).$$

Ovdje je D operator deriviranja, koji derivabilnoj funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pridružuje njezinu derivaciju. Diskretni analogon operatora deriviranja je *diferencijski operator*:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Operator Δ djeluje na skupu svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kojeg označavamo $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Uz operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcije skalarom, $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, a $\Delta : \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\mathbb{R}$ je linearni operator. U kombinatorici umjesto funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obično radimo s nizovima, tj. funkcijama $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ili $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, ili $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Pritom vrijednosti $f(n)$ imaju kombinatornu interpretaciju, tj. predstavljaju kardinalne brojeve familije konačnih skupova $\{S_n\}_n$, $f(n) = |S_n|$. Razvit ćemo *diferencijski račun* ili *račun konačnih razlika* po analogiji s diferencijalnim i integralnim računom. Rezultate ćemo iskazivati na prostoru svih funkcija $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, ali isti rezultati vrijede na prostoru nizova $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, ili $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$, ili $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$.

Polazna točka je formula za derivaciju potencije:

$$D(x^m) = (x^m)' = m \cdot x^{m-1}.$$

Uočimo da formula ne vrijedi za diferencijski operator, npr. $\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$. Međutim, analogna formula vrijedi za takozvane *padajuće faktorijele*:

$$x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdots(x-m+1). \tag{2.1}$$

U zadatku 1.4 vidjeli smo kombinatornu interpretaciju u slučaju kad je x prirodan broj: $x^{\underline{m}}$ je broj injekcija s m-članog u x-člani skup. Specijalni slučaj je $m^{\underline{m}} = m!$, broj permutacija m-članog skupa. Produkt u formuli (2.1) ima m faktora, pa podrazumijevamo da je $x^{\underline{0}} = 1$ (prazan produkt).

Dokažimo sada da diferencijski operator djeluje na padajuće faktorijele analogno kao diferencijalni operator na potencije.

Propozicija 2.1. $\Delta(x^{\underline{m}}) = m \cdot x^{\underline{m-1}}$.

Dokaz. $\Delta(x^{\underline{m}}) = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = (x+1)x(x-1)\cdots(x-m+2) - x(x-1)\cdots(x-m+1) = x(x-1)\cdots(x-m+2)\cdot[(x+1)-(x-m+1)] = m\cdot x(x-1)\cdots(x-m+2) = m\cdot x^{\underline{m-1}}$. $\square$

Rastuće faktorijele definiramo kao $x^{\overline{m}} = x(x+1)\cdots(x+m-1)$. Analogna formula $\nabla(x^{\overline{m}}) = m\cdot x^{\overline{m-1}}$ vrijedi za operator $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Na engleskom se Δ naziva "forward difference operator", a ∇ "backward difference operator". Ograničit ćemo se na diferencijski račun za operator Δ, ali moguće ga je razviti i za operator ∇.

Inverzna operacija deriviranju je *neodređeni integral*: $\int f(x)\mathrm{d}x$ je skup svih funkcija $F(x)$ takvih da je $DF(x) = F'(x) = f(x)$ (skup svih *primitivnih funkcija* od f). Na analogni način definiramo neodređenu sumu.

Definicija 2.2. Neodređena suma $\sum f(x)\delta x$ *je skup svih funkcija* $F(x)$ *takvih da je* $\Delta F(x) = f(x)$.

Iz analize znamo da se dvije primitivne funkcije razlikuju za konstantu (uz pretpostavku da je domena cijeli $\mathbb{R}$ ili otvoreni interval, tj. povezani podskup od $\mathbb{R}$). Zato obično pišemo

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \iff DF(x) = f(x).$$

Diskretni analogon je

$$\sum f(x)\delta x = F(x) + C \iff \Delta F(x) = f(x),$$

ali ovdje umjesto konstante imamo funkciju $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je periodična s periodom 1. Naime, vrijedi $\Delta C(x) = 0 \iff C(x+1) = C(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ako se ograničimo na domenu $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ ili $\mathbb{Z}$, onda je C zaista konstanta.

Iz propozicije 2.1 i linearnosti operatora Δ slijedi

$$\Delta(x^{\underline{m+1}}) = (m+1)\cdot x^{\underline{m}} \implies \Delta\left(\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right) = x^{\underline{m}}.$$

Dakle, za padajuću faktorijelu $f(x) = x^{\underline{m}}$ "diskretna primitivna funkcija" je $F(x) = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}$, tj. vrijedi

$$\sum x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + C. \tag{2.2}$$

Najvažniji teorem diferencijalnog i integralnog računa je *Newton-Leibnizova formula*:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

S lijeve strane je određeni integral, koji predstavlja površinu ispod grafa funkcije, a s desne strane je bilo koja primitivna funkcija F od f. Definirat ćemo određenu sumu tako da vrijedi analogni teorem.

Definicija 2.3. *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$.* Određena suma *u granicama od a do b je*

$$\sum_a^b f(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} f(k) = f(a) + f(a+1) + \ldots + f(b-1).$$

Riječ je o "običnoj sumi" u granicama od a do $b-1$.

Teorem 2.4. *Ako je $F(x)$ bilo koja funkcija za koju vrijedi $\Delta F(x) = f(x)$, onda je*

$$\sum_a^b f(x)\delta x = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Raspišimo sumu i iskoristimo da je $f(x) = F(x+1) - F(x)$:

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(x)\delta x &= f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b-3) + f(b-2) + f(b-1) = \\ &= \cancel{F(a+1)} - F(a) + \cancel{F(a+2)} - \cancel{F(a+1)} + \cancel{F(a+3)} - \cancel{F(a+2)} + \ldots \\ &\ldots + \cancel{F(b-2)} - \cancel{F(b-3)} + \cancel{F(b-1)} - \cancel{F(b-2)} + F(b) - \cancel{F(b-1)} = \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Vidimo da se svi članovi sume pokrate, osim $-F(a)$ i $F(b)$. Ovo se zove "teleskopiranje". $\square$

Prethodni teorem omogućuje nam lako izračunavanje suma oblika $\sum\limits_{k=a}^{b} f(k)$ kad god znamo "diskretnu primitivnu funkciju" F od f.

Primjer 2.5. *Izračunajte sumu padajućih faktorijela $\sum\limits_{k=a}^{b} k^{\underline{m}}$.*

Rješenje. Iz formule (2.2) dobivamo

$$\sum_{k=a}^{b} k^{\underline{m}} = \sum_a^{b+1} x^{\underline{m}}\,\delta x = \left.\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^{b+1} = \frac{(b+1)^{\underline{m+1}} - a^{\underline{m+1}}}{m+1}.$$

$\square$

Za $m = 1$ vrijedi $x^{\underline{1}} = x$. Uzmemo li granice $a = 1$ i $b = n$, dobivamo formulu za trokutne brojeve iz primjera 1.9:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Za veće eksponente m obično nas zanima suma potencija $\sum_{k=1}^{n} k^m$, a ne suma padajućih faktorijela $\sum_{k=1}^{n} k^{\underline{m}}$. Do nje dolazimo tako da potenciju x^m raspišemo kao linearnu kombinaciju padajućih faktorijela $x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{m}}$. Na primjer, za $m = 2$ vrijedi $x^2 = x(x-1)+x = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$ i dobivamo formulu

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^{\underline{2}} + \sum_{k=1}^{n} k^{\underline{1}} = \frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Za $m = 3$ vrijedi $x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$ i dobivamo formulu

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^{\underline{4}}}{4} + 3\,\frac{(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Iz kombinatorne interpretacije binomnih koeficijenata slijedi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Ovdje smo sumirali po donjem indeksu, a gornji indeks je fiksan.

Primjer 2.6. *Izračunajte sumu binomnih koeficijenata* $\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{m}$ *po gornjem indeksu.*

Rješenje. Binomne koeficijente možemo zapisati s pomoću padajućih faktorijela:

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{m!} = \frac{x^{\underline{m}}}{m!}.$$

Iz formule 2.2 dobivamo neodređenu sumu

$$\sum \binom{x}{m}\,\delta x = \frac{1}{m!}\sum x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{1}{m!}\cdot\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1} + C = \binom{x}{m+1} + C.$$

Do toga dolazimo direktno iz Pascalove[1] formule $\binom{x+1}{m+1} = \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m}$, koju možemo zapisati kao $\Delta\binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}$. Primjenom teorema 2.4 slijedi

$$\sum_{k=a}^{b} \binom{k}{m} = \sum_{a}^{b+1} \binom{x}{m}\,\delta x = \binom{x}{m+1}\Bigg|_{a}^{b+1} = \binom{b+1}{m+1} - \binom{a}{m+1}.$$

□

Primjer 2.7. *Za* $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ *izračunajte sumu* $\sum_{k=a}^{b} q^k$.

Rješenje. Vrijedi $\Delta(q^x) = q^{x+1} - q^x = (q-1)q^x$. Zbog linearnosti operatora Δ "diskretna primitivna funkcija" od $f(x) = q^x$ je $F(x) = \frac{q^x}{q-1}$, pa imamo

$$\sum_{k=a}^{b} q^k = \sum_{a}^{b+1} q^x\,\delta x = \frac{q^x}{q-1}\Bigg|_{a}^{b+1} = \frac{q^{b+1}-q^a}{q-1}.$$

□

[1] Blaise Pascal (1623.–1662.), francuski matematičar, fizičar, izumitelj i filozof.

Ovo je zapravo suma konačnog geometrijskog reda. Za $a = 0$ i $b = n$ dobivamo poznatu formulu $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Primjer 2.8. *Izračunajte sumu prvih n Fibonaccijevih brojeva.*

Rješenje. Niz Fibonaccijevih brojeva (F_k) definiran je rekurzijom $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ i početnim uvjetima $F_1 = F_2 = 1$. To možemo zapisati kao $F_{k+1} - F_k = F_{k-1}$, odnosno ako zamijenimo indeks k sa x kao $\Delta(F_x) = F_{x-1}$ ili $\Delta(F_{x+1}) = F_x$ (ovo ima smisla samo za $x \in \mathbb{Z}$, a ne za $x \in \mathbb{R}$). Iz teorema 2.4 dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{1}^{n+1} F_x \, \delta x = F_{x+1}\Big|_1^{n+1} = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

□

Za potencije vrijedi pravilo $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$. Analogno pravilo za padajuće faktorijele glasi $x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}} \cdot (x - m)^{\underline{n}}$, za sve $m, n \in \mathbb{N}_0$. Želimo proširiti definiciju padajućih faktorijela na negativne eksponente tako da ovo pravilo vrijedi za sve $m, n \in \mathbb{Z}$, kao i za potencije:

$$1 = x^{\underline{0}} = x^{\underline{-m+m}} = x^{\underline{-m}} \cdot (x - (-m))^{\underline{m}} \quad \Longrightarrow \quad x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+m)^{\underline{m}}}.$$

Vidimo da trebamo definirati

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}.$$

Uz ovu definiciju formula iz propozicije 2.1 vrijedi i za negativne eksponente:

$$\Delta(x^{\underline{-m}}) = \Delta\left(\frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)}\right) = \frac{1}{(x+2)\cdots(x+m+1)} - \frac{1}{(x+1)\cdots(x+m)} =$$

$$= \frac{x+1-(x+m+1)}{(x+1)\cdots(x+m+1)} = \frac{-m}{(x+1)\cdots(x+m+1)} = (-m) \cdot x^{\underline{-m-1}}.$$

Prema tome, i formula (2.2) vrijedi za negativne eksponente, što nam omogućuje izračunavanje suma

$$\sum_a^b x^{\underline{m}} \, \delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_a^b$$

za sve $m \in \mathbb{Z}$ osim za $m = -1$ (zbog dijeljenja s nulom). Iz analize znamo da je $\int x^{-1} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$. Diskretni analogon logaritamske funkcije je $F(x)$ takva da je $\Delta(F(x)) = x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$, tj. $F(x+1) - F(x) = \frac{1}{x+1}$. Ako stavimo $F(1) = 1$, slijedi $F(2) = F(1) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$, $F(3) = F(2) + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, i općenito $F(n) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Ovo su parcijalne sume divergentnog harmonijskog reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Za te brojeve ne postoji zatvorena formula, a zovemo ih *harmonijskim brojevima* i označavamo $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Obično stavljamo $H_0 = 0$.

Sad imamo formulu za sumu padajućih faktorijela za sve cjelobrojne potencije $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b, & \text{za } m \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}, \\ H_x\big|_a^b\,, & \text{za } m = -1. \end{cases}$$

Primjer 2.9. *Izračunajte sumu* $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Rješenje. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum\limits_{0}^{n+1} x^{\underline{-2}}\,\delta x = \left.\frac{x^{\underline{-1}}}{-1}\right|_0^{n+1} = \left.\frac{-1}{x+1}\right|_0^{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$. □

Idući cilj je izvesti analogon pravila za derivaciju produkta:

$$D(f(x)\cdot g(x)) = Df(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot Dg(x).$$

Definiramo *operator pomaka* $E : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $Ef(x) = f(x+1)$. Lako se provjeri da je E linearni operator na prostoru svih funkcija $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Propozicija 2.10.

$$\Delta(f(x)\cdot g(x)) = \Delta f(x)\cdot Eg(x) + f(x)\cdot \Delta g(x).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} \Delta(f(x)\cdot g(x)) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x) = \\ &= (f(x+1) - f(x))\cdot g(x+1) + f(x)\cdot(g(x+1) - g(x)) = \\ &= \Delta f(x)\cdot Eg(x) + f(x)\cdot \Delta g(x). \end{aligned}$$

□

Iz pravila za derivaciju produkta izvodi se formula parcijalne integracije:

$$\int f(x)\cdot Dg(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int Df(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Diskretni analogon je *formula parcijalne sumacije:*

$$\sum f(x)\cdot \Delta g(x)\,\delta x = f(x)\cdot g(x) - \sum \Delta f(x)\cdot Eg(x)\,\delta x. \tag{2.3}$$

Primjer 2.11. *Izračunajte neodređeni integral* $\int x\cdot e^x\,\mathrm{d}x$ *i neodređenu sumu* $\sum x\cdot 2^x\,\delta x$.

Rješenje. Integral je tipičan primjer za parcijalnu integraciju:

$$\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} f(x) = x \Rightarrow Df(x) = 1, \\ Dg(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x \end{array}\right] = x\,e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x + C = (x-1)\,e^x + C.$$

Za sumu koristimo formulu parcijalne sumacije (2.3):

$$\sum x\,2^x\,\delta x = \left[\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow \Delta f(x)=1, \\ \Delta g(x)=2^x \Rightarrow g(x)=2^x \\ \Rightarrow Eg(x)=2^{x+1} \end{array}\right] = x\,2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x = x\,2^x - 2^{x+1} + C =$$

$$= (x-2)\,2^x + C.$$

□

Iz teorema 2.4 sad možemo izračunati sumu

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot 2^k = \sum_{0}^{n+1} x\,2^x\,\delta x = (x-2)\,2^x\Big|_0^{n+1} = (n-1)\,2^{n+1} - (0-2)\,2^0 = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Primjer 2.12. *Izračunajte sumu harmonijskih brojeva* $\sum\limits_{k=1}^{n} H_k$.

Rješenje. Prisjetimo se kako se izračunava neodređeni integral logaritamske funkcije:

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} f(x)=\ln x \Rightarrow Df(x)=\frac{1}{x} \\ Dg(x)=1 \Rightarrow g(x)=x \end{array}\right] = x\,\ln x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1) + C.$$

Iz $f(x) = H_x$ slijedi $\Delta f(x) = H_{x+1} - H_x = \frac{1}{x+1}$, a iz $\Delta g(x) = 1$ slijedi $g(x) = x^{\underline{1}} = x$ i $Eg(x) = x+1$. Po formuli parcijalne sumacije imamo

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{1}^{n+1} H_x\,\delta x = x\,H_x\Big|_1^{n+1} - \sum_{1}^{n+1} \cancel{(x+1)}\,\frac{1}{\cancel{x+1}}\,\delta x = (n+1)H_{n+1} - 1 - \sum_{1}^{n+1} 1\,\delta x =$$

$$= (n+1)H_{n+1} - 1 - n = (n+1)(H_{n+1} - 1).$$

□

Primjer 2.13. *Izračunajte sumu* $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot H_k$.

Rješenje.

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot H_k = \sum_{1}^{n+1} x\,H_x\,\delta x = \left[\begin{array}{l} f(x)=H_x \Rightarrow \Delta f(x)=\frac{1}{x+1} \\ \Delta g(x)=x \Rightarrow g(x)=\frac{x^{\underline{2}}}{2} \\ \Rightarrow Eg(x)=\frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,x^{\underline{2}}\,H_x\Big|_1^{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n+1} \cancel{(x+1)}\,x\,\frac{1}{\cancel{x+1}}\,\delta x = \frac{1}{2}(n+1)nH_{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n+1} x\,\delta x =$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)H_{n+1} - \frac{x^{\underline{2}}}{4}\Big|_1^{n+1} = \frac{1}{4}n(n+1)\left(2H_{n+1} - 1\right).$$

□

Iako nemamo zatvorenu formulu za harmonijske brojeve H_n, vidimo da možemo s njima računati i pojednostavljivati sume koje ih uključuju.

Zadaci

Zadatak 2.1. *Dokažite da je* $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *linearni operator.*

Zadatak 2.2. *Prikažite* x^4 *kao linearnu kombinaciju padajućih faktorijela. Pokušajte naslutiti koeficijente u prikazu potencije* x^m *kao linearne kombinacije padajućih faktorijela* $x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{m}}$ *(pogledajte sliku na naslovnici!).*

Zadatak 2.3. *Dokažite da binomni teorem vrijedi i za padajuće faktorijele:*

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{n-k}} y^{\underline{k}}.$$

Zadatak 2.4. *Izračunajte sumu* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$.

Zadatak 2.5. *Izračunajte dvostruku sumu* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2$.

Zadatak 2.6. *Za konstantu c odredite* $\Delta(c^{\underline{x}})$. *Pomoću tog rezultata izračunajte* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}$.

Zadatak 2.7. *Metodom parcijalne sumacije izračunajte:*

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^k$, *(b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot F_k$, *(c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2^k}$, *(d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot 2^k$,

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$, *(f)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$, *(g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} H_k$, *(h)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot F_k$.

Zadatak 2.8. *Za* $m, n \in \mathbb{N}$ *dokažite formulu* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} H_k = \binom{n}{m+1}\left(H_n - \frac{1}{m+1}\right)$.

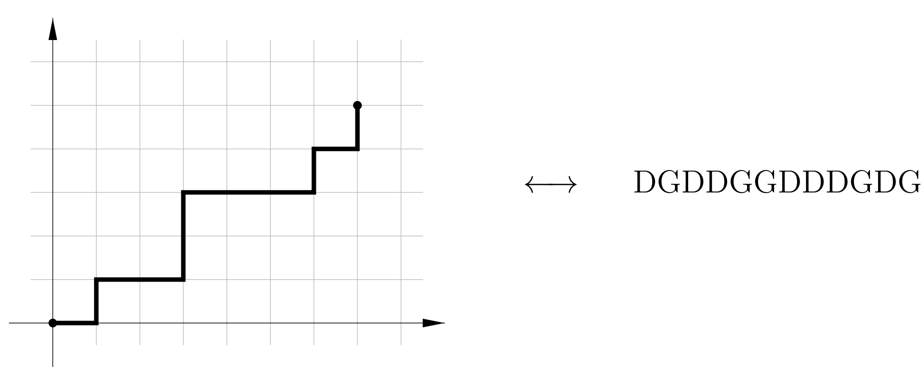
Poglavlje 3

Bijektivni dokazi

Tema ovog poglavlja su dokazi kombinatornih tvrdnji u kojima uspostavljamo bijekciju između dvaju skupova. Takvi dokazi nekad se smatraju ljepšim i "više kombinatornim" od indirektnih dokaza, u kojima ne uspostavljamo bijekciju. Poglavlje je bazirano na dijelovima knjige [27], a u njemu ćemo se podsjetiti kombinatornih objekata poput puteva u cjelobrojnoj mreži, multiskupova, particija prirodnih brojeva i particija skupova.

3.1 Catalanovi brojevi

Put duljine k u cjelobrojnoj mreži je niz $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ parova $v_i \in \mathbb{Z}^2$ takav da se susjedni parovi razlikuju za jedan korak u smjeru desno, lijevo, gore ili dolje, tj. $v_i - v_{i-1} \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$. Obično promatramo samo najkraće puteve od početnog vrha v_0 do krajnjeg vrha v_k. Ako su koordinate od v_k veće ili jednake od koordinata v_0, to znači da su dozvoljeni samo koraci desno i gore.



Slika 3.1: Najkraći putevi u cjelobrojnoj mreži.

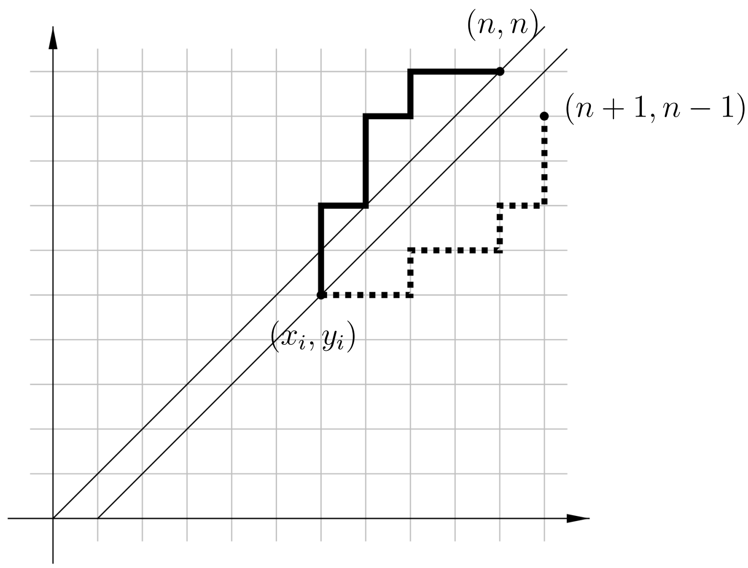
Propozicija 3.1. *Broj najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od ishodišta do točke* $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ *jednak je* $\binom{m+n}{m}$.

Dokaz. Najkraći put sastoji se od m koraka desno i n koraka gore. Možemo uspostaviti bijekciju s nizovima duljine $m + n$ sastavljenim od m slova D i n slova G, kojih očito ima $\binom{m+n}{m}$ (vidi sliku 3.1). $\square$

Dyckov put[1] je najkraći put od $(0,0)$ do (n,n) koji ne silazi ispod pravca $y=x$. Takav put počinje i završava na tom pravcu i smije ga doticati u srednjem dijelu, ali niti jedan njegov vrh ne smije imati koordinate (x,y) s $x>y$. Broj Dyckovih puteva jednak je n-tom *Catalanovom broju*[2] $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. U skripti [31] to je dokazano indirektno, s pomoću funkcija izvodnica, a ovdje dajemo bijektivni dokaz.

Teorem 3.2. *Broj Dyckovih puteva od* $(0,0)$ *do* (n,n) *jednak je* $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Dokaz. Jednakost $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ provjeri se jednostavnim računom, a navodi nas na princip komplementa. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih najkraćih puteva od $(0,0)$ do (n,n), a $\mathcal{D}$ skup svih Dyckovih puteva. Očito je $|\mathcal{P}| = \binom{2n}{n}$ i $|\mathcal{D}| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{D}^c|$, pa je dovoljno dokazati da puteva koji *nisu* Dyckovi ima $|\mathcal{D}^c| = \binom{2n}{n+1}$. Uspostavit ćemo bijekciju između $\mathcal{D}^c$ i skupa $\mathcal{P}'$ svih najkraćih puteva od $(0,0)$ do $(n+1,n-1)$, kojih po propoziciji 3.1 ima $|\mathcal{P}'| = \binom{2n}{n+1}$.



Slika 3.2: Andréova metoda zrcaljenja.

Funkciju $f : \mathcal{D}^c \to \mathcal{P}'$ definiramo takozvanom Andréovom[3] metodom zrcaljenja. Put $P \in \mathcal{D}^c$ nije Dyckov, pa ima bar jedan vrh na pravcu $y = x-1$. Neka je (x_i,y_i) zadnji vrh puta P na tom pravcu. Zrcalimo dio puta od (x_i,y_i) do (n,n) preko pravca $y=x-1$ i tako dolazimo do puta P', koji završava u vrhu $(n+1,n-1)$ (slika 3.2). Funkcija $f : \mathcal{D}^c \to \mathcal{P}'$ koja pridružuje $f(P) = P'$ je bijekcija jer ima inverznu funkciju $g : \mathcal{P}' \to \mathcal{D}^c$. Svaki put $P' \in \mathcal{P}'$ siječe pravac $y = x-1$, jer su početna i krajnja točka $(0,0)$ i $(n+1,n-1)$ na suprotnim stranama tog pravca. Neka je (x_i,y_i) zadnja točka puta P' na pravcu $y=x-1$. Put $P = g(P')$ dobivamo zrcaljenjem dijela P' od (x_i,y_i) do $(n+1,n-1)$ preko tog pravca. Taj put završava u (n,n) i nije Dyckov, jer sadrži točku (x_i,y_i). Dakle, funkcija $g : \mathcal{P}' \to \mathcal{D}^c$ je dobro definirana, a očito je inverzna funkciji f. □

[1] Walther Franz Anton von Dyck (1856.–1934.), njemački matematičar.
[2] Eugene Charles Catalan (1814.–1894.), belgijski i francuski matematičar.
[3] Désiré André (1840.–1917.), francuski matematičar.

Teorem 3.3. *Catalanovi brojevi zadovoljavaju Segnerovu*[4] *rekurziju* $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$, *za sve* $n \in \mathbb{N}$, *uz početni uvjet* $C_0 = 1$.

Dokaz. Za brojeve zadane formulom $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ bilo bi teško direktno dokazati rekurziju. Koristimo se kombinatornom interpretacijom iz prethodnog teorema: C_n je broj Dyckovih puteva od $(0,0)$ do (n,n). Skup svih Dyckovih puteva podijelimo na disjunktne podskupove prema prvom mjestu nakon ishodišta na kojem dotiču pravac $y = x$. Ako je to mjesto (k,k), takvih puteva ima $C_{k-1} \cdot C_{n-k}$. Naime, na dijelu od $(0,0)$ do (k,k) put ne dotiče pravac $y = x$ osim u prvoj i zadnjoj točki. Translacijom za jednu jedinicu prema dolje možemo ga identificirati s Dyckovim putem od $(0,0)$ do $(k-1,k-1)$, kojih ima C_{k-1}. Dio puta od (k,k) do (n,n) identificiramo s Dyckovim putem od $(0,0)$ do $(n-k,n-k)$, kojih ima C_{n-k}. Rekurziju dobivamo po principu produkta i sume. □

Catalanovi brojevi poznati su po brojnim kombinatornim interpretacijama, od kojih dvije navodimo u zadatku 3.2. Mnoge druge kombinatorne interpretacije dane su u knjizi [39] (vidi korolar 6.2.3 i zadatke 6.19 do 6.36).

3.2 Multiskupovi

Multiskup $M = \{a_1^{k_1}, \ldots, a_s^{k_s}\}$ sadrži međusobno različite elemente $a_1, \ldots, a_s$ s kratnostima $k_1, \ldots, k_s$. To znači da element a_i sadrži k_i puta, a ukupan broj elemenata od M je $|M| = k_1 + \ldots + k_s = n$. Broj permutacija multiskupa M je *multinomni koeficijent*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!},$$

koji se javlja i u *multinomnom teoremu*

$$(x_1 + \ldots + x_s)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_s=n} \binom{n}{k_1, \ldots, k_s} x_1^{k_1} \cdots x_s^{k_s}. \tag{3.1}$$

Za $s = 2$ multinomni koeficijenti su binomni koeficijenti:

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1, n-k_1} = \binom{n}{k_1},$$

a multinomni teorem prelazi u binomni teorem. Primijetimo da binomni koeficijenti prebrojavaju *kombinacije* skupa, dok multinomni koeficijenti prebrojavaju *permutacije* multiskupa. Podmultiskup od M je oblika $\{a_1^{x_1}, \ldots, a_s^{x_s}\}$, za $0 \le x_i \le k_i$, $i = 1, \ldots, s$. Ukupan broj podmultiskupova je produkt $(k_1+1)\cdots(k_s+1)$, a broj k-članih podmultiskupova, tj. k-kombinacija od M jednak je broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + \ldots + x_s = k \tag{3.2}$$

uz uvjete $0 \le x_i \le k_i$, $i = 1, \ldots, s$. Ako je $k \le \min\{k_1, \ldots, k_s\}$, možemo ga zapisati kao binomni koeficijent.

[4] Johann Segner (1704.–1777.), mađarski matematičar.

Propozicija 3.4. *Broj k-kombinacija multiskupa $M = \{a_1^\infty, \ldots, a_s^\infty\}$ jednak je $\binom{k+s-1}{k}$.*

Dokaz. Prebrojavamo cjelobrojna rješenja jednadžbe (3.2) koja zadovoljavaju $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$. Uspostavljamo bijekciju između skupa svih rješenja i skupa svih binarnih nizova duljine $k+s-1$ koji se sastoje od k nula i $s-1$ jedinica. Rješenju $(x_1, \ldots, x_s)$ pridružimo niz koji počinje s x_1 nula, zatim slijedi jedna jedinica, zatim x_2 nula, zatim jedna jedinica i tako dalje:

$$(x_1, \ldots, x_s) \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{00000}_{x_1}\,1\,\underbrace{0000}_{x_2}\,1\,\underbrace{00000}_{x_3}\,1 \cdots 1\,\underbrace{0000}_{x_s}.$$

Inverzno preslikavanje nizu od k nula i $s-1$ jedinica pridružuje rješenje $(x_1, \ldots, x_s)$, gdje je x_1 broj nula prije prve jedinice, x_2 broj nula između prve i druge jedinice i tako dalje (na kraju je x_s broj nula nakon zadnje jedinice). Binarnih nizova očito ima $\binom{k+s-1}{k}$, pa je toliko i rješenja jednadžbe (3.2), odnosno k-kombinacija multiskupa M. □

U prethodnom dokazu nule možemo zamijeniti kuglicama, a jedinice štapićima, pa se opisana bijekcija nekad naziva "principom kuglica i štapića". Nizove nula i jedinica možemo tumačiti i kao permutacije multiskupa $\{0^k, 1^{s-1}\}$ s dva različita elementa i kratnostima k i $s-1$.

Teže je prebrojati k-kombinacije kad je k veći od kratnosti pojedinih elemenata multiskupa $M = \{a_1^{k_1}, \ldots, a_s^{k_s}\}$. U tom slučaju koristimo se formulom uključivanja-isključivanja ili funkcijom izvodnicom: broj k-kombinacija jednak je koeficijentu uz x^k polinoma

$$(1 + x + \ldots + x^{k_1}) \cdot (1 + x + \ldots + x^{k_2}) \cdots (1 + x + \ldots + x^{k_s}).$$

Kod množenja biramo potenciju od x iz svakog faktora, a eksponent odgovara kratnosti odgovarajućeg elementa a_i u podmultiskupu.

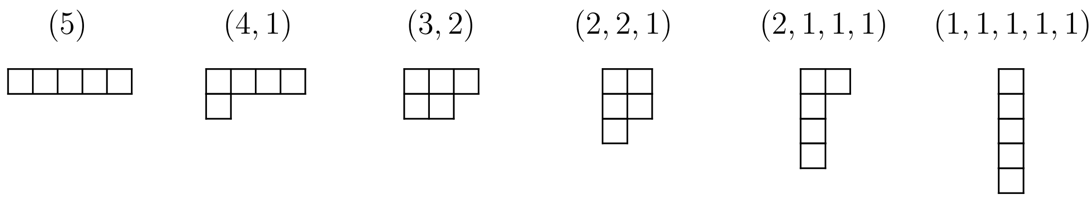
3.3 Particije brojeva

Particija prirodnog broja $n \in \mathbb{N}$ je niz $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ prirodnih brojeva takav da je $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k$ i $n = \mu_1 + \ldots + \mu_k$. Broj $n = |\mu|$ nazivamo *površinom*, a $k = \ell(\mu)$ *duljinom* particije μ. Na primjer, particije broja 5 su nizovi (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1) i (1, 1, 1, 1, 1). Ukupan broj particija od n označavamo $p(n)$, a broj particija od n duljine k označavamo $p(n, k)$. Vidimo da je $p(5) = 7$ te $p(5, 1) = 1$, $p(5, 2) = 2$, $p(5, 3) = 2$, $p(5, 4) = 1$ i $p(5, 5) = 1$. Iz principa sume slijedi

Propozicija 3.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(n, k) = p(n).$

Particije prirodnih brojeva vizualiziramo takozvanim *Ferrersovim*[5] ili *Youngovim*[6] *dijagramima*. Za $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ neka je $\mathrm{dg}(\mu) = \{(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq \mu_i\}$. Običaj je parove iz dijagrama $\mathrm{dg}(\mu)$ crtati kao kvadratiće u četvrtom kvadrantu, tj. koordinatu i nanositi vertikalno prema dolje, a j horizontalno udesno (slika 3.4). Na taj način duljina particije odgovara visini Ferrersova dijagrama, a površina odgovara površini. Ferrersovi dijagrami particija broja 5 prikazani su na slici 3.3.

[5]Norman Macleod Ferrers (1829.-1903.), britanski matematičar.
[6]Alfred Young, (1873.-1940.), britanski matematičar.



Slika 3.3: Ferrersovi dijagrami particija broja 5.

Teorem 3.6. *Broj particija od n duljine k jednak je broju particija od n kojima je prvi (najveći) pribrojnik $\mu_1 = k$.*

Dokaz. Za particiju μ definiramo njoj *konjugiranu* particiju μ' kao particiju koja ima transponirani Ferrersov dijagram: $\mathrm{dg}(\mu') = \{(j,i) \mid (i,j) \in \mathrm{dg}(\mu)\}$ (slika 3.4). Konjugiranje je involucija (bijekcija koja je sama sebi inverz) između skupa svih particija od n duljine k i skupa svih particija od n s najvećim pribrojnikom $\mu_1 = k$. $\square$

Brojevi $p(n,k)$ zadovoljavaju jednostavnu rekurziju:

Teorem 3.7. $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$, *za sve* $n,k \in \mathbb{N}$.

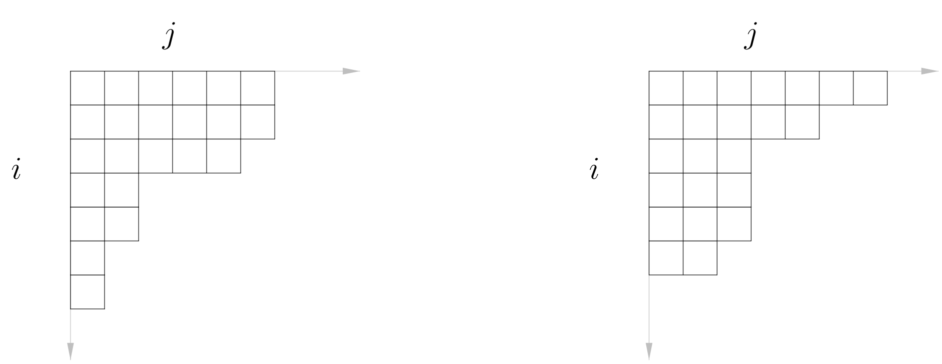
Dokaz. Skup $\mathcal{P}$ svih particija od n duljine k podijelimo na dva disjunktna podskupa: $\mathcal{P}_1 = \{(\mu_1,\ldots,\mu_k) \in \mathcal{P} \mid \mu_k = 1\}$ i $\mathcal{P}_2 = \{(\mu_1,\ldots,\mu_k) \in \mathcal{P} \mid \mu_k > 1\}$. Po principu sume vrijedi $p(n,k) = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2|$. Rekurzija slijedi uspostavljanjem dviju bijekcija:

$$(\mu_1,\ldots,\mu_{k-1},1) \mapsto (\mu_1,\ldots,\mu_{k-1})$$

između $\mathcal{P}_1$ i skupa svih particija od $n-1$ duljine $k-1$, kojih ima $p(n-1,k-1)$, te

$$(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k) \mapsto (\mu_1-1,\mu_2-1,\ldots,\mu_k-1)$$

između $\mathcal{P}_2$ i skupa svi particija od $n-k$ duljine k, kojih ima $p(n-k,k)$. $\square$



Slika 3.4: Ferrersov dijagram particije $\mu = (6,6,5,2,2,1,1)$ (lijevo) i njoj konjugirane particije $\mu' = (7,5,3,3,3,2)$ (desno).

Kao početne uvjete uzimamo $p(n,k) = 0$ za $k > n$ ili $k < 0$, $p(n,0) = 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $p(0,0) = 1$. Zadnja jednakost opravdana je time što prazan niz () možemo smatrati particijom broja 0 duljine 0. Brojevi $p(n)$ zadovoljavaju kompliciraniju rekurziju u kojoj se javljaju takozvani generalizirani peterokutni brojevi, a izvest ćemo je u poglavlju o funkcijama izvodnicama. Funkcija izvodnica $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n$ jednaka je beskonačnom produktu geometrijskih redova:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) \cdot (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}. \end{aligned}$$

Račun s beskonačnim sumama i produktima opravdat ćemo kasnije. Za sada napomenimo da izbor potencije x^i iz prvog faktora znači da u particiji imamo i jedinica, izbor potencije x^{2j} iz drugog faktora znači da u particiji imamo j dvojki i tako dalje.

3.4 Particije skupova

Particija skupa S je familija $\{S_i \mid i \in I\}$ nepraznih podskupova $\emptyset \neq S_i \subseteq S$ koji su međusobno disjunktni ($S_i \cap S_j = \emptyset$, $\forall i, j \in I$, $i \neq j$) i unija im je cijeli S ($\bigcup\limits_{i \in I} S_i = S$). Podskupove S_i zovemo *blokovima* particije. *Relacija ekvivalencije* na skupu S je binarna relacija $\sim\, \subseteq S \times S$ koja je refleksivna ($x \sim x$, $\forall x \in S$), simetrična ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) i tranzitivna ($x \sim y$ i $y \sim z \Rightarrow x \sim z$). Particije i relacije ekvivalencije na skupu S su u bijektivnoj korespondenciji.

Teorem 3.8. *Postoji bijekcija između skupa svih relacija ekvivalencije na skupu S i skupa svih particija skupa S.*

Dokaz. Relaciji ekvivalencije $\sim$ na S pridružimo skup svih klasa ekvivalencije: $\{[x] \mid x \in S\}$, pri čemu je $[x] = \{y \in S \mid x \sim y\}$. Iz refleksivnosti slijedi da su klase ekvivalencije neprazne, a iz simetričnosti i tranzitivnosti da za $x \sim y$ vrijedi $[x] = [y]$, a za $x \not\sim y$ vrijedi $[x] \cap [y] = \emptyset$. Zato skup svih klasa ekvivalencije čini particiju skupa S.

Obrnuto, particiji $\{S_i \mid i \in I\}$ skupa S pridružimo binarnu relaciju $\sim$ na S definiranu sa: $x \sim y$ ako postoji $i \in I$ takav da su $x, y \in S_i$. Iz svojstva particije slijedi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Opisana pridruživanja su jedna drugom inverzna, pa su bijekcije. $\square$

Zanima nas slučaj kad je skup S konačan i ima n elemenata. Tada broj svih particija skupa S ili relacija ekvivalencije na skupu S zovemo *n-tim Bellovim*[7] *brojem* i označavamo B_n. Na primjer, particije skupa $S = \{1,2,3\}$ su $\{\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\}\}$ i $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, pa je $B_3 = 5$. Po dogovoru stavljamo $B_0 = 1$.

Teorem 3.9. *Bellovi brojevi zadovoljavaju rekurziju $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$.*

[7] Eric Temple Bell (1883.–1960.), škotski matematičar i autor znanstvene fantastike (pod pseudonimom John Taine).

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih particija od $S = \{1, \dots, n\}$, a $\mathcal{P}_k$ skup particija od S u kojima je element n pokriven blokom veličine k. Po principu sume je $B_n = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_n| = \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{P}_k|$. Da bismo prebrojali particije iz $\mathcal{P}_k$, biramo $k-1$ elemenata iz $\{1, \dots, n-1\}$ koje ćemo staviti u blok zajedno s n, što možemo na $\binom{n-1}{k-1}$ načina. Preostalih $n-k$ elemenata particioniramo na B_{n-k} načina. Po principu produkta je $|\mathcal{P}_k| = \binom{n-1}{k-1} \cdot B_{n-k}$ i time je rekurzija dokazana. $\square$

Stirlingov[8] *broj druge vrste* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ je broj particija n-članog skupa koje se sastoje od k blokova. Na primjer, vrijedi $\left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1$ jer postoji jedna particija od $\{1,2,3\}$ s jednim blokom: $\{\{1,2,3\}\}$, vrijedi $\left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3$ jer postoje tri particije od $\{1,2,3\}$ s dva bloka: $\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\}\}$ i $\{\{1\},\{2,3\}\}$ te vrijedi $\left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1$ jer postoji jedna particija od $\{1,2,3\}$ s tri bloka: $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$. Očito za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$.

Primjer 3.10. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *odredite* $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ *i* $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$.

Rješenje. Particija n-članog skupa S na dva bloka je oblika $\{A, A^c\}$, pri čemu je $A \subseteq S$ neprazan podskup i $A^c = S \setminus A$ njegov komplement. Skup A možemo izabrati na $2^n - 2$ načina (A i A^c moraju biti neprazni), a time je jednoznačno određen A^c. Taj broj treba podijeliti s 2 jer zamjenom A i A^c dobivamo istu particiju. Dakle, $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$. Particija n-članog skupa na $n-1$ blokova svodi se na izbor dvaju elemenata koje ćemo staviti u isti blok, a svi ostali elementi su u jednočlanim blokovima. Zato je $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$. $\square$

Po dogovoru stavljamo $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$. Analogno kao što dokazujemo $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, za Stirlingove brojeve druge vrste iz principa sume slijedi

Propozicija 3.11. $\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = B_n$, *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$.

Iduće svojstvo analogno je Pascalovoj formuli $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Teorem 3.12. $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$, *za sve* $n, k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $S = \{1, \dots, n\}$. Pascalovu formulu dokazujemo tako da skup svih k-kombinacija od S podijelimo na dva disjunktna podskupa prema tome sadrže li ili ne sadrže element n. Analogno, skup $\mathcal{P}$ svih particija od S na k blokova podijelimo na disjunktne podskupove $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$. Particiju stavljamo u $\mathcal{P}_1$ ako sadrži jednočlan skup $\{n\}$ kao blok, a u $\mathcal{P}_2$ ako ga ne sadrži. Vrijedi $|\mathcal{P}_1| = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ zbog bijekcije s particijama od $\{1, \dots, n-1\}$ na $k-1$ blokova (oduzimanje/dodavanje bloka $\{n\}$). Jednakost $|\mathcal{P}_2| = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ dokazujemo uspostavljanjem bijekcije između $\mathcal{P}_2$ i skupa svih particija od $\{1, \dots, n-1\}$ na k blokova s jednim istaknutim blokom. U particiji iz $\mathcal{P}_2$ element n nije sam u bloku, pa ga izbacimo i istaknemo blok u kojem je bio. Obrnuto, particiji od $\{1, \dots, n-1\}$ dodamo element n u istaknuti blok i tako dobivamo particiju iz $\mathcal{P}_2$. Po principu sume vrijedi $\left\{ {n \atop k} \right\} = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$. $\square$

[8] James Stirling (1692.–1770.), škotski matematičar.

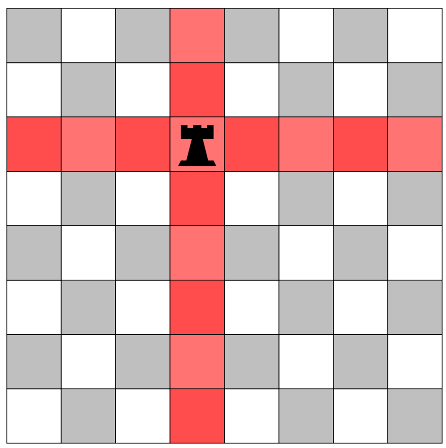
Broj surjekcija s n-članog na k-člani skup označavamo $\mathrm{Sur}(n,k)$. Ako je $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$ surjekcija, onda su praslike $f^{-1}(j) = \{i \in \{1,\dots,n\} \mid f(i) = j\}$ neprazni podskupovi domene, za sve $j \in \{1,\dots,k\}$ iz kodomene. Tako dolazimo do bijekcije

$$f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\} \quad\longleftrightarrow\quad (f^{-1}(1),\dots,f^{-1}(k))$$

između skupa svih surjekcija i skupa svih "uređenih particija" domene na k blokova. Budući da "uređenih particija" ima $k!$ puta više od "običnih particija", zaključujemo da vrijedi

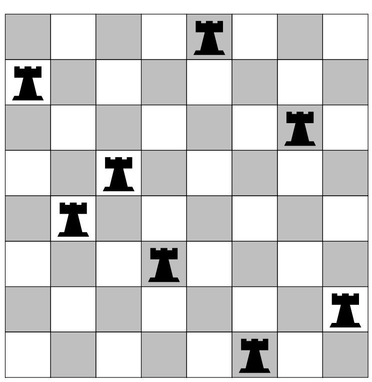
Propozicija 3.13. $\mathrm{Sur}(n,k) = k! \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$.

Na kraju ovog poglavlja objasnit ćemo još jednu zanimljivu kombinatornu interpretaciju Stirlingovih brojeva druge vrste. *Top* je šahovska figura koja napada sva polja u stupcu i retku u kojem se nalazi (slika 3.5).



Slika 3.5: Polja šahovske ploče koja napada figura topa.

Broj rasporeda n identičnih topova na $n \times n$ šahovsku ploču tako da se ne napadaju jednak je $n!$, što vidimo uspostavljanjem bijekcije s permutacijama stupnja n (slika 3.6).



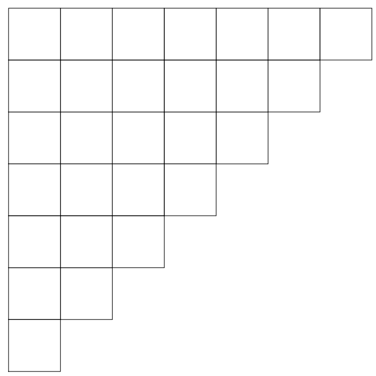
$$\longleftrightarrow \qquad (5,1,7,3,2,4,8,6)$$

Slika 3.6: Bijekcija između rasporeda topova i permutacija.

Primjer 3.14. *Na koliko načina možemo postaviti k identičnih topova na $n \times n$ šahovsku ploču tako da se ne napadaju?*

Rješenje. Prvo biramo k redaka i stupaca na koje ćemo staviti topove, a zatim ih postavljamo na $k \times k$ ploču u presjeku izabranih redaka i stupaca. Broj rasporeda je $\binom{n}{k}^2 \cdot k!$. Alternativno, prvi top možemo postaviti na n^2 načina, drugi na $(n-1)^2$ načina, a zadnji na $(n-k+1)^2$ načina. Produkt tih brojeva je $(n^{\underline{k}})^2$, a treba ga podijeliti s $k!$ jer ne razlikujemo topove. Broj rasporeda je $\frac{1}{k!} \cdot (n^{\underline{k}})^2$, što se podudara s prvim rezultatom. $\square$

Sad promotrimo ploču Δ_n koju dobijemo iz kvadratne $n \times n$ ploče izbacivanjem svih polja na ~~sporednoj~~ dijagonali i ispod nje. Riječ je o Ferrersovom dijagramu particije $\mu = (n-1, n-2, \ldots, 2, 1)$ površine $\frac{n(n-1)}{2}$ i duljine $n-1$ (slika 3.7).

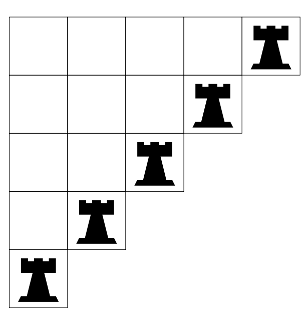


Slika 3.7: Ploča Δ_8.

Teorem 3.15. *Broj rasporeda k identičnih topova na ploču Δ_n tako da se ne napadaju jednak je Stirlingovom broju druge vrste $\left\{ {n \atop n-k} \right\}$.*

Dokazat ćemo teorem na dva načina. Prvi dokaz je indirektan i koristi rekurziju iz teorema 3.12.

Dokaz 1. Označimo s $t(n,k)$ broj rasporeda $n-k$ topova na ploči Δ_n. Pokazat ćemo da ti brojevi zadovoljavaju istu rekurziju i početne uvjete kao Stirlingovi brojevi druge vrste. Zato je $t(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$, iz čega slijedi tvrdnja teorema.



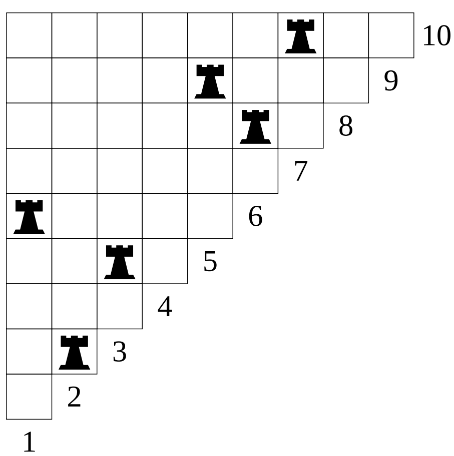
Slika 3.8: Jedini raspored $n-1$ topova na ploči Δ_n (za $n = 6$).

Na ploču Δ_n ne možemo postaviti n topova jer ima samo $n-1$ redaka, pa je $t(n,0) = 0$. Na samo jedan način možemo postaviti 0 topova (prazna ploča), pa je $t(n,n) = 1$. Također, na samo jedan način možemo postaviti $n-1$ topova (slika 3.8), pa vrijedi $t(n,1) = 1$. Vidimo da brojevi $t(n,k)$ zadovoljavaju iste početne uvjete kao $\left\{ n \atop k \right\}$.

Neka je $\mathcal{T}$ skup svih rasporeda $n-k$ topova na ploči Δ_n, tako da je $|\mathcal{T}| = t(n,k)$. Rastavimo ga na skup rasporeda $\mathcal{T}_1$ u kojima je prvi redak ploče prazan i skup rasporeda $\mathcal{T}_2$ u kojima je u prvom retku ploče top. Rasporede u $\mathcal{T}_1$ možemo identificirati s rasporedima $n-k$ topova na ploči Δ_{n-1}, pa je $|\mathcal{T}_1| = t(n-1,k-1)$. Tvrdimo da vrijedi $|\mathcal{T}_2| = k \cdot t(n-1,k)$. Prvo rasporedimo $n-k-1$ topova na donjih $n-2$ redaka od Δ_n, što možemo na $t(n-1,(n-1)-(n-k-1)) = t(n-1,k)$ načina. Zadnji top stavit ćemo na neko od $n-1$ polja prvog retka koja nisu napaduta nekim od već postavljenih topova. Takvih polja ima $n-1-(n-k-1) = k$, pa je ukupan broj rasporeda u $\mathcal{T}_2$ zaista $k \cdot t(n-1,k)$. Po principu sume vrijedi $t(n,k) = |\mathcal{T}| = |\mathcal{T}_1| + |\mathcal{T}_2| = t(n-1,k-1) + k \cdot t(n-1,k)$, što je ista rekurzija kao u teoremu 3.12. □

U drugom dokazu teorema 3.15 uspostavljamo bijekciju između rasporeda topova i particija.

Dokaz 2. Napišimo brojeve $1,\ldots,n$ na mjesta uklonjene sporedne dijagonale ploče Δ_n odozdo prema gore, kao na slici 3.9. Time smo retke ploče Δ_n označili redom brojevima $n,\ldots,2$, a stupce sa $1,\ldots,n-1$. Uspostavit ćemo bijekciju između skupa svih particija od $\{1,\ldots,n\}$ sa $n-k$ blokova i rasporeda k topova na Δ_n.



$\longleftrightarrow \quad \{\{1,6,8\},\{2,3,5,9\},\{4\},\{7,10\}\}$

Slika 3.9: Topovska bijekcija za teorem 3.15.

Za particiju skupa $\{1,\ldots,n\}$ možemo pretpostaviti da su brojevi unutar blokova zapisani uzlazno. Za svaki par uzastopnih brojeva $j < i$ unutar istog bloka stavljamo top na mjesto (i,j), tj. u redak označen brojem i i stupac označen brojem j. Na primjer, uzastopni parovi brojeva u istom bloku particije sa slike 3.9 su $(1,6)$, $(6,8)$, $(2,3)$, $(3,5)$, $(5,9)$ i $(7,10)$, a topove stavljamo na mjesta $(6,1)$, $(8,6)$, $(3,2)$, $(5,3)$, $(9,5)$ i $(10,7)$. Uvjerite se da smo na taj način postavili k topova koji se međusobno ne napadaju.

Obrnuto, za raspored k topova na ploči Δ_n definiramo particiju od $\{1,\ldots,n\}$ na sljedeći način. Ako se u stupcu označenim s 1 ne nalazi top, onda je broj 1 sam u bloku particije. Ako se top nalazi u retku označenim s i, onda je i drugi broj po redu u bloku koji sadrži 1. Zatim pogledamo stupac označen s i. Ako je prazan imamo dvočlani blok $\{1, i\}$, a ako sadrži top u retku označenim s j blok počinje sa $\{1, i, j \dots\}$. Nastavljamo dok ne dođemo do praznog stupca, a zatim gledamo prvi stupac koji još nismo provjerili i analogno definiramo drugi blok particije. Uvjerite se da na taj način na kraju dobivamo particiju sa $n - k$ blokova.

Opisana preslikavanja su jedna drugom inverzna, pa imamo "topovsku bijekciju". □

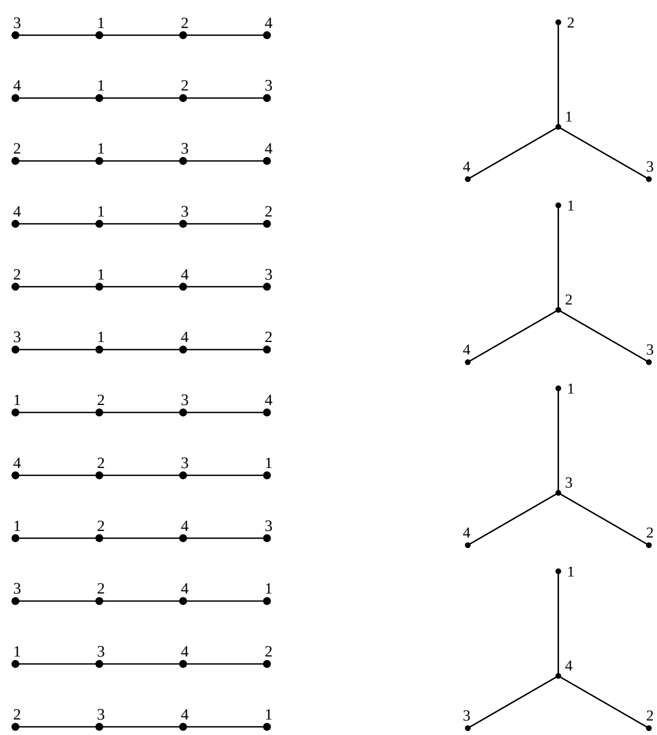
3.5 Stabla

šetnja->put->ciklus

Neka je $G = (V, E)$ graf sa skupom vrhova V i skupom bridova E. Za niz vrhova $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ kažemo da je *šetnja* duljine k ako su v_{i-1} i v_i susjedni za svaki $i = 1, \dots, k$. *Put* je šetnja kojoj su vrhovi međusobno različiti, osim možda v_0 i v_k. Ako je $v_0 = v_k$, kažemo da je put *zatvoren* i nazivamo ga *ciklusom* u grafu G. *Stablo* je graf koji je povezan i nema ciklusa. Povezanost znači da za svaka dva vrha $x, y \in V$ postoji šetnja kojoj je početni vrh x, a krajnji y. Stabla možemo karakterizirati na sljedeći način.

Teorem 3.16. *Graf je stablo ako i samo ako za svaka dva vrha x i y postoji jedinstveni put od x do y.*

Označimo s t_n broj stabala sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$. Na slici 3.10 prikazana su sva stabla za $n = 4$, pa zaključujemo da je $t_4 = 16$. Primijetimo da su stabla na lijevoj

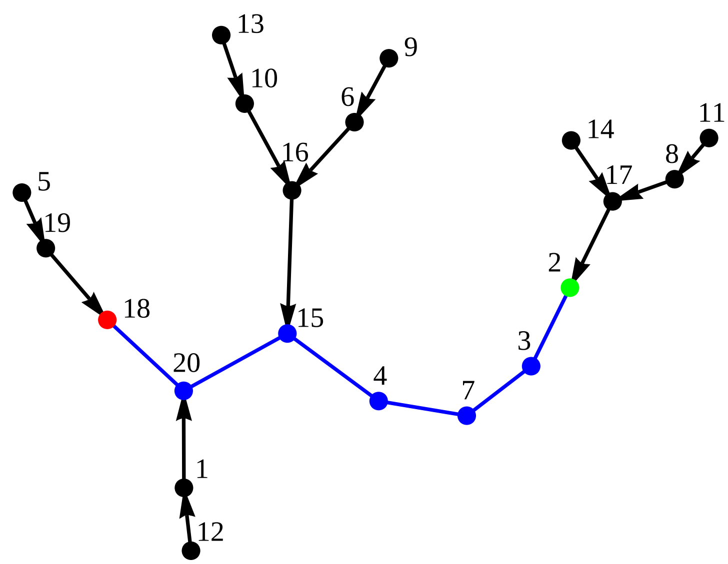


Slika 3.10: Stabla s $n = 4$ vrhova.

strani slike međusobno izomorfna, kao i stabla na desnoj strani slike, no t_n prebrojava različita stabla, a ne stabla do na izomorfizam. Npr. prva dva stabla na lijevoj strani slike su različita jer imaju različite skupove bridova $E_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$ i $E_2 = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$. Na sličan način vidimo da je $t_1 = t_2 = 1$ i $t_3 = 3$.

Teorem 3.17 (Cayleyeva[9] formula)**.** $t_n = n^{n-2}$.

Cayleyeva formula može se dokazati na razne načine, npr. u [31, teorem 3.2.5] dokazana je indukcijom pomoću formule uključivanja-isključivanja i bijektivno pomoću takozvanih Prüferovih[10] kodova. Ovdje dajemo još jedan bijektivni dokaz iz članka [21], a na kraju cjeline 10.4 vidjet ćemo dokaz pomoću funkcija izvodnica.



Slika 3.11: Primjer kralježnjaka s $n = 20$ vrhova.

Dokaz (Joyalova bijekcija). Formulu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku $n^2 \cdot t_n = n^n$. Desna strana je broj funkcija $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, takozvanih *endofunkcija*. Lijevu stranu možemo interpretirati kao broj stabala sa skupom vrhova $\{1,\dots,n\}$ i dva istaknuta vrha. Prvi istaknuti vrh zovemo *glavom*, drugi istaknuti vrh *repom*, a jedinstveni put od glave do repa zovemo *kralježnicom*. Na slici 3.11 glava je obojana crveno, rep zeleno, a kralježnica plavo. Takve objekte zvat ćemo *kralježnjacima*.

Uspostavljamo bijekciju između skupa svih kralježnjaka i skupa svih endofunkcija. Kralježnjaku pridružujemo endofunkciju tako da napišemo vrhove kralježnice u prirodnom poretku i pridružimo im redom vrhove kralježnice od glave prema repu. Na primjer, za kralježnjaka na slici 3.11 pridružujemo:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 15 & 18 & 20 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 18 & 20 & 15 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{array}$$

1°

[9] Arthur Cayley (1821.–1895.), britanski matematičar.

[10] Ernst Paul Heinz Prüfer (1896.–1934.), njemački židovski matematičar.

Za ostale vrhove postoji jedinstveni put do najbližeg vrha na kralježnici. Pridružujemo im sljedeći vrh na tom putu:

2°

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
20 & 18 & 20 & 15 & 19 & 16 & 4 & 17 & 6 & 16 & 8 & 1 & 10 & 17 & 7 & 15 & 2 & 3 & 18 & 2
\end{array}$$

Na taj način dobivamo endofunkciju $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Obrnuto, endofunkciji pridružujemo kralježnjaka na sljedeći način. *Periodičnim točkama* nazivamo elemente iz domene $i \in \{1, \ldots, n\}$ takve da se u nizu iteracija funkcije $f(i)$, $f(f(i))$, $f(f(f(i)))\ldots$ negdje pojavljuje i. Na primjer, periodične točke funkcije gore obojane su plavo. Ako su $i_1 < \ldots < i_k$ sve periodične točke funkcije f u prirodnom poretku, nacrtamo kralježnicu duljine k i označimo vrhove od glave prema repu redom s $f(i_1), \ldots, f(i_k)$. Zatim za svaku neperiodičnu točku i dodamo brid $\{i, f(i)\}$. Tako dobivamo stablo s istaknutom glavom i repom. Kompozicijom ova dva pridruživanja od kralježnjaka dolazimo do istog tog kralježnjaka, a u obrnutom redoslijedu od endofunkcije do iste te endofunkcije. Stoga su pridruživanja jedno drugom inverzna i vrijedi formula $n^2 \cdot t_n = n^n$. □

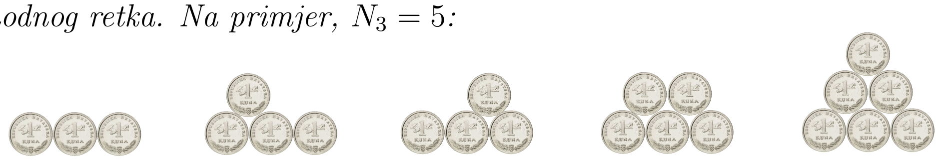
Zadaci

Zadatak 3.1. *Dokažite identitet* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ *dvostrukim prebrojavanjem, koristeći interpretaciju binomnog koeficijenta na desnoj strani kao broja najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od* $(0,0)$ *do* (n,n)*.*

Zadatak 3.2. *Neka* P_n *označava broj "planinskih lanaca" koji se mogu nacrtati s* n *znakova* / *i* n *znakova* \, *a ne silaze ispod početnog nivoa. Na primjer,* $P_3 = 5$*:*

```
                                          /\
           /\          /\       /\/\      /  \
/\/\/\    /  \/\    /\/  \    /    \    /    \
```

Neka N_n *označava broj konfiguracija novčića koje u prvom retku imaju* n *novčića jedan do drugog, a u svakom sljedećem retku svaki novčić dodiruje dva susjedna novčića iz prethodnog retka. Na primjer,* $N_3 = 5$*:*



Dokažite da je $P_n = N_n = C_n$ *(n-ti Catalanov broj) na tri načina:*

(a) *uspostavljanjem bijekcije s Dyckovim putevima u cjelobrojnoj mreži,*

(b) *provjerom da* P_n *i* N_n *zadovoljavaju rekurziju iz teorema 3.3,*

(c) *direktnim prebrojavanjem s pomoću metode komplementa:* $P_n = N_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.

Zadatak 3.3. *Na koliko načina možemo podijeliti* k *identičnih bombona među* s *djece?*

Zadatak 3.4. *Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ *koja zadovoljavaju uvjete* $x_i \geq i$, *za* $i = 1, 2, 3, 4$?

Zadatak 3.5. *Odredite konjugiranu particiju od* $\mu = (9, 7, 5, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Zadatak 3.6. *Neka* V_n *označava broj particija* n*-članog skupa u kojima nema jednočlanih blokova. Dokažite da je* $B_n = V_n + V_{n+1}$.

Zadatak 3.7. *Dokažite da za* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $\left\{ {n \atop 3} \right\} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 2^n + 1)$.

Zadatak 3.8. *Dokažite formulu* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \left\{ {n \atop k} \right\} = B_{n+1} - B_n$.

Zadatak 3.9. *Dokažite binomni teorem za broj surjekcija: za sve* $n, x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\operatorname{Sur}(n, x+y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \operatorname{Sur}(n-i, x) \operatorname{Sur}(i, y).$$

Zadatak 3.10. *Na koliko načina možemo rasporediti* n *predmeta u* k *kutija, ako:*

(a) *predmeti su različiti i kutije su različite,*

(b) *predmeti su identični, a kutije su različite,*

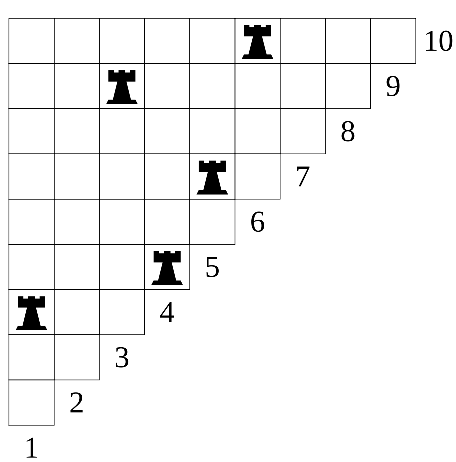
(c) *predmeti su različiti, a kutije su identične,*

(d) *predmeti su identični i kutije su identične?*

Zadatak 3.11. *Isto pitanje kao u prethodnom zadatku, ali uz uvjet da niti jedna kutija ne ostane prazna.*

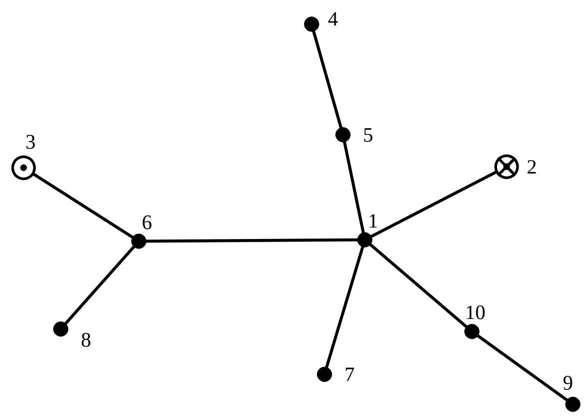
Zadatak 3.12. *Nacrtajte raspored topova na ploči* Δ_{10} *koji odgovara particiji* $\{\{1\}, \{2, 6\}, \{3, 9\}, \{4, 5, 7, 8\}, \{10\}\}$.

Zadatak 3.13. *Odredite particiju skupa* $\{1, \ldots, 10\}$ *koja odgovara rasporedu topova na slici.*



Zadatak 3.14. *U poglavlju o diferencijskom računu izveli smo formule* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ *i* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$*. Iz toga slijedi identitet* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$*, poznat kao* Nikomahov teorem.[11] *Dokažite ga kombinatorno, uspostavljanjem bijekcije između skupa parova* $\{(\{a,b\},\{c,d\}) \mid 0 \le a,b,c,d \le n, a \neq b, c \neq d\}$ *i skupa četvorki* $\{(a,b,c,d) \mid 0 \le a,b,c < d \le n\}$.

Zadatak 3.15. *Zapišite endofunkciju koja odgovara kralježnjaku na slici. Glava je označena s* $\otimes$*, a rep s* $\odot$.



Zadatak 3.16. *Nacrtajte kralježnjaka koji odgovara sljedećoj endofunkciji:*

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 9 & 8 & 7 & 3 & 4 \end{array}.$$

[11] Nikomah iz Gerase (oko 60.–120. godine), starogrčki matematičar i filozof.

Poglavlje 4

Stirlingovi brojevi

U prethodnom poglavlju upoznali smo Stirlingove brojeve druge vrste, koji prebrojavaju particije konačnog skupa sa zadanim brojem blokova. Sad ćemo proučiti Stirlingove brojeve prve vrste, koji prebrojavaju permutacije sa zadanim brojem ciklusa.

Skup svih permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$, tj. bijekcija $\pi:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$, označavamo S_n. Uz kompoziciju kao binarnu operaciju, $(S_n,\circ)$ je grupa koju zovemo *simetričnom grupom* stupnja n. Važnost simetrične grupe vidimo iz Cayleyeva teorema, koji kaže da je svaka konačna grupa reda n izomorfna podgrupi od S_n.

Permutacije zapisujemo na sljedeći način:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Drugi način zapisivanja permutacija je kao produkt disjunktnih ciklusa. *Ciklus* ili *ciklička permutacija* $(i_1\ i_2\ \cdots\ i_s)$ je permutacija koja preslikava $i_1\mapsto i_2$, $i_2\mapsto i_3$, $\ldots$ $i_s\mapsto i_1$, a ostale elemente iz $\{1,\ldots,n\}$ preslikava u same sebe. Broj s nazivamo *duljinom* ciklusa. Za cikluse $\pi_1=(i_1\ \cdots\ i_s)$ i $\pi_2=(j_1\ \cdots\ j_t)$ kažemo da su *disjunktni* ako je $\{i_1,\ldots,i_s\}\cap\{j_1,\ldots,j_t\}=\emptyset$. Kompozicija permutacija općenito nije komutativna, ali za disjunktne cikluse vrijedi $\pi_1\circ\pi_2=\pi_2\circ\pi_1$. U nastavku ćemo kompoziciju permutacija zvati produktom i zapisivat ćemo je bez znaka '$\circ$'.

Propozicija 4.1. *Svaka permutacija $\pi\in S_n$ može se zapisati kao produkt disjunktnih ciklusa. Zapis je jedinstven do na poredak ciklusa.*

Skica dokaza. Za $i\in\{1,\ldots,n\}$ neka je $s\in\mathbb{N}$ najmanji prirodan broj sa svojstvom $\pi^s(i)=i$. Onda je $(i\ \pi(i)\ \cdots\ \pi^{s-1}(i))$ ciklus od π koji sadrži element i. Na taj način dobivamo cikluse koji su disjunktni ili se podudaraju, a π je njihov produkt. Primijetimo da su za permutacije sve točke iz domene periodične, u smislu iz dokaza teorema 3.17 Joyalovom bijekcijom. Prema tome, permutacije su endofunkcije kojima se pridruženi kralježnjak sastoji samo od kralježnice. $\square$

Na primjer, neka je

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 10 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Prvom bojom obojimo brojeve 1, $\pi(1) = 5$, $\pi^2(1) = 2, \ldots$ (dok ne dođemo ponovo do 1):

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 10 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Drugom bojom obojimo najmanji broj koji još nije obojan i njegove slike po π:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 10 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Nastavimo tako bojati dok ne obojimo sve brojeve:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 2 & 6 & 10 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Boje određuju cikluse od π:

$$\pi = (1\ 5\ 2\ 4)(3\ 8)(6)(7\ 10)(9).$$

Ciklusi duljine 1 predstavljaju fiksne točke i ponekad se ne pišu, ali mi ćemo brojati i takve cikluse. Naša permutacija je stupnja 10 i ima 5 ciklusa. Duljine ciklusa, sortirane silazno, daju particiju $\mu = (4, 2, 2, 1, 1)$ prirodnog broja 10 koju zovemo *cikličkim tipom* permutacije π.

Stirlingov broj prve vrste $\left[{n \atop k} \right]$ je broj permutacija stupnja n koje u rastavu na disjunktne cikluse imaju točno k ciklusa (računajući i cikluse duljine 1). Na primjer, $\left[{4 \atop 2} \right] = 11$ jer postoji 11 permutacija stupnja 4 s dva ciklusa: (1 2 3)(4), (1 3 2)(4), (1 2 4)(3), (1 4 2)(3), (1 3 4)(2), (1 4 3)(2), (2 3 4)(1), (2 4 3)(1), (1 2)(3 4), (1 3)(2 4) i (1 4)(2 3).

Neka je $S = \{1, \ldots, n\}$. Stirlingov broj druge vrste $\left\{ {n \atop k} \right\}$ je broj načina na koji elemente iz S možemo rasporediti u k disjunktnih podskupova, a Stirlingov broj prve vrste $\left[{n \atop k} \right]$ je broj načina na koji ih možemo rasporediti u k disjunktnih ciklusa. Ako su zadani elementi $i_1, \ldots, i_s$, time je određen samo jedan podskup $\{i_1, \ldots, i_s\}$. Međutim, od tih elemenata možemo napraviti $(s-1)!$ različitih ciklusa, pa očito vrijedi

Propozicija 4.2. $\left\{ {n \atop k} \right\} \le \left[{n \atop k} \right]$.

Zbrajanjem Stirlingovih brojeva druge vrste po indeksu k dobili smo ukupan broj particija B_n (propozicija 3.11). Na analogan način slijedi

Propozicija 4.3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] = n!$, *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$.

Ovdje uzimamo da je $\left[{n \atop 0} \right] = 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\left[{0 \atop 0} \right] = 1$.

Primjer 4.4. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *odredite* $\left[{n \atop 1} \right]$, $\left[{n \atop n-1} \right]$ *i* $\left[{n \atop n} \right]$.

Rješenje. Prebrojavamo permutacije stupnja n koje imaju samo jedan ciklus, tj. cikličke permutacije stupnja n i duljine n. To je isto kao da brojimo rasporede n ljudi oko okruglog stola, a rezultat je $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$. Očito je $\left[{n \atop n} \right] = 1$ (samo identiteta ima n ciklusa duljine 1, tj. n fiksnih točaka), a $\left[{n \atop n-1} \right]$ svodi se na izbor dvaju elementa koje ćemo staviti u ciklus duljine 2 i vrijedi $\left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$. □

Idući teorem je rekurzija za Stirlingove brojeve prve vrste analogna Pascalovoj formuli za binomne koeficijente i teoremu 3.12 za Stirlingove brojeve druge vrste.

Teorem 4.5. $\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\cdot\left[{n-1 \atop k}\right]$, *za sve* $n, k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih permutacija iz S_n koje imaju k ciklusa. Podijelimo ga na dva disjunktna podskupa: $\mathcal{P}_1$ sadrži permutacije iz $\mathcal{P}$ kojima je (n) ciklus (tj. n je fiksna točka), a $\mathcal{P}_2$ sadrži permutacije kojima (n) nije ciklus. Očito je $|\mathcal{P}_1| = \left[{n-1 \atop k-1}\right]$, a jednakost $|\mathcal{P}_2| = (n-1)\cdot\left[{n-1 \atop k}\right]$ slijedi dodavanjem elementa n nekom od k ciklusa permutacije iz S_{n-1}. Dodavanjem elementa u ciklus duljine d dobivamo d različitih ciklusa. Na primjer, za $n = 4$ i $d = 3$ od ciklusa $(1\ 2\ 3)$ dobivamo cikluse $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 2\ 4\ 3)$ i $(1\ 4\ 2\ 3)$. Dodavanjem četvorke na prvo mjesto dobili bismo istu permutaciju kao dodavanjem na zadnje mjesto. Neka permutacija iz S_{n-1} sa k ciklusa ima cikluse duljina $s_1, \ldots, s_k$. Tada je $s_1 + \ldots + s_k = n-1$, pa je ukupan broj načina na koji možemo dodati element n nekom od njezinih ciklusa uvijek $n-1$. Rekurzija slijedi iz principa sume. □

Iz Pascalove rekurzije za binomne koeficijente dobivamo poznati "Pascalov trokut" (tablica 4.1). Slično, iz teorema 4.5 dobivamo "Stirlingov trokut prve vrste" (tablica 4.2), a iz teorema 3.12 "Stirlingov trokut druge vrste" (tablica 4.3). Na sličan način možemo računati i Bellove brojeve. Neka je $a(n,k)$ broj particija skupa $\{1, \ldots, n+1\}$ u kojima elementi $k+1, \ldots, n$ nisu u bloku s elementom $n+1$. Ako je $k = 0$, element $n+1$ je sam u bloku i broj takvih particija je jednak broju particija skupa $\{1, \ldots, n\}$, tj. $a(n,0) = B_n$. Osim toga vrijedi $a(n-1, n-1) = B_n$ jer tada nemamo uvjet da neki elementi ne smiju biti u bloku s n.

Teorem 4.6. $a(n,k) = a(n,k-1) + a(n-1,k-1)$, *za sve* $n, k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih particija skupa $\{1, \ldots, n+1\}$ u kojima elementi $k+1, \ldots, n$ nisu u bloku s elementom $n+1$. Podijelimo ga u dva disjunktna podskupa: u $\mathcal{P}_1$ stavimo

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Tablica 4.1: Pascalov trokut.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

Tablica 4.2: Stirlingov trokut prve vrste.

sve takve particije u kojima niti k nije u bloku s $n+1$, a u $\mathcal{P}_2$ particije u kojima su k i $n+1$ u istom bloku. Očito je $|\mathcal{P}| = a(n,k)$ i $|\mathcal{P}_1| = a(n,k-1)$. Identificiranjem elemenata k i $n+1$ možemo uspostaviti bijekciju između skupa $\mathcal{P}_2$ i skupa svih particija od $\{1,\ldots,n\}$ u kojima elementi $k,\ldots,n-1$ nisu u bloku s n. Stoga je $|\mathcal{P}_2| = a(n-1,k-1)$, pa vrijedi $a(n,k) = |\mathcal{P}| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2| = a(n,k-1) + a(n-1,k-1)$. □

"Bellov trokut" dan je u tablici 4.4. Počinjemo s $a(0,0) = a(1,0) = 1$ te izračunamo $a(1,1) = a(1,0) + a(0,0) = 2 = B_2$. Zatim taj broj prepišemo na početak drugog retka $a(2,0) = B_2 = 2$ i s pomoću rekurzije iz teorema 4.6 izračunamo ostale brojeve iz tog

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

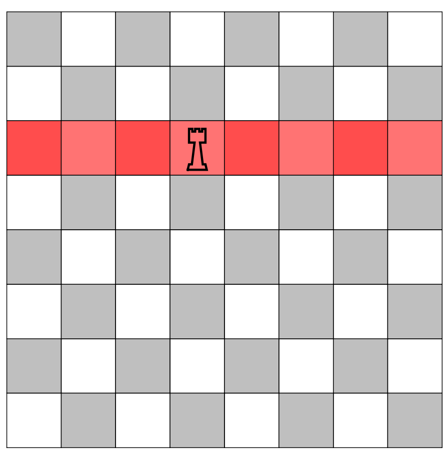
Tablica 4.3: Stirlingov trokut druge vrste.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	2							
2	2	3	5						
3	5	7	10	15					
4	15	20	27	37	52				
5	52	67	87	114	151	203			
6	203	255	322	409	523	674	877		
7	877	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140	
8	4140	5017	6097	7432	9089	11155	13744	17007	21147

Tablica 4.4: Bellov trokut.

retka. Zadnji broj ponovo prepišemo na početak sljedećeg retka itd. Bellovi brojevi su na rubovima ovog trokuta.

U knjizi [27] dana je topovska interpretacija Stirlingovih brojeva prve vrste analogna interpredaciji Stirlingovih brojeva druge vrste koju smo upoznali u prethodnom poglavlju. *Slabi top* je izmišljena šahovska figura koja napada sva polja u retku u kojem se nalazi, ali ne u stupcu (slika 4.1). Loehr [27] takvu figuru naziva *wrook* (od *weak rook*), a mi ćemo je kratko zvati *slop*.



Slika 4.1: Polja šahovske ploče koja napada figura slabog topa.

Primjer 4.7. *Na koliko načina možemo postaviti k identičnih slopova na $n \times n$ šahovsku ploču tako da se ne napadaju?*

Rješenje. Prvo biramo k redaka u koje ćemo postaviti slopove, a zatim u svakom izabranom retku biramo bilo koji od n stupaca. Broj rasporeda je $\binom{n}{k} \cdot n^k$. □

Teorem 4.8. *Broj rasporeda k identičnih slabih topova na ploču Δ_n tako da se ne napadaju jednak je Stirlingovom broju prve vrste $\left[{n \atop n-k}\right]$.*

Dokaz. Označimo sa $st(n,k)$ broj rasporeda $n-k$ slabih topova na ploči Δ_n. Pokazat ćemo da ti brojevi zadovoljavaju rekurziju iz teorema 4.5, uz iste početne uvjete kao i Stirlingovi brojevi prve vrste. Zato je $st(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$, što dokazuje teorem.

Na ploču Δ_n ne možemo postaviti n slopova jer ima samo $n-1$ redaka, pa je $st(n,0) = 0$. Na samo jedan način možemo postaviti 0 slopova (prazna ploča), pa je $st(n,n) = 1$. Broj načina na koje možemo postaviti $n-1$ slopova je $(n-1)!$, pa vrijedi $st(n,1) = (n-1)!$. Dakle, brojevi $st(n,k)$ zadovoljavaju iste početne uvjete kao $\left[{n \atop k}\right]$.

Neka je $\mathcal{S}$ skup svih rasporeda $n-k$ slopova na ploči Δ_n, tako da je $|\mathcal{S}| = st(n,k)$. Rastavimo ga na skup rasporeda $\mathcal{S}_1$ u kojima je prvi redak prazan i skup rasporeda $\mathcal{S}_2$ u kojima je u prvom retku ploče jedan slop. Rasporede iz $\mathcal{S}_1$ možemo identificirati s rasporedima $n-k$ slopova na ploči Δ_{n-1}, pa je $|\mathcal{S}_1| = st(n-1,k-1)$. Jednakost $|\mathcal{S}_2| = (n-1)\cdot st(n-1,k)$ dobivamo tako da stavimo jednog slopa u prvi redak ploče ($n-1$ mogućnosti), a preostalih $n-k-1$ slopova rasporedimo na donji dio ploče Δ_{n-1} ($st(n-1, n-1-(n-k-1)) = st(n-1,k)$ mogućnosti). Po principu sume vrijedi $st(n,k) = |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_1| + |\mathcal{S}_2| = st(n-1,k-1) + (n-1)\cdot st(n-1,k)$, što je rekurzija iz teorema 4.5. $\square$

Teorem možemo dokazati i uspostavljanjem "slopovske bijekcije" između permutacija iz S_n i rasporeda slabih topova na Δ_n (slika 4.2). Još jedna važna interpretacija Stirlingovih brojeva prve i druge vrste tiče se koeficijenata prijelaza iz različitih baza prostora polinoma. Standardnu bazu čine monomi, tj. potencije varijable x:

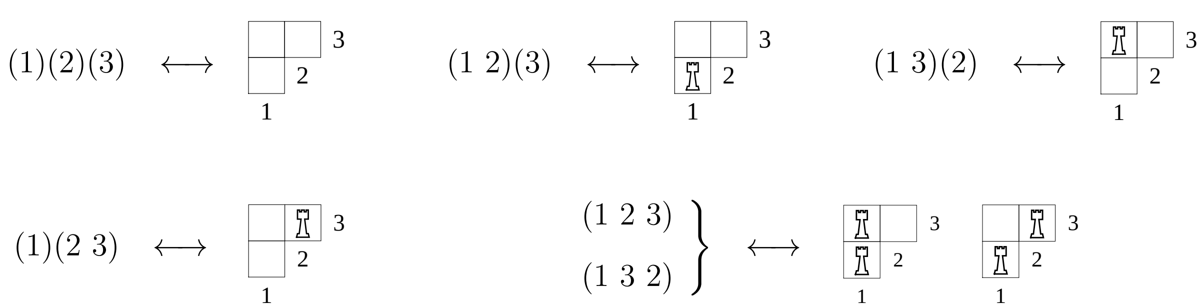
$$\mathcal{S} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4, \ldots\}.$$

Padajuće i rastuće faktorijele također su baze prostora polinoma:

$$\mathcal{P} = \{1,\ x^{\underline{1}} = x,\ x^{\underline{2}} = x(x-1),\ x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2), \ldots\},$$

$$\mathcal{R} = \{1,\ x^{\overline{1}} = x,\ x^{\overline{2}} = x(x+1),\ x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2), \ldots\}.$$

S problemom prijelaza iz baze $\mathcal{S}$ u bazu $\mathcal{P}$ susreli smo se kod izračunavanja suma oblika $\sum\limits_{k=1}^{m} k^n$ pomoću diskretne Newton-Leibnizove formule (vidi diskusiju iza primjera 2.5). Idući teorem kaže da su koeficijenti prijelaza Stirlingovi brojevi druge vrste.



Slika 4.2: Slopovska bijekcija za $n = 3$.

Teorem 4.9. $(\mathcal{S} \to \mathcal{P})$ $\;x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$.

Dokaz 1. Relaciju možemo dokazati indukcijom po n uz pomoć rekurzije iz teorema 3.12. Relacija očito vrijedi za $n = 0$. Pretpostavimo da vrijedi za $n-1$ i dokažimo je za n. Uočimo da je

$$x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}} \cdot (x - k) \implies x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}}. \tag{4.1}$$

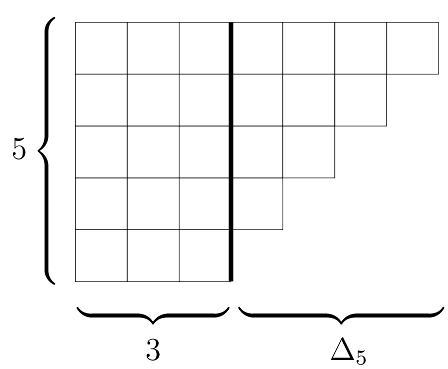
Iz pretpostavke indukcije slijedi

$$\begin{aligned}
x^n &= x \cdot x^{n-1} = x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x \cdot x^{\underline{k}} \overset{(4.1)}{=} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \left(x^{\underline{k+1}} + k \cdot x^{\underline{k}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \\
&= \left\{ {n \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}} + x^{\underline{n}} \overset{\text{tm. 3.12}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

□

Dokaz 2. Relaciju možemo dokazati i dvostrukim prebrojavanjem, uz pomoć topovske interpretacije Stirlingovih brojeva druge vrste. Na lijevoj i na desnoj strani relacije je polinom stupnja n. Ako provjerimo da jednakost vrijedi za sve $x \in \mathbb{N}$, slijedit će i za sve $x \in \mathbb{R}$. Za prirodan broj $x \in \mathbb{N}$, neka je $\Delta_n(x)$ proširena ploča Δ_n kojoj na lijevoj strani dodamo pravokutnik dimenzija $n \times x$ (slika 4.3). To je Ferrersov dijagram particije $\mu = (x+n-1, x+n-2, \ldots, x+1, x)$ površine $nx + \frac{n(n-1)}{2}$ i duljine n. Prebrojavamo na dva načina koliko na toj ploči ima rasporeda n topova koji se ne napadaju.

Rasporede je najlakše prebrojati stavljajući jednog topa u svaki redak odozdo prema gore. Za donji redak imamo x mogućnosti. Za redak iznad ponovo imamo x mogućnosti:



Slika 4.3: Ploča $\Delta_5(3)$

redak je širi za jedno polje, ali ne smijemo staviti topa u stupac napadnut prvim topom. Za sve retke iznad također imamo x mogućnosti, pa je ukupan broj rasporeda x^n.

Rasporede brojimo na drugi način tako da ih podijelimo u disjunktne podskupove prema tome koliko je topova na pravokutniku $n \times x$ ("proširenju"), a koliko je na ploči Δ_n. Neka je k broj topova na pravokutniku, a $n-k$ na Δ_n. Prvo stavimo $n-k$ topova na Δ_n, za što prema teoremu 3.15 imamo $\left\{ {n \atop k} \right\}$ mogućnosti. U k redaka pravokutnika koji nisu napadnuti topovima koje smo stavili na Δ_n trebamo staviti preostalih k topova. Za prvog topa imamo x mogućnosti, za drugog $x-1$ (ne smijemo ga staviti u stupac napadnut prvim topom postavljenim na pravokutnik) i tako dalje. Broj rasporeda topova na pravokutniku je padajuća faktorijela $x^{\underline{k}}$. Po principu produkta broj rasporeda za zadani k je $\left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$, a ukupan broj rasporeda je suma na desnoj strani. □

Stirlingovi brojevi prve vrste su koeficijenti prijelaza iz baze rastućih faktorijela $\mathcal{R}$ u standardnu bazu $\mathcal{S}$ prostora polinoma:

Teorem 4.10. $(\mathcal{R} \to \mathcal{S})$ $\;x^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k.$

Teorem dokazujemo analogno, indukcijom po n uz pomoć rekurzije iz teorema 4.5, ili dvostrukim prebrojavanjem rasporeda n slabih topova na proširenoj ploči $\Delta_n(x)$. Koeficijente prijelaza iz baze $\mathcal{S}$ u bazu $\mathcal{R}$ izvodimo iz teorema 4.9 i relacije $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$:

$$x^n = (-1)^n (-x)^n \overset{\text{tm. 4.9}}{=} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-x)^{\underline{k}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k x^{\overline{k}}.$$

Teorem 4.11. $(\mathcal{S} \to \mathcal{R})$ $\;x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\overline{k}}.$

Na sličan način dobivamo

Teorem 4.12. $(\mathcal{P} \to \mathcal{S})$ $\;x^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] x^k.$

Iz teorema 4.9 i 4.12 te teorema 4.10 i 4.11 vidimo da su Stirlingovi brojevi prve i druge vrste "međusobno inverzni", ako jednima od njih dodamo alternirajuće predznake. Da bismo to precizirali, ograničimo se na polinome stupnja najviše n i označimo sa $\mathcal{S}_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, $\mathcal{P}_n = \{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots, x^{\underline{n}}\}$ i $\mathcal{R}_n = \{1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \ldots, x^{\overline{n}}\}$ tri baze ovog $(n+1)$-dimenzionalnog vektorskog prostora. Neka je $A = \left[\left\{ {i \atop j} \right\} \right]_{i,j=0}^{n}$ matrica prijelaza iz baze $\mathcal{S}_n$ u bazu $\mathcal{P}_n$, a $B = \left[(-1)^{i-j} \left[{i \atop j} \right] \right]_{i,j=0}^{n}$ matrica prijelaza iz baze $\mathcal{P}_n$ u bazu $\mathcal{S}_n$. To su donjetrokutaste matrice reda $n+1$. Matrica A sadrži brojeve iz tablice 4.3, a matrica B brojeve iz tablice 4.2 s alternirajućim predznacima. Iz linearne algebre znamo da su matrice A i B jedna drugoj inverzne, tj. $A \cdot B = B \cdot A = I$ ili raspisano po elementima $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum\limits_{k=0}^{n} b_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$ (Kroneckerov[1] simbol), za $i, j \in \{0, \ldots, n\}$. Time smo dokazali relacije ortogonalnosti za Stirlingove brojeve:

[1]Leopold Kronecker (1823.-1891.), njemački matematičar.

Teorem 4.13.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-j}\left\{{i \atop k}\right\}\left[{k \atop j}\right]=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i-k}\left[{i \atop k}\right]\left\{{k \atop j}\right\}=\begin{cases}1, & za\ i=j,\\ 0, & za\ i\neq j.\end{cases}$$

Iz matrica prijelaza između baza $\mathcal{S}_n \to \mathcal{R}_n$ i $\mathcal{R}_n \to \mathcal{S}_n$ dobivamo iste relacije ortogonalnosti. Pregled raznih identiteta za Stirlingove brojeve prve i druge vrste dan je u tablicama na str. 264 i 265 knjige [19]. Identitete često možemo dokazati prebrojavanjem, koristeći se kombinatornim interpretacijama Stirlingovih brojeva. Nekoliko takvih dokaza dajemo u sljedećem primjeru i u zadacima.

Primjer 4.14. *Kombinatorno dokažite identitete*

$$k\cdot\left\{{n \atop k}\right\}=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left\{{n-j \atop k-1}\right\} \quad i \quad k\cdot\left[{n \atop k}\right]=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(j-1)!\left[{n-j \atop k-1}\right].$$

Rješenje. Neka je $S=\{1,\ldots,n\}$. Lijeva strana identiteta je broj particija skupa S na k blokova s jednim istaknutim blokom, odnosno broj permutacija skupa S sa k ciklusa i jednim istaknutim ciklusom. Dakle, prebrojavamo parove

$$\{(\Pi,B)\mid \Pi \text{ je particija od } S \text{ sa } k \text{ blokova, } B \text{ je blok od } \Pi\},$$

odnosno

$$\{(\pi,c)\mid \pi \text{ je permutacija od } S \text{ sa } k \text{ ciklusa, } c \text{ je ciklus od } \pi\}.$$

Lijevu stranu dobivamo ako prvo biramo Π ili π, a zatim B ili c. Desnu stranu prvog identiteta dobivamo tako da parove podijelimo u disjunktne podskupove prema kardinalitetu istaknutog bloka $|B|=j$. Prvo biramo B na $\binom{n}{j}$ načina, a zatim preostalih $n-j$ elemenata particioniramo na $k-1$ blokova i tako dobijemo particiju Π. Desnu stranu drugog identiteta dobivamo analogno: podijelimo parove na diskunktne podskupove prema duljini j istaknutog ciklusa c. Izaberemo j elemenata iz S i složimo ih u ciklus na $\binom{n}{j}(j-1)!$ načina, a od preostalih $n-j$ elemenata napravimo permutaciju s $k-1$ ciklusa i tako dolazimo do permutacije π. □

Tema knjige [3] je "umjetnost" kombinatornog dokazivanja identiteta.

Zadaci

Zadatak 4.1. *Dokažite Cayleyev teorem.*

Zadatak 4.2. *Koliko ima cikličkih permutacija stupnja n i duljine s?*

Zadatak 4.3. *Koliko ima permutacija cikličkog tipa $\mu=(5,2,2,2)$?*

Zadatak 4.4. *Za elemente g_1 i g_2 grupe G kažemo da su* konjugirani *ako postoji $h\in G$ takav da je $g_2=hg_1h^{-1}$. Dokažite: permutacije π_1 i π_2 iz simetrične grupe S_n su konjugirane ako i samo ako su istog cikličkog tipa.*

Zadatak 4.5. *Dokažite formulu* $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. *Kako glasi analogna formula za* $\left[{n \atop n-2} \right]$*?*

Zadatak 4.6. *Dokažite da je* $\left[{n \atop 2} \right] = (n-1)! \cdot H_{n-1}$.

Zadatak 4.7. *Kombinatorno dokažite identitete*

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} \quad i \quad \left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} (n-k)! \left[{k \atop m} \right].$$

Zadatak 4.8. *Kombinatorno dokažite identitete*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} \binom{k}{m} = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop m} \right\} \left\{ {n-j \atop k-m} \right\} \quad i \quad \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m} = \sum_{j=m}^{n} \binom{n}{j} \left[{j \atop m} \right] \left[{n-j \atop k-m} \right].$$

Zadatak 4.9. *Kombinatorno dokažite identitete*

$$\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ {n+k \atop k} \right\} \quad i \quad \left[{n+m+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} (n+k) \left[{n+k \atop k} \right].$$

Zadatak 4.10. *Dokažite identitet* $\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k=m}^{n} \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}$ *prebrojavanjem rasporeda nenapadajućih slopova na ploči* Δ_{n+1}.

Zadatak 4.11. *Kombinatorno dokažite da za* $n \geq 2$ *vrijedi* $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[{n \atop k} \right] = 0$.

Zadatak 4.12. *Dokažite da za brojeve iz teorema 4.6 vrijedi* $a(n,k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_{n-i}$.

Zadatak 4.13. *Lahov*[2] *broj ili "Stirlingov broj treće vrste"* $L(n,k)$ *je broj načina na koji možemo elemente* n*-članog skupa podijeliti u* k *totalno uređenih podskupova. Redoslijed podskupova nije bitan, ali je redoslijed elemenata unutar podskupova bitan. Na primjer, za* $n = 4$ *i* $k = 2$ *sve moguće podjele su*

$$\begin{array}{ccccccc}
\{1,234\} & \{2,134\} & \{3,124\} & \{4,123\} & \{12,34\} & \{13,24\} & \{14,23\} \\
\{1,243\} & \{2,143\} & \{3,142\} & \{4,132\} & \{12,43\} & \{13,42\} & \{14,32\} \\
\{1,324\} & \{2,314\} & \{3,214\} & \{4,213\} & \{21,34\} & \{31,24\} & \{41,23\} \\
\{1,342\} & \{2,341\} & \{3,241\} & \{4,231\} & \{21,43\} & \{31,42\} & \{41,32\} \\
\{1,423\} & \{2,413\} & \{3,412\} & \{4,312\} & & & \\
\{1,432\} & \{2,431\} & \{3,421\} & \{4,321\} & & &
\end{array}$$

i vrijedi $L(4,2) = \binom{4}{1} \cdot 1! \cdot 3! + \frac{1}{2}\binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 2! = 36$.

(a) *Dokažite formulu* $L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

[2] Ivo Lah (1896.–1979.), slovenski matematičar i aktuar.

(b) *Dokažite rekurziju* $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$.

(c) *Izvedite koeficijente prijelaza iz baze rastućih faktorijela* $\mathcal{R}$ *u bazu padajućih faktorijela* $\mathcal{P}$.

Više o Lahovim brojevima pročitajte u zanimljivom članku [33].

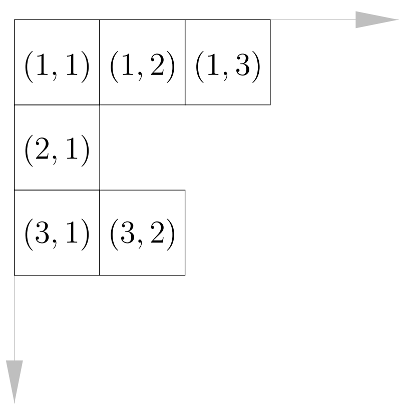
Zadatak 4.14. *Sumu* $\sum_{k=1}^{n-1} k^m$ *moguće je zapisati kao polinom stupnja* $m+1$ *u varijabli* n. *Odredite koeficijente tog polinoma tako da zapišete* k^m *u bazi padajućih faktorijela (teorem 4.9), primijenite diskretnu Newton-Leibnizovu formulu (teorem 2.4) i vratite padajuće faktorijele u standardnu bazu* $\{1, n, n^2, \ldots\}$ *(teorem 4.12).*

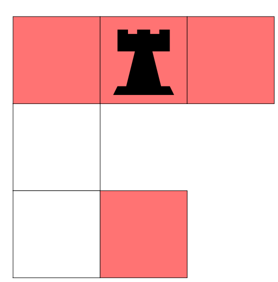
Poglavlje 5

Topovski polinom i sparivanja

U prethodnim poglavljima prebrojavali smo rasporede nenapadajućih topova na $n \times n$ šahovskoj ploči i na pločama Δ_n i $\Delta_n(x)$. Za prebrojavanje rasporeda na proizvoljnoj ploči uvodimo algebarski objekt, polinom koji kao koeficijente ima brojeve rasporeda. To je takozvani topovski polinom ploče.

Kvadratnu $n \times n$ ploču identificiramo s Kartezijevim produktom $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ i označavamo $\square_n$. Proizvoljna ploča je podskup $P \subseteq \square_n$. Vizualiziramo je na isti način kao Ferrersove dijagrame u cjelini 3.3. Na primjer, ploča $P = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (3,1), (3,2)\} \subseteq \square_3$ prikazana je na slici 5.1. Top postavljen na polje (i, j) ploče P napada sva polja s prvom koordinatom i (u i-tom retku ploče P) ili s drugom koordinatom j (u j-tom stupcu ploče P), čak i kad su između polja "rupe".

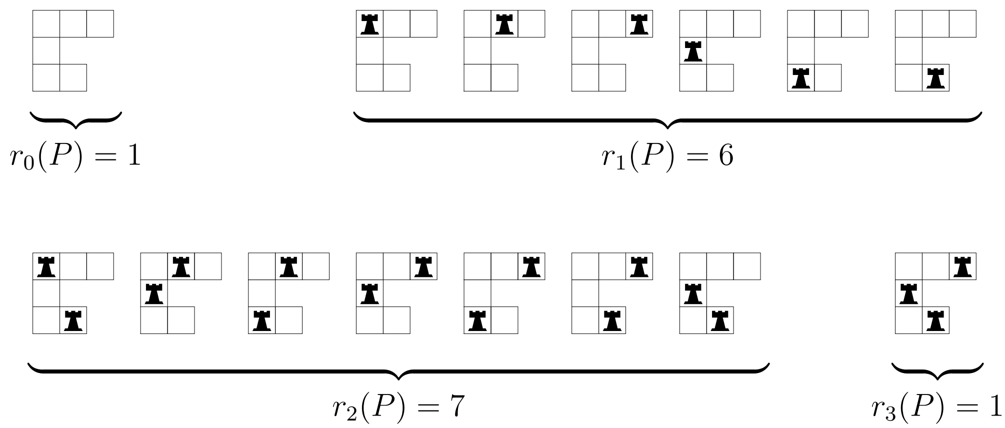




Slika 5.1: Ploča $P \subseteq \square_3$ i njezina polja napadnuta topom na poziciji $(1, 2)$.

Neka je $r_k(P)$ broj rasporeda k nenapadajućih topova na ploči P. *Topovski polinom* te ploče je $R(P, x) = \sum_{k \geq 0} r_k(P)\, x^k$. Za broj topova k veći od broja redaka ili stupaca ploče, broj rasporeda je 0. Zato je $R(P, x)$ polinom stupnja najviše n. Svi rasporedi nenapadajućih topova na ploči P sa slike 5.1 prikazani su na slici 5.2. Vidimo da je $r_0(P) = 1$, $r_1(P) = 6$, $r_2(P) = 7$ i $r_3(P) = 1$, odnosno

$$R(P, x) = 1 + 6x + 7x^2 + x^3.$$



Slika 5.2: Rasporedi nenapadajućih topova na ploči P.

Općenito, za bilo koju ploču P vrijedi $r_0(P) = 1$ i $r_1(P) = |P|$ (kardinalitet ili površina ploče). Iz primjera 3.14 slijedi

$$R(\square_n, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!\, x^k,$$

a iz teorema 3.15 slijedi

$$R(\Delta_n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n \atop n-k} \right\} x^k.$$

Uz pomoć idućih nekoliko propozicija možemo izračunati topovski polinom bilo koje ploče $P \subseteq \square_n$.

Propozicija 5.1. *Neka su $P_1, P_2 \subseteq \square_n$ dvije ploče takve da niti jedno polje iz P_1 nije u istom retku ili stupcu kao neko polje iz P_2. Tada vrijedi $R(P_1 \cup P_2, x) = R(P_1, x) \cdot R(P_2, x)$.*

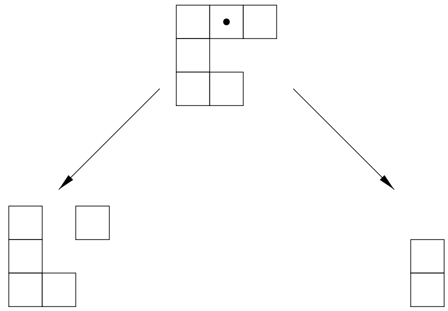
Dokaz. Jednakost polinoma ekvivalentna je jednakosti koeficijenata uz x^k:

$$r_k(P_1 \cup P_2) = \sum_{i=0}^{k} r_i(P_1) \cdot r_{k-i}(P_2).$$

Ovaj identitet slijedi iz principa sume, tako da skup $\mathcal{R}$ svih rasporeda k topova na $P_1 \cup P_2$ podijelimo na disjunktne podskupove $\mathcal{R}_i$ prema broju i topova na ploči P_1. Zbog uvjeta da polja od P_1 nisu u istim recima i stupcima kao polja od P_2, rasporede i topova na P_1 biramo neovisno o rasporedima $k - i$ topova na P_2, pa po principu produkta vrijedi $|\mathcal{R}_i| = r_i(P_1) \cdot r_{k-i}(P_2)$. $\square$

Korolar 5.2. *Ako se ploča P sastoji od n polja od kojih nikoja dva nisu u istom retku ili stupcu, onda je $R(P, x) = (1 + x)^n$.*

Dokaz. Topovski polinom ploče koja se sastoji od samo jednog polja je $R(\square, x) = 1 + x$. Primijenimo prethodnu propoziciju $n - 1$ puta, dodavajući jedno po jedno polje. $\square$



Slika 5.3: Ploča P s izbačenim i kontrahiranim poljem p.

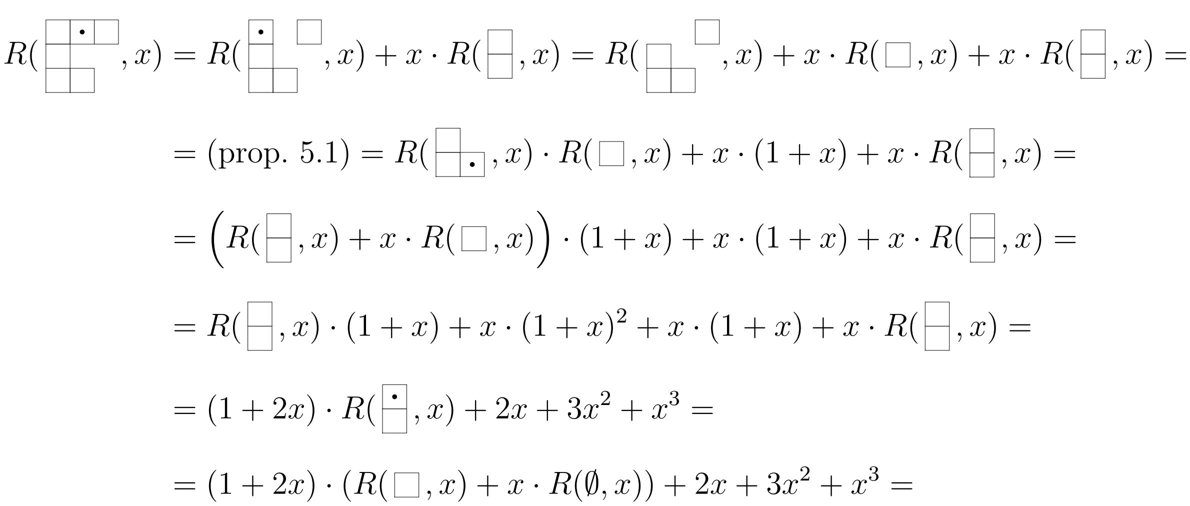
Neka je $P \subseteq \square_n$ ploča i $p \in P$ neko njezino polje. Skupovnu razliku $P \setminus \{p\}$ označavamo kraće $P \setminus p$. To je ploča P sa izbačenim poljem p. *Kontrakciju* ploče P obzirom na p dobivamo izbacivanjem svih polja u istom retku ili stupcu kao p i označavamo je sa $P \,/\, p$. Za ploču sa slike 5.1 kontrakcija i izbacivanje polja $(1, 2)$ prikazani su na slici 5.3.

Propozicija 5.3. *Za svaku ploču P i bilo koje njezino polje p vrijedi*

$$R(P, x) = R(P \setminus p, x) + x \cdot R(P \,/\, p, x).$$

Dokaz. Izjednačavanje koeficijenata uz x^k daje $r_k(P) = r_k(P \setminus p) + r_{k-1}(P \,/\, p)$. Ova jednakost slijedi iz principa sume tako da skup svih rasporeda k nenapadajućih topova na ploči P podijelimo na dva disjunktna podskupa prema tome je li na polju p top ili nije. Ako nije, broj rasporeda je $r_k(P \setminus p)$, a ako jest onda je broj rasporeda $r_{k-1}(P \,/\, p)$. $\square$

Sada možemo ponovo izračunati topovski polinom ploče sa slike 5.1 s pomoću propozicija 5.3 i 5.1:



$$= (1 + 2x) \cdot (1 + x + x \cdot 1) + 2x + 3x^2 + x^3 = 1 + 6x + 7x^2 + x^3.$$

Ovaj način izračunavanja topovskog polinoma praktičan je samo za male ploče jer algoritam ima eksponencijalnu složenost. Pokazat ćemo da je problem algoritamskog izračunavanja već samo koeficijenta $r_n(P)$ topovskog polinoma proizvoljne ploče $P \subseteq \square_n$ težak. Za njega ne postoji algoritam s polinomijalnom složenosti, osim ako je P=NP.

Ploču $P \subseteq \square_n$ reprezentiramo matricom $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$:

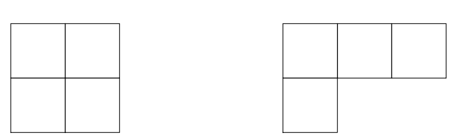
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } (i,j) \in P, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Koeficijent $r_n(P)$ je broj rasporeda n topova na ploči P tako da se ne napadaju, tj. tako da je u svakom retku i stupcu ploče točno jedan top. Rasporede identificiramo s permutacijama $\pi \in S_n$ sa svojstvom $(i, \pi(i)) \in P$ za svaki $i = 1, \ldots, n$, odnosno $a_{i\pi(i)} = 1$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Vidimo da je $r_n(P) = \sum\limits_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$. Ovo je takozvana *permanenta* matrice A. Permanenta se definira isto kao determinanta, ali bez predznaka $(-1)^{I(\pi)}$ ovisnog o parnosti permutacije. Za izračunavanje $n \times n$ determinante imamo efikasan algoritam: elementarnim transformacijama svedemo je na gornjetrokutasti oblik i pomnožimo elemente na dijagonali, što možemo u vremenu $O(n^3)$. Međutim, za izračunavanje permanente nije poznat polinomijalni algoritam. Prema Valiantovu teoremu [41] izračunavanje permanente 0-1 matrice spada u takozvane #P-potpune probleme. Postojanje polinomijalnog algoritma za taj problem značilo bi da je P=NP.

Različite ploče mogu imati isti topovski polinom. Na primjer, ploče na slici 5.4 obje imaju topovski polinom $1 + 4x + 2x^2$. Za takve ploče kažemo da su *topovski ekvivalentne.* Lijeva ploča na slici 5.4 je Ferrersov dijagram particije $\mu = (2, 2)$, a desna particije $\nu = (3, 1)$ prirodnog broja 4. Ploče koje su Ferrersovi dijagrami particija prirodnih brojeva nazivamo *Ferrersovim pločama.* Za Ferrersove ploče postoji jednostavan kriterij topovske ekvivalencije, dokazan u članku [17].

Teorem 5.4. *Neka su μ i ν particije prirodnog broja n. Ferrersove ploče* $\mathrm{dg}(\mu)$ *i* $\mathrm{dg}(\nu)$ *su topovski ekvivalentne ako i samo ako su multiskupovi* $\{\mu_1 + 1, \mu_2 + 2, \ldots, \mu_n + n\}$ *i* $\{\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \ldots, \nu_n + n\}$ *jednaki.*

Duljine particija μ i ν mogu biti manje od n, a za kriterij iz teorema dopunimo ih nulama zdesna. Lijeva ploča na slici 5.4 odgovara particiji $\mu = (2, 2, 0, 0)$ i multiskupu $\{2 + 1, 2 + 2, 0 + 3, 0 + 4\} = \{3, 4, 3, 4\} = \{3^2, 4^2\}$, a desna particiji $\nu = (3, 1, 0, 0)$ i multiskupu $\{3 + 1, 1 + 2, 0 + 3, 0 + 4\} = \{4, 3, 3, 4\} = \{3^2, 4^2\}$. Teorem je iznenađujući jer kriterij možemo provjeriti u polinomijalnom vremenu. U dokazu ćemo umjesto $r_k(\mathrm{dg}(\mu))$ i $P(\mathrm{dg}(\mu), x)$ pisati kraće $r_k(\mu)$ i $P(\mu, x)$.



Slika 5.4: Dvije topovski ekvivalentne ploče.

Dokaz. Topovski polinomi se podudaraju ako i samo ako imaju iste koeficijente: $r_k(\mu) = r_k(\nu)$, za $k = 0, \ldots, n$. Definiramo polinome s istim koeficijentima u obrnutom redoslijedu, ali u bazi padajućih faktorijela: $\bar{R}(\mu, x) = \sum\limits_{k=0}^{n} r_{n-k}(\mu)\, x^{\underline{k}}$ i analogno $\bar{R}(\nu, x)$. Očito vrijedi $R(\mu, x) = R(\nu, x) \iff \bar{R}(\mu, x) = \bar{R}(\nu, x)$.

Kombinatorna interpretacija vrijednosti polinoma $\bar{R}(\mu, x)$ za $x \in \mathbb{N}$ je broj rasporeda n nenapadajućih topova na ploči $\mathrm{dg}(\mu_1 + x, \ldots, \mu_n + x)$. To je ploča $\mathrm{dg}(\mu)$ proširena $n \times x$ pravokutnikom s lijeve strane (ista ideja kao u drugom dokazu teorema 4.9). Postavljanjem topova u svaki redak odozdo prema gore vidimo da je broj rasporeda jednak

$$(x + \mu_n) \cdot (x + \mu_{n-1} - 1) \cdots (x + \mu_1 - n + 1) = \prod_{i=1}^{n} (x + \mu_i - (n - i)).$$

S druge strane, ako postavimo $n - k$ topova na dio ploče $\mathrm{dg}(\mu)$, a preostalih k topova na pravokutnik $n \times x$, broj rasporeda je

$$r_{n-k}(\mu) \cdot x \cdot (x - 1) \cdots (x - k + 1) = r_{n-k}(\mu)\, x^{\underline{k}}.$$

Ukupan broj rasporeda je $\sum\limits_{k=0}^{n} r_{n-k}(\mu)\, x^{\underline{k}} = \bar{R}(\mu, x)$.

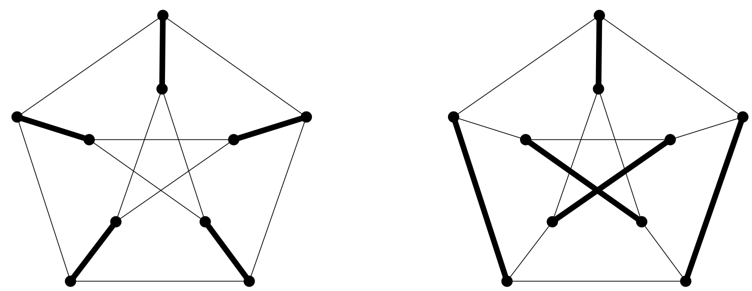
Time smo dokazali jednakost polinoma $\bar{R}(\mu, x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x + \mu_i - (n - i))$ za sve $x \in \mathbb{N}$, prema tome i za sve $x \in \mathbb{R}$. Kombinatorno smo dokazali faktorizaciju modificiranog topovskog polinoma $\bar{R}(\mu, x)$ na linearne faktore, tj. odredili smo njegove nultočke. Takva faktorizacija vrijedi i za modificirani topovski polinom $\bar{R}(\nu, x)$. Kriterij iz teorema slijedi zato što se polinomi $\bar{R}(\mu, x)$ i $\bar{R}(\nu, x)$ s vodećim koeficijentom 1 podudaraju ako i samo ako im se multiskupovi nultočaka podudaraju, tj. ako vrijedi

$$\begin{aligned}
&\{-\mu_i + n - i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{-\nu_i + n - i \mid i = 1, \ldots, n\} \iff \\
&\{\mu_i + i - n \mid i = 1, \ldots, n\} = \{\nu_i + i - n \mid i = 1, \ldots, n\} \iff \\
&\{\mu_i + i \mid i = 1, \ldots, n\} = \{\nu_i + i \mid i = 1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

□

Pregled rezultata o prebrojavanju rasporeda topova dostupan je na internetu u knjizi [5]. Idući cilj je pokazati da je cijela ova "topovska teorija" zapravo dio teorije sparivanja u grafovima, točnije specijalni slučaj za bipartitne grafove. *Sparivanje* u grafu $G = (V, E)$ je podskup bridova $S \subseteq E$ takav da je svaki vrh incidentan najviše s jednim bridom iz S, tj. nikoja dva brida iz S nemaju zajednički kraj. Ako je $|S| = k$, govorimo o *k-sparivanju*. Vrhove incidentne s bridom iz S zovemo *zasićenim*, a u suprotnom *nezasićenim*. Sparivanje koje zasićuje sve vrhove zovemo *savršenim sparivanjem*. U tom slučaju vrijedi $|V| = n = 2k$, a općenito je $k \leq \frac{n}{2}$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je sparivanje savršeno.

Neka je $m_k(G)$ broj k-sparivanja u grafu G. *Polinom sparivanja* (eng. *matching polynomial*) tog grafa je $M(G, x) = \sum\limits_{k \geq 0} m_k(G)\, x^k$. Budući da je broj k-sparivanja za $k > \frac{n}{2}$ jednak 0, riječ je o polinomu stupnja najviše $\frac{n}{2}$.



Slika 5.5: Dva savršena sparivanja Petersenova grafa.

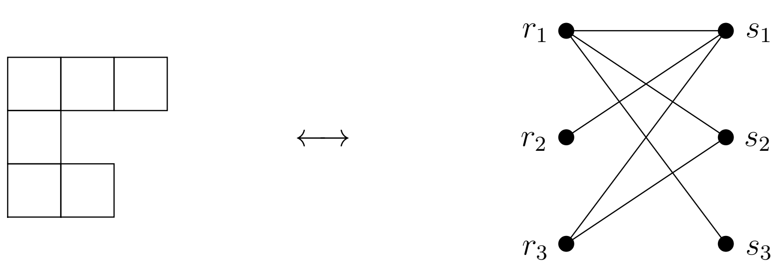
Objasnimo sada vezu između topovskog polinoma i polinoma sparivanja. Za graf $G = (V, E)$ kažemo da je *bipartitan* ako je skup vrhova moguće podijeliti na dva disjunktna podskupa $V = X \cup Y$ tako da svaki brid iz E ima jedan kraj u X, a drugi kraj u Y. Poznata karakterizacija bipartitnih grafova dana je u sljedećem teoremu.

Teorem 5.5. *Graf je bipartitan ako i samo ako nema neparnih ciklusa.*

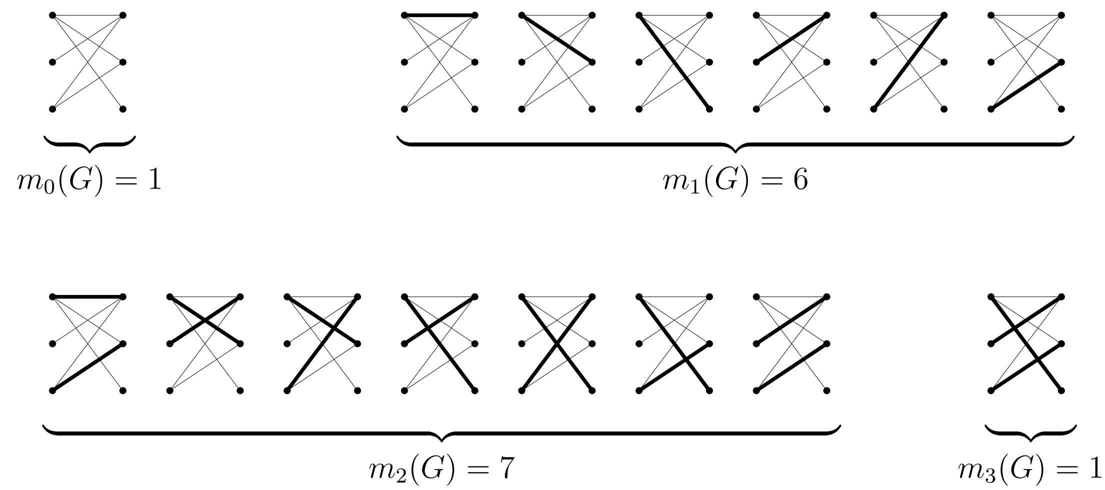
Na primjer, Petersenov graf nije bipartitan jer ima ciklus duljine 5. *Potpuni bipartitan graf* $K_{m,n}$ sastoji se od skupa vrhova $V = X \cup Y$, pri čemu su X i Y dva disjunktna skupa kardinaliteta $|X| = m$ i $|Y| = n$, te skupa bridova $E = \{\{x, y\} \mid x \in X, y \in Y\}$ (skupa svih dvočlanih podskupova od V s jednim članom iz X i drugim članom iz Y).

Ploču $\square_n$ identificiramo s potpunim bipartitnim grafom $K_{n,n}$. Neka su mu vrhovi $V = X \cup Y$ za $X = \{r_1, \ldots, r_n\}$ i $Y = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Reci ploče odgovaraju vrhovima iz X, a stupci vrhovima iz Y. Polja ploče odgovaraju bridovima grafa; polje (i, j) odgovara bridu $\{r_i, s_j\}$. Proizvoljna ploča $P \subseteq \square_n$ odgovara podgrafu od $K_{n,n}$ induciranom bridovima iz P. Svaki bipartitan graf možemo smjestiti kao podgraf od $K_{n,n}$ za dovoljno veliki n i tako identificirati s pločom $P \subseteq \square_n$. Na slici 5.6 prikazan je bipartitan graf G koji odgovara ploči P sa slike 5.1.

Rasporedu topova na ploči P koji se ne napadaju odgovara sparivanje S grafa G. U S stavljamo bridove od G koji odgovaraju poljima od P na kojima su topovi. Uvjet da topovi nisu u istom retku znači da bridovi iz S nemaju zajednički kraj u X, a uvjet da nisu u istom stupcu znači da bridovi iz S nemaju zajednički kraj u Y. Sva moguća sparivanja grafa G prikazana su na slici 5.7 u istom redoslijedu kao odgovarajući rasporedi topova



Slika 5.6: Ploča P sa slike 5.1 i odgovarajući bipartitan graf G.



Slika 5.7: Sparivanja grafa G.

na slici 5.2. Vidimo da je polinom sparivanja $M(G, x) = 1 + 6x + 7x^2 + x^3$ i podudara se s topovskim polinomom $R(P, x)$ odgovarajuće ploče. Budući da potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ odgovara cijeloj ploči $\square_n$, njegov polinom sparivanja je

$$M(K_{n,n}, x) = R(\square_n, x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 k!\, x^k.$$

Polinom sparivanja definiran je i za grafove koji nisu bipartitni. Propozicije pomoću kojih smo izračunavali topovski polinom također možemo generalizirati na proizvoljne grafove.

Propozicija 5.6. *Za disjunktnu uniju grafova G_1 i G_2 vrijedi*

$$M(G_1 \cup G_2, x) = M(G_1, x) \cdot M(G_2, x).$$

Dokaz. Izjednačavanje koeficijenata uz x^k daje $m_k(G_1 \cup G_2) = \sum_{i=0}^{k} m_i(G_1) \cdot m_{k-i}(G_2)$. Ovaj identitet vrijedi jer se svako k-sparivanje od $G_1 \cup G_2$ sastoji od i-sparivanja od G_1 i $(k - i)$-sparivanja od G_2. $\square$

Propozicija 5.7 *Za svaki graf G i bilo koji njegov brid $e = \{u, v\}$ vrijedi*

$$M(G, x) = M(G \setminus e, x) + x \cdot M(G \setminus \{u, v\}, x).$$

Ovdje $G \setminus e$ označava graf G s izbačenim bridom e, a $G \setminus \{u, v\}$ označava graf G s izbačenim vrhovima u i v te svim bridovima incidentnim s u ili v.

Dokaz. Izjednačavanje koeficijenata daje $m_k(G) = m_k(G \setminus e) + m_{k-1}(G \setminus \{u, v\})$. Identitet slijedi iz principa sume tako da skup svih k-sparivanja od G podijelimo na dva disjunktna podskupa u ovisnosti sadrže li ili ne sadrže brid e. Sparivanja koja ne sadrže e ima $m_k(G \setminus e)$, a sparivanja koja sadrže e ima $m_{k-1}(G \setminus \{u, v\})$. $\square$

Za polinom sparivanja vrijede još neke relacije, koje nismo dokazivali za topovski polinom.

Propozicija 5.8. *Za svaki graf G i bilo koji njegov vrh v vrijedi*

$$M(G,x) = M(G \setminus v, x) + x \cdot \sum_{u \sim v} M(G \setminus \{u,v\}, x).$$

Ovdje $G \setminus v$ označava graf G s izbačenim vrhom v i svim bridovima koji su s njim incidentni, a suma ide po svim vrhovima u koji su susjedni s v.

Dokaz. Izjednačavanje koeficijenata daje $m_k(G) = m_k(G \setminus v) + \sum_{u \sim v} m_{k-1}(G \setminus \{u,v\})$. Identitet slijedi tako da skup svih k-sparivanja od G podijelimo na ona koja ne zasićuju vrh v (ima ih $m_k(G \setminus v)$) i ona koja zasićuju vrh v (ima ih $\sum_{u \sim v} m_{k-1}(G \setminus \{u,v\})$). □

Propozicija 5.9. *Za svaki graf G vrijedi* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} M(G,x) = \sum_{e=\{u,v\}} M(G \setminus \{u,v\}, x).$

Suma ide po svim bridovima $e = \{u,v\}$ grafa G.

Dokaz. Koeficijent uz x^{k-1} derivacije $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} M(G,x)$ je $k \cdot m_k(G)$. Kombinatorna interpretacija tog koeficijenta je broj k-sparivanja grafa G s jednim istaknutim bridom. Na drugi način ih možemo prebrojati tako da prvo izaberemo brid $e = \{u,v\}$, a zatim ga dopunimo do k-sparivanja od G na $m_{k-1}(G \setminus \{u,v\})$ načina. Ukupan broj k-sparivanja s istaknutim bridom je $\sum_{e=\{u,v\}} m_{k-1}(G \setminus \{u,v\})$, što je upravo koeficijent uz x^{k-1} polinoma na desnoj strani. □

U algebarskoj teoriji grafova proučavaju se i drugi polinomi pridruženi grafovima, na primjer karakteristični polinom $\phi(G,x) = \det(xI - A)$. Ovdje je $A = [a_{ij}]$ matrica susjedstva grafa G:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } v_i \sim v_j, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

za neku numeraciju $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ vrhova grafa G. Karakteristični polinom zadovoljava relaciju iz propozicije 5.6: $\phi(G_1 \cup G_2, x) = \phi(G_1, x) \cdot \phi(G_2, x)$ za disjunktnu uniju grafova. Derivacija karakterističnog polinoma zadovoljava $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \phi(G,x) = \sum_{v} \phi(G \setminus v, x)$, pri čemu suma ide po svim vrhovima. Polinom sparivanja ponekad se definira drugačije:

$$\mu(G,x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \, m_k(G) \, x^{n-2k}.$$

Uz takvu definiciju zadovoljava istu formulu za derivaciju kao karakteristični polinom.

Propozicija 5.10. *Za svaki graf G vrijedi* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mu(G,x) = \sum_{v \in V} \mu(G \setminus v, x).$

Dokaz. Koeficijent uz x^{n-2k-1} u derivaciji na lijevoj strani je $(-1)^k(n-2k)\cdot m_k(G)$. Bez predznaka $(-1)^k$, kombinatorna interpretacija je broj parova koji se sastoje od k-sparivanja grafa G i jednog vrha kojeg to sparivanje ne zasićuje. Parove možemo prebrojati na drugi način tako da prvo biramo vrh v, a zatim k-sparivanje u grafu $G\setminus v$. Ukupan broj parova je $\sum\limits_v m_k(G\setminus v)$, što je koeficijent uz x^{n-1-2k} polinoma na desnoj strani ako vratimo predznak $(-1)^k$ (grafovi $G\setminus v$ imaju $n-1$ vrhova). $\square$

Još jedna prednost polinoma $\mu(G,x)$ je što mu je stupanj n jednak broju vrhova grafa G, a vodeći koeficijent mu je 1 (broj 0-sparivanja u G). Iz polinoma $M(G,x)$ ne možemo jednoznačno odrediti broj vrhova grafa. Veza između ta dva polinoma je $\mu(G,x)=x^n\,M(G,-x^{-2})$. Polinom μ zadovoljava slične relacije kao M:

$$\mu(G_1\cup G_2,x)=\mu(G_1,x)\cdot\mu(G_2,x)\quad\text{za disjunktnu uniju grafova,}$$

$$\mu(G,x)=\mu(G\setminus e)-\mu(G\setminus\{u,v\},x)\quad\text{za svaki brid } e=\{u,v\},$$

$$\mu(G,x)=x\cdot\mu(G\setminus v,x)+\sum_{u\sim v}\mu(G\setminus\{u,v\},x)\quad\text{za svaki vrh } v.$$

Uz to zadovoljava sljedeću zanimljivu integralnu formulu.

Teorem 5.11. *Broj savršenih sparivanja u komplementarnom grafu $\overline{G}$ je*

$$m_{n/2}\left(\overline{G}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mu(G,x)\,\mathrm{d}x.$$

Iz nje slijede interpretacije nekih poznatih ortogonalnih familija polinoma kao polinoma sparivanja jednostavnih klasa grafova. Na primjer, Hermiteovi polinomi, koji su ortogonalni s obzirom na skalarni produkt

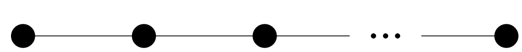
$$\langle p,q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}p(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x,$$

su polinomi sparivanja $\mu(K_n,x)$ potpunih grafova K_n. Čebiševljevi polinomi druge vrste, ortogonalni s obzirom na skalarni produkt

$$\langle p,q\rangle=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,p(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x,$$

su polinomi sparivanja $\mu(P_n,2x)$ za graf "put" P_n prikazan na slici 5.8. Dokazi ovih tvrdnji nalaze se u knjizi [14]. Još dvije knjige posvećene algebarskoj teoriji grafova su [7] i [16].

Nakon izleta u algebarsku teoriju grafova, vratimo se sparivanjima u bipartitnim grafovima. Jedan od najpoznatijih teorema iz ovog područja je takozvani Hallov teorem o braku.



Slika 5.8: Graf P_n s n vrhova i $n-1$ bridova.

Teorem 5.12 (P. Hall, 1935.). *Neka je G bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$. Za skup vrhova $A \subseteq V$ označimo s $N(A)$ skup svih vrhova susjednih nekom vrhu iz A. Graf G dopušta sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X ako i samo ako vrijedi uvjet $|N(A)| \geq |A|$, za svaki $A \subseteq X$.*

Teorem je dokazao engleski matematičar Philip Hall (1904.–1982.). Njegov prezimenjak, američki matematičar Marshall Hall, Jr. (1910.–1990.), također je dao važne doprinose kombinatorici. Teorem se zove "teorem o braku" zbog sljedeće interpretacije. Neka je X skup djevojaka, a Y skup mladića. Graf G konstruiramo tako da svaku djevojku povežemo bridovima s mladićima koji joj se sviđaju. Pitanje postojanja sparivanja koje zasićuje sve vrhove iz X ekvivalentno je pitanju možemo li udati svaku djevojku za nekog mladića koji joj se sviđa, naravno bez poligamije. Hallov teorem kaže da je to moguće ako i samo ako za svaki izbor k djevojaka postoji barem k mladića koji se sviđaju nekoj od izabranih djevojaka.

Dokaz. Nužnost Hallova uvjeta je lako provjeriti. Ako postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X, tj. moguće je udati sve djevojke, onda za svaki skup djevojaka $A \subseteq X$ skup susjeda $N(A)$ sadrži bar njihove muževe i zato ne može imati manje od $|A|$ elementata. Možda ima i više elemenata za koje muževi ne znaju.

Dovoljnost je teže dokazati. Pretpostavimo suprotno, da Hallov uvijet vrijedi, ali ne postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X. Neka je S maksimalno sparivanje (sparivanje s najvećim brojem bridova) i $v \in X$ vrh kojeg ono ne zasićuje. Za put u grafu G kažemo da je S-*alternirajući* ako bridovi na tom putu naizmjence ne pripadaju, pa pripadaju sparivanju S. Neka je B skup svih vrhova $y \in Y$ takvih da postoji S-alternirajući put od v do y, a A skup svih vrhova $x \in X$ takvih da postoji S-alternirajući put od v do x (uključujući vrh v). Prvi brid puta kakve promatramo nije u S (jer put počinje u nezasićenom vrhu v), a drugi kraj mu je neki vrh iz B. Zatim preko brida iz S dolazi do vrha u A, pa preko brida koji nije u S do nekog drugog vrha iz B i tako dalje.

Maksimalni takav put (kojeg ne možemo više proširiti) završava u A, jer bi inače bio takozvani S-*uvećavajući* put. To je S-alternirajući put koji počinje i završava nezasićenim vrhom. Izbacivanjem iz S bridova koji su na S-uvećavajućem putu i dodavanjem bridova na tom putu koji nisu bili u S, povećali bismo sparivanje S, što nije moguće jer smo krenuli od maksimalnog sparivanja. Zbog tog svojstva svakom vrhu iz B možemo pridružiti drugi kraj brida iz S kojim je spojen s vrhom iz A. Pridruživanje je injekcija jer je S sparivanje, ali nije surjekcija jer vrh v iz A nije "pogođen". Time smo dokazali da je $|A| = |B| + 1$.

S druge strane, tvrdimo da je $N(A) \subseteq B$. Za bilo koji $y \in N(A)$ postoji vrh $x \in A$ susjedan s y. Po definiciji skupa A, do vrha x možemo doći S-alternirajućim putem iz vrha v. Ako je vrh y dio tog puta, onda je po definiciji $y \in B$. U suprotnom put od v do x možemo proširiti bridom $\{x, y\}$ i tako ponovo doći do y. Brid $\{x, y\}$ nije u S jer smo u x došli bridom koji jest u S, a S je sparivanje. Dakle, u svakom slučaju je $y \in B$. Došli smo do kontradikcije s Hallovim uvjetom: $|N(A)| \leq |B| < |B| + 1 = |A|$. Dakle, ipak postoji sparivanje koje zasićuje sve vrhove iz X. $\square$

Ovaj teorem je važan jer se s pomoću njega dokazuju mnogi drugi lijepi teoremi iz kombinatorike i nekih srodnih područja. Neke od tih teorema upoznat ćemo u kasnijim poglavljima. Kao kriterij za provjeru postojanja sparivanja koje zasićuje sve vrhove iz X, ili savršenog sparivanja u slučaju $|X| = |Y|$, Hallov uvjet nije praktičan. Trebali bismo provjeravati sve podskupove $A \subseteq X$, pa bi algoritam imao eksponencijalnu složenost. Zanimljivo je da ipak postoje polinomijalni algoritmi koji provjeravaju ima li graf savršeno sparivanje (zadatak 5.13). S druge strane, prebrojavanje svih savršenih sparivanja bipartitnog grafa ekvivalentno je određivanju vodećeg koeficijenta topovskog polinoma. Vidjeli smo da je to #P-potpun problem za koji vjerojatno ne postoji polinomijalni algoritam.

Za neke druge pojmove iz teorije grafova, na primjer za Hamiltonove[1] cikluse ili za klike, već je i problem algoritamske provjere postojanja NP-potpun. Naravno, problem algoritamskog prebrojavanja svih takvih struktura u zadanom grafu je barem jednako težak.

Zadaci

Zadatak 5.1. *Za particiju $\mu = (3, 2, 1, 1)$ odredite topovski polinom i sve particije koje su joj topovski ekvivalentne.*

Zadatak 5.2. *Dokažite da je ploča $\square_n$ topovski ekvivalentna Ferrersovom dijagramu particije $\mu = (2n-1, 2n-3, \ldots, 5, 3, 1)$.*

Zadatak 5.3. *Izračunajte permanentu jedinične $n \times n$ matrice I_n i matrice J_n kojoj su svi unosi jednaki 1. Nadalje, izračunajte permanentu $n \times n$ matrice $A_n = [a_{ij}]$ s unosima $a_{ij} = 1$ ako je $i + j$ paran i $a_{ij} = 0$ ako je $i + j$ neparan.*

Zadatak 5.4. *Dokažite karakterizaciju bipartitnih grafova iz teorema 5.5.*

Zadatak 5.5. *Dokažite da je potpun bipartitan graf $K_{n,n}$ jako regularan i odredite mu parametre.*

Zadatak 5.6. *Izračunajte polinom sparivanja Petersenova grafa. Koliko u tom grafu ima savršenih sparivanja?*

Zadatak 5.7. *Dokažite da karakteristični polinom $\phi(G, x)$ grafa G ne ovisi o numeraciji njegovih vrhova. Zato i nultočke karakterističnog polinoma, tj. svojstvene vrijednosti matrice susjedstva, ovise samo o grafu.*

Zadatak 5.8. *Pokažite primjerom da grafovi G_1 i G_2 s različitim brojem vrhova mogu imati isti polinom sparivanja $M(G_1, x) = M(G_2, x)$. Dokažite da oba polinoma $M(G, x)$ i $\mu(G, x)$ jednoznačno određuju broj bridova grafa G.*

Zadatak 5.9. *Neka je G graf s n vrhova i e bridova u kojem je i-ti vrh stupnja d_i. Dokažite da je $m_2(G) = \binom{e}{2} - \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$. Dokažite da iz polinoma sparivanja $\mu(G, x)$ možemo ustanoviti je li graf G regularan, tj. vrijedi li $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$.*

Zadatak 5.10. *Potpuni graf K_n ima n vrhova i svih $\binom{n}{2}$ dvočlanih podskupova kao bridove. Dokažite da je broj k-sparivanja u K_n jednak $m_k(K_n) = \dfrac{n^{\underline{2k}}}{k!\, 2^k}$.*

[1] Sir William Rowan Hamilton (1805.–1865.), irski matematičar, astronom i fizičar.

Zadatak 5.11. *Dokažite da je za graf* P_n *sa slike 5.8 broj* k*-sparivanja* $m_k(P_n) = \binom{n-k}{k}$.

Zadatak 5.12. *Izvedite rekurziju za polinom sparivanja* $M(P_n, x)$.

Zadatak 5.13. *Jedan polinomijalni algoritam za pronalaženje savršenog sparivanja u bipartitnom grafu zasnovan je na traženju maksimalnog toka u transportnoj mreži. Spojimo izvor na vrhove iz* X, *a ponor na vrhove iz* Y. *Bridovima bipartitnog grafa dodijelimo jedinične kapacitete i zatim pronađemo maksimalni tok, na primjer Ford-Fulkersonovim algoritmom. Tako dobivamo maksimalno sparivanje u bipartitnom grafu. Ako to sparivanje zasićuje sve vrhove, imamo savršeno sparivanje, a u suprotnom ne postoji savršeno sparivanje. O transportnim mrežama i vezama s teorijom sparivanja pročitajte u 2. poglavlju knjige [28].*

Poglavlje 6

Formula uključivanja-isključivanja

Neka je $\{A_1, \dots, A_n\}$ familija konačnih skupova. Želimo izračunati broj elemenata unije

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Ako su skupovi u parovima disjunktni, možemo primijeniti princip sume:

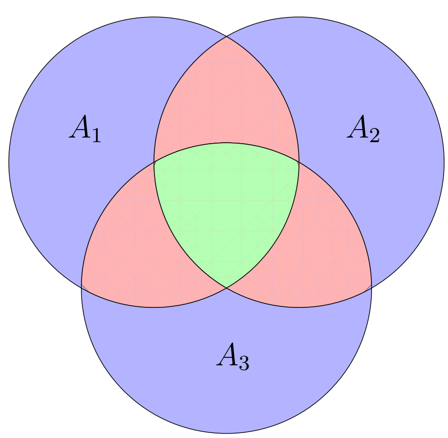
$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|.$$

Što ako skupovi nisu međusobno disjunktni? Tada u sumi na desnoj strani elemente iz presjeka brojimo više puta, pa ih trebamo oduzeti. Za $n = 2$ vrijedi

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Slika 6.1 prikazuje slučaj $n = 3$. Ako oduzmemo kardinalitete presjeka dvaju skupova $|A_i \cap A_j|$, onda elemente u presjeku sva tri skupa nismo brojali. Zato trebamo dodati još jedan član na desnoj strani:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$



Slika 6.1: Unija triju skupova.

Za n skupova dolazimo do *formule uključivanja-isključivanja* (FUI), koja glasi:

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i\cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|.$$

Na engleskom se ova formula zove *principle of inclusion-exclusion* (PIE). Uvest ćemo oznake da bismo je spretnije zapisali. Skup indeksa označavat ćemo $N = \{1,\ldots,n\}$. Za podskup $I \subseteq N$ neka je $A_I = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Onda formula glasi

$$|A_1\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq N} (-1)^{|I|-1}|A_I|.$$

Zapis je jednostavniji ako prijeđemo na komplement. Neka su $A_1,\ldots,A_n$ podskupovi konačnog skupa X. Komplement S^c znači $X\setminus S$, a "prazan presjek" $A_\emptyset$ je cijeli X. Tada po principu komplementa vrijedi $|(A_1\cup\cdots\cup A_n)^c| = |X| - |A_1\cup\cdots\cup A_n|$, odnosno

$$|(A_1\cup\cdots\cup A_n)^c| = \sum_{I\subseteq N} (-1)^{|I|}|A_I|. \tag{6.1}$$

Pokažimo nekoliko primjena formule (6.1). Prisjetimo se da $\mathrm{Sur}(n,k)$ označava broj surjekcija s n-članog na k-člani skup.

Teorem 6.1. $\mathrm{Sur}(n,k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$

Dokaz. Neka je $N = \{1,\ldots,n\}$, $K = \{1,\ldots,k\}$ i $X = K^N = \{f : N\to K\}$ skup svih funkcija s N u K. Iz zadatka 1.4 znamo da je $|X| = k^n$. Neka je

$$A_i = \{f\in X \mid i\notin \mathrm{Im}(f)\}$$

skup svih funkcija koje "ne pogađaju" element $i\in K$ iz kodomene. Skup svih surjekcija označavamo $\mathrm{Sur}(N,K)$ i možemo ga zapisati kao

$$\mathrm{Sur}(N,K) = A_1^c\cap\cdots\cap A_k^c = (A_1\cup\cdots\cup A_k)^c.$$

Vrijedi $|A_i| = (k-1)^n$, za $i = 1,\ldots,k$ i, općenitije, $|A_I| = (k-|I|)^n$ za bilo koji $I\subseteq K$. Iz formule (6.1) slijedi

$$\mathrm{Sur}(n,k) = |\mathrm{Sur}(N,K)| = \sum_{I\subseteq K}(-1)^{|I|}(k-|I|)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

U zadnjem koraku grupirali smo članove sume po kardinalitetu $|I| = i$, budući da $|A_I|$ ovisi samo o njemu. Binomni koeficijent se pojavljuje jer i-članih podskupova $I\subseteq K$ ima $\binom{k}{i}$. □

Iz propozicije 3.13 i teorema 6.1 slijedi formula za Stirlingove brojeve druge vrste.

Korolar 6.2. $\left\{ {n \atop k} \right\} = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$

U specijalnom slučaju $n = k$ funkcija je surjekcija ako i samo ako je bijekcija. Takvih funkcija ima $n!$ i dobivamo neobičnu formulu za faktorijele.

Korolar 6.3. $n! = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n.$

Druga ilustracija formule uključivanja-isključivanja je dokaz jednog teorema iz teorije brojeva. Eulerova[1] funkcija $\varphi(m)$ ("totient") kao vrijednost vraća koliko ima brojeva iz skupa $\{1, \ldots, m\}$ koji su relativno prosti s m. Ako znamo rastaviti m na proste faktore, možemo je izračunati efikasnije.

Teorem 6.4. *Ako je $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ rastav na proste faktore, onda je*

$$\varphi(m) = m \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Dokaz. Neka je $N = \{1, \ldots, n\}$, $X = \{1, \ldots, m\}$ i $A_i = \{k \in X \mid p_i \text{ dijeli } k\}$. Broj $k \in X$ je relativno prost s m ako nije djeljiv niti s jednim od p_i:

$$\varphi(m) = |A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c|.$$

Vrijedi $|A_i| = \frac{m}{p_i}$ i $|A_I| = \frac{m}{\prod\limits_{i \in I} p_i}$, pa primjenom formule (6.1) dobivamo

$$\varphi(m) = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \frac{m}{\prod\limits_{i \in I} p_i} = m \cdot \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i} = m \cdot \sum_{I \subseteq N} \prod_{i \in I} \left(-\frac{1}{p_i}\right).$$

S druge strane, kad računamo produkt $\prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$, također dobivamo sumu $\sum\limits_{I \subseteq N} \prod\limits_{i \in I} \left(-\frac{1}{p_i}\right)$ (I je skup indeksa i za koje smo iz zagrade $\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ izabrali drugi član $-\frac{1}{p_i}$). Zato vrijedi $\varphi(m) = m \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$. □

Još jedan tipičan rezultat koji se dokazuje uključivanjem-isključivanjem je formula za broj deranžmana. *Deranžman* je permutacija bez fiksnih točaka. Skup svih deranžmana n-članog skupa označavamo $D_n \subseteq S_n$, a broj deranžmana $d_n = |D_n|$.

Teorem 6.5. $d_n = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$

[1] Leonhard Euler (1707.–1783.), švicarski matematičar.

Dokaz. Neka je $X = S_n$ skup svih permutacija skupa $N = \{1, \ldots, n\}$, a $A_i = \{\pi \in X \mid \pi(i) = i\}$ skup svih permutacija s fiksnom točkom i. Skup svih deranžmana je $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$. Vrijedi $|X| = n!$, $|A_i| = (n-1)!$ i $A_I = (n - |I|)!$. Iz formule (6.1) slijedi

$$d_n = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} (n - |I|)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Grupirali smo članove sume po kardinalitetu $|I| = i$ te koristili formulu $\binom{n}{i}(n-i)! = \frac{n!}{i!}$. $\square$

Permutacije stupnja n odgovaraju rasporedima nenapadajućih topova na ploči $\square_n = N \times N$ (slika 3.6), a deranžmani rasporedima topova kod kojih niti jedan top nije na dijagonali ploče. Općenitije, možemo uzeti bilo koji podskup $P \subseteq \square_n$ i prebrojavati permutacije sa *zabranjenim pozicijama* iz P. To su $\pi \in S_n$ takve da $(i, \pi(i)) \notin P$, za svaki $i = 1, \ldots, n$. Broj takvih permutacija jednak je permanenti $n \times n$ matrice koja na mjestima iz P ima nule, a na svim ostalim mjestima jedinice. Vidjeli smo da je izračunavanje permanente teško, no ako skup zabranjenih pozicija P nema puno elemenata pomaže nam sljedeći teorem.

Teorem 6.6. *Broj permutacija $\pi \in S_n$ sa zabranjenim pozicijama iz $P \subseteq \square_n$ je*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, r_k(P) \, (n-k)!.$$

Ovdje je $r_k(P)$ broj rasporeda k nenapadajućih topova na ploči P, tj. koeficijent uz x^k topovskog polinoma $R(P, x)$. Ako je $P = \{(i,i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ dijagonala ploče, po korolaru 5.2 vrijedi $r_k(P) = \binom{n}{k}$ i teorem 6.5 dobivamo kao specijalni slučaj teorema 6.6.

Dokaz. Neka je $X = S_n$ i $A_i = \{\pi \in S_n \mid (i, \pi(i)) \in P\}$ skup svih permutacija koje imaju zabranjenu poziciju u i-tom retku. Prebrojavamo elemente skupa $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$, kojih po formuli (6.1) ima

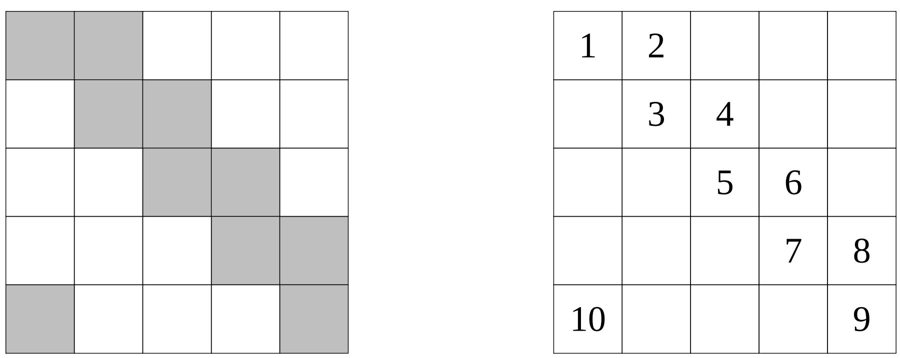
$$\sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{|I|=k} |A_I|.$$

Opet smo grupirali članove sume po kardinalitetu podskupa $I \subseteq N$. Trebamo provjeriti da je $\sum\limits_{|I|=k} |A_I| = r_k(P)\,(n-k)!$. Na dva načina prebrojavamo parove (I, π), za $I \subseteq N$, $|I| = k$ i $\pi \in A_I$. Ako prvo biramo podskup I, dobivamo sumu na lijevoj strani. Drugi način je da prvo biramo permutaciju π koja ima barem k zabranjenih pozicija. Broj izbora k različitih parova $(i_1, \pi(i_1)), \ldots, (i_k, \pi(i_k)) \in P$ je upravo "topovski broj" $r_k(P)$. Time je potpuno određen skup $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, a da bismo do kraja odredili permutaciju π, trebamo zadati kako preslikava preostale elemente iz $N \setminus I$ u elemente iz $N \setminus \{\pi(i_1), \ldots, \pi(i_k)\}$. To možemo na $(n-k)!$ načina, pa je ukupan broj parova $r_k(P)\,(n-k)!$. $\square$

Teorem je dokazao američki kombinatoričar John Riordan (1903.–1988.) i popularizirao ga je u svojoj vrlo utjecajnoj knjizi *An introduction to combinatorial analysis* [36]. Ovom tehnikom možemo riješiti takozvani "problème des ménages" (problem bračnih parova) koji su krajem 19. stoljeća postavili francuski matematičar Édouard Lucas (1842.–1891.) i škotski fizičar Peter Guthrie Tait (1831.–1901.).

Primjer 6.7. *Na koliko načina možemo posjesti n bračnih parova oko okruglog stola s numeriranim mjestima tako da žene i muškarci alterniraju i nitko ne sjedi kraj svojeg bračnog partnera?*

Rješenje. Žene možemo posjesti na $2 \cdot n!$ načina. Biramo sjede li na parnim ili neparnim mjestima i zatim ih smjestimo na $n!$ načina. (Da mjesta nisu numerirana, za ovaj korak imali bismo $(n-1)!$ mogućnosti.) Neka je R_n broj mogućih rasporeda muškaraca nakon što su žene sjele. To je takozvani "reducirani broj ménagesa" i svodi se na permutacije sa zabranjenim pozicijama. Ako slobodna mjesta označimo brojevima $1, \ldots, n$ i pretpostavimo da i-ta žena sjedi između mjesta i, $i+1$ za $i = 1, \ldots, n-1$, a n-ta žena između mjesta n, 1, onda rasporedi muškaraca odgovaraju permutacijama sa zabranjenim pozicijama iz $P = \{(i,i) \mid i = 1, \ldots, n\} \cup \{(i, i+1) \mid i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{(n, 1)\}$. Izračunajmo prvo broj $r_k(P)$ rasporeda k nenapadajućih topova na ploči P.



Slika 6.2: Zabranjene pozicije za reducirani "problème des ménages", $n = 5$.

Zabranjene pozicije označimo redom od gore-lijevo prema dolje-desno brojevima $1, 2, \ldots$ $2n-1$, a poziciju u donjem lijevom kutu sa $2n$ (slika 6.2). Skup svih rasporeda podijelimo na dva disjunktna podskupa u ovisnosti je li na poziciji $2n$ top ili nije. Ako na toj poziciji nije top, onda biramo k pozicija od $1, 2, \ldots, 2n-1$ tako da nikoje dvije nisu susjedne. Problem je ekvivalentan prebrojavanju nizova od k jedinica i $2n-1-k$ nula tako da nema susjednih jedinica. Razdvojimo jedinice s $k-1$ nula, a preostalih $2n-1-k-(k-1) = 2n-2k$ nula rasporedimo na $k+1$ mjesta po volji (lijevo od 1. jedinice, između 1. i 2. jedinice, ..., desno od k-te jedinice). Broj rasporeda je po "principu kuglica i štapića" $\binom{2n-2k+k}{k} = \binom{2n-k}{k}$.

Drugi slučaj, kad je na poziciji $2n$ top, svodi se na biranje $k-1$ pozicija od $2, 3, \ldots, 2n-2$ tako da nikoje dvije nisu susjedne. Na analogan način vidimo da je tada broj rasporeda

$\binom{2n-k-1}{k-1}$. Prema tome,

$$r_k(P) = \binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1} = \frac{2n-k}{k}\binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k-1}{k-1} =$$
$$= \frac{2n}{k}\binom{2n-k-1}{k-1} = \frac{2n}{2n-k}\cdot\frac{2n-k}{k}\binom{2n-k-1}{k-1} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

Koristili smo "svojstvo apsorpcije" binomnih koeficijenata $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (zadatak 6.1). Prema teoremu 6.6 vrijedi

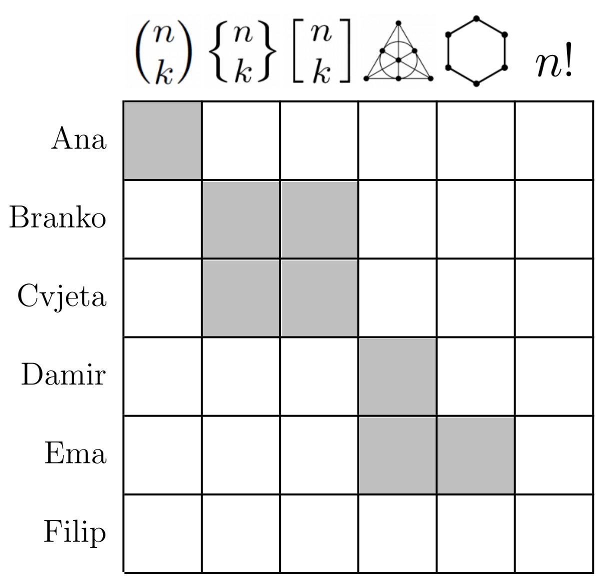
$$R_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, r_k(P)\,(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

Ukupan broj rasporeda žena i muškaraca oko stola je

$$M_n = 2\cdot n!\cdot R_n = 2\cdot n!\,\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

To je takozvana Touchardova[2] formula iz 1934. [40]. □

Primjer 6.8. *Na koliko načina možemo dodijeliti šest "Merlin znački" šestero studenata tako da pridruživanje bude bijektivno i da poštujemo njihove preferencije? Ana ne voli binomne koeficijente, Branko i Cvjeta ne vole Stirlingove brojeve, Damiru se ne sviđa Fanova ravnina, Emi se ne sviđa Fanova ravnina niti ciklus, a Filipu je svejedno (slika 6.3).*



Slika 6.3: Preferencije studenata.

[2]Jacques Touchard (1885.–1968.), francuski matematičar.

Rješenje. Najprije izračunamo topovski polinom za zabranjene pozicije P na slici 6.3 uz pomoć propozicije 5.1:

$$R(P,x) = R(\square, x) \cdot R\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, x\right) \cdot R\left(\begin{array}{|c|c}\cline{1-1} & \\ \hline & \multicolumn{1}{c|}{} \\ \hline \end{array}, x\right) = (1+x)\cdot(1+4x+2x^2)\cdot(1+3x+x^2) =$$

$$= 1 + 8x + 22x^2 + 25x^3 + 12x^4 + 2x^5.$$

Vidimo da je $r_0(P) = 1$, $r_1(P) = 8$, $r_2(P) = 22$, $r_3(P) = 25$, $r_4(P) = 12$ i $r_5(P) = 2$. Po teoremu 6.6, broj permutacija sa zabranjenim pozicijama iz P je

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \, r_k(P)\,(6-k)! = 6! - 8\cdot 5! + 22\cdot 4! - 25\cdot 3! + 12\cdot 2! - 2\cdot 1! =$$

$$= 720 - 960 + 528 - 150 + 24 - 2 = 160.$$

$\square$

Zadaci

Zadatak 6.1. *Kombinatorno dokažite identitet* $k\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k-1}$.

Zadatak 6.2. *Na koliko načina možemo izabrati* 5 *karata iz špila od* 32 *karte (po* 8 *karata u četiri boje:* ♠, ♢, ♡, ♣*) tako da imamo bar jednu kartu svake boje?*

Zadatak 6.3. *Koliko ima podskupova od* $\{1,2,\ldots,6n\}$ *koji sadrže bar jedan paran broj i bar jedan broj djeljiv s* 3*? Brojevi ne moraju biti različiti, npr. podskup* $\{6\}$ *zadovoljava uvjet.*

Zadatak 6.4. *Društvo od* n *planinara hoda u redu, jedan za drugim. Na koliko načina mogu promijeniti redoslijed hodanja tako da nitko ne bude neposredno iza planinara kojem je prije promjene gledao u leđa?*

Zadatak 6.5. *Koliko ima permutacija multiskupa* $\{a_1^2, a_2^2, \ldots, a_n^2\}$ *(*n *različitih elemenata kratnosti* 2*) u kojima su susjedni elementi različiti?*

Zadatak 6.6. *Koliko ima grafova sa skupom vrhova* $V = \{1,2,\ldots,n\}$ *koji nemaju izolirana vrhova? Za vrh kažemo da je izoliran ako je stupnja* 0*, tj. nije incidentan niti s jednim bridom.*

Zadatak 6.7. *Zadana je* $n\times n$ *matrica* A *koja sadrži svaki od brojeva od* 1 *do* n^2 *točno jednom. Koliko ima matrica* B *koje zadovoljavaju isti uvjet, a niti jedan redak im se ne podudara s odgovarajućim retkom matrice* A*?*

Zadatak 6.8. *Odredite broj permutacija* $\pi\in S_5$ *sa zabranjenim pozicijama* $P = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,3), (4,4), (5,5)\}$.

Zadatak 6.9. *Odredite broj permutacija* $\pi\in S_4$ *takvih da je* $\pi(1)\neq 3$, $\pi(2) < 3$ *i* $\pi(4) > 1$.

Zadatak 6.10. *Odredite broj permutacija* $\pi \in S_6$ *takvih da* $\pi(1)$ *i* $\pi(2)$ *nisu djeljivi s* 3, $\pi(3)$ *i* $\pi(4)$ *nisu djeljivi s* 4, *a* $\pi(5)$ *i* $\pi(6)$ *nisu djeljivi s* 5.

Zadatak 6.11. *Grb Republike Hrvatske je* 5×5 *šahovska ploča koja počinje crvenim poljem (zanemarite zaobljenost s donje strane). Iznad svakog stupca nalazi se štit, a zadnja tri štita sadrže životinje. Na koliko načina možemo postaviti* 5 *identičnih topova na polja ploče tako da se ne napadaju i da u stupcima iznad kojih su životinje topovi nisu na bijelim poljima?*

Zadatak 6.12. *Pokažite da je reducirani "problème des ménages", tj. prebrojavanje rasporeda sjedenja muškaraca nakon što su žene sjele, ekvivalentan prebrojavanju savršenih sparivanja u grafu koji se dobije izbacivanjem jednog Hamiltonova ciklusa iz potpunog bipartitnog grafa* $K_{n,n}$. *Još jedan ekvivalentan problem je izračunavanje permanente matrice kojoj je prvi redak* $[0, 0, 1, \ldots, 1]$ *(dvije uzastopne nule i jedinice na svim ostalim mjestima), a ostali reci dobiju se cikličkim pomakom u desno.*

Zadatak 6.13. *Graf* G *dobijemo od potpunog bipartitnog grafa* $K_{n,n}$, $n \geq 2$, *tako da iz njega izbacimo bridove jednog ciklusa duljine* 4. *Koliko ima savršenih sparivanja u grafu* G*?* Uputa: *interpretirajte kao problem prebrojavanja permutacija sa zabranjenim pozicijama.*

Zadatak 6.14. *Dokažite teorem 6.4 na drugi način, iz multiplikativnosti Eulerove funkcije* $M(a,b) = 1 \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ *i svojstva* $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

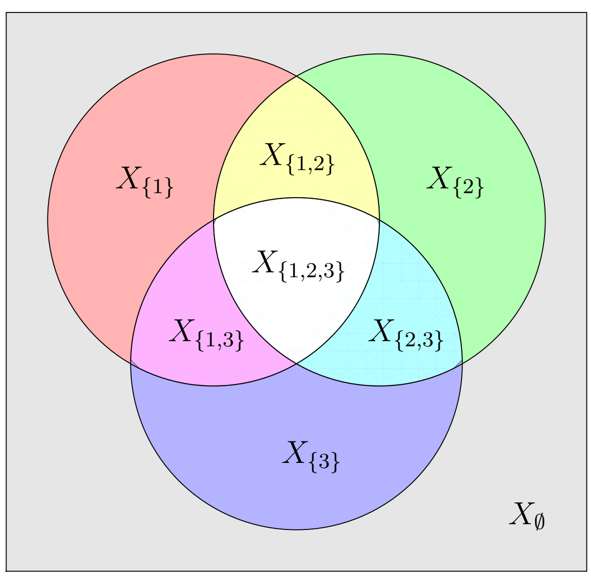
Poglavlje 7

Möbiusova inverzija

7.1 Dokaz formule uključivanja-isključivanja

U prethodnom poglavlju koristili smo se formulom uključivanja-isključivanja (6.1), ali je nismo dokazali. Formula se može dokazati na više načina. Dokaz matematičkom indukcijom je najmanje inventivan. U skripti [31] dokazana je prebrojavanjem doprinosa elemenata $x \in X$ lijevoj i desnoj strani (teorem 2.6.2 na str. 55 i 56). U knjizi [27] dan je dokaz s pomoću involucije i još jedan dokaz prebrojavanjem (dokazi 4.13 i 4.14 na str. 159). U ovom poglavlju dokazat ćemo formulu uključivanja-isključivanja generalizacijom. Generalizirat ćemo (6.1) do principa koji je zbog svoje općenitosti jasan iz definicije, takozvane Möbiusove inverzije. Do toga ćemo doći u nekoliko koraka i trebat ćemo savladati neke tehničke prepreke. Ovakav dokaz preuzet je iz knjige [9].

Za prvi korak generalizacije uvedimo dodatne oznake. Sjetimo se da imamo familiju podskupova $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ konačnog skupa X. Skup indeksa označavamo $N =$



Slika 7.1: Područja Vennova dijagrama familije $\{A_1, A_2, A_3\}$.

$\{1, \ldots, n\}$, a za podskup skupa indeksa $I \subseteq N$ oznaka A_I predstavlja presjek $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$. Za element $x \in X$ neka je $I(x) = \{i \in N \mid x \in A_i\}$ skup svih indeksa i takvih da x pripada skupu A_i. Za podskup indeksa $I \subseteq \cancel{X}$ neka je $X_I = \{x \in X \mid I(x) = I\}$. Time smo uspostavili bijekciju između podskupova indeksa i područja Vennova dijagrama familije $\{A_1, \ldots, A_n\}$ (slika 7.1). Dodavanjem još jednog skupa u familiju, svako područje Vennova dijagrama dijelimo na dva područja. Zato je ukupan broj područja Vennova dijagrama 2^n, isto kao podskupova od N. Specijalni slučaj ove oznake je $X_\emptyset$, što je skup elemenata $x \in X$ koji ne pripadaju niti jednom od podskupova A_i iz familije, tj. $X_\emptyset = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$. Na drugom kraju je $X_N = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, skup elemenata $x \in X$ koji pripadaju svim podskupovima familije.

Teorem 7.1. *Za svaki $I \subseteq N$ vrijedi*

$$\boxed{|X_I| = \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} |A_J|.} \tag{7.1}$$

Suma ide po svim podskupovima indeksa $J \subseteq N$ koji su nadskupovi od I. Primijetimo da za $I = \emptyset$ dobivamo upravo formulu (6.1). Dakle, formula (7.1) je zaista generalizacija formule uključivanja-isključivanja (6.1). Nećemo direktno dokazivati ovaj teorem, nego ćemo ga dalje generalizirati. Partitivni skup od N (skup svih podskupova indeksa) označavamo 2^N.

Teorem 7.2. *Za svake dvije funkcije $f, g : 2^N \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je*

(a) $g(I) = \sum_{J \supseteq I} f(J), \ \ \forall I \subseteq N,$

(b) $f(I) = \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} g(J), \ \ \forall I \subseteq N.$

Ovaj teorem je specijalni slučaj Möbiusove inverzije: ako funkciju g možemo izraziti kao sumu vrijednosti funkcije f po nadskupovima argumenta, onda f možemo izraziti na isti način preko g, ali s alternirajućim predznacima. Vrijedi i obratna implikacija. Pokažimo najprije kako iz teorema 7.2 slijedi formula (7.1).

Neka je $f(I) = |X_I|$ i $g(I) = |A_I|$. Za bilo koji $I \subseteq N$, $g(I)$ je broj elemenata $x \in X$ takvih da je $x \in A_i$ za sve $i \in I$. S druge strane, $f(I)$ je broj elemenata $x \in X$ takvih da je $x \in A_i$ za sve $i \in I$ te $x \notin A_i$ za sve $i \in N \setminus I$. Primijetimo da vrijedi $A_I = \bigcup_{J \supseteq I} X_J$ i unija je disjunktna, tj. $X_{J_1} \cap X_{J_2} = \emptyset$ za sve $J_1 \neq J_2$. Stoga po principu sume vrijedi $g(I) = |A_I| = \sum_{J \supseteq I} |X_J| = \sum_{J \supseteq I} f(I)$. Naše dvije funkcije zadovoljavaju svojstvo (a) iz teorema 7.2, pa vrijedi i svojstvo (b):

$$|X_I| = f(I) = \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} g(J) = \sum_{J \supseteq I} (-1)^{|J \setminus I|} |A_J|.$$

To je upravo formula (7.1). Sljedeći teorem je ekvivalentan teoremu 7.2, ali sume idu po podskupovima umjesto po nadskupovima.

Teorem 7.3. *Za svake dvije funkcije $f, g : 2^N \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je*

(a) $g(I) = \sum_{J \subseteq I} f(J), \ \ \forall I \subseteq N,$

(b) $f(I) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|I \setminus J|} g(J), \ \ \forall I \subseteq N.$

Tvrdnja teorema 7.3 slijedi iz teorema 7.2 tako da ga primijenimo na funkcije $F(I) = f(N \setminus I)$ i $G(I) = g(N \setminus I)$. Na isti način dokazujemo teorem 7.2 iz teorema 7.3. Teoremi su ekvivalentni, a oba su specijalni slučajevi Möbiusove inverzije. Promotrimo jednu važnu posljedicu teorema 7.3.

Korolar 7.4. *Za svake dvije funkcije $f, g : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je*

(a) $g(i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f(j), \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},$

(b) $f(i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} g(j), \ \ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 7.3 tako da ga primijenimo na funkcije $F, G : 2^N \to \mathbb{R}$, $F(I) = f(|I|)$, $G(I) = g(|I|)$. □

Ova tvrdnja poznata je kao *binomna inverzija*, a funkciju g nazivamo *binomnom transformacijom* funkcije f. Zapišimo formulu za broj surjekcija iz teorema 6.1 na drugi način:

$$\mathrm{Sur}(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \left| \begin{array}{c} j = k - i \\ i = k - j \end{array} \right| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{k-j} j^n.$$

Iz simetrije binomnih koeficijenata i zamjenom oznake $k \to i$ dobivamo

$$\mathrm{Sur}(n, i) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^n.$$

Ovo je tvrdnja (b) iz korolara 7.4 za funkcije $f(i) = \mathrm{Sur}(n, i)$ i $g(i) = i^n$. Ekvivalentna je tvrdnji (a), koja glasi

$$i^n = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \mathrm{Sur}(n, j). \tag{7.2}$$

Ovu formulu možemo dokazati kombinatorno (zadatak 7.2) i tako dobivamo drugi dokaz formule za broj surjekcija. I teorem 6.5 možemo dokazati binomnom inverzijom (zadatak 7.3).

Skup svih funkcija $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ čini vektorski prostor izomorfan s $\mathbb{R}^{n+1}$. Funkciju f identificiramo s uređenom $(n+1)$-torkom realnih brojeva $(f(0), f(1), \ldots, f(n))$, odnosno stupčanom matricom

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{bmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

Neka su $A = \left[\binom{i}{j} \right]_{i,j=0}^{n}$ i $B = \left[(-1)^{i-j} \binom{i}{j} \right]_{i,j=0}^{n}$ kvadratne matrice reda $n+1$ koje sadrže binomne koeficijente, odnosno binomne koeficijente s alternirajućim predznacima. Matrice su donjetrokutaste (A je Pascalov trokut, a B Pascalov trokut s predznacima). Po korolaru 7.4, za svaka dva vektora $f, g \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$g = A \cdot f \iff f = B \cdot g.$$

To znači da su matrice A i B jedna drugoj inverzne, $B = A^{-1}$ i $A = B^{-1}$. U teoremu 4.13 izveli smo relacije ortogonalnosti za Stirlingove brojeve prve i druge vrste, što također možemo protumačiti kao princip inverzije, analogno korolaru 7.4 (zadatak 7.5).

U ovoj cjelini generalizirali smo formulu uključivanja-isključivanja (6.1) do principa inverzije iskazanog teoremima 7.2 i 7.3. Prije nego što nastavimo generalizirati do općeg principa Möbiusove inverzije, upoznat ćemo se s klasičnom Möbiusovom inverzijom iz teorije brojeva.

7.2 Klasična Möbiusova inverzija

August Ferdinand Möbius (1790.–1868.) bio je njemački matematičar i astronom. Poznat je po Möbiusovoj traci, neorijentabilnoj plohi u prostoru sa samo jednom stranom (slika 7.7). Osim toga uveo je Möbiusovu funkciju $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$, važnu multiplikativnu funkciju u teoriji brojeva. Za prirodan broj $m \in \mathbb{N}$ s rastavom na proste faktore $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ vrijednost Möbiusove funkcije je

klasična Mobiusova fj-a

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{ako je } e_1 = \ldots = e_n = 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{7.3}$$

Dakle, $\mu(m) = 0$ ako je m djeljiv kvadratom nekog prostog broja. U suprotnom, $\mu(m) = 1$ ako je m produkt parno mnogo različitih prostih brojeva, a $\mu(m) = -1$ ako je m produkt neparno mnogo različitih prostih brojeva.

Teorem 7.5. *Suma po svim djeljiteljima od m vrijednosti Möbiusove funkcije je*

$$\sum_{d\,|\,m} \mu(d) = \begin{cases} 1, & za\ m = 1, \\ 0, & za\ m > 1. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ rastav na proste faktore i $N = \{1, \ldots, n\}$ skup indeksa, kao ranije. Dovoljno je sumirati po svim djeliteljima d od m koji su produkti različitih prostih faktora od m, inače je $\mu(d) = 0$. Vrijedi

$$\sum_{d\,|\,m} \mu(d) = \sum_{I \subseteq N} \mu(\prod_{i \in I} p_i) = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = (1 + (-1))^n = 0^n.$$

U predzadnjem koraku koristili smo se binomnim teoremom, a 0^n je 1 za $n = 0$ (tj. za $m = 1$) i 0 inače. □

Teorem 7.6. *Za svake dvije funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ekvivalentno je*

(a) $g(m) = \sum_{d\,|\,m} f(d), \quad \forall m \in \mathbb{N},$

(b) $f(m) = \sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, g(\frac{m}{d}), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

Dokaz. Dokažimo implikaciju $(a) \Rightarrow (b)$. Raspišimo desnu stranu od (b):

$$\sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, g(\frac{m}{d}) = \sum_{d\,|\,m} \mu(d) \left(\sum_{c\,|\,\frac{m}{d}} f(c) \right) = \sum_{(c,d) \in S} \mu(d)\, f(c).$$

Zadnja suma ide po skupu parova prirodnih brojeva

$$S = \left\{(c, d) : d \mid m,\ c \mid \tfrac{m}{d}\right\} = \{(c, d) : d \mid m,\ cd \mid m\} = \left\{(c, d) : c \mid m,\ d \mid \tfrac{m}{c}\right\}.$$

Možemo je zapisati kao

$$\sum_{(c,d) \in S} \mu(d)\, f(c) = \sum_{c\,|\,m} \sum_{d\,|\,\frac{m}{c}} \mu(d)\, f(c) = \sum_{c\,|\,m} f(c) \left(\sum_{d\,|\,\frac{m}{c}} \mu(d) \right).$$

Suma u zagradi je po teoremu 7.5 jednaka 1 za $\frac{m}{c} = 1$, tj. $c = m$, a 0 inače. Zato je rezultat $f(m)$. Druga implikacija $(b) \Rightarrow (a)$ dokazuje se slično, vidi [10, teorem 5.1]. □

Möbiusovu inverziju možemo primijeniti na sljedeće funkcije:

$$\tau(m) = \sum_{d\,|\,m} 1 = \text{ broj djelitelja od } m, \tag{7.4}$$

$$\sigma(m) = \sum_{d\,|\,m} d = \text{ suma djelitelja od } m, \tag{7.5}$$

$$\sigma_2(m) = \sum_{d\,|\,m} d^2 = \text{ suma kvadrata djelitelja od } m. \tag{7.6}$$

Iz teorema 7.6 slijedi

$$\sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, \tau(\frac{m}{d}) = 1, \quad \sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, \sigma(\frac{m}{d}) = m, \quad \sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, \sigma_2(\frac{m}{d}) = m^2.$$

Sjetimo se da je Eulerova funkcija $\varphi(m)$ jednaka broju elemenata iz $\{1, \ldots, m\}$ relativno prostih s m.

Teorem 7.7. *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi* $\sum_{d\,|\,m} \varphi(d) = m$.

Dokaz. Dokaz ćemo ilustrirati na primjeru $m = 12$, ali argumentacija vrijedi općenito. Razlomaka s nazivnikom m i brojnicima iz $\{1, \ldots, m\}$ ima točno m:

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}, \frac{12}{12}.$$

Skratimo razlomke

$$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{1}{1}$$

i grupiramo ih po nazivniku:

$$\frac{1}{1};\quad \frac{1}{2};\quad \frac{1}{3}, \frac{2}{3};\quad \frac{1}{4}, \frac{3}{4};\quad \frac{1}{6}, \frac{5}{6};\quad \frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}.$$

Uočimo da se u nazivnicima skraćenih razlomaka javljaju svi djelitelji od m. Djelitelj d javlja se s brojnicima koji su relativno prosti s d, dakle $\varphi(d)$ puta. Prema tome, suma $\sum_{d\,|\,m} \varphi(d)$ jednaka je broju razlomaka m. Drugi dokaz dan je u [10, teorem 2.12]. □

Möbiusovom inverzijom formule iz teorema 7.7 dobivamo

$$\varphi(m) = \sum_{d\,|\,m} \mu(d)\, \frac{m}{d} = m \cdot \sum_{d\,|\,m} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Kao u dokazu teorema 7.5, dovoljno je sumirati po djeliteljima od m koji su produkti različitih prostih faktora od m. Za $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ slijedi

$$\varphi(m) = m \cdot \sum_{I \subseteq N} \frac{(-1)^{|I|}}{\prod_{i \in I} p_i} = m \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Ovu formulu za Eulerovu funkciju dokazali smo u teoremu 6.4 s pomoću formule uključivanja-isključivanja. Naslućujemo da su generalizacije FUI u obliku principa inverzije (teoremi 7.2 i 7.3) te klasična Möbiusova inverzija (teorem 7.6) specijalni slučajevi istog općeg principa inverzije. Objasnit ćemo ga u sljedećoj cjelini i tada ćemo završiti dokaz formule (6.1) generalizacijom.

7.3 Incidencijska algebra parcijalno uređenog skupa

Parcijalno uređen skup $(X, \leq)$ sastoji se od nepraznog skupa X i binarne relacije $\leq$ na X koja je refleksivna ($x \leq x$, $\forall x \in X$), antisimetrična ($x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$) i tranzitivna ($x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$). Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ i njegovi podskupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ sa standardnom relacijom "manje ili jednako" čine parcijalno uređene skupove. Štoviše, ta relacija ima dodatno svojstvo da su svaka dva elementa usporediva: za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$. U tom slučaju govorimo o *totalno* ili *linearno* uređenom skupu.

Primjer parcijalno uređenog skupa koji nije totalno uređen je partitivni skup 2^S uz relaciju inkluzije $\subseteq$. Ako skup S sadrži bar dva elementa $x, y \in S$, $x \neq y$, podskupovi $\{x\}, \{y\} \in 2^S$ nisu usporedivi obzirom na relaciju inkluzije, tj. ne vrijedi $\{x\} \subseteq \{y\}$ niti $\{y\} \subseteq \{x\}$. Drugi primjer je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ s relacijom djeljivosti $|$. Prirodni brojevi 2 i 3 nisu usporedivi obzirom na djeljivost. Parcijalno uređen skup $(2^S, \subseteq)$ nazivamo *Booleovom*[1] *rešetkom.* Definicija rešetke dana je u zadatku 7.11.

Primjer 7.8. *Neka je X konačan skup od n elemenata. Koliko ima totalnih uređaja na skupu X? Koliko ima parcijalnih uređaja na skupu X?*

Rješenje. Totalni uređaj na X možemo identificirati s permutacijom skupa X, tj. uređenom n-torkom ražličitih elemenata iz X. Na prvo mjesto stavimo najmanji element obzirom na uređaj, zatim sljedeći po "veličini" itd. Zato totalnih uređaja ima $n!$. Prebrojavanje parcijalnih uređaja je težak problem. Nije poznata formula, rekurzija, niti funkcija izvodnica za broj parcijalnih uređaja na n-članom skupu. Poznate su vrijednosti do $n = 18$, navedene u *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [37] kao niz A001035. $\square$

Idući teorem pokazuje da svaki parcijalni uređaj možemo proširiti do totalnog uređaja.

Teorem 7.9. *Za svaki parcijalni uređaj $\leq$ na skupu X postoji totalni uređaj $\leq^*$ na X takav da je $\leq$ podskup od $\leq^*$.*

Dokaz. Teorem vrijedi za svaki skup X, ali dokazujemo ga samo u slučaju kad je X konačan. Ako $\leq$ nije totalni uređaj, postoje neusporedivi elementi $a, b \in X$. Proširit ćemo $\leq$ do parcijalnog uređaja $\leq'$ tako da vrijedi $a \leq' b$. Da bismo sačuvali tranzitivnost, svi elementi iz skupa $\downarrow a = \{x \in X \mid x \leq a\}$ moraju biti u relaciji $\leq'$ s elementima iz skupa $\uparrow b = \{x \in X \mid b \leq x\}$. Proširimo $\leq$ tako da dodamo parove iz Kartezijeva produkta ta dva skupa:

$$\leq' \;=\; \leq \cup \, (\downarrow a \times \uparrow b).$$

Nova relacija $\leq'$ je refleksivna jer proširuje staru relaciju $\leq$. Za dokaz antisimetričnosti pretpostavimo da je $x \leq' y$ i $y \leq' x$. To znači da je $x \leq y$ ili $(x, y) \in \downarrow a \times \uparrow b$, te $y \leq x$ ili $(y, x) \in \downarrow a \times \uparrow b$ (četiri mogućnosti). Tri mogućnosti vode u kontradikciju s neusporedivosti od a i b. Preostaje mogućnost $x \leq y$ i $y \leq x$, iz čega zbog antisimetričnosti od $\leq$ slijedi $x = y$. Slično se provjeri tranzitivnost od $\leq'$. Dakle, $\leq'$ je parcijalni uređaj koji proširuje $\leq$ i u kojem su a i b usporedivi. Nakon konačno mnogo takvih proširenja dolazimo do totalnog uređaja $\leq^*$. $\square$

Primijetimo da proširenje $\leq^*$ nije jedinstveno. U svakom koraku iz dokaza teorema 7.9 možemo birati hoćemo li staviti $a \leq' b$ ili $b \leq' a$. Teorem kaže da elemente n-članog parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$ možemo numerirati $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tako da vrijedi $x_i \leq x_j \Rightarrow i \leq j$. Proširenje $\leq^*$ pritom identificiramo s prirodnim totalnim uređajem na skupu indeksa $N = \{1, \ldots, n\}$. U računarstvu se takvo numeriranje naziva *topološkim sortiranjem*, a parcijalni uređaj $\leq$ obično se promatra kao aciklički usmjereni graf sa skupom vrhova X (vidi [44] i [25, str. 261-268]).

[1] George Boole (1815.-1864.), engleski matematičar, logičar i filozof.

Princip inverzije iskazan teoremima 7.2 i 7.3 odnosi se na realne funkcije kojima je domena Booleova rešetka 2^N, a klasična Möbiusova inverzija na realne funkcije kojima je domena skup prirodnih brojeva s djeljivosti kao parcijalnim uređajem. Opću teoriju Möbiusove inverzije na lokalno konačnom parcijalno uređenom skupu razvio je talijansko-američki matematičar i filozof Gian-Carlo Rota (1932.-1999.) u radu [35]. To je prvi u nizu Rotinih radova kojima je cilj bio razviti kombinatoriku kao modernu matematičku teoriju i dovesti je u "matematički mainstream". Za noviji pogled na položaj kombinatorike u matematici pročitajte esej [18] Tima Gowersa, dobitnika Fieldsove medalje.

Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup i $x, y \in X$ njegovi elementi. *Segment* je skup oblika $[x, y] = \{z \in X \mid x \leq z \text{ i } z \leq y\}$. Ako ne vrijedi $x \leq y$, što zapisujemo $x \not\leq y$, onda je $[x, y] = \emptyset$. Ako vrijedi $x \leq y$, segment $[x, y]$ sadrži barem elemente x i y. Za parcijalno uređen skup kažemo da je *lokalno konačan* ako su svi segmenti konačni. Na primjer, $(\mathbb{N}, |)$ je lokalno konačan jer $[x, y]$ sadrži samo djelitelje prirodnog broja y, a njih ima konačno mnogo. Naravno, svaki konačan parcijalno uređen skup je ujedno lokalno konačan. U nastavku je $(X, \leq)$ uvijek lokalno konačan parcijalno uređen skup. Pridružit ćemo mu takozvanu *incidencijsku algebru*.

Algebra je vektorski prostor V nad nekim poljem snabdjeven dodatnom operacijom množenja vektora $\cdot : V \times V \to V$ koja je bilinearna, tj. zadovoljava $(\alpha x_1 + \beta x_2) \cdot y = \alpha(x_1 \cdot y) + \beta(x_2 \cdot y)$ i $x \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x \cdot y_1) + \beta(x \cdot y_2)$. Primjer algebre je vektorski prostor kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{R})$ uz operaciju množenja matrica. Matrica $A = [a_{ij}]$ je funkcija $a : N \times N \to \mathbb{R}$, gdje je $N = \{1, \ldots, n\}$ skup indeksa. Ova algebra je asocijativna i ima jedinicu, tj. neutralni element za množenje (jediničnu matricu I).

Jednu važnu podalgebru algebre matrica čine gornjetrokutaste matrice $T_n(\mathbb{R})$. To je potprostor vektorskog prostora $M_n(\mathbb{R})$, a uz to je zatvoren obzirom na množenje matrica (zadatak 7.13). Gornjetrokutaste matrice su one koje ispod glavne dijagonale imaju nule. Uz prirodni uređaj na skupu indeksa N, to su funkcije $a : N \times N \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi $a(i, j) = 0$ ako je $i > j$, tj. $i \not\leq j$. Determinanta gornjetrokutaste matrice $A = [a_{ij}] \in T_n(\mathbb{R})$ je produkt elemenata na dijagonali: $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$. Stoga, A je regularna (invertibilna) ako i samo ako su svi elementi na dijagonali različiti od 0.

Definicija 7.10. *Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup. Incidencijska algebra $I(P)$ je skup svih funkcija $f : X \times X \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi $f(x, y) = 0$ ako je $x \not\leq y$. Umnožak skalarom αf i zbroj $f + g$ funkcija $f, g \in I(P)$ definiramo po točkama, a* produkt *ili* konvoluciju *formulom*

$$(f \cdot g)(x, y) = \sum_{z \in [x,y]} f(x, z)\, g(z, y). \tag{7.7}$$

Zbog pretpostavke o lokalnoj konačnosti, suma iz forumule (7.7) je konačna. Nije teško provjeriti da je skup $I(P)$ zatvoren obzirom na definirane operacije (zadatak 7.15). Umjesto provjere svih aksioma algebre, uložit ćemo $I(P)$ u algebru gornjetrokutastih matrica. Tako posredno dokazujemo da je $I(P)$ asocijativna algebra s jedinicom.

Teorem 7.11. *Ako je $P = (X, \leq)$ konačan parcijalno uređen skup od n elemenata, incidencijska algebra $I(P)$ je izomorfna podalgebri od $T_n(\mathbb{R})$. Funkcija $f \in I(P)$ je invertibilna ako i samo ako je $f(x, x) \neq 0$, $\forall x \in X$.*

Dokaz. Po teoremu 7.9 možemo numerirati elemente $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ tako da vrijedi $x_i \leq x_j \Rightarrow i \leq j$. Funkciji $f \in I(P)$ pridružimo matricu $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = f(x_i, x_j)$. Matrica je gornjetrokutasta, a pridruživanje $f \mapsto A$ je injektivni linearni operator (monomorfizam vektorskih prostora $I(P)$ i $T_n(\mathbb{R})$). Ako pridružuje $f \mapsto A$ i $g \mapsto B$, vrijedi

$$(f \cdot g)(x_i, x_j) = \sum_{x_k \in [x_i, x_j]} f(x_i, x_k)\, g(x_k, x_j) = \sum_{x_k \in [x_i, x_j]} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{i \leq k \leq j} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

U predzadnjem koraku sumirali smo po svim indeksima k koji zadovoljavaju $i \leq k \leq j$, a ne samo po indeksima koji zadovoljavaju $x_k \in [x_j, x_j]$. Suma se pritom ne mijenja jer za $x_i \not\leq x_k$ je $a_{ik} = 0$, a za $x_k \not\leq x_j$ je $b_{kj} = 0$. Slično, u zadnjem koraku sumu smijemo proširiti na sve indekse od 1 do n jer je $a_{ik} = 0$ za $k < i$ i $b_{kj} = 0$ za $k > j$. Zadnja suma je upravo unos na mjestu (i, j) produkta matrica $A \cdot B$. Dakle, vrijedi $f \cdot g \mapsto A \cdot B$, tj. pridruživanje čuva množenje. Riječ je o monomorfizmu algebri, a njegova slika je podalgebra od $T_n(\mathbb{R})$ izomorfna incidencijskoj algebri $I(P)$.

Još trebamo provjeriti kriterij za invertibilnost funkcije $f \in I(P)$ i zatvorenost $I(P)$ na invertiranje. Neutralni element za množenje u $I(P)$ je Kroneckerova delta funkcija:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za sve $f \in I(P)$ vrijedi $(f \cdot \delta)(x, y) = \sum\limits_{z \in [x,y]} f(x, z)\, \delta(z, y) = f(x, y)$. Analogno vidimo da je $\delta \cdot f = f$.

Ako je funkcija $f \in I(P)$ invertibilna, tj. postoji funkcija $g \in I(P)$ takva da je $f \cdot g = g \cdot f = \delta$, onda za svaki $x \in X$ vrijedi $1 = \delta(x, x) = (f \cdot g)(x, x) = f(x, x)g(x, x)$. Iz toga vidimo da je $f(x, x) \neq 0$. Obrnuto, neka $f \in I(P)$ zadovoljava $f(x, x) \neq 0$, $\forall x \in X$. Definiramo $g(x, y)$ induktivno po kardinalitetu segmenta $[x, y]$:

- ako je $|\,[x, y]\,| = 0$, tj. $[x, y] = \emptyset$, onda je $x \not\leq y$ i stavljamo $g(x, y) = 0$,
- ako je $|\,[x, y]\,| = 1$, onda je $x = y$ i stavljamo $g(x, x) = \dfrac{1}{f(x, x)}$,
- ako je $|\,[x, y]\,| > 1$, definiramo $g(x, y) = \dfrac{-1}{f(x, x)} \sum\limits_{z \in \langle x, y]} f(x, z)g(z, y)$.

U zadnjem koraku je $\langle x, y] = \{z \in X \mid x < z \text{ i } z \leq y\}$, a pritom $x < z$ znači $x \leq z$ i $x \neq z$. Za svaki $z \in \langle x, y]$, kardinalitet segmenta $[z, y]$ je strogo manji od kardinaliteta segmenta $[x, y]$, pa su vrijednosti $g(z, y)$ definirane ranije. Iz definicije od g jasno je da vrijedi $g \in I(P)$ i $f(x, x)g(x, x) = 1 = \delta(x, x)$, $\forall x \in X$. Za $x, y \in X$, $x \neq y$, iz zadnjeg koraka induktivne definicije slijedi

$$0 = f(x, x)g(x, y) + \sum_{z \in \langle x, y]} f(x, z)g(z, y) = \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)g(z, y) = (f \cdot g)(x, y).$$

Dakle, vrijedi $f \cdot g = \delta$, a može se provjeriti i $g \cdot f = \delta$. Time smo dokazali da je f invertibilna i $f^{-1} = g \in I(P)$. Ujedno smo dobili rekurzivni algoritam za računanje inverza u incidencijskoj algebri. $\square$

Važna funkcija u incidencijskoj algebri $I(P)$ je takozvana *zeta funkcija*:

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \le y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

To je karakteristična funkcija parcijalnog uređaja $\le$. Po prethodnom teoremu, zeta funkcija je invertibilna.

Definicija 7.12. Möbiusova funkcija *parcijalno uređenog skupa P je inverz zeta funkcije:*

$$\mu = \zeta^{-1} \in I(P).$$

Propozicija 7.13. *Möbiusova funkcija poprima cjelobrojne vrijednosti.*

Dokaz. Zeta funkcija ζ poprima vrijednosti 0 i 1. U teoremu 7.11 vidjeli smo da vrijednosti inverza $\mu = \zeta^{-1}$ dobivamo zbrajanjem, oduzimanjem i množenjem vrijednosti od ζ i prethodnih vrijednosti od μ te dijeljenjem sa $\zeta(x,x) = 1$. Zato je $\mu(x,y) \in \mathbb{Z}$ za sve $x, y \in X$. □

U zadatku 7.17 dokazujemo da Möbiusova funkcija može poprimiti bilo koju cjelobrojnu vrijednost. Idući teorem je najavljena generalizacija teorema 7.3 i teorema 7.6.

Teorem 7.14. *Za svake dvije funkcije $f, g \in I(P)$ ekvivalentno je*

(a) $\displaystyle g(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} f(x,z), \ \ \forall x, y \in X,$

(b) $\displaystyle f(x,y) = \sum_{z\in[x,y]} g(x,z)\mu(z,y), \ \ \forall x, y \in X.$

Dokaz. Tvrdnja (a) je $g = f \cdot \zeta$, a tvrdnja (b) je $f = g \cdot \mu$. Ekvivalencija slijedi množenjem zdesna sa μ, odnosno ζ. □

U ovoj općenitosti Möbiusova inverzija je trivijalna posljedica definicije množenja u incidencijskoj algebri (7.7) i definicije 7.12. Za konkretne parcijalno uređene skupove, netrivijalni "tehnički" dio posla je odrediti Möbiusovu funkciju. Promotrimo prvo jedan jednostavni primjer, skup $N = \{1, \ldots, n\}$ s prirodnim totalnim uređajem. U tom slučaju incidencijska algebra je skup svih gornjetrokutastih matrica $T_n(\mathbb{R})$. Zeta funkcija odgovara matrici

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

koja ima jedinice na svim mjestima iznad i na dijagonali. Möbiusova funkcija odgovara matrici

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

koja na dijagonali ima jedinice, neposredno iznad dijagonale minus jedinice, a ostali unosi su nule. Lako se provjeri $Z \cdot M = M \cdot Z = I$, iz čega slijedi $M = Z^{-1}$ i

$$\mu(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{za } i = j, \\ -1, & \text{za } j = i+1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{7.8}$$

Möbiusova inverzija u totalno uređenom skupu N glasi

$$g(i,j) = \sum_{k=i}^{j} f(i,k) \iff f(i,j) = \sum_{k=i}^{j} g(i,k)\mu(k,j) = g(i,j) - g(i,j-1).$$

Uvrštavanjem $i = 1$ i prijelazom na funkcije jedne varijable j dobivamo

$$g(j) = \sum_{k=1}^{j} f(k) \iff f(j) = g(j) - g(j-1) = \nabla g(j).$$

Ovo je diskretna Newton-Leibnizova formula, tj. teorem 2.4 u nešto drugačijim obliku. Množenje sa ζ odgovara sumiranju ("diskretnom integriranju"), a množenje s μ odgovara diferenciranju (djelovanju s "backward difference" operatorom ∇).

Formulu (7.8) možemo generalizirati na bilo koji lokalno konačni totalno uređeni skup:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{za } x = y, \\ -1, & \text{za } x \lessdot y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Oznaku $x \lessdot y$ čitamo "y *natkriva* x" ili "x je *natkriven* s y". Znači da vrijedi $x < y$ (tj. $x \le y$ i $x \ne y$) te ne postoji $z \in X$ takav da je $x < z < y$.

Da bismo izveli formulu za Möbiusovu funkciju Booleove rešetke $(2^S, \subseteq)$, treba nam pojam direktnog produkta parcijalno uređenih skupova.

Definicija 7.15. *Neka su $P_1 = (X_1, \le_1)$ i $P_2 = (X_2, \le_2)$ parcijalno uređeni skupovi.* Direktni produkt *$P_1 \times P_2$ sastoji se od Kartezijeva produkta $X = X_1 \times X_2$ i relacije $\le$ na X definirane s $(x_1, x_2) \le (y_1, y_2) \iff x_1 \le_1 y_1$ i $x_2 \le_2 y_2$.*

Analogno definiramo direktni produkt n parcijalno uređenih skupova $P_1 \times \cdots \times P_n$. Naravno, direktni produkt je parcijalno uređeni skup (zadatak 7.20). Booleovu rešetku $(2^S, \subseteq)$ n-članog skupa S možemo identificirati s direktnim produktom $\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$ od n dvočlanih totalno uređenih skupova s prirodnim uređajem. Izomorfizam je bijekcija iz primjera 1.3 između podskupova od S i binarnih nizova.

Teorem 7.16. *Ako parcijalno uređeni skupovi P_1 i P_2 imaju Möbiusove funkcije μ_1 i μ_2, onda je Möbiusova funkcija direktnog produkta $P_1 \times P_2$ dana s*

$$\mu\left((x_1,x_2),\, (y_1,y_2) \right) = \mu_1(x_1,y_1) \cdot \mu_2(x_2,y_2). \tag{7.9}$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati da funkcija μ definirana formulom (7.9) zadovoljava $\zeta \cdot \mu = \delta$, gdje su ζ i δ odgovarajuće funkcije produkta $P_1 \times P_2$. Vrijedi

$$(\zeta \cdot \mu)\left(\,(x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\,\right) = \sum_{(z_1,z_2)\in[(x_1,x_2),\,(y_1,y_2)]} \mu_1(z_1,y_1)\cdot\mu_2(z_2,y_2) =$$

$$= \sum_{z_1\in[x_1,y_1]}\sum_{z_2\in[x_2,y_2]} \mu_1(z_1,y_1)\cdot\mu_2(z_2,y_2) = \left(\sum_{z_1\in[x_1,y_1]}\mu_1(z_1,y_1)\right)\cdot\left(\sum_{z_2\in[x_2,y_2]}\mu_2(z_2,y_2)\right)$$

$$= (\zeta_1\cdot\mu_1)(x_1,y_1)\cdot(\zeta_2\cdot\mu_2)(x_2,y_2) = \delta_1(x_1,y_1)\cdot\delta_2(x_2,y_2) = \delta\left(\,(x_1,x_2),\,(y_1,y_2)\,\right).$$

□

Analogna formula vrijedi za Möbiusovu funkciju produkta n parcijalno uređenih skupova.

Teorem 7.17. *Möbiusova funkcija konačne Booleove rešetke* $(2^S,\subseteq)$ *dana je s*

$$\mu(X,Y) = \begin{cases} (-1)^{|Y\setminus X|}, & \textit{ako je } X\subseteq Y,\\ 0, & \textit{inače.}\end{cases}$$

Dokaz. Označimo elemente skupa $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$. Podskup $X\subseteq S$ identificiramo s binarnim nizom $(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ kao u primjeru 1.3:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je } a_i\in X,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

Vrijednosti Möbiusovih funkcija svakog faktora $\{0,1\}$ su $\mu_i(0,0)=1$, $\mu_i(0,1)=-1$, $\mu_i(1,0)=0$ i $\mu_i(1,1)=1$. Po teoremu 7.16, Möbiusovu funkciju direktnog produkta računamo kao produkt Möbiusovih funkcija faktora

$$\mu\left(\,(x_1,\ldots,x_n),\,(y_1,\ldots,y_n)\,\right) = \mu_1(x_1,y_1)\cdots\mu_n(x_n,y_n).$$

Produkt je 0 ako je bar jedan od faktora 0, tj. ako postoji i takav da je $x_i=1$ i $y_i=0$. To znači da postoji element a_i koji pripada podskupu X i ne pripada Y, tj. ne vrijedi $X\subseteq Y$. Ako vrijedi $X\subseteq Y$, svi faktori su 1 ili -1, a rezultat ovisi o parnosti broja faktora -1. Faktor -1 znači da je $x_i=0$ i $y_i=1$, tj. element a_i pripada skupovnoj razlici $Y\setminus X$. Zato je rezultat u ovom slučaju $(-1)^{|Y\setminus X|}$. □

Sada možemo specijalizirati teorem 7.14 na Booleovu rešetku:

$$g(X,Y) = \sum_{X\subseteq Z\subseteq Y} f(X,Z) \iff f(X,Y) = \sum_{X\subseteq Z\subseteq Y} (-1)^{|Y\setminus Z|} g(X,Z).$$

Uvrštavanjem $X=\emptyset$ i prijelazom na funkcije jedne varijable Y dobivamo

$$g(Y) = \sum_{Z\subseteq Y} f(Z) \iff f(Y) = \sum_{Z\subseteq Y} (-1)^{|Y\setminus Z|} g(Z).$$

Ovo je upravo teorem 7.3. Time smo završili dokaz formule uključivanja-isključivanja generalizacijom: teoremi 7.14 i 7.17 $\Rightarrow$ teorem 7.3 $\Leftrightarrow$ teorem 7.2 $\Rightarrow$ teorem 7.1 $\Rightarrow$ formula (6.1). Klasična Möbiusova inverzija također je specijalni slučaj teorema 7.14.

Teorem 7.18. *Möbiusova funkcija parcijalno uređenog skupa* $(\mathbb{N}, |)$ *dana je s*

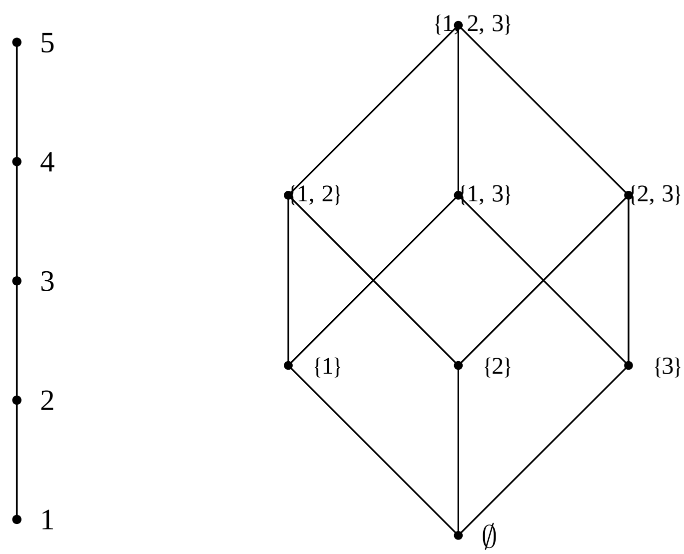
$$\mu(x,y) = \begin{cases} \mu\left(\frac{y}{x}\right), & \text{ako } x \mid y, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pritom je $\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ *klasična Möbiusova funkcija definirana formulom* (7.3).

Iz teorema 7.14 i teorema 7.18 dobijemo tvrdnju ekvivalentnu teoremu 7.6.

7.4 Hasseovi dijagrami i Möbiusova funkcija

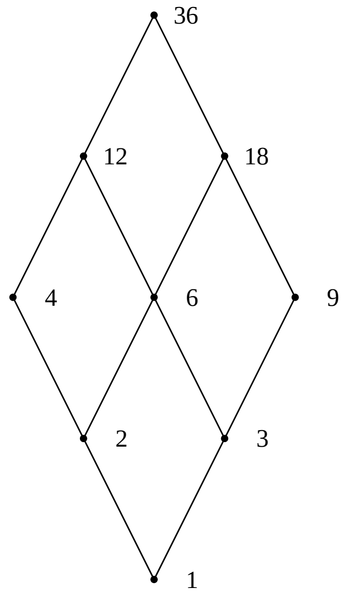
Hasseov[2] dijagram je način prikaza konačnog parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$. Riječ je o usmjerenom grafu sa skupom vrhova X i lukovima (usmjerenim bridovima) (x, y) uvijek kada vrijedi $x \lessdot y$ (y natkriva x). Hasseov dijagram obično prikazujemo tako da su "manji" vrhovi ispod "većih", tj. lukovi su usmjereni odozdo prema gore. Na primjer, Hasseov dijagram skupa $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ s prirodnim totalnim uređajem prikazan je na slici 7.2 lijevo. Hasseov dijagram Booleove rešetke $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ prikazan je na slici 7.2 desno.



Slika 7.2: Hasseovi dijagrami od $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$ i $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$.

Parcijalno uređeni skup $(\mathbb{N}, |)$ nije konačan. Uzmimo bilo koji $m \in \mathbb{N}$ i promotrimo skup $D(m)$ svih djelitelja od m s relacijom djeljivosti. To je segment $[1, m]$ u $(\mathbb{N}, |)$ i sam je konačni parcijalno uređeni skup. Hasseov dijagram od $D(36)$ prikazan je na slici 7.3. Ako je $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ rastav na proste faktore, pokazuje se da vrijedi $D(m) = D(p_1^{e_1}) \times \ldots \times D(p_n^{e_n})$. Faktori $D(p_i^{e_i})$ izomorfni su skupu $\{0, 1, \ldots, e_i\}$ s prirodnim totalnim uređajem. To objašnjava zašto je $\mu(x, y) = 0$ ako je $\frac{y}{x}$ djeljiv kvadratom prostog broja p_i. U odgovarajućem faktoru $D(p_i^{e_i})$ "pomaknuli" smo se naviše za dva ili više mjesta. Vidjeli

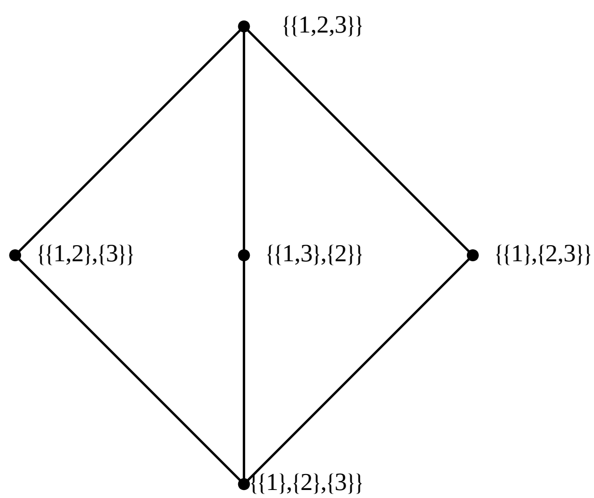
[2] Helmut Hasse (1898.-1979.), njemački matematičar.



Slika 7.3: Hasseov dijagram od $D(36)$.

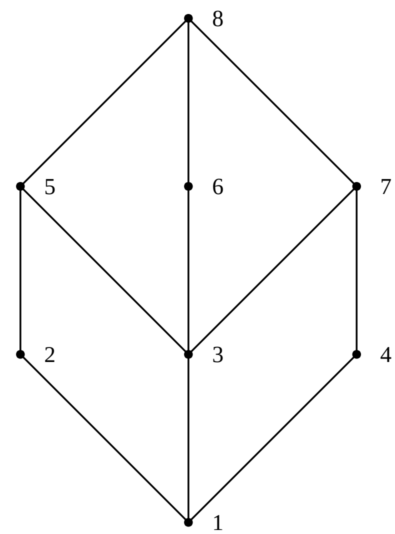
smo da u totalno uređenom skupu vrijedi $\mu(x,y) = \pm 1$ samo ako je $x = y$ ili $x \lessdot y$, a inače je 0.

Još jedan konačan parcijalno uređen skup čine sve particije skupa $\{1, \ldots, n\}$. Uređaj je pritom relacija *profinjenja*. Za particiju $\mathcal{A}$ kažemo da profinjuje particiju $\mathcal{B}$ i pišemo $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ ako za svaki blok $A \in \mathcal{A}$ postoji blok $B \in \mathcal{B}$ takav da je $A \subseteq B$. Ovaj parcijalno uređen skup označavamo Π_n. Hasseov dijagram od Π_3 prikazan je na slici 7.4.



Slika 7.4: Hasseov dijagram od Π_3.

Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i neka je parcijalni uređaj $\leq$ zadan Hasseovim dijagramom na slici 7.5. Parovi u $\leq$ su tada tranzitivno proširenje parova koje vidimo na slici kao lukove. Na primjer, vrijedi $1 \leq 5$ i $1 \leq 8$ iako na slici nema izravnih lukova $(1, 5)$ i $(1, 8)$.



Slika 7.5: Hasseov dijagram kojim je zadan uređaj na $\{1, \ldots, 8\}$.

Recimo da želimo izračunati vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(3, 8)$ ovog parcijalno uređenog skupa. Matrica koja odgovara zeta funkciji je

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Möbiusovoj funkciji odgovara inverz te matrice:

$$M = Z^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako elemente te matrice označimo $M = [m_{ij}]$, onda je $\mu(3, 8) = m_{38} = 2$.

Sad ćemo upoznati efikasniji način izračunavanja Möbiusove funkcije. *Lanac* u parcijalno uređenom skupu $P = (X, \leq)$ je podskup $L \subseteq X$ takav da su svaka dva elementa iz L

usporediva. Drugim riječima, lanac je podskup parcijalno uređenog skupa koji je totalno uređen. *Duljinu* lanca L definiramo kao $|L|-1$, a *predznak* lanca kao $\operatorname{sgn}(L) = (-1)^{|L|-1}$. Za elemente $x, y \in X$, označimo sa $S_{x,y}$ skup svih lanaca u P kojima je x najmanji element, a y najveći element. Svaki takav lanac je podskup segmenta $[x, y]$, pa je u lokalno konačnom slučaju skup $S_{x,y}$ konačan.

Teorem 7.19 (P. Hall, 1936.)**.** *Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup. Tada za sve $x, y \in X$ vrijedi*

$$\mu(x,y) = \sum_{L \in S_{x,y}} \operatorname{sgn}(L). \tag{7.10}$$

Dokaz. Označimo s $\mu'(x, y)$ sumu na desnoj strani formule (7.10). Da bismo dokazali $\mu = \mu'$, dovoljno je provjeriti $\zeta \cdot \mu' = \delta$. Trebamo provjeriti da za sve $x, y \in X$ vrijedi $\sum\limits_{z \in [x,y]} \mu'(z, y) = \delta(x, y)$. Raspišimo sumu na lijevoj strani:

$$\sum_{z \in [x,y]} \mu'(z,y) = \sum_{z \in [x,y]} \sum_{L \in S_{z,y}} \operatorname{sgn}(L) = \sum_{L \in S^+_{x,y}} \operatorname{sgn}(L).$$

Sa $S^+_{x,y}$ smo označili skup svih lanaca od z do y za neki $z \in [x, y]$. Ako je $x = y$, skup $S^+_{x,y}$ sadrži jedinstveni lanac $\{x\}$ duljine 0 i suma je jednaka 1. Ako je $x \neq y$, imamo dvije mogućnosti: $x \not\leq y$ ili $x < y$. U prvom slučaju $[x, y]$ je prazan skup i ne postoji niti jedan lanac u $S^+_{x,y}$. Suma je tada jednaka 0. U slučaju $x < y$ podijelimo skup $S^+_{x,y}$ na dva disjunktna podskupa: $S^0_{x,y}$ je skup svih lanaca iz $S^+_{x,y}$ koji ne sadrže x, a $S^1_{x,y}$ je skup svih lanaca iz $S^+_{x,y}$ koji sadrže x. Dodavanjem, odnosno brisanjem elementa x iz lanca uspostavljamo bijekciju između ta dva skupa:

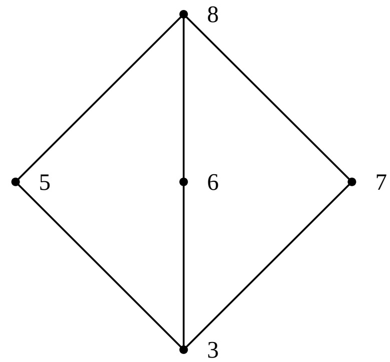
$$S^0_{x,y} \ \ni \ L \quad \longleftrightarrow \quad L \cup \{x\} \ \in \ S^1_{x,y}.$$

Pridruženi lanci su pritom suprotnih predznaka, pa će se u sumi pokratiti:

$$\sum_{L \in S^+_{x,y}} \operatorname{sgn}(L) = \cancel{\sum_{L \in S^0_{x,y}} \operatorname{sgn}(L)} + \cancel{\sum_{L \in S^1_{x,y}} \operatorname{sgn}(L)} = 0.$$

Dakle, suma je jednaka 0 uvijek kad je $x \neq y$. Time smo dokazali da je $\mu = \mu'$. $\square$

Promotrimo nekoliko jednostavnih posljedica ovog teorema. Ako je $x \not\leq y$, skup $S_{x,y}$ je prazan i vrijedi $\mu(x, y) = 0$. Ako je $x \lessdot y$, skup $S_{x,y}$ sadrži jedinstveni lanac $\{x, y\}$ duljine 1 i predznaka -1, pa vrijedi $\mu(x, y) = -1$. Općenito, skup $S_{x,y}$ ovisi samo o segmentu $[x, y]$, a ne o ostatku parcijalno uređenog skupa P. Na primjer, za parcijalno uređen skup zadan slikom 7.5, kod izračunavanja vrijednosti $\mu(3, 8)$ možemo se ograničiti samo na dio prikazan na slici 7.6. Taj dio sadrži jedan lanac $\{3, 8\}$ duljine 1 i predznaka -1 i tri lanca $\{3, 5, 8\}$, $\{3, 6, 8\}$, $\{3, 7, 8\}$ duljine 2 i predznaka 1. Po teoremu 7.19 vrijedi $\mu(3, 8) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$.



Slika 7.6: Segment $[3, 8]$ u parcijalno uređenom skupu sa slike 7.5.

Zadaci

Zadatak 7.1. *Neka je* $N = \{1, 2, 3\}$. *Funkcija* $f : 2^N \to \mathbb{R}$ *zadana je s* $f(\emptyset) = f(\{1\}) = f(\{2\}) = 1$, $f(\{3\}) = f(\{1, 2\}) = 2$, $f(\{1, 3\}) = f(\{2, 3\}) = 3$ *i* $f(\{1, 2, 3\}) = 4$. *Ispišite sve vrijednosti funkcije* $g : 2^N \to \mathbb{R}$, $g(I) = \sum\limits_{J\subseteq I} f(J)$ *i provjerite formulu inverzije* $f(I) = \sum\limits_{J\subseteq I} (-1)^{|I\setminus J|} g(J)$ *za argumente* $I = \{1, 3\}$ *i* $I = \{1, 2, 3\}$.

Zadatak 7.2. *Kombinatorno dokažite formulu* (7.2).

Zadatak 7.3. *Kombinatorno dokažite formulu* $i! = \sum\limits_{j=0}^{i} \binom{i}{j} d_j$. *Iz nje binomnom inverzijom izvedite formulu za broj deranžmana iz teorema 6.5.*

Zadatak 7.4. *Odredite binomnu transformaciju niza Fibonaccijevih brojeva: nađite zatvorenu formulu za sumu* $\sum\limits_{j=0}^{i} \binom{i}{j} F_j$ *i napišite identitet dobiven binomnom inverzijom.*

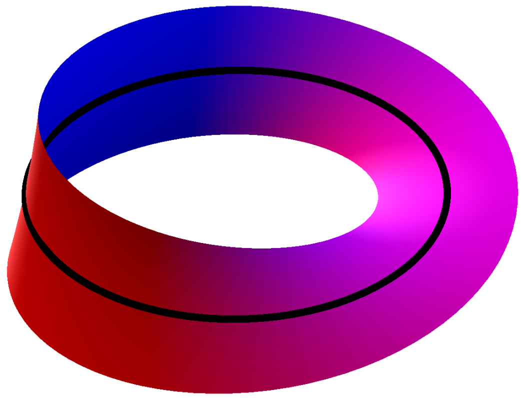
Zadatak 7.5. *Iskažite teorem 4.13 kao "Stirlingovu inverziju", analogno korolaru 7.4.*

Zadatak 7.6. *Iz korolara 7.4 izvedite sljedeći princip inverzije za* $f, g : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$*:*

$$g(i) = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j!} f(i - j) \iff f(i) = \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} g(i - j).$$

Zadatak 7.7. *Što se dogodi ako Möbiusovu traku prerežemo po sredini, duž crte označene na slici 7.7?*

Zadatak 7.8. *Ako je* $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ *rastav na proste faktore, izvedite formule za vrijednosti* $\tau(m)$ *i* $\sigma(m)$ *funkcija zadanih formulama* (7.4) *i* (7.5).



Slika 7.7: Möbiusova traka.

Zadatak 7.9. *Za funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kažemo da je* multiplikativna *ako je $f(1) = 1$ i ako za sve $m, n \in \mathbb{N}$ koji su relativno prosti, tj. najveća zajednička mjera im je $M(m, n) = 1$, vrijedi $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$. Dokažite da su Möbiusova funkcija μ i Eulerova funkcija φ multiplikativne.*

Zadatak 7.10. *Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ multiplikativna funkcija, dokažite da je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(m) = \sum\limits_{d\,|\,m} f(d)$ multiplikativna funkcija. Iz toga slijedi da su funkcije τ, σ i σ_2 zadane formulama* (7.4), (7.5) *i* (7.6) *multiplikativne.*

Zadatak 7.11. *Neka je $A \subseteq X$ podskup parcijalno uređenog skupa. Za element $g \in X$ kažemo da je* gornja međa *od A ako vrijedi $a \leq g$, $\forall a \in A$. Element $s \in X$ je* supremum *od A ako je gornja međa od A i za svaku gornju među g od A vrijedi $s \leq g$. Ako postoji, supremum je jedinstven i označavamo ga* $\sup A$. *Dualno definiramo* donju među *i* infimum *skupa A. Parcijalno uređen skup zovemo* rešetkom *ako za sve $x, y \in X$ postoje supremum $x \vee y = \sup\{x, y\}$ i infimum $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Ponekad se uz to traži postojanje najmanjeg elementa $0 \in X$, takvog da je $0 \leq x$, $\forall x \in X$ i najvećeg elementa $1 \in X$, takvog da je $x \leq 1$, $\forall x \in X$. Pokažite da su $(2^S, \subseteq)$ i $(\mathbb{N}, |)$ rešetke. Što su operacije $x \vee y$ i $x \wedge y$ u tom slučaju? Imaju li te dvije reštetke najveći i najmanji element?*

Zadatak 7.12. *Elementi Youngove rešetke $\mathcal{Y}$ su particije prirodnih brojeva. Dvije particije $A = (a_1, \ldots, a_k)$ i $B = (b_1, \ldots, b_m)$ su u relaciji $A \leq B$ ako je $k \leq m$ i vrijedi $a_i \leq b_i$, za $i = 1, \ldots, k$ (tj. ako je Ferrersov dijagram od A podskup Ferrersova dijagrama od B). Dokažite da je time zadan parcijalni uređaj na $\mathcal{Y}$. Za zvaki podskup $\{A, B\}$ Youngove rešetke dokažite da postoji infimum $A \wedge B = \inf\{A, B\}$ i supremum $A \vee B = \sup\{A, B\}$. Odredite $A \wedge B$ i $A \vee B$ za $A = (2, 2)$ i $B = (3, 1, 1)$.*

Zadatak 7.13. *Ako su $A, B \in T_n(\mathbb{R})$ gornjetorokutaste matrice, dokažite da su linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ i produkt $A \cdot B$ gornjetrokutaste matrice.*

Zadatak 7.14. *Odredite dimenziju vektorskog prostora $T_n(\mathbb{R})$.*

Zadatak 7.15. *Za funkcije $f, g \in I(P)$ iz incidencijske algebre i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dokažite da su linearna kombinacija $\alpha f + \beta g$ i produkt $f \cdot g$ također iz $I(P)$.*

Zadatak 7.16. *Ako je P konačan parcijalno uređen skup od n elemenata, odredite najmanju moguću i najveću moguću dimenziju incidencijske algebre $I(P)$. Za koje se parcijalne uređaje postižu?*

Zadatak 7.17. *Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = n$. Nadalje, postoji parcijalno uređen skup s elementima x, y takav da je $\mu(x, y) = -n$.*

Zadatak 7.18. *Odredite kombinatornu interpretaciju vrijednosti $\zeta^2(x, y)$ kvadrata zeta funkcije.*

Zadatak 7.19. *Neka je $P = (X, \leq)$ lokalno konačan parcijalno uređen skup i $I(P)$ njegova incidencijska algebra. Dokažite multiplikativnu verziju Möbiusove inverzije: za svake dvije funkcije $f, g \in I(P)$ takve da je $f(x, y) \neq 0$ i $g(x, y) \neq 0$ uvijek kad je $x \leq y$, ekvivalentno je*

(a) $\displaystyle g(x, y) = \prod_{z \in [x,y]} f(x, z)$ *za sve $x, y \in X$ za koje vrijedi $x \leq y$,*

(b) $\displaystyle f(x, y) = \prod_{z \in [x,y]} g(x, z)^{\mu(z,y)}$ *za sve $x, y \in X$ za koje vrijedi $x \leq y$.*

Zadatak 7.20. *Provjerite da je relacija $\leq$ iz definicije 7.15 refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.*

Zadatak 7.21. *Nacrtajte Hasseov dijagram Booleove rešetke $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$. Za svaki podskup $X \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ napišite vrijednost Möbiusove funkcije $\mu(\emptyset, X)$.*

Zadatak 7.22. *Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa djelitelja $D(20)$ i odredite vrijednosti odgovarajuće Möbiusove funkcije $\mu(2, 5)$, $\mu(1, 4)$, $\mu(2, 4)$ i $\mu(2, 20)$.*

Zadatak 7.23. *U parcijalno uređenom skupu particija Π_5 zadani su elementi $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ i $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ i izračunajte $\mu(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Zadatak 7.24. *Young-Fibonaccijev parcijalno uređeni skup sastoji se od konačnih nizova kojima su znamenke 1 ili 2, a neposredni sljedbenici niza S dobivaju se tako da prvu jedinicu promijenimo u dvojku ili umetnemo jedinicu na bilo koje mjesto prije prve jedinice. Ako S nema jedinica, jedinicu možemo umetnuti na bilo koje mjesto. Na primjer, jedan lanac u tom parcijalnom uređaju je $1 - 2 - 21 - 121 - 221$. Nacrtajte Hasseov dijagram segmenta $[1, 221]$ i izračunajte $\mu(1, 221)$.*

Zadatak 7.25. *Neka su $A = (1)$, $B = (2, 2)$ i $C = (3, 1, 1)$ elementi Youngove reštetke iz zadatka 7.12. Nacrtajte Hasseove dijagrame segmenata $[A, B]$ i $[A, C]$ i izračunajte $\mu(A, B)$, $\mu(A, C)$ i $\mu(B, C)$.*

Zadatak 7.26. *Definirajte izomorfizam parcijalno uređenih skupova. Jesu li segment $[1, 221]$ iz zadatka 7.24 i segmenti $[A, B]$ i $[A, C]$ iz zadatka 7.25 izomorfni parcijalno uređenom skupu $(D(n), |)$ za neki $n \in \mathbb{N}$?*

Poglavlje 8

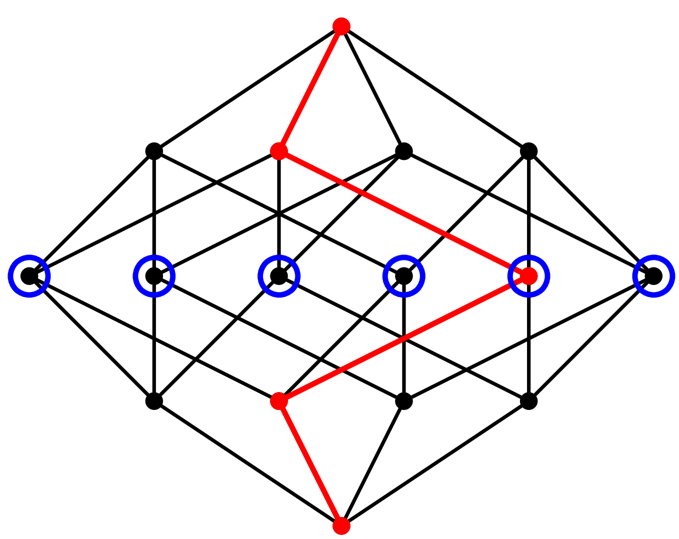
Lanci i antilanci

Strukturu parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$ možemo razumjeti tako da ga rastavimo na jednostavnije podskupove. Definirali smo *lanac* kao podskup $L \subseteq X$ u kojem su svaka dva elementa usporediva, tj. totalno uređeni podskup. Dualni pojam je *antilanac*; to je podskup $A \subseteq X$ u kojem su svaka dva elementa neusporediva. Htjeli bismo rastaviti (particionirati) X na što manji broj lanaca ili antilanaca.

Rang ili *visina* parcijalno uređenog skupa X je maksimalna duljina lanca u X, a *širina* od X je maksimalna veličina antilanca. Sjetimo se da je duljina lanca $|L| - 1$, dok za veličinu antilanca uzimamo kardinalni broj $|A|$. Na primjer, Booleova rešetka $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$ je visine 4 i širine 6. Na slici 8.1 prikazan je Hasseov dijagram i na njemu je crvenom bojom istaknut jedan lanac maksimalne duljine, a plavom bojom antilanac maksimalne veličine. Jednostavna, ali važna činjenica o lancima i antilancima je sljedeća lema.

Lema 8.1. *Ako je L lanac i A antilanac u X, onda je $|L \cap A| \leq 1$.*

Dokaz. Kad bi presjek $L \cap A$ sadržao dva elementa, ta dva elementa bila bi istovremeno



Slika 8.1: Najveći lanac i antilanac u Booleovoj rešetki $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$.

usporediva i neusporediva, što je nemoguće. □

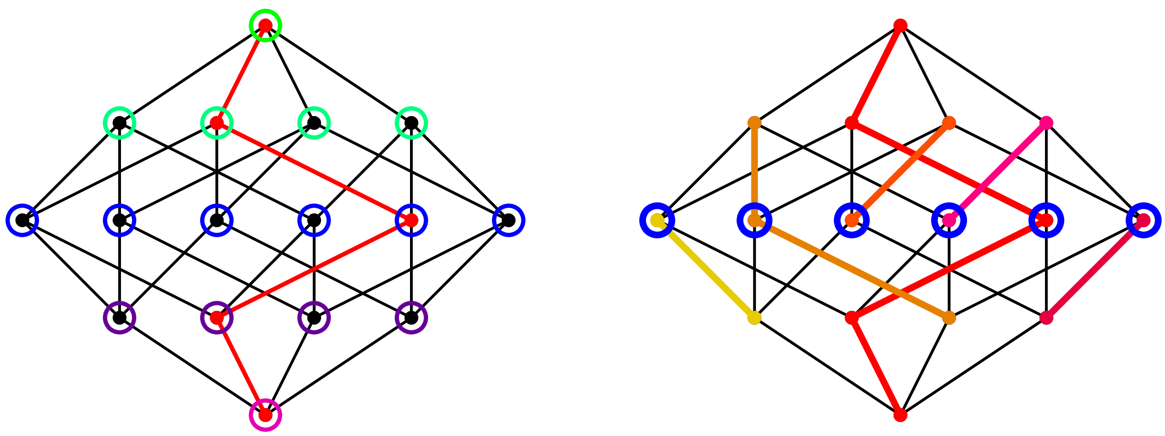
Direktna posljedica leme je sljedeća propozicija.

Propozicija 8.2.

(a) *Ako parcijalno uređen skup X sadrži lanac veličine r (duljine $r-1$), onda X ne možemo particionirati na manje od r antilanaca.*

(b) *Ako parcijalno uređen skup X sadrži antilanac veličine r, onda X ne možemo particionirati na manje od r lanaca.*

Dokaz. Ako je L lanac veličine r i $\{A_1, \ldots, A_n\}$ particija od X na antilance, onda je $|L \cap A_i| \leq 1$. Nepraznih presjeka $L \cap A_i$ mora biti barem $r = |L|$ jer svaki pokriva samo jedan element iz L, pa je $r \leq n$. Analogno dokazujemo tvrdnju (b). □



Slika 8.2: Particija Booleove rešetke na najmanji mogući broj antilanaca i lanaca.

Po propoziciji, parcijalno uređen skup visine $r-1$ ne možemo particionirati na manje od r antilanaca. Particija koja se sastoji točno od r antilanaca uvijek postoji.

Teorem 8.3 (Mirsky[1])**.** *Neka je najveći lanac u X veličine r. Onda X možemo rastaviti na r antilanaca.*

Dokaz. Visinu $h(x)$ elementa $x \in X$ definiramo kao duljinu najvećeg lanca koji završava u x. Vrijedi $h(x) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, pa skupovi $X_i = \{x \in X \mid h(x) = i\}$ za $i = 0, 1, \ldots, r-1$ čine particiju od X. Tvrdimo da je svaki X_i antilanac. Kad bi dva elementa iste visine i bila usporediva, mogli bismo dodati jednog na najveći lanac koji završava u drugom pa bi mu visina bila veća od i. Dakle, $\{X_0, \ldots, X_{r-1}\}$ je particija od X na r antilanaca. □

Dualna particija na lance, u kojoj je broj lanaca jednak širini parcijalno uređenog skupa također postoji, ali je to teže dokazati.

[1]Leonid Mirsky (1918.-1983.), rusko-britanski matematičar.

Teorem 8.4 (Dilworth[2]). *Neka je najveći antilanac u X veličine r. Onda X možemo rastaviti na r lanaca.*

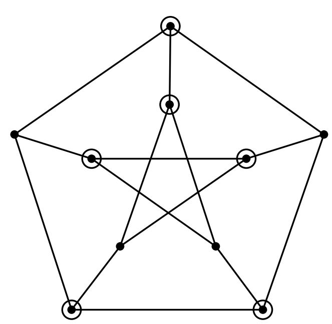
Dokazat ćemo Dilworthov teorem kao posljedicu Hallova teorema o braku 5.12. Hallov teorem daje nužan i dovoljan uvjet za postojanje maksimalnog sparivanja u bipartitnom grafu $G = (V, E)$, koje zasićuje sve vrhove jednog od blokova biparticije. Sparivanje je podskup skupa bridova $S \subseteq E$ takav da je svaki vrh grafa incidentan najviše s jednim bridom iz S. Dualni pojam je *pokrivač* grafa: to je podskup skupa vrhova $P \subseteq V$ takav da je svaki brid grafa incidentan bar s jednim vrhom iz P (tj. svaki brid je "pokriven" nekim vrhom iz P). Sparivanje ne može sadržati više bridova od veličine pokrivača.

Lema 8.5. *Za svako sparivanje S i pokrivač P grafa G vrijedi $|S| \leq |P|$.*

Dokaz. Definiramo funkciju $f : S \to P$ tako da svakom bridu $e \in S$ pridružimo njegov kraj koji leži u P. Zbog činjenice da je P pokrivač, svaki brid ima bar jedan kraj u P, pa uvijek možemo izabrati $f(e) \in P$. Zbog činjenice da je S sparivanje, funkcija f je injekcija. Kad bi za dva brida $e_1, e_2 \in S$ vrijedilo $f(e_1) = f(e_2)$, ta dva brida imala bi zajednički kraj. Zato domena od f ne može imati više elemenata od kodomene, tj. vrijedi $|S| \leq |P|$. □

Lema 8.6. *Ako za sparivanje S i pokrivač P grafa G vrijedi $|S| = |P|$, onda je S najveće sparivanje, a P je najmanji pokrivač od G (po broju elemenata).*

Dokaz. Neka je S^* neko najveće sparivanje, a P^* neki najmanji pokrivač. Po prethodnoj lemi vrijedi $|S| \leq |S^*| \leq |P^*| \leq |P|$. Zbog jednakosti $|S| = |P|$ dostižu se sve nejednakosti u nizu, tj. vrijedi $|S| = |S^*|$ i $|P| = |P^*|$. To znači da je S također najveće sparivanje, a P najmanji pokrivač. □



Slika 8.3: Najmanji pokrivač Petersenova grafa.

Za najveće sparivanje S^* i najmanji pokrivač P^* grafa općenito ne mora vrijediti jednakost $|S^*| = |P^*|$. Na primjer, u Petersenovu grafu je $|S^*| = 5$ i $|P^*| = 6$. Najveća sparivanja prikazana su na slici 5.5, a najmanji pokrivač na slici 8.3. U bipartitnim grafovima ipak vrijedi jednakost. To ćemo dokazati koristeći se Hallovim teoremom 5.12.

[2] Robert P. Dilworth (1914.-1993.), američki matematičar.

Teorem 8.7 (Kőnig-Egerváry[3]). *U bipartitnom grafu broj bridova u najvećem sparivanju jednak je broju vrhova u najmanjem pokrivaču.*

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$ i $P^* \subseteq V$ njegov najmanji pokrivač. Konstruirat ćemo sparivanje $S \subseteq E$ koje se sastoji od $|P^*|$ bridova. Neka je $X_1 = P^* \cap X$, $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = P^* \cap Y$ i $Y_1 = Y \setminus Y_2$. Promatramo podgraf G_1 induciran vrhovima $X_1 \cup Y_1$. On je također bipartitan i zadovoljava Hallov uvjet: za svaki $A \subseteq X_1$ vrijedi $|N_{G_1}(A)| \geq |A|$. U suprotnom postoji $A \subseteq X_1$ takav da je $|N_{G_1}(A)| < |A|$. Tada u pokrivaču možemo zamijeniti vrhove iz A s vrhovima iz $N_{G_1}(A)$. Novi skup $P = (P^* \setminus A) \cup N_{G_1}(A)$ je također pokrivač od G: bridove koji spajaju vrhove iz A s vrhovima iz Y_1 pokriva $N_{G_1}(A)$, a bridove koji spajaju vrhove iz A s vrhovima iz Y_2 pokriva Y_2. Novi skup ima manje elemenata $|P| < |P^*|$, što je kontradikcija s minimalnosti od P^*. Dakle, Hallov uvjet vrijedi, pa po teoremu 5.12 postoji sparivanje S_1 u G_1 koje zasićuje sve vrhove iz X_1. To sparivanje sastoji se od $|S_1| = |X_1|$ bridova.

Sada promatramo podgraf G_2 induciran vrhovima $X_2 \cup Y_2$ i na analogan način dobijemo sparivanje S_2 koje zasićuje Y_2 i sastoji se od $|S_2| = |Y_2|$ bridova. Unija $S = S_1 \cup S_2$ je sparivanje u G koje se sastoji od $|S| = |S_1| + |S_2| = |X_1| + |Y_2| = |P^*|$ bridova. □

S pomoću Kőnig-Egerváryjeva teorema dokazujemo Dilworthov teorem.

Dokaz teorema 8.4. Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup kardinaliteta $|X| = n$. Definiramo bipartitan graf G kojem se skup vrhova $V = X \cup X'$ sastoji od dvije disjunktne kopije od X. Za $x \in X$ odgovarajući element iz X' označavamo x'. Bridovi od G su parovi $\{x, y'\}$ za koje vrijedi $x < y$ (tj. $x \leq y$ i $x \neq y$). Graf G je bipartitan i vrijede sljedeće dvije tvrdnje.

1. Svakom sparivanju veličine k u G možemo pridružiti particiju od X na $n-k$ lanaca.

   Neka je $S = \{\{x_i, y_i'\} \mid i = 1, \ldots, k\}$ sparivanje. Počinjemo s particijom od X na n jednočlanih lanaca. Za svaki brid $\{x_i, y_i'\} \in S$, spojimo lanac koji sadrži x_i s lancem koji sadrži y_i. Budući da je S sparivanje, u svakom koraku je x_i najveći element svojeg lanca, a y_i najmanji element svojeg lanca. Iz tranzitivnosti slijedi da spajanjem dobivamo novi lanac. U svakom koraku smanjujemo broj lanaca za jedan, pa na kraju imamo particiju od X na $n - k$ lanaca.

2. Svakom minimalnom pokrivaču veličine k u G možemo pridružiti antilanac u X veličine $n - k$.

   Neka je $P^* = \{x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_k\}$ minimalni pokrivač. Elemente numeriramo tako da je prvih m iz X, a preostalih $k - m$ iz X'. Tvrdimo da je $\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \{x_{m+1}, \ldots, x_k\} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, npr. $x_1 = x_k$. Zbog minimalnosti od P^* postoji brid $\{y, x'_k\}$ takav da $y \notin P^*$ i brid $\{x_1, z'\}$ takav da $z' \notin P^*$. U suprotnom svaki brid koji sadrži x'_k ili x_1 ima drugi kraj u P^*, pa možemo izbaciti x'_k i x_1 iz pokrivača P^*. Iz definicije bridova u G slijedi $y < x_k$ i $x_1 < z$, pa iz pretpostavke $x_1 = x_k$ i tranzitivnosti dobivamo $y < z$. No to znači da je $\{y, z'\}$ brid grafa G koji nije pokriven s P^*, što je kontradikcija. Dakle, skupovi $\{x_1, \ldots, x_m\}$

[3] Dénes Kőnig (1884.-1944.) i Jenő Egerváry (1891.-1958.), mađarski matematičari.

i $\{x_{m+1}, \dots, x_k\}$ su disjunktni, pa je $A = X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$ skup veličine $n - k$. Tvrdimo da je A antilanac. U suprotnom imamo usporedive elemente $y, z \in A$ za koje vrijedi $y < z$ ili $z < y$ i ponovo dobivamo brid $\{y, z'\}$ ili $\{z, y'\}$ koji nije pokriven s P^*.

Po teoremu 8.7, najveće sparivanje S^* i najmanji pokrivač P^* u grafu G su iste veličine $k = |S^*| = |P^*|$. Pridružena particija na lance $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_r\}$ i pridruženi antilanac A su veličine $r = n - k$. Kad bi postojao antilanac A' veličine $|A'| > r$, po Dirichletovom principu bar dva elementa iz A' pripadala bi istom lancu L_i, što je kontradikcija s lemom 8.1. Dakle, A je najveći antilanac i imamo particiju od X na r lanaca. Time je teorem 8.4 dokazan. □

Dokazali smo sljedeće implikacije:

$$\text{Hallov teorem} \implies \text{Kőnig-Egerváryjev teorem} \implies \text{Dilworthov teorem.}$$

Dokazat ćemo još i implikaciju Dilworthov teorem $\implies$ Hallov teorem te tako pokazati da svaki od ta tri teorema slijedi iz bilo kojeg drugog.

Dokaz teorema 5.12 iz teorema 8.4. Neka je $G = (V, E)$ bipartitan graf s biparticijom $V = X \cup Y$ koji zadovoljava Hallov uvjet $|N(A)| \geq |A|$, $\forall A \subseteq X$. Definiramo parcijalni uređaj na skupu vrhova V sa $x \leq y$ ako je $x = y$ ili je $x \in X$, $y \in Y$ i $\{x, y\}$ je brid grafa G. Skup Y je očito antilanac u tom parcijalno uređenom skupu. Iz Hallova uvjeta slijedi da je najveći antilanac: za bilo koji antilanac $A \subseteq V$ neka je $A_1 = A \cap X$ i $A_2 = A \cap Y$. Zbog Hallova uvjeta vrijedi $|N(A_1)| \geq |A_1|$, a zbog definicije uređaja i neusporedivosti je $N(A_1) \cap A_2 = \emptyset$, tj. $N(A_1) \subseteq Y \setminus A_2$. Zato vrijedi $|A| = |A_1| + |A_2| \leq |N(A_1)| + |A_2| \leq |Y \setminus A_2| + |A_2| = |Y| - |A_2| + |A_2| = |Y|$. Po Dilworthovu teoremu 8.4 skup V možemo particionirati na $n = |Y|$ lanaca. Lanci su očito dvočlani ili jednočlani; označimo broj dvočlanih lanaca s m. Tada je $|V| = 2m + (n - m) = m + n = m + |Y| \Rightarrow m = |V| - |Y| = |X|$. Iz toga vidimo da je skup svih dvočlanih lanaca sparivanje u G koje zasićuje X. □

Direktni dokazi ovih triju teorema su dosta komplicirani, ali kad dokažemo jednog od njih, slijede i ostali. Mi smo direktno dokazali Hallov teorem 5.12. Direktan dokaz Kőnig-Egerváryjeva teorema dan je u [4, teorem 5.3 na str. 74], a Dilworthova teorema u [9, teorem 12.5.3 na str. 196]. Neki drugi teoremi iz kombinatorike i srodnih područja također su ekvivalentni s ova tri teorema, u smislu da se mogu dokazati jedni iz drugih. Kao primjer navodimo Birkhoff[4]-von Neumannov[5] teorem iz konveksne geometrije. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ kažemo da je *dvostruko stohastička* ako su unosi nenegativni $a_{ij} \geq 0$, a suma svakog retka i stupca je jedan: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, $\forall i = 1, \dots, n$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $\forall j = 1, \dots, n$. *Permutacijska matrica* je matrica koja u svakom retku i stupcu ima točno jednu jedinicu, a ostali unosi su nule.

Teorem 8.8 (Birkhoff-von Neumann). *Matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ je dvostruko stohastička ako i samo ako je konveksna kombinacija permutacijskih matrica.*

[4]Garrett Birkhoff (1911.-1996.), američki matematičar.
[5]John von Neumann (1903.-1957.), mađarsko-američki matematičar.

Zadaci

Zadatak 8.1. *Proučite dokaz Birkhoff-von Neumannova teorema 8.8 u knjizi [22, cjelina 5.2.2 na str. 80-81].*

Poglavlje 9

Vjerojatnosna metoda

Teoremi iz prethodnog poglavlja pripadaju području ekstremalne kombinatorike. U ovom poglavlju odredit ćemo širinu i visinu Booleove rešetke i dokazati još jedan takav rezultat, Erdős-Ko-Radov teorem. Ilustrirat ćemo vjerojatnosnu metodu dokazivanja, koju je uveo i dugi niz godina uspješno koristio mađarski matematičar Paul Erdős. Prvo dokazujemo osnovni teorem drugog dijela kombinatorike, takozvane Ramseyeve[1] teorije. Grubo govoreći, u Ramseyevoj teoriji dokazujemo da u dovoljno velikoj strukturi koju proizvoljno particioniramo uvijek postoje pravilne podstrukture.

Na primjer, neka su bridovi potpunog grafa K_6 proizvoljno obojani crveno ili plavo. Promotrimo pet bridova koji izlaze iz jednog vrha x. Među njima su bar tri brida obojano istom bojom; recimo da su bridovi $\{x, y_1\}$, $\{x, y_2\}$ i $\{x, y_3\}$ crveni. Ako je bar jedan od bridova oblika $\{y_i, y_j\}$ crveni, imamo crveni trokut $\{x, y_i, y_j\}$. U suprotnom je $\{y_1, y_2, y_3\}$ plavi trokut. Zaključujemo da K_6 uvijek sadrži trokut obojan istom bojom, tj. jednobojni podgraf K_3.

Teorem 9.1 (Ramsey)**.** *Za sve prirodne brojeve $r, s \geq 2$ postoji prirodan broj n takav da u proizvoljnom bojanju bridova potpunog grafa K_n u crvenu ili plavu boju postoji podgraf K_r kojem su svi bridovi crveni, ili podgraf K_s kojem su svi bridovi plavi. Najmanji takav n je* Ramseyev broj *$R(r, s)$.*

Dokaz. Indukcijom po $r + s$ dokazujemo da vrijedi nejednakost

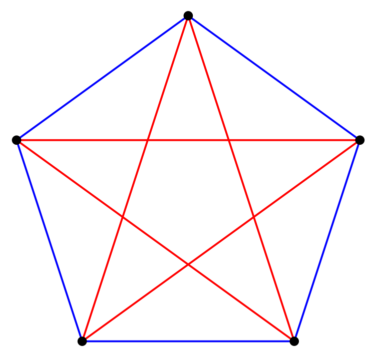
$$R(r, s) \leq R(r - 1, s) + R(r, s - 1). \tag{9.1}$$

Iz toga slijedi da je $R(r, s)$ konačan za sve $r, s \geq 2$. Kao bazu indukcije primijetimo da u obojanom grafu K_r ili su svi bridovi crveni, ili postoji plavi brid, tj. plavi podgraf K_2. To dokazuje $R(r, 2) = r$, a na isti način vidimo da je $R(2, s) = s$. Pretpostavimo da su Ramseyevi brojevi $R(r - 1, s)$ i $R(r, s - 1)$ konačni i obojimo bridove grafa K_n za $n = R(r-1, s) + R(r, s-1)$. Promotrimo $n-1$ bridova koji izlaze iz vrha x. Među njima je barem $R(r - 1, s)$ crvenih bridova ili barem $R(r, s - 1)$ plavih bridova; u suprotnom bi ukupan broj bridova iz x bio najviše $R(r-1, s)-1+R(r, s-1)-1 < n-1$. Ako imamo $m = R(r - 1, s)$ crvenih bridova iz x, njihovi drugi krajevi čine podgraf K_m. Po definiciji broja $R(r - 1, s)$ u njemu postoji crveni podgraf K_{r-1}, koji zajedno s vrhom x čini crveni

[1]Frank Plumpton Ramsey (1903.-1930.), britanski matematičar, filozof i ekonomist.

podgraf K_r, ili postoji plavi podgraf K_s. Ako pak imamo $m = R(r, s-1)$ plavih bridova iz x, njihovi drugi krajevi čine podgraf K_m u kojem imamo crveni K_r, ili plavi K_{s-1} koji zajedno s x čini plavi K_s. □

Ramsey je u [34] dokazao beskonačnu verziju ovog teorema. Dokaz konačne verzije pomoću nejednakosti (9.1) je iz članka Erdősa i Szekeresa[2] [11]. Uvodni primjer o jednobojnom trokutu u K_6 pokazuje da je $R(3,3) \leq 6$. Za dokaz jednakosti $R(3,3) = 6$ trebamo primjer bojanja bridova grafa K_5 u kojem nema jednobojnih trokuta. Takvo bojanje prikazano je na slici 9.1.



Slika 9.1: Bojanje bridova K_5 bez jednobojnih trokuta.

Određivanje točnih vrijednosti Ramseyevih brojeva je težak problem. Poznata je vrijednost $R(4,4) = 18$, a za sve $k \geq 5$ nisu poznate točne vrijednosti nego samo gornje i donje ocjene za $R(k,k)$. Iz nejednakosti (9.1) slijede gornje ocjene za Ramseyeve brojeve.

Propozicija 9.2. *Vrijedi* $R(r,s) \leq \binom{r+s-2}{r-1}$ *i* $R(k,k) < 4^{k-1}$.

Dokaz. Prvu nejednakost dokazujemo indukcijom po $r+s$. Vidjeli smo da je $R(r,2) = r = \binom{r}{r-1}$ i $R(2,s) = s = \binom{s}{1}$. Pretpostavimo da vrijedi $R(r-1,s) \leq \binom{r+s-3}{r-2}$ i $R(r,s-1) \leq \binom{r+s-3}{r-1}$. Tada iz (9.1) i Pascalove formule slijedi $R(r,s) \leq \binom{r+s-3}{r-2} + \binom{r+s-3}{r-1} = \binom{r+s-2}{r-1}$. Posebno,

$$\begin{aligned} R(k,k) &\leq \binom{2k-2}{k-1} = \frac{(2k-2)!}{(k-1)! \cdot (k-1)!} = \\ &= \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{(k-1)(k-2)\cdots 1} \cdot \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(k-1)(k-2)\cdots 1} < \\ &< 2^{k-1} \cdot 2^{k-1} = 4^{k-1}. \end{aligned}$$

□

[2]George Szekeres (1911.-2005.), mađarsko-australski matematičar.

Za donju ocjenu $R(3,3) > 5$ konstruirali smo bojanje bridova grafa K_5 takvo da ne postoji jednobojni podgraf K_3. Konstrukciju je teško generalizirati za Ramseyeve brojeve $R(k,k)$. Čak i da imamo odgovarajuće bojanje bridova od K_n, nije lako provjeriti nepostojanje jednobojnog podgrafa K_k zbog naglog rasta binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$. Erdős je u radu [12] dokazao donju ocjenu za $R(k,k)$ bez eksplicitnog konstruiranja bojanja. Ideja vjerojatnosne metode je definirati vjerojatnosni prostor na skupu konfiguracija među kojima tražimo konfiguraciju s određenim svojstvom. Ako dokažemo da slučajno odabrana konfiguracija ima traženo svojstvo s pozitivnom vjerojatnošću, iz toga slijedi postojanje tražene konfiguracije bez da je eksplicitno konstruiramo.

Teorem 9.3 (P. Erdős, 1947.)**.** *Ako vrijedi* $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, *onda je* $R(k,k) > n$. *Iz toga slijedi ocjena* $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ *za sve* $k \ge 3$.

Dokaz. Na slučajan način bojimo svaki od $\binom{n}{2}$ bridova grafa tako da s jednakom vjerojatnošću biramo crvenu ili plavu boju. Neka je $N = \{1, \ldots, n\}$ skup svih vrhova grafa, a $K \subseteq N$ neki k-člani podskup vrhova. Označimo s M_K događaj da su svi bridovi između vrhova u K obojani istom bojom (svi crveni ili svi plavi). Vjerojatnost tog događaja je $\mathbb{P}(M_K) = \frac{2}{2^{\binom{k}{2}}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$. Vjerojatnost da se dogodi bar jedan od događaja M_K možemo ocijeniti s $\mathbb{P}(\bigcup_K M_K) \le \sum_K \mathbb{P}(M_K) = \binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$. Prema tome, vjerojatnost suprotnog događaja je pozitivna: $\mathbb{P}((\bigcup_K M_K)^c) > 0$. To znači da postoji bojanje takvo da niti jedan od k-članih podgrafova nije jednobojan, pa je $R(k,k) > n$.

Za dokaz ocjene $R(k,k) > \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ trebamo provjeriti da je uvjet $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ zadovoljen ako uzmemo $k \ge 3$ i $n = \lfloor 2^{k/2} \rfloor$. Zaista, vrijedi

$$\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} < \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2^{1+k/2}}{2^{k^2/2}} \le \frac{\cancel{(2^{k/2})^k}}{k!} \cdot \frac{2^{1+k/2}}{\cancel{2^{k^2/2}}} = \frac{2^{1+k/2}}{k!} =: f(k).$$

Budući da je $f(k+1) = f(k) \cdot \frac{\sqrt{2}}{k+1} < f(k)$ i $f(3) = \frac{2\sqrt{2}}{3} < 1$, indukcijom slijedi da je $f(k) < 1$ za sve $k \ge 3$ i time je teorem dokazan. $\square$

Još jedan često korišteni argument u vjerojatnosnoj metodi je svojstvo linearnosti matematičkog očekivanja slučajne varijable. Ilustrirat ćemo ga dokazima nekoliko kombinatornih identiteta. Na kraju 4. poglavlja takve identitete smo dokazivali dvostrukim prebrojavanjem. Pretpostavimo da slučajno biramo $S \subseteq N$ tako da je izbor svakog podskupa jednako vjerojatan, gdje je $N = \{1, \ldots, n\}$. Kažemo da $S \subseteq N$ biramo *uniformno*. Promotrimo koliki je očekivani broj elemenata od S, tj. matematičko očekivanje slučajne varijable $X = |S|$.

Ako slučajna varijabla X poprima konačno mnogo vrijednosti $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ s vjerojatnostima $p_1, \ldots, p_n$, *matematičko očekivanje* od X definiramo kao sumu

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(X = x_k).$$

Smisao definicije je "prosječna vrijednost" slučajne varijable. Prema zakonu velikih brojeva, aritmetička sredina vrijednosti koje poprima X s velikom vjerojatnošću je blizu $\mathbb{E}(X)$. Aproksimacija je bolja što više puta ponavljamo pokus.

Naša slučajna varijabla $X = |S|$ poprima vrijednosti $0, \ldots, n$ s vjerojatnostima koje dobijemo dijeljenjem broja povoljnih mogućnosti s ukupnim brojem mogućnosti:

$$\mathbb{P}(|S| = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

Matematičko očekivanje je stoga

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}. \tag{9.2}$$

S druge stane, "prosječni" slučajno izabrani podskup $S \subseteq N$ trebao bi imati oko pola od ukupnog broja elemenata. To možemo obrazložiti prikazom X kao zbroja indikatorskih slučajnih varijabli. Za $i \in N$ varijabla X_i poprima vrijednost 1 ako je i sadržan u slučajno izabranom podskupu, a 0 inače:

$$X_i = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

Očito vrijedi $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, a matematička očekivanja indikatorskih varijabli su

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(i \in S) + 0 \cdot \mathbb{P}(i \notin S) = \mathbb{P}(i \in S) = \frac{1}{2}.$$

Zbog linearnosti matematičkog očekivanja vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Izjednačavanjem izraza (9.2) s $\frac{n}{2}$ dobivamo sljedeći identitet.

Propozicija 9.4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$

Primijenimo ovu ideju na slučajno biranje particija i permutacija. Ako slučajno i uniformno biramo particiju $\mathcal{P}$ skupa N, vjerojatnost da se sastoji od k blokova je

$$\mathbb{P}(|\mathcal{P}| = k) = \frac{\left\{ n \atop k \right\}}{B_n}.$$

U brojniku je Stirlingov broj druge vrste, a u nazivniku Bellov broj. Matematičko očekivanje slučajne varijable $X = |\mathcal{P}|$ je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{\left\{ n \atop k \right\}}{B_n} = \frac{1}{B_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left\{ n \atop k \right\}. \tag{9.3}$$

S druge strane, za neprazan podskup $S \subseteq N$ promotrimo indikatorsku varijablu

$$X_S = \begin{cases} 1, & S \text{ je blok od } \mathcal{P}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Njezino očekivanje ovisi samo o kardinalitetu $|S| = i$:

$$\mathbb{E}(X_S) = \mathbb{P}(S \text{ je blok od } \mathcal{P}) = \frac{B_{n-i}}{B_n}.$$

Vrijedi $X = \sum_S X_S$, gdje suma ide po svim nepraznim podskupovima od N. Iz linearnosti očekivanja i grupiranjem po kardinalitetu od S dobivamo

$$\mathbb{E}(X) = \sum_S \mathbb{E}(X_S) = \frac{1}{B_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}.$$

Zadnja suma ide od $i = 1$ jer prazan skup ne može biti blok particije. Rekurziju za Bellove brojeve iz teorema 3.9 možemo zapisati kao

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$$

gdje suma ide od $i = 0$, pa uspoređivanjem dobivamo

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{B_n} \cdot (B_{n+1} - B_n).$$

Izjednačavanjem s (9.3) slijedi

Propozicija 9.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left\{ n \atop k \right\} = B_{n+1} - B_n.$

Konačno, neka je vrijednost slučajne varijable X broj ciklusa permutacije $\pi \in S_n$ koju biramo uniformno. Njezino očekivanje je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \mathbb{P}(\pi \text{ ima točno } k \text{ ciklusa}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{\left[n \atop k \right]}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[n \atop k \right]. \tag{9.4}$$

Indikatorska varijabla ciklusa $c = (i_1\ i_2\ \cdots\ i_d)$ dana je s

$$X_c = \begin{cases} 1, & c \text{ je ciklus od } \pi, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Matematičko očekivanje dobivamo tako da podijelimo broj permutacija kojima je c ciklus s ukupnim brojem permutacija:

$$\mathbb{E}(X_c) = \mathbb{P}(c \text{ je ciklus od } \pi) = \frac{(n-d)!}{n!}.$$

Vidimo da očekivanje ovisi samo o duljini ciklusa d. Slučajna varijabla X je zbroj indikatorskih varijabli po svim mogućim ciklusima: $X = \sum\limits_c X_c$. Primijenimo linearnost očekivanja i grupiramo sumu po duljini ciklusa:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_c \mathbb{E}(X_c) = \sum_{d=1}^{n} \binom{n}{d} (d-1)! \cdot \frac{(n-d)!}{n!}.$$

Ovdje je $\binom{n}{d}(d-1)!$ broj ciklusa duljine d (biramo elemente $i_1, \ldots, i_d$ i permutiramo ih do na ciklički pomak). Uvrštavanjem $\binom{n}{d} = \frac{n!}{d!(n-d)!}$ i sređivanjem kao očekivanje dobivamo n-ti harmonijski broj:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} = H_n.$$

Izjednačavanjem s (9.4) dobivamo

Propozicija 9.6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[n \atop k \right] = n! \cdot H_n = \left[n+1 \atop 2 \right].$

U zadnjoj jednakosti koristili smo identitet iz zadatka 4.6. Vratimo se sada ekstremalnoj kombinatorici i odredimo visinu i širinu Booleove rešetke $(2^N, \subseteq)$. U primjeru na slici 8.1 vidjeli smo da je za $n = 4$ visina 4, a širina 6. Općenito, za bilo koji $n \in \mathbb{N}$ najveći lanac u Booleovoj rešetki je oblika

$$\mathcal{L} = \{\, \emptyset,\, \{x_1\},\, \{x_1, x_2\},\, \{x_1, x_2, x_3\},\, \ldots,\, \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \,\}.$$

Pritom je $(x_1, \ldots, x_n)$ neka permutacija skupa N. Dakle, visina Booleove rešetke je n, a broj najvećih lanaca je $n!$. Za odrediti širinu treba nam najveći antilanac. Antilanac u Booleovoj rešetki je familija $\mathcal{F}$ podskupova od N koji se međusobno ne sadrže, tj. familija sa svojstvom $(\forall A, B \in \mathcal{F})\ A \neq B \Rightarrow A \not\subseteq B$ i $B \not\subseteq A$. Takve familije skupova nazivamo *Spernerovim*[3] *familijama.* Na slici 8.2 vidimo da familija $\mathcal{F}_k = \binom{N}{k}$ svih k-članih podskupova od N čini antilanac veličine $\binom{n}{k}$. Niz binomnih koeficijenata $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots, \binom{n}{n}$ raste do pola i onda pada (zadatak 9.4), pa je Spernerova familija $\mathcal{F}_k$ najveća za $k = \frac{n}{2}$ ako je n paran, odnosno za $k = \frac{n-1}{2}$ ili $k = \frac{n+1}{2}$ ako je n neparan. Idući teorem pokazuje da su to najveće od svih Spernerovih familija.

Teorem 9.7 (Sperner)**.** *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja Spernerova familija podskupova n-članog skupa. Onda vrijedi $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ i pritom se jednakost dostiže ako i samo ako je $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k$ za $k = \frac{n}{2}$ i n paran, odnosno $k \in \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$ i n neparan.*

Nejednakost slijedi iz općenitijeg teorema poznatog kao nejednakost Lubell[4]-Yamamoto[5]-Mešalkin[6], ili kratko LYM.

[3]Emanuel Sperner (1905.-1980.), njemački matematičar.
[4]David Lubell (1932.-2019.), američki matematičar.
[5]Koichi Yamamoto (r. 1921.), japanski matematičar.
[6]Lev Dmitrijević Mešalkin (1934.-2000.), ruski matematičar.

Teorem 9.8 (Nejednakost LYM). *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja Spernerova familija podskupova n-članog skupa. Onda vrijedi*

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \le 1.$$

Dokaz. Na slučajan način biramo najveći lanac $\mathcal{L}$ u Booleovoj rešetki $(2^N, \subseteq)$ tako da je izbor svakog od $n!$ najvećih lanaca jednako vjerojatan. Neka je $X = |\mathcal{L} \cap \mathcal{F}|$ slučajna varijabla koja daje broj elemenata u presjeku lanca $\mathcal{L}$ i antilanca $\mathcal{F}$. Po lemi 8.1 taj broj je najviše 1, pa očekivanje slučajne varijable zadovoljava $\mathbb{E}(X) \le 1$. S druge strane, slučajnu varijablu X možemo prikazati kao sumu $X = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} X_A$ indikatorskih slučanih varijabli

$$X_A = \begin{cases} 1, & A \in \mathcal{L}, \\ 0, & A \notin \mathcal{L}. \end{cases}$$

Očekivanja tih slučajnih varijabli su $\mathbb{E}(X_A) = \mathbb{P}(A \in \mathcal{L}) = \binom{n}{|A|}^{-1}$ jer je jednako vjerojatno da će slučajno izabrani maksimalni lanac $\mathcal{L}$ sadržati bilo koji od $\binom{n}{|A|}$ podskupova s istim brojem elemenata kao A. Alternativno, možemo prebrojati najveće lance koji sadrže A i podijeliti s ukupnim brojem najvećih lanaca: $\frac{|A|!(n-|A|)!}{n!} = \binom{n}{|A|}^{-1}$. Zbog linearnosti očekivanja, vrijedi $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} \mathbb{E}(X_A) = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1}$ i time je nejednakost dokazana. $\square$

Dokaz teorema 9.7. Znamo da je $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \ge \binom{n}{|A|}$ za svaki $A \in \mathcal{F}$, odnosno $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} \le \binom{n}{|A|}^{-1}$. Iz nejednakosti LYM slijedi

$$|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} \le \sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \le 1 \implies |\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Jednakost $|\mathcal{F}| = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ vrijedi samo ako na lijevoj strani implikacije vrijede jednakosti $|\mathcal{F}| \cdot \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{-1} = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} = 1$. Ako je n paran, iz toga odmah slijedi da familija $\mathcal{F}$ sadrži svih $\binom{n}{n/2}$ podskupova od N veličine $n/2$. Ako je n neparan, onda $\mathcal{F}$ sadrži $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ podskupova od N veličine $\frac{n-1}{2}$ ili $\frac{n+1}{2}$. Trebamo dokazati da su svi podskupovi u $\mathcal{F}$ iste veličine.

Označimo $k = \frac{n-1}{2}$ i neka je $\mathcal{F}^-$ familija svih skupova iz $\mathcal{F}$ koji su veličine k, a $\mathcal{F}^+$ familija svih skupova iz $\mathcal{F}$ koji su veličine $k+1$. Uz raniju oznaku $\mathcal{F}_k$ za familiju svih k-članih podskupova od N, imamo $\mathcal{F}^- = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_k$ i $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F} \cap \mathcal{F}_{k+1}$. Vrijedi $\mathcal{F} = \mathcal{F}^- \cup \mathcal{F}^+$ (disjunktna unija), pa je

$$|\mathcal{F}^-| + |\mathcal{F}^+| = |\mathcal{F}| = \binom{n}{k}. \tag{9.5}$$

Sjenu familije skupova $\mathcal{S}$ definiramo kao familiju svih skupova koje dobivamo izbacivanjem jednog elementa iz skupa $S \in \mathcal{S}$. Oznaka za sjenu je $\partial\mathcal{S}$. Posebno, sjena $\partial\mathcal{F}^+$ je familija svih k-članih podskupova skupova iz $\mathcal{F}^+$. Budući da je $\mathcal{F}$ Spernerova familija, niti jedan skup iz $\mathcal{F}^-$ ne smije biti podskup skupa iz $\mathcal{F}^+$. Zato je $\mathcal{F}^- \cap \partial\mathcal{F}^+ = \emptyset$, a budući da su $\mathcal{F}^-$ i $\partial\mathcal{F}^+$ podfamilije od $\mathcal{F}_k$ vrijedi $|\mathcal{F}^-| + |\partial\mathcal{F}^+| \leq \binom{n}{k}$. Iz toga i iz (9.5) dobivamo

$$|\partial\mathcal{F}^+| \leq \binom{n}{k} - |\mathcal{F}^-| = |\mathcal{F}^+|. \tag{9.6}$$

Prebrojimo parove (A, B) pri čemu je $A \in \partial\mathcal{F}^+$, $B \in \mathcal{F}^+$ i vrijedi $A \subseteq B$. Svaki $B \in \mathcal{F}^+$ sadrži točno $k+1$ podskupova $A \in \partial\mathcal{F}^+$, pa je broj parova jednak $|\mathcal{F}^+| \cdot (k+1)$. S druge strane, svaki $A \in \partial\mathcal{F}^+$ sadržan je najviše u $k+1$ skupova $B \in \mathcal{F}^+$, pa je broj parova manji ili jednak od $|\partial\mathcal{F}^+| \cdot (k+1)$. Slijedi nejednakost $|\mathcal{F}^+| \leq |\partial\mathcal{F}^+|$ koja zajedno s (9.6) daje jednakost $|\partial\mathcal{F}^+| = |\mathcal{F}^+|$. To pak znači da je svaki $A \in \partial\mathcal{F}^+$ sadržan točno u $k+1$ skupova $B \in \mathcal{F}^+$.

Ako postoji skup $B \in \mathcal{F}^+$, onda izbacivanjem bilo kojeg elementa dobivamo $A \in \partial\mathcal{F}^+$. Dodavanjem nekog drugog elementa u A dobivamo $(k+1)$-člani skup B' koji je zbog upravo dokazane tvrdnje također sadržan u $\mathcal{F}^+$. Oduzimanjem i dodavanjem jednog po jednog elementa možemo doći do bilo kojeg $(k+1)$-članog podskupa od N, pa je u ovom slučaju $\mathcal{F} = \mathcal{F}^+ = \mathcal{F}_{k+1}$. Ako ne postoji skup iz $\mathcal{F}^+$, onda je $\mathcal{F} = \mathcal{F}^- = \mathcal{F}_k$ i time je teorem dokazan. □

Sada znamo da je širina Booleove rešetke $(2^N, \subseteq)$ jednaka $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Za parni n postoji samo jedan najveći antilanac $\mathcal{F}_k$, $k = \frac{n}{2}$. Za neparni n postoje dva najveća antilanca $\mathcal{F}_k$ za $k \in \{\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}\}$. Spernerov teorem je tipičan primjer teorema iz ekstremalne kombinatorike. Za familije skupova s određenim svojstvom dokazujemo ocjenu veličine i karakteriziramo familije koje dostižu tu ocjenu.

Još jedan primjer su takozvane presijecajuće familije. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od N je *presijecajuća* ako vrijedi $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. Nije teško dokazati ocjenu $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ (zadatak 9.5), a primjer familije koja dostiže ocjenu čine svi podskupovi od N koji sadrže fiksni element iz N. Ograničimo se na familije k-članih podskupova od N. Ako je $k > \frac{n}{2}$, svaka dva k-člana podskupa imaju neprazan presjek pa je bilo koja familija k-članih podskupova presijecajuća. Slučaj $k \leq \frac{n}{2}$ je zanimljiviji. Presijecajuću familiju veličine $\binom{n-1}{k-1}$ dobivamo ako uzmemo sve k-člane podskupove koji sadrže fiksni element iz N. Dokazat ćemo vjerojatnosnom metodom da je $\binom{n-1}{k-1}$ ujedno gornja ocjena za veličinu presijecajuće familije. Ideja ovog dokaza je iz članka G. Katone[7] [23].

Teorem 9.9 (Erdős-Ko[8]-Rado[9]). *Ako je $n \geq 2k$, onda za svaku presijecajuću familiju k-članih podskupova n-članog skupa vrijedi $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Biramo slučajni k-člani podskup od N na način da prvo uniformno izaberemo permutaciju $(x_1, \ldots, x_n)$ od N, a zatim uniformno izaberemo početni indeks $i \in \{1, \ldots, n\}$. Izabrani podskup je $A_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\}$ pri čemu s indeksima računamo ciklički modulo n ($x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ itd.). Vjerojatnost da je izabrani podskup sadržan u familiji $\mathcal{F}$ je $\mathbb{P}(A_i \in \mathcal{F}) = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{k}}$.

[7] Gyula O. H. Katona (r. 1941), mađarski matematičar.
[8] Chao Ko (1910.-2002.), kineski matematičar.
[9] Richard Rado (1906.-1989.), britanski matematičar.

S druge strane, za fiksnu permutaciju $\pi = (x_1, \dots, x_n)$ familija $\mathcal{F}$ može sadržati najviše k od n podskupova oblika A_i. Zaista, ako je $A_i \in \mathcal{F}$, svi ostali podskupovi tog oblika koji sijeku A_i su A_{i-j} i A_{i+k-j} za $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Familija $\mathcal{F}$ može sadržati najviše jedan od ta dva podskupa jer se oni međusobno ne sijeku (zbog $2k \le n$). To znači da uz A_i familija $\mathcal{F}$ može sadržati još najviše $k-1$ podskupova tog oblika, dakle ukupno najviše k. Zato vjerojatnost da je $A_i \in \mathcal{F}$ pod uvjetom da je izabrana permutacija π zadovoljava $\mathbb{P}(A_i \in \mathcal{F} \mid H_\pi) \le \frac{k}{n}$. Ovdje je H_π događaj da je izabrana permutacija π, a njegova vjerojatnost je $\mathbb{P}(H_\pi) = \frac{1}{n!}$. Po formuli potpune vjerojatnosti vrijedi

$$\mathbb{P}(A_i \in \mathcal{F}) = \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{P}(H_\pi) \cdot \mathbb{P}(A_i \in \mathcal{F} \mid H_\pi) \le \sum_{\pi \in S_n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{k}{n} = \frac{k}{n}.$$

Izjednačavanjem vjerojatnosti dobivamo nejednakost $|\mathcal{F}| \le \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. U zadnjem koraku koristili smo identitet iz zadatka 6.1. $\square$

Ako je $n > 2k$, presijecajuće familije najveće moguće veličine $\binom{n-1}{k-1}$ moraju biti oblika "svi k-člani podskupovi kroz fiksni element". Dokaz karakterizacije dostizanja nejednakosti i dokaze raznih generalizacija Erdős-Ko-Radova teorema potražite u monografiji [15]. Za $n = 2k$ karakterizacija dostizanja nejednakosti ne vrijedi (zadatak 9.7). Knjiga [22] posvećena je ekstremalnoj kombinatorici, a knjiga [1] vjerojatnosnoj metodi u kombinatorici.

Zadaci

Zadatak 9.1. *Dokažite propozicije 9.4, 9.5 i 9.6 dvostrukim prebrojavanjem.*

Zadatak 9.2. *Na slučajan način biramo podskupove od $N = \{1, \dots, n\}$ tako da je izbor svakog od 2^n podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva podskupa $A, B \subseteq N$.*

(a) *Kolika je vjerojatnost događaja $A \cap B = \emptyset$?*

(b) *Kolika je vjerojatnost događaja $A \cup B = N$?*

(c) *Koliko je očekivanje slučajne varijable $X = |A \cap B|$?*

(d) *Koliko je očekivanje slučajne varijable $Y = |A \cup B|$?*

(e) *Koliko je očekivanje slučajne varijable $Z = |A \Delta B|$?*

Zadatak 9.3. *Na slučajan način biramo k-člane podskupove od $N = \{1, \dots, n\}$ tako da je izbor svakog od $\binom{n}{k}$ podskupova jednako vjerojatan. Nezavisno smo izabrali dva k-člana podskupa $A, B \subseteq N$.*

(a) *Kolika je vjerojatnost događaja $A \cap B = \emptyset$?*

(b) *Kolika je vjerojatnost događaja $A \cup B = N$?*

(c) *Za $i \in \{1, \dots, n\}$, kolika je vjerojatnost događaja $i \in A \cap B$?*

(d) *Za* $i \in \{0, \ldots, k\}$*, kolika je vjerojatnost događaja* $|A \cap B| = i$*?*

(e) *Po definiciji izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable* $X = |A \cap B|$.

(f) *Neka je* X_i *slučajna varijabla koja poprima vrijednost* 1 *ako je* $i \in A \cap B$*, a* 0 *inače. Koliko je matematičko očekivanje* $\mathbb{E}(X_i)$*?*

(g) *Izračunajte matematičko očekivanje slučajne varijable* $X = |A \cap B|$ *služeći se relacijom* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(h) *Izjednačite izraze za* $\mathbb{E}(X)$ *dobivene pod (e) i (g) i izvedite identitet*

$$\sum_{i=0}^{k} i \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} = k \binom{n-1}{k-1}.$$

(i) *Formulirajte i odgovorite na pitanja (e)–(g) za slučajne varijable* $Y = |A \cup B|$ *i* $Z = |A \Delta B|$.

Zadatak 9.4. *Kombinatorno dokažite identitet* $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$*. Iz njega dokažite da je za fiksni* n *binomni koeficijent* $\binom{n}{k}$ *najveći za* $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Zadatak 9.5. *Dokažite da za svaku presijecajuću familiju* $\mathcal{F}$ *podskupova od* $N = \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi* $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$*. Jesu li familije koje dostižu nejednakost nužno oblika "svi podskupovi kroz fiksni element"?*

Zadatak 9.6. *Neka je* $\mathcal{F}$ *presijecajuća familija podskupova od* $N = \{1, \ldots, n\}$*. Dokažite da postoji presijecajuća familija* $\mathcal{F}'$ *veličine* 2^{n-1} *takva da je* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$*.* Uputa: *pokažite da za svaki* $A \subseteq N$ *takav da* $A \notin \mathcal{F}$ *i* $A^c \notin \mathcal{F}$ *možemo dodati* A *ili* A^c *u* $\mathcal{F}$ *tako da i proširena familija bude presijecajuća.*

Zadatak 9.7. *Pokažite primjerom da za* $n = 2k$ *postoje presijecajuće familije* k*-članih podskupova od* $N = \{1, \ldots, n\}$ *veličine* $\binom{n-1}{k-1}$ *koje nisu oblika "svi* k*-člani podskupovi kroz fiksni element".*

Zadatak 9.8. *Neka je* $n \leq 2k$ *i* $\mathcal{F}$ *familija* k*-članih podskupova od* $N = \{1, \ldots, n\}$ *koja zadovoljava* $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \neq N$*. Dokažite da je* $|\mathcal{F}| \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}$.

Poglavlje 10

Funkcije izvodnice

10.1 Prsten formalnih redova potencija

Funkcije izvodnice su redovi potencija. Osnovni primjer je geometrijski red

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Iz analize znamo da ovaj red apsolutno konvergira na području $|z| < 1$, tj. definira kompleksnu funkciju $F : K(0,1) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Za kombinatoriku pitanje konvergencije obično nije važno. Funkcije izvodnice gledamo kao formalne redove potencija, tj. kao nizove koeficijenata.

Definicija 10.1. *Skup $\mathbb{C}[[z]]$ sadrži sve nizove $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$. Elemente zapisujemo kao redove potencija i zovemo ih funkcijama izvodnicama:*

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Geometrijski red je niz $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, tj. niz $(1, 1, 1, 1, \ldots)$. Ovo su još neki nizovi zapisani kao funkcije izvodnice:

$$\begin{aligned}
(\alpha, 0, 0, 0, \ldots) \quad &\longleftrightarrow \quad F(z) = \alpha, \\
(0, 1, 0, 0, \ldots) \quad &\longleftrightarrow \quad F(z) = z, \\
(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots) \quad &\longleftrightarrow \quad F(z) = \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n = \sum_{n \geq 0} (\alpha z)^n = \frac{1}{1 - \alpha z}.
\end{aligned}$$

Pritom je $\alpha \in \mathbb{C}$ bilo koji kompleksan broj. U primjerima koji se javljaju u kombinatorici koeficijenti obično imaju kombinatornu interpretaciju. Na primjer, neka je a_n broj binarnih nizova duljine n. Znamo da je $a_n = 2^n$, a iz toga i gornje formule slijedi da je $F(z) = \frac{1}{1-2z}$ funkcija izvodnica za broj binarnih nizova duljine n. Funkcija izvodnica za broj permutacija stupnja n je

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} n!\, z^n.$$

Ne možemo je zapisati "u zatvorenom obliku" (bez znaka sume) jer ovaj red ima radijus konvergencije 0. Ipak, i s takvim funkcijama izvodnicama možemo računati po istim pravilima kao s redovima potencija koji imaju pozitivan radijus konvergencije.

Definicija 10.2. *Neka su* $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *i* $G(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *funkcije izvodnice. Na skupu* $\mathbb{C}[[z]]$ *definiramo operacije zbrajanja i množenja sljedećim formulama:*

$$(F+G)(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n, \tag{10.1}$$

$$(F\cdot G)(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n. \tag{10.2}$$

Zbroj funkcija izvodnica dobivamo zbrajanjem odgovarajućih koeficijenata, a koeficijenti produkta su konvolucije koeficijenata od $F(z)$ i $G(z)$: zbrajamo sve produkte $a_k z^k$ i $b_l z^l$ takve da je $k+l=n$.

Teorem 10.3. *Skup* $\mathbb{C}[[z]]$ *s operacijama zbrajanja* (10.1) *i množenja* (10.2) *čini integralnu domenu, tj. komutativni prsten s jedinicom u kojem nema djelitelja nule.*

Dokaz. Lako se provjeri da je $(\mathbb{C}[[z]],+)$ komutativna grupa s neutralnim elementom $F(z)=0$. Također, nije teško provjeriti komutativnost množenja, distributivnost množenja prema zbrajanju i da je $F(z) = 1$ neutralni element za množenje. Za asocijativnost množenja uzmimo $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $G(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ i $H(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$. Koeficijent uz z^n u produktu $((F\cdot G)\cdot H)(z)$ je

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l}\right) c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l}\, c_{n-k} = \sum_{0\leq l\leq k\leq n} a_l\, b_{k-l}\, c_{n-k} =$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n} a_l\, b_{k-l}\, c_{n-k} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-l} a_l\, b_k\, c_{n-l-k} = \sum_{l=0}^{n} a_l \left(\sum_{k=0}^{n-l} b_k\, c_{n-l-k}\right).$$

Ovo je upravo koeficijent uz z^n u produktu $(F\cdot(G\cdot H))(z)$. Konačno, pretpostavimo da je $F(z)\neq 0$ i $G(z)\neq 0$. Neka je k najmanji indeks za koji je $a_k\neq 0$, a l najmanji indeks za koji je $b_l\neq 0$. Tada je za $n=k+l$ koeficijent uz z^n produkta $(F\cdot G)(z)$ jednak $a_k b_l\neq 0$, pa je $(F\cdot G)(z)\neq 0$. Prema tome, ako je $(F\cdot G)(z)=0$, bar jedan od faktora je 0. □

Uz identifikaciju $\alpha\equiv(\alpha,0,0,0,\ldots)$, vidimo da prsten formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$ sadrži polje $\mathbb{C}$ kao potprsten. Štoviše, $\mathbb{C}[[z]]$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$. Drugi važan potprsten od $\mathbb{C}[[z]]$ je prsten polinoma $\mathbb{C}[z]$. Polinomi su formalni redovi potencija kojima su skoro svi koeficijenti jednaki 0 (svi osim konačno mnogo). Prsten polinoma $\mathbb{C}[z]$ je također vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i ima prebrojivu bazu. Kanonska baza sastoji se od monoma, tj. potencija od z:

$$1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ldots$$

Svaki polinom je linearna kombinacija konačno mnogo monoma. Vektorski prostor formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$ također ima bazu, ali ne prebrojivu.

Primjer 10.4. *Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu Fibonaccijevih brojeva. Iz nje izvedite formulu za n-ti Fibonaccijev broj.*

Rješenje. Niz Fibonaccijevih brojeva $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots)$ zadan je početnim uvjetima $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ i rekurzijom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Uz proširenje na negativne koeficijente $F_{-n} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, možemo je zamijeniti rekurzijom $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ovdje je

$$\delta_{n1} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 1, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Kroneckerov simbol. Odgovarajuća funkcija izvodnica je

$$F(z) = \sum_n F_n z^n = \sum_n (F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n1}) z^n = \sum_n F_{n-1} z^n + \sum_n F_{n-2} z^n + \sum_n \delta_{n1} z^n =$$

$$= z \cdot \sum_n F_{n-1} z^{n-1} + z^2 \cdot \sum_n F_{n-2} z^{n-2} + z = z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z.$$

Vidimo da je $(1 - z - z^2) \cdot F(z) = z$, tj.

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{-z}{z^2 + z - 1}. \tag{10.3}$$

Formulu za F_n izvodimo tako da razvijemo ovu funkciju u red potencija. Nultočke nazivnika su $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi$ i $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \Psi$. Pritom je $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ omjer zlatnog reza i $\Psi = 1/\Phi$. Rastavimo $F(z)$ na parcijalne razlomke:

$$F(z) = \frac{A}{z + \Phi} + \frac{B}{z - \Psi}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i izjednačavanjem s (10.3) dobivamo koeficijente $A = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}$ i $B = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$. Parcijalne razlomke zapišemo kao geometrijske redove:

$$F(z) = \frac{-5 - \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{z + \Phi} + \frac{-5 + \sqrt{5}}{10} \cdot \frac{1}{z - \Psi} = \frac{-5 - \sqrt{5}}{10\Phi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-z}{\Phi}} - \frac{-5 + \sqrt{5}}{10\Psi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\Psi}} =$$

$$= \frac{-5 - \sqrt{5}}{10\Phi} \cdot \frac{1}{1 - (-\Psi z)} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10\Psi} \cdot \frac{1}{1 - (\Phi z)} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} (-\Psi)^n z^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n \geq 0} \Phi^n z^n =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - (-\Psi)^n\right] z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] z^n.$$

Koeficijent uz z^n je n-ti Fibonaccijev broj. Tako smo izveli poznatu Binetovu[1] formulu

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \tag{10.4}$$

$\square$

[1] Jacques Philippe Marie Binet (1786.-1856.), francuski matematičar, fizičar i astronom.

Formulu (10.3) dobili smo dijeljenjem s polinomom $1-z-z^2$, tj. množenjem s njegovim multiplikativnim inverzom. Postavlja se pitanje ima li taj polinom multiplikativni inverz? Stupanj polinoma $P(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ je najveći indeks n za koji je koeficijent a_n različit od nule:

$$\deg P(z) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\}.$$

Definicija je dobra jer polinomi imaju samo konačno mnogo koeficijenata različitih od nule, osim za nulpolinom $P(z) = 0$ za kojeg stupanj ne definiramo ili stavljamo $\deg P(z) = -\infty$. Svojstva stupnja prema operacijama zbrajanja i množenja polinoma dana su sljedećim formulama:

$$\deg(P(z) + Q(z)) \leq \max\{\deg P(z), \deg Q(z)\}, \tag{10.5}$$

$$\deg(P(z) \cdot Q(z)) = \deg P(z) + \deg Q(z). \tag{10.6}$$

Teorem 10.5. *Polinom $P(z)$ ima multiplikativni inverz u prstenu $\mathbb{C}[z]$ ako i samo ako je $\deg P(z) = 0$.*

Dokaz. Polinom stupnja 0 je oblika $P(z) = \alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$. Njegov multiplikativni inverz je polinom $Q(z) = \frac{1}{\alpha}$. Obrnuto, pretpostavimo da je polinom $P(z)$ invertibilan, tj. da postoji polinom $Q(z)$ takav da je $P(z) \cdot Q(z) = 1$. Iz formule (10.6) slijedi $0 = \deg 1 = \deg(P(z) \cdot Q(z)) = \deg P(z) + \deg Q(z)$, pa su polinomi $P(z)$ i $Q(z)$ stupnja 0. □

Polinom $1 - z - z^2$ je stupnja 2 i nema multiplikativni inverz u prstenu polinoma $\mathbb{C}[z]$. Međutim, ima multiplikativni inverz u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$, što opravdava račun iz primjera 10.4. Za dokaz nam treba pojam *reda* (eng. *order*) elementa $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. To je najmanji indeks n za koji je koeficijent a_n različit od nule:

$$\operatorname{ord} F(z) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 \mid a_n \neq 0\}. \tag{10.7}$$

Kao i stupanj, red od $F(z) = 0$ nije definiran ili stavljamo $\operatorname{ord} F(z) = +\infty$, a za sve ostale elemente iz $\mathbb{C}[[z]]$ definicija je dobra. Red ima dualna svojstva prema operacijama zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}[[z]]$:

$$\operatorname{ord}(F(z) + G(z)) \geq \min\{\operatorname{ord} F(z), \operatorname{ord} G(z)\}, \tag{10.8}$$

$$\operatorname{ord}(F(z) \cdot G(z)) = \operatorname{ord} F(z) + \operatorname{ord} G(z). \tag{10.9}$$

Teorem 10.6. *Funkcija izvodnica $F(z)$ ima multiplikativni inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ ako i samo ako je $\operatorname{ord} F(z) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $F(z)$ ima multiplikativni inverz, tj. da postoji funkcija izvodnica $G(z)$ takva da je $F(z) \cdot G(z) = 1$. Iz formule (10.9) slijedi $0 = \operatorname{ord} 1 = \operatorname{ord}(F(z) \cdot G(z)) = \operatorname{ord} F(z) + \operatorname{ord} G(z)$, pa je $\operatorname{ord} F(z) = \operatorname{ord} G(z) = 0$. Obrnuto, neka je $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ i pretpostavimo $\operatorname{ord} F(z) = 0$, tj. $a_0 \neq 0$. Tražimo funkciju izvodnicu $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ takvu da je $F(z) \cdot G(z) = 1$, tj. takvu da vrijedi $a_0 b_0 = 1$, $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$, $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \ldots, \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ za $n \geq 1$. Vidimo da koeficijente od $G(z)$ možemo definirati induktivno: $b_0 = \frac{1}{a_0}$, $b_1 = \frac{-1}{a_0} a_1 b_0$, $b_2 = \frac{-1}{a_0}(a_1 b_1 + a_2 b_0), \ldots, b_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ za $n \geq 1$. □

Naš polinom je reda $\mathrm{ord}(1-z-z^2) = 0$, pa je invertibilan u $\mathbb{C}[[z]]$. Koeficijente inverza dobivamo rekurzivno, kao u dokazu teorema, ili rastavljanjem na parcijalne razlomke i razvojem u red potencija, kao u primjeru 10.4. Iz relacije $(1 - z - z^2) \cdot F(z) = z$, gdje je $F(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ funkcija izvodnica za Fibonaccijeve brojeve, vidimo da je $(1-z-z^2)^{-1} = \sum_{n\geq 0} F_{n+1} z^n$.

Primjer 10.7. *Niz (a_n) zadan je rekurzijom $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_0 + \ldots + a_n$, $n \geq 0$. Odredite funkciju izvodnicu tog niza i izvedite formulu za opći član.*

Rješenje. Neka je $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Funkcija izvodnica niza $(a_{n+1})_{n\geq 0}$ je $\frac{F(z)-1}{z}$, a funkcija izvodnica niza $(a_0+\ldots+a_n)_{n\geq 0}$ je $(1+z+z^2+\ldots)\cdot F(z) = \frac{F(z)}{1-z}$. Izjednačavanjem dobivamo $\frac{F(z)-1}{z} = \frac{F(z)}{1-z} \Rightarrow F(z) = \frac{1-z}{1-2z}$. Razvijemo tu funkciju u red potencija:

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-2z}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n\geq 0} 2^n z^n\right) = 1 + \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} z^n.$$

Iz toga vidimo da je

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0, \\ 2^{n-1}, & \text{za } n \geq 1. \end{cases}$$

□

Primjer 10.8. *Nađite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu niza $b_n = n$, $n \geq 0$.*

Rješenje. Neka je $F(z)$ funkcija izvodnica niza (a_n). U prethodnom primjeru vidjeli smo da niz $b_n = a_0 + \ldots + a_n$ ima funkciju izvodnicu $G(z) = \frac{F(z)}{1-z}$. Niz $b_n = n$ dobijemo ako uzmemo $a_0 = 0$ i $a_n = 1$ za $n \geq 1$. Odgovarajuća funkcija izvodnica je $F(z) = \sum_{n\geq 1} z^n = z \cdot \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{z}{1-z}$, pa je $G(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. □

Drugi način za riješiti prethodni primjer je s pomoću *formalne derivacije*. Za $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ definiramo

$$F'(z) = \sum_{n\geq 1} n\, a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Iz analize znamo da apsolutno konvergentne redove potencija možemo derivirati "član po član". Na isti način deriviramo formalne redove potencija. Formalna derivacija ima svojstva koja znamo iz analize.

Teorem 10.9. *Za sve* $F(z), G(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *vrijedi*

$$(\alpha F(z) + \beta G(z))' = \alpha F'(z) + \beta G'(z),$$

$$(F(z) \cdot G(z))' = F'(z) \cdot G(z) + F(z) \cdot G'(z).$$

Dokaz. Linearnost formalne derivacije je lako provjeriti. Dokažimo pravilo za formalnu derivaciju produkta. Neka je $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ i $G(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Primjenom formalne derivacije na formulu (10.2) vidimo da je koeficijent uz z^n u $(F(z) \cdot G(z))'$ jednak

$$(n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}.$$

S druge strane računamo koeficijent uz z^n u izrazu $F'(z) \cdot G(z) + F(z) \cdot G'(z)$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (n-k+1) b_{n-k+1} + \sum_{l=0}^{n} (l+1) a_{l+1} b_{n-l}.$$

Za gornju granicu prve sume možemo staviti $n+1$ (dodajemo član 0). U drugoj sumi napravimo supstituciju $k = l+1$ i za donju granicu stavimo 0 umjesto 1, što također ne mijenja sumu:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (n-k+1) a_k b_{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k b_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (n+1-k+k) a_k b_{n+1-k} = (n+1) \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k}.$$

Vidimo da se koeficijenti podudaraju. □

Zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu iz primjera 10.8 dobijemo deriviranjem geometrijskog reda:

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} \implies \sum_{n\geq 0} n\, z^{n-1} = -(1-z)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Zatim pomnožimo sa z:

$$\sum_{n\geq 0} n\, z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

U dosadašnjim primjerima razmatrali smo nizove čije su funkcije izvodnice racionalne funkcije. To su nizovi koji zadovoljavaju homogene linearne rekurzije. Točnije, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 10.10. *Neka je* $Q(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_d z^d = \prod_{i=1}^{k} (1-\gamma_i z)^{d_i}$ *kompleksni polinom stupnja* d *(*α_i *su koeficijenti, a* $\frac{1}{\gamma_i}$ *su nultočke kratnosti* d_i*). Za niz* $(a_n)_{n\geq 0}$ *je ekvivalentno:*

1. *niz ima funkciju izvodnicu oblika* $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$*, pri čemu je* $P(z)$ *neki polinom stupnja manjeg od* d*,*

2. *niz zadovoljava rekurziju* $a_{n+d} + \alpha_1\, a_{n+d-1} + \alpha_2\, a_{n+d-2} + \ldots + \alpha_d\, a_n = 0$, $\forall n \geq 0$,

3. *niz je zadan formulom oblika* $a_n = \sum\limits_{i=1}^{k} P_i(z)\,\gamma_i^n$, *pri čemu su* $P_i(z)$ *polinomi stupnja manjeg od* d_i.

Dokaz ovog teorema nalazi se u knjizi [38, teorem 4.1.1 na str. 535]. Primjer niza čija funkcija izvodnica nije racionalna funkcija čine Catalanovi brojevi.

Primjer 10.11. *Iz Segnerove rekurzije* $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}$ *(teorem 3.3) izvedite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu niza Catalanovih brojeva.*

Rješenje. Neka je $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} C_n z^n$. Na desnoj strani rekurzije je konvolucija niza (C_n) sa samim sobom. Zato vrijedi

$$F(z)^2 = F(z)\cdot F(z) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k\, C_{n-k}\right) z^n = \sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^n.$$

Pomnožimo lijevu i desnu stranu sa z:

$$z\cdot F(z)^2 = \sum_{n\geq 0} C_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} C_n z^n = \sum_{n\geq 0} C_n z^n - C_0 = F(z) - 1.$$

Funkcija izvodnica zadovoljava kvadratnu jednadžbu $zF(z)^2 - F(z) + 1 = 0$. Riješimo je po $F(z)$:

$$F(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{10.10}$$

Predznak $\pm$ odredimo iz $1 = C_0 = F(0) = \lim\limits_{z\to 0} F(z)$. Vidimo da je $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z} = \infty$, a iz L'Hospitalova pravila slijedi $\lim\limits_{z\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-4z}}\cdot(-4)}{2} = 1 = C_0$. Zaključujemo da je $F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. $\square$

U teoremu 3.2 izveli smo formulu $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ prebrojavanjem Dyckovih putova. Sad je možemo izvesti razvojem ove funkcije u red potencija. Kao alat nam treba binomni red:

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n, \qquad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{10.11}$$

Ovdje je

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}$$

generalizirani binomni koeficijent, koji se za $\alpha \in \mathbb{N}_0$ podudara s običnim binomnim koeficijentom. U tom slučaju vrijednosti za $n > \alpha$ su 0 i suma je konačna (dobivamo binomni teorem). Za $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ suma je beskonačna, a red apsolutno konvergira na području $|z| < 1$. Nama treba slučaj $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$F(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z} = \frac{1}{2z}\left[1-(1-4z)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2z}\left[1-\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4z)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2z}\left[\cancel{1} - \cancel{\binom{\frac{1}{2}}{0}} - \sum_{n\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 4^n z^n\right] = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 4^n z^{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^{n+1}4^{n+1}z^n = \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^n 4^{n+1}\right] z^n.$$

Izraz uz z^n u uglatoj zagradi je n-ti Catalanov broj C_n. Raspišimo generalizirani binomni koeficijent i sredimo ga:

$$C_n = \frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^n 4^{n+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!}\cdot(-1)^n 4^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{-(2n-1)}{2}\right)}{(n+1)!}\cdot(-1)^n 2^{2n+2} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+2}\cdot(n+1)!}\cdot 2^{2n+2} =$$

$$= \frac{2^n}{(n+1)!}\cdot\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)} = \frac{\cancel{2^n}}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{(2n)!}{\cancel{2^n}\cdot n!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Formulu (10.10) dobili smo rješavanjem kvadratne jednadžbe. Postavlja se pitanje vrijedi li formula za rješenja kvadratne jednadžbe u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$? U nazivniku je polinom $2x$ koji je stupnja i reda 1 i nije invertibilan u $\mathbb{C}[z]$ niti u $\mathbb{C}[[z]]$. Da bismo opravdali to dijeljenje trebamo još jedan alat iz algebre.

Teorem 10.12. *Neka je R integralna domena. Onda postoji polje F koje sadrži R kao potprsten sa svojstvom da za svako polje E koje sadrži R kao potprsten možemo uložiti polje F u polje E.*

Polje F iz prethodnog teorema jedinstveno je do na izomorfizam i nazivamo ga *poljem razlomaka* integralne domene R. To je "najmanje" polje koje sadrži R kao podprsten. Konstrukcija polja razlomaka F analogna je konstrukciji polja racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ iz prstena cijelih brojeva $\mathbb{Z}$. Dokaz pogledajte u [20, teoremi 4.3, 4.4, 4.5 i korolar 4.6 na str. 143-145]. Jasno, polje razlomaka od $\mathbb{Z}$ je upravo $\mathbb{Q}$. Za prsten polinoma $\mathbb{C}[z]$ polje razlomaka čine racionalne funkcije i označavamo ga $\mathbb{C}(z)$. Polje razlomaka prstena formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$ nazivamo *poljem formalnih Laurentovih*[2] *redova* i označavamo ga $\mathbb{C}((z))$. Elemente od $\mathbb{C}((z))$ možemo zapisati kao redove potencija u kojima je dozvoljeno konačno mnogo negativnih eksponenata.

Teorem 10.13. *Za svaki $F \in \mathbb{C}((z))$, $F \neq 0$ postoje jedinstveni $m \in \mathbb{Z}$ i $G \in \mathbb{C}[[z]]$, $\operatorname{ord} G(z) = 0$ takvi da je $F(z) = z^m \cdot G(z)$. Stavljamo $\operatorname{ord} F(z) := m$.*

[2]Pierre Alphonse Laurent (1813.-1854.), francuski matematičar i inženjer.

Neka je $G(z) = \sum\limits_{i\geq 0} a_i z^i$, $a_0 \neq 0$. Ako je m negativan, tj. $m = -n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, formalni Laurentov red $F(z)$ je oblika

$$F(z) = a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \ldots + a_n + a_{n+1} z + a_{n+2} z^2 + \ldots = \sum_{i \geq -n} a_{n+i} z^i.$$

Dokaz teorema 10.13 pogledajte u [27, teorem 7.48 na str. 258]. Mi ga ilustriramo sljedećim primjerom.

Primjer 10.14. *Nađite multiplikativni inverz funkcije izvodnice Fibonaccijevih brojeva $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} F_n z^n$ u polju formalnih Laurentovih redova $\mathbb{C}((z))$.*

Rješenje. Vrijedi $F_0 = 0$, pa je $\operatorname{ord} F(z) = 1$ i funkcija izvodnica $F(z)$ nema multiplikativni inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$. U primjeru 10.4 izveli smo zatvorenu formulu $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$. Iz toga vidimo da je multiplikativni inverz u polju $\mathbb{C}((z))$

$$F(z)^{-1} = \frac{1}{F(z)} = \frac{1-z-z^2}{z} = z^{-1} - 1 - z.$$

□

U prethodnom primjeru je $\operatorname{ord} F(z)^{-1} = -1$, a općenito vrijedi $\operatorname{ord} F(z)^{-1} = -\operatorname{ord} F(z)$ za svaki $F \in \mathbb{C}((z))$, $F \neq 0$. Sljedeći teorem je poseban slučaj binomnog reda koji je vrlo koristan za prebrojavanje.

Teorem 10.15. $\dfrac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum\limits_{n\geq 0} \dbinom{m+n}{m} z^n.$

Dokaz. Pokažimo prvo da je ovo zaista specijalni slučaj reda (10.11) za $\alpha = -(m+1)$:

$$\begin{aligned}
(1-z)^{-(m+1)} &= \sum_{n\geq 0} \binom{-(m+1)}{n} (-z)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-n)}{n!} (-1)^n z^n = \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{(-1)^n}(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}{n!} \cancel{(-1)^n} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(m+n)!}{m!\cdot n!} z^n = \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{m+n}{m} z^n.
\end{aligned}$$

Teorem možemo dokazati bez pozivanja na binomni red, prebrojavanjem. Lijeva strana je produkt $m+1$ geometrijskih redova:

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \left(\sum_{n\geq 0} z^n\right)^{m+1} = (1 + z + z^2 + \ldots)\cdots(1 + z + z^2 + \ldots).$$

Iz $m+1$ zagrada biramo članove oblika $z^{x_1}, \ldots, z^{x_{m+1}}$ i množimo ih. Rezultat doprinosi jedinicu koeficijentu uz z^n uvijek kad je $x_1 + \ldots + x_{m+1} = n$. Prema tome, koeficijent uz z^n jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja te jednadžbe, a to je po "principu kuglica i štapića" binomni koeficijent $\binom{m+n}{m}$. □

U prethodnom teoremu dokazali smo prebrojavanjem rezultat o redovima potencija. Funkcije izvodnice u kombinatorici obično koristimo obrnuto: direktno napišemo funkciju izvodnicu za neki problem prebrojavanja te računanjem s formalnim redovima potencija izvedemo formulu za broj rješenja. U sljedećim primjerima $\langle z^n \rangle$ je operator koji funkciji izvodnici pridružuje koeficijent uz z^n:

$$\langle z^n \rangle F(z) = \langle z^n \rangle \sum_{k\geq 0} a_k z^k = a_n.$$

Primjer 10.16. *Odredite broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 35$ *uz uvjete* $3 \leq x_i \leq 9$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Rješenje. Za $n \in \mathbb{N}_0$, neka je a_n broj rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$ uz zadane uvjete. Možemo direktno napisati funkciju izvodnicu niza (a_n):

$$F(z) = (z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9)^5.$$

Objašnjenje je slično kao u dokazu teorema 10.15: iz zagrada biramo faktore oblika z^{x_i}, a njihov produkt doprinosi jedinicu koeficijentu uz z^n uvijek kad vrijedi jednadžba $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$. Uvjete $3 \leq x_i \leq 9$ "ugradili" smo u funkciju izvodnicu stavljajući samo odgovarajuće potencije od z u zagrade. Sredimo formulu kojom je zadana funkcija izvodnica da bismo lakše došli do koeficijenata a_n:

$$F(z) = z^{15}(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^5 = z^{15}\left(\frac{1 - z^7}{1 - z}\right)^5 = z^{15}(1 - z^7)^5 \frac{1}{(1 - z)^5}.$$

Koristili smo se formulom za sumu konačnog geometrijskog reda

$$1 + z + \ldots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}. \tag{10.12}$$

Trebamo odrediti koeficijent a_{35}:

$$\begin{aligned}\langle z^{35} \rangle F(z) &= \langle z^{20} \rangle \left[(1 - z^7)^5 \frac{1}{(1 - z)^5}\right] = \\ &= \langle z^{20} \rangle \left[\left(1 - \binom{5}{1} z^7 + \binom{5}{2} z^{14} - \binom{5}{3} z^{21} + \ldots\right) \sum_{n\geq 0} \binom{n + 4}{4} z^n\right].\end{aligned}$$

Prvi faktor raspisali smo po binomnom teoremu, a drugi po teoremu 10.15. Iz prvog faktora biramo potencije od z s eksponentima manjim od 20 i dopunjujemo ih do z^{20} potencijama iz drugog faktora:

$$a_{35} = 1 \cdot \binom{20 + 4}{4} - \binom{5}{1} \cdot \binom{13 + 4}{4} + \binom{5}{2} \cdot \binom{6 + 4}{4} = 826.$$

Drugi način za riješiti zadatak je supstitucijom $y_i = x_i - 3$. Prebrojavamo cjelobrojna rješenja jednadžbe $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20$ uz uvjete $0 \leq y_i \leq 6$ s pomoću formule uljučivanja-isključivanja:

$$\binom{24}{4} - \binom{5}{1}\binom{17}{4} + \binom{5}{2}\binom{10}{4}.$$

Prvi član je broj svih nenegativnih rješenja, zatim oduzmemo broj rješenja za koje vrijedi $y_i > 6$ za jedan indeks i, pa dodamo broj rješenja za koje je uvjet narušen za dva indeksa i. Uvjet ne može biti narušen za tri ili više indeksa jer bi tada suma bila veća od 20. □

Primjer 10.17. *Pismeni ispit sastoji se od* 5 *zadataka od kojih svaki nosi* 20 *bodova. Student je redom osvojio* 18, 10, 5, 5 *i* 2 *boda, dakle ukupno* 40 *bodova. Na koliko načina mu asistent može pokloniti* 5 *bodova koji mu nedostaju za prolaz?*

Rješenje. Neka je x_i broj bodova poklonjenih na i-tom zadatku. Prebrojavamo cjelobrojna rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 5$ uz uvjete $0 \le x_1 \le 2$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$. Neka je $F(z)$ funkcija izvodnica za broj cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = n$ uz iste uvjete. Kao u prethodnom primjeru vidimo da je

$$F(z) = (1+z+z^2)(1+z+z^2+\ldots)^4 = (1+z+z^2)\frac{1}{(1-z)^4} = (1+z+z^2)\sum_{n\ge 0}\binom{n+3}{3}z^n.$$

Tražimo koeficijent uz z^5:

$$\langle z^5\rangle F(z) = \binom{5+3}{3} + \binom{4+3}{3} + \binom{3+3}{3} = \binom{8}{3} + \binom{7}{3} + \binom{6}{3} = 111.$$

□

Primjer 10.18. *Bacamo m različito obojanih igraćih kocka. Napišite funkciju izvodnicu za broj načina da zbroj dobivenih brojeva bude najviše n. Izračunajte taj broj za $m = 3$ i $n = 10$.*

Rješenje. Problem je ekvivalentan prebrojavanju cjelobrojnih rješenja nejednadžbe $x_1 + \ldots + x_m \le n$ uz uvjete $1 \le x_i \le 6$, $i = 1, \ldots, m$. Neka je a_n broj načina da zbroj dobivenih brojeva bude točno n i $F(z)$ odgovarajuća funkcija izvodnica. Ovaj problem odgovara prebrojavanju cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + \ldots + x_m = n$ uz iste uvjete. Znamo da je

$$F(z) = (z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)^m = z^m(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5 \text{[redacted]})^m = z^m\left(\frac{1-z^6}{1-z}\right)^m.$$

Neka je b_n broj rješenja nejednadžbe i $G(z)$ funkcija izvodnica tog niza. Vrijedi $b_n = a_0 + \ldots + a_n$, pa kao u primjeru 10.8 zaključujemo da je

$$G(z) = \frac{F(z)}{1-z} = \frac{z^m(1-z^6)^m}{(1-z)^{m+1}}.$$

Traženi broj za $m = 3$ i $n = 10$ je

$$\langle z^{10}\rangle\left[\frac{z^3(1-z^6)^3}{(1-z)^4}\right] = \langle z^7\rangle\left[(1-3z^6+3z^{12}-z^{18})\sum_{n\ge 0}\binom{n+3}{3}z^n\right] = \binom{10}{3} - 3\binom{4}{3} = 108.$$

□

U prethodnim primjerima naučili smo direktno zapisati funkciju izvodnicu za broj cjelobrojnih rješenja jednadžbi i nejednadžbi oblika $x_1 + \ldots + x_m = n$ uz uvjete na varijable x_i. Neka je $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ zadani m-člani skup. Sličnim razmišljanjem zaključujemo da je funkcija izvodnica za broj n-članih podskupova tog skupa dana s

$$F(z) = (1+z)^m = (1+z)\cdots(1+z).$$

Množimo m faktora oblika $1+z$. Ako iz i-tog faktora izaberemo 1, to znači da element a_i nije u podskupu, a ako izaberemo z, onda jest u podskupu. Alternativno, koeficijenti su $a_n = \binom{m}{n}$ pa iz binomnog teorema slijedi

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \binom{m}{n} z^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} z^n = (1+z)^m.$$

Analogno možemo zapisati funkciju izvodnicu za n-člane podmultiskupove multiskupa $M = \{a_1^{e_1}, \ldots, a_m^{e_m}\}$:

$$F(z) = (1+z+z^2+\ldots+z^{e_1})\cdots(1+z+z^2+\ldots+z^{e_m}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1-z^{e_i+1}}{1-z}.$$

Varijante ove funkcije izvodnice za broj podmultiskupova uz uvjete na broj pojedinih elemenata koristimo u zadacima 10.8 i 10.9. U idući dva primjera upoznajemo probleme prebrojavanja koje možemo riješiti sustavom funkcija izvodnica.

Primjer 10.19. *Nacrtajte usmjereni graf zadan matricom susjedstva*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

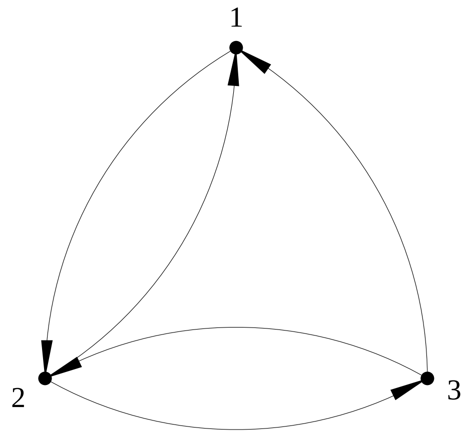
Odredite funkciju izvodnicu i formulu za broj šetnji duljine n koje počinju i završavaju u prvom vrhu tog grafa.

Rješenje. Usmjereni graf je prikazan na slici 10.1. Neka je a_n broj šetnji duljine n od vrha 1 do vrha 1, b_n broj šetnji duljine n od vrha 1 do vrha 2, a c_n broj šetnji duljine n od vrha 1 do vrha 3. Ta tri niza zadovoljavaju sljedeći sustav rekurzija i početne uvjete:

$$\begin{aligned} a_0 &= \underline{1}, \quad a_n = b_{n-1} + c_{n-1}, \\ b_0 &= \underline{0}, \quad b_n = a_{n-1} + c_{n-1}, \\ c_0 &= \underline{0}, \quad c_n = b_{n-1}. \end{aligned}$$

Prva jednadžba vrijedi jer do vrha 1 možemo doći iz vrha 2 i iz vrha 3, druga jer do vrha 2 možemo doći iz vrha 1 i iz vrha 3, a treća jer do vrha 3 možemo doći samo iz vrha 2. Ako su $A(z)$, $B(z)$ i $C(z)$ redom funkcije izvodnice ta tri niza, iz rekurzija vidimo da zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + z\cdot B(z) + z\cdot C(z), \\ B(z) &= z\cdot A(z) + z\cdot C(z), \\ C(z) &= z\cdot B(z). \end{aligned}$$



Slika 10.1: Usmjereni graf iz primjera 10.19.

Rješavanjem ovog sustava po $A(z)$, $B(z)$ i $C(z)$ dobijemo $A(z) = \frac{z-1}{z^2+z-1}$. Rastavljanjem na parcijalne razlomke i razvojem u red potencija, slično kao u primjeru 10.4, dobijemo formulu

$$a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

□

Primjer 10.20. *Neka je t_n broj nizova duljine n koji se sastoje od znamenaka 0, 1 i 2 u kojima nema susjednih znamenaka 0 i 1. Odredite funkciju izvodnicu za t_n i iz nje izvedite formulu za t_n.*

Rješenje. Neka je a_n broj takvih nizova koji završavaju s 0, b_n broj takvih nizova koji završavaju s 1, a c_n broj takvih nizova koji završavaju s 2. Vrijedi sljedeći sustav rekurzija:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = a_{n-1} + c_{n-1}, \\ b_0 &= 0, \quad b_n = b_{n-1} + c_{n-1}, \\ c_0 &= 1, \quad c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}. \end{aligned}$$

Prva jednadžba vrijedi jer niz duljine n koji završava s 0 dobijemo dodavanjem 0 na niz duljine $n-1$ koji završava s 0 ili s 2. Ne smijemo dodati 0 na niz koji završava s 1 da ne dobijemo susjedne znamenke 0 i 1. Analogno vidimo da vrijede druga i treća jednadžba. Početne uvjete za $n = 0$ izabrali smo tako da iz rekurzije slijedi $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, što se slaže s brojem nizova duljine 1. Vidimo da odgovarajuće funkcije izvodnice zadovoljavaju sustav

$$\begin{aligned} A(z) &= z \cdot A(z) + z \cdot C(z), \\ B(z) &= z \cdot B(z) + z \cdot C(z), \\ C(z) &= 1 + z \cdot A(z) + z \cdot B(z) + z \cdot C(z). \end{aligned}$$

Rješavanjem po $A(z)$, $B(z)$ i $C(z)$ dobivamo

$$A(z) = B(z) = \frac{z}{1-2z-z^2}, \quad C(z) = \frac{1-z}{1-2z-z^2}.$$

Vrijedi $t_n = a_n + b_n + c_n$, pa je odgovarajuća funkcija izvodnica

$$T(z) = A(z) + B(z) + C(z) = \frac{1+z}{1-2z-z^2}.$$

Rastavljanjem na parcijalne razlomke i razvojem u red potencija slijedi

$$t_n = \frac{(1-\sqrt{2})^{n+1} + (1+\sqrt{2})^{n+1}}{2}.$$

□

10.2 Eksponencijalne funkcije izvodnice

Funkcija izvodnica niza $a_n = n!$ ima radijus konvergencije 0 i ne možemo je zapisati u zatvorenom obliku. Ponekad je laše računati s funkcijom izvodnicom niza $\left(\frac{a_n}{n!}\right)$, tj. sa

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Taj formalni red potencija nazivamo *eksponencijalnom funkcijom izvodnicom* niza (a_n). Naš niz $a_n = n!$ ima eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$. Ovo su još dva primjera eksponencijalnih funkcija izvodnica:

$$(1,1,1,1,\ldots) \quad \longleftrightarrow \quad F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z,$$

$$(1,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\ldots) \quad \longleftrightarrow \quad F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha z)^n}{n!} = e^{\alpha z}.$$

Neka su $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ i $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$ eksponencijalne funkcije izvodnice nizova (a_n) i (b_n). Neka je njihov produkt u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$ eksponencijalna funkcija izvodnica niza (c_n):

$$F(z) \cdot G(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n.$$

Tada vrijedi

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \quad \Longrightarrow \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Niz (c_n) nazivamo *binomnom konvolucijom* nizova (a_n) i (b_n).

Sjetimo se da je Bellov broj B_n jednak broju particija n-članog skupa. U teoremu 3.9 dokazali smo rekurziju

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_{n-1-k} \quad \Longrightarrow \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

Na desnoj strani prepoznajemo binomnu konvoluciju konstantnog niza $(1,1,1,\ldots)$ i niza (B_n). Konstantni niz ima eksponencijalnu funkciju izvodnicu e^z, a eksponencijalnu funkciju izvodnicu za Bellove brojeve označimo $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$. Pomnožimo ih i iskoristimo rekurziju:

$$e^z \cdot F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} \right) z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n.$$

Eksponencijalnu funkciju izvodnicu za "pomaknute" Bellove brojeve $(B_1, B_2, B_3, \ldots)$ na drugi način dobivamo formalnim deriviranjem:

$$F'(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} \cdot n \cdot z^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{B_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n.$$

Prema tome, $F(z)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $F'(z) = e^z \cdot F(z)$. Riješimo je metodom separacije varijabli:

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = e^z \;\;\Rightarrow\;\; (\ln F(z))' = e^z \;\;\Rightarrow\;\; \ln F(z) = \int e^z \mathrm{d}z = e^z + C \;\;\Rightarrow\;\; F(z) = e^{e^z + C}.$$

Konstantu C odredimo iz $F(0) = e^{1+C} = B_0 = 1 \;\Rightarrow\; C = -1$. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 10.21. *Eksponencijalna funkcija izvodnica za Bellove brojeve je* $F(z) = e^{e^z - 1}$.

Binomnu inverziju (korolar 7.4) također možemo dokazati računanjem s eksponencijalnim funkcijama izvodnica. Neka su $(f_n)_{n\geq 0}$ i $(g_n)_{n\geq 0}$ kompleksni nizovi, tj. funkcije $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, a $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{f_n}{n!} z^n$ i $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{g_n}{n!} z^n$ odgovarajuće eksponencijalne funkcije izvodnice. Prema binomnoj inverziji sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalentne:

(a) $\displaystyle g_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i, \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0,$

(b) $\displaystyle f_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} g_i, \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Tvrdnju (a) možemo zapisati kao $G(z) = e^z \cdot F(z)$, a tvrdnju (b) kao $F(z) = e^{-z} \cdot G(z)$. U tom zapisu ekvivalencija je očita.

Neka je $M = \{a_1^\infty, \ldots, a_k^\infty\}$ multiskup s k različitih elemenata beskonačne kratnosti. U prethodnoj cjelini naučili smo zapisati običnu funkciju izvodnicu za broj n-kombinacija od M:

$$F(z) = (1 + z + z^2 + \ldots) \cdots (1 + z + z^2 + \ldots) = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}.$$

Eksponencijalne funkcije izvodnice pogodne su za prebrojavanje n-permutacija od M. To su nizovi duljine n sastavljeni od simbola $a_1, \ldots, a_k$ koji se mogu ponavljati. Eksponencijalna funkcija izvodnica za broj takvih nizova je

$$F(z) = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) = (e^z)^k = e^{kz}.$$

Za koeficijent uz z^n iz i-tog faktora biramo član oblika $\frac{z^{x_i}}{x_i!}$ uz uvjet $x_1 + \ldots + x_k = n$. Množenjem dobijemo $\frac{z^n}{x_1! \cdots x_k!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{x_1, \ldots, x_k} z^n$. Multinomni koeficijent $\binom{n}{x_1, \ldots, x_k}$ predstavlja broj permutacija podmultiskupa $\{a_1^{x_1}, \ldots, a_k^{x_k}\}$. Ukupan broj n-permutacija od M dobijemo sumiranjem po svim n-podmultiskupovima, tj. nenegativnim cjelobrojnim rješenjima jednadžbe $x_1 + \ldots + x_k = n$. To se kod množenja k faktora e^z u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$ događa automatski!

Alternativna interpretacija koeficijenata ove eksponencijalne funkcije izvodnice je broj funkcija s n-članog skupa u k-člani skup, za fiksni k. Taj broj je k^n, a odgovarajuća eksponencijalna funkcija izvodnica je $F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{k^n}{n!} z^n = \sum\limits_{n \geq 0} \frac{(kz)^n}{n!} = e^{kz}$. U sljedeća dva primjera i u zadacima 10.14–10.16 upoznajemo varijante ove eksponencijalne funkcije izvodnice s ograničenjima na broj simbola a_i u n-permutaciji.

Primjer 10.22. *Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za broj nizova duljine n sastavljenih od elemenata multiskupa $\{a^\infty, b^\infty, c^2\}$ koji sadrže bar dva slova a i paran broj slova b. Izračunajte broj takvih nizova za $n = 10$.*

Rješenje. Tražena eksponencijalna funkcija izvodnica je

$$F(z) = \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!}\right).$$

Zagrade odgovaraju redom slovima a, b i c. Zapišimo je u obliku iz kojeg ćemo lakše prepoznati koeficijente:

$$\begin{aligned}
F(z) &= (e^z - 1 - z) \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)(e^{2z} + 1) - \left(1 + 2z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3\right)(e^z + e^{-z})\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)\left(2 + \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n!} z^n\right) - \left(1 + 2z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3\right) \sum_{n \geq 0} \frac{2}{(2n)!} z^{2n}\right].
\end{aligned}$$

Broj nizova za $n = 10$ je

$$\boxed{10!}\,\underline{\langle z^{10} \rangle F(z)} = \frac{10!}{2}\left[\frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^9}{9!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2^8}{8!} - \frac{2}{10!} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{8!}\right] = 8696.$$

□

Primjer 10.23. *U vlaku se nalazi n putnika. Svaki od putnika izlazi na jednoj od triju stanica. Neka je a_n broj načina na koje putnici mogu izaći iz vlaka tako da niti na jednoj stanici ne izađu točno dva putnika. Putnici su različiti (nije svejedno izlazi li na prvoj stanici Ana ili Branko) i stanice su različite (nije svejedno izlazi li Ana na prvoj ili na drugoj stanici). Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza (a_n) i razvojem u red potencija izvedite formulu za a_n.*

Rješenje. Označimo putnike brojevima $1, \ldots, n$, a stanice slovima a, b, c. Raspored izlaženja identificiramo s funkcijom $f : \{1, \ldots, n\} \to \{a, b, c\}$ tako da svakom putniku pridružimo stanicu na kojoj izlazi. Niti na jednoj stanici ne izlaze točno dva putnika, pa funkcija zadovoljava uvjete na kardinalitete praslika $|f^{-1}(a)| \neq 2$, $|f^{-1}(b)| \neq 2$ i $|f^{-1}(c)| \neq 2$. Alternativno, o rasporedu izlaženja možemo razmišljati kao nizu duljine n sastavljenom od slova a, b, c (n-permutaciji multiskupa $\{a^\infty, b^\infty, c^\infty\}$) u kojem broj pojavljivanja niti jednog slova nije 2. Eksponencijalna funkcija izvodnica za broj takvih funkcija ili nizova je

$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{l} = \frac{n!}{k!\,l!\,(n-k-l)!}$

$$F(z) = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots\right)^3 = \left(e^z - \frac{z^2}{2!}\right)^3 = e^{3z} - \frac{3}{2} z^2 e^{2z} + \frac{3}{4} z^4 e^z - \frac{1}{8} z^6.$$

Traženi broj rasporeda izlaženja je

$$a_n = n! \langle z^n \rangle F(z) = n! \left(\frac{3^n}{n!} - \frac{3}{2} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{3}{4} \frac{1}{(n-4)!} - \frac{1}{8} \delta_{n6} \right).$$

Ovdje je δ_{n6} Kroneckerov simbol koji poprima vrijednost 1 ako je $n = 6$, a 0 inače. Sređivanjem dobijemo

$$a_n = \begin{cases} 3^n - 3n^{\underline{2}}\, 2^{n-3} + \frac{3}{4} n^{\underline{4}}, & \text{za } n \neq 6, \\ 189, & \text{za } n = 6. \end{cases}$$

□

10.3 Konvergencija u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$

U ovoj cjelini uglavnom slijedimo knjigu [27]. Riješimo prvo jedan motivacijski primjer, koji će nas dovesti do funkcije izvodnice za broj particija prirodnih brojeva.

Primjer 10.24. *U novčaniku imamo* 7 *kovanica od jednog eura,* 5 *kovanica od dva eura,* 4 *novčanica od pet eura,* 6 *novčanica od deset eura i* 3 *novčanice od dvadeset eura. Napišite funkciju izvodnicu za broj načina na koji možemo platiti račun od n eura. Kovanice i novčanice iste vrijednosti smatramo identičnima.*

Rješenje. Tražena funkcija izvodnica je

$$\begin{aligned} F(z) = &(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7) \cdot (1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + z^{10}) \cdot (1 + z^5 + \\ &+ z^{10} + z^{15} + z^{20}) \cdot (1 + z^{10} + z^{20} + z^{30} + z^{40} + z^{50} + z^{60}) \cdot (1 + z^{20} + z^{40} + z^{60}). \end{aligned}$$

Prva zagrada odgovara kovanicama od jednog eura, druga kovanicama od dva eura, treća novčanicama od pet eura, četvrta novčanicama od deset eura, a peta novčanicama od dvadeset eura. Iz zagrada biramo članove oblika z^{x_1}, z^{2x_2}, z^{5x_3}, z^{10x_4}, z^{20x_5} i množimo ih te dobivamo potenciju $z^{x_1+2x_2+5x_3+10x_4+20x_5}$. Koeficijent uz z^n odgovara broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 20x_5 = n$ uz uvjete $0 \leq x_1 \leq 7$, $0 \leq x_2 \leq 5$, $0 \leq x_3 \leq 4$, $0 \leq x_4 \leq 6$ i $0 \leq x_5 \leq 3$. To je upravo broj načina na koji možemo platiti račun od n eura: x_1 je broj kovanica od jednog eura kojima plaćamo račun, x_2 broj kovanica od dva eura kojima plaćamo račun itd. Uz pomoć formule (10.12) za sumu konačnog geometrijskog reda možemo pojednostavniti funkciju izvodnicu:

$$F(z) = \frac{1-z^8}{1-z} \cdot \frac{1-z^{12}}{1-z^2} \cdot \frac{1-z^{25}}{1-z^5} \cdot \frac{1-z^{70}}{1-z^{10}} \cdot \frac{1-z^{80}}{1-z^{20}}.$$

□

Particija prirodnog broja n je niz prirodnoh brojeva $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ takav da je $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_k$ i $\mu_1 + \ldots + \mu_k = n$. U cjelini 3.3 broj particija od n označili smo $p(n)$. Sada želimo odrediti funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} p(n)z^n$.

Primijetimo da je particija μ jednoznačno određena s brojem pribrojnika $1, 2, 3, \ldots$ koje sadrži. Neka je $x_i = |\{j \mid \mu_j = i\}|$ broj pribrojnika i u particiji μ. Onda vrijedi

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots = n.$$

Suma na lijevoj strani je konačna jer su skoro svi x_i jednaki 0. Broj particija $p(n)$ jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rješenja ove jednadžbe, a to je kao u primjeru 10.24 koeficijent uz z^n u produktu

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 + z + z^2 + z^3 \ldots) \cdot (1 + z^2 + z^4 + z^6 \ldots) \cdot (1 + z^3 + z^6 + z^9 + \ldots) \cdots = \\ &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^3} \cdots = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-z^k}. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Faktori $\frac{1}{1-z^k}$ su geometrijski redovi, tj. elementi prstena formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$, ali ima ih beskonačno mnogo. Za opravdanje beskonačnih produkata u $\mathbb{C}[[z]]$ ipak nam treba pojam limesa i konvergencije. Odgodit ćemo opravdanje za kasnije i prvo pokazati nekoliko Eulerovih rezultata o particijama koje je dokazao računanjem s beskonačnim produktima.

Teorem 10.25. *Broj particija prirodnog broja n u neparne dijelove jednak je broju particija od n u međusobno različite dijelove.*

Dokaz. Slično kao (10.13), funkciju izvodnicu za broj particija od n u neparne dijelove (pribrojnike) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 + z + z^2 + z^3 \ldots) \cdot (1 + z^3 + z^6 + z^9 + \ldots) \cdot (1 + z^5 + z^{10} + z^{15} \ldots) \cdots = \\ &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^3} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdots = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-z^{2k-1}}. \end{aligned} \tag{10.14}$$

Funkcija izvodnica za broj particija od n u međusobno različite dijelove je

$$G(z) = (1+z)\cdot(1+z^2)\cdot(1+z^3)\cdots = \prod_{k\geq 1}(1+z^k). \tag{10.15}$$

Prirodan broj k u particiji se pojavljuje jednom (iz k-tog faktora biramo z^k) ili nijednom (iz k-tog faktora biramo 1). Dovoljno je računanjem u $\mathbb{C}[[z]]$ pokazati da je $F(z) = G(z)$. Prvo $F(z)$ pomnožimo s međusobno inverznim produktima $\prod\limits_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}}$ i $\prod\limits_{k\geq 1}(1-z^{2k})$:

$$F(z) = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k-1}} = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k-1}}\cdot\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}}\cdot\prod_{k\geq 1}(1-z^{2k}).$$

Prva dva produkta spojimo u jedan produkt geometrijskih redova $\frac{1}{1-z^k}$ po svim prirodnim brojevima k, a treći produkt rastavimo kao razliku kvadrata:

$$F(z) = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^k}\cdot\prod_{k\geq 1}(1-z^k)(1+z^k) = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^k}\cdot\prod_{k\geq 1}(1-z^k)\cdot\prod_{k\geq 1}(1+z^k).$$

Prva dva produkta su međusobno inverzni i možemo ih kratiti, pa ostaje $F(z) = G(z)$. $\square$

Moguće je uspostaviti bijekciju između particija od n u neparne dijelove i u međusobno različite dijelove, ali nije jednostavno. Dvije takve bijekcije opisane su u knjizi [27] na str. 300-303. Poznati rezultati o broju particija su takozvani Rogers[3]-Ramanujanovi[4] identiteti, koji se također dokazuju s pomoću funkcija izvodnica (vidi [43]).

Idući cilj je izvesti rekurziju za niz $(p(n))_{n\geq 0}$. Euler je došao do te rekurzije proučavajući multiplikativni inverz funkcije izvodnice za broj particija (10.13), tj.

$$F(z) = (1-z)\cdot(1-z^2)\cdot(1-z^3)\cdots = \prod_{k\geq 1}(1-z^k). \tag{10.16}$$

Množenjem prvih nekoliko faktora i sređivanjem vidimo da funkcija izvodnica počinje s

$$F(z) = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + z^{26} - z^{35} - z^{40} + z^{51} + z^{57} - \ldots.$$

Da bismo dobili koeficijente do potencije z^n, dovoljno je množiti $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-z^k)$. Faktori $1-z^k$ za $k > n$ ne utječu na koeficijente uz z^k za $k \leq n$. Uočimo da koeficijenti počinju s 1, zatim slijede dva koeficijenta -1, pa dva 1 itd. Eksponenti koji se pojavljuju su

$$1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 12,\ 15,\ 22,\ 26,\ 35,\ 40,\ 51,\ 57\ldots$$

To su takozvani *generalizirani peterokutni brojevi.* U zadatku 1.9 izveli smo formulu $p_n = \frac{n(3n-1)}{2}$ za n-ti peterokutni broj (slika 1.3). Generalizirane peterokutne brojeve dobivamo uvrštavanjem u tu formulu redom $n = 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Za neparne indekse to je p_n, a za parne $\frac{n(3n+1)}{2}$.

---

[3]Leonard James Rogers (1862.-1933.), britanski matematičar.

[4]Srinivasa Ramanujan (1887.-1920.), indijski matematičar.

Teorem 10.26 (Eulerov teorem o peterokutnim brojevima)**.**

$$\prod_{k\geq 1}(1-z^k) = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \left[z^{n(3n-1)/2} + z^{n(3n+1)/2}\right].$$

Dokaz teorema dan je u [27, teorem 8.26 na str. 303]. Iz teorema možemo izvesti rekurziju za niz $(p(n))$:

$$\left(\sum_{n\geq 0} p(n)z^n\right)\cdot\left(1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n \left[z^{n(3n-1)/2} + z^{n(3n+1)/2}\right]\right) = 1.$$

Koeficijent na lijevoj strani uz z^n, $n \geq 1$ je nula:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) + \ldots = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots \quad \Longrightarrow$$

$$p(n) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\left[p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right)\right]. \tag{10.17}$$

Kao početne uvjete uzimamo $p(0) = 1$ i $p(n) = 0$ za $n < 0$, pa je suma na desnoj strani konačna.

Teorem 10.27. *Niz* $(p(n))_{n\geq 0}$ *zadovoljava rekurziju* (10.17) *uz početne uvjete* $p(0) = 0$ *i* $p(n) = 0$ *za* $n < 0$.

Vidjeli smo da računanjem s beskonačnim produktima u $\mathbb{C}[[z]]$ možemo izvesti zanimljive rezultate o broju particija. Trebamo još opravdati beskonačne produkte, "beskonačna kraćenja" i druge korake iz dokaza teorema 10.25. Ideja je sadržana u primjedbi da prvih n koeficijenata u beskonačnom produktu (10.16) možemo odrediti množenjem konačno mnogo faktora. Prvo ćemo definirati konvergenciju nizova u $\mathbb{C}[[z]]$, a s pomoću toga konvergenciju beskonačnih suma i produkata.

Neka je $(F_k(z))_{k\in\mathbb{N}}$ niz funkcija izvodnica. Koeficijente označimo $a_n^{(k)}$:

$$F_k(z) = \sum_{n\geq 0} a_n^{(k)} z^n.$$

Kažemo da taj niz konvergira prema funkciji izvodnici $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ i pišemo

$$\lim_{k\to\infty} F_k(z) = G(z) \tag{10.18}$$

ako za zvaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $a_n^{(k)} = b_n$. Dakle, za fiksni n, niz koeficijenata $(a_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ uz z^n nakon određenog indeksa k_0 postaje konstantan i jednak koeficijentu $b_n = \langle z^n\rangle G(z)$ (niz se "stabilizira" na b_n). To je jači pojam konvergencije nizova u $\mathbb{C}$ od uobičajenog. Po standardnoj definiciji, $\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = b_n$ znači $(\forall\varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Rightarrow |a_n^{(k)} - b_n| < \varepsilon$. Naša definicija konvergencije niza koeficijenata uz z^n očito povlači standardnu konvergenciju, ali obrat ne vrijedi.

Primjer 10.28. *Neka je* $F_k(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{k^n} z^n$. *Je li niz* $(F_k(z))_k$ *konvergentan?*

Rješenje. Za fiksni $n \geq 1$, niz koeficijenata je $\langle z^n \rangle F_k(z) = \frac{1}{k^n}$. Uz standardnu definiciju konvergencije vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k^n} = 0$, ali uz našu definiciju taj niz nije konvergentan jer se nikada ne stabilizira. Na primjer, za $n = 1$ to je niz $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Dakle, niz funkcija izvodnica $(F_k(z))_k$ nije konvergentan. □

Primjer konvergentnog niza funkcija izvodnica je $F_k(z) = z^k$. Za fiksni $n \in \mathbb{N}_0$, niz koeficijenata uz z^n je $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (jedinica je koeficijent za $k = n$, a svi ostali koeficijenti su nule). Dakle, niz se stabilizira na nuli nakon indeksa $k_0 = n + 1$ i vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = G(z)$ za $G(z) = 0$ (funkcija izvodnica kojoj su svi koeficijenti nule).

Prije nego što nastavimo o funkcijama izvodnicama, promotrimo kojoj topologiji na $\mathbb{C}$ odgovara ovaj pojam konvergencije nizova koeficijenata. Standardni pojam kovergencije izveden je iz metrike $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ na skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Odgovarajuću topologiju nazivamo *euklidskom topologijom*. To je topologija generirana otvorenim krugovima $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$. Otvoreni podskupovi od $\mathbb{C}$ su proizvoljne unije krugova, a zatvoreni podskupovi su komplementi otvorenih. Da bismo od pojma konvergencije došli do topologije, koristimo sljedeću karakterizaciju zatvorenih skupova.

Propozicija 10.29. *Podskup* $F \subseteq \mathbb{C}$ *je zatvoren ako i samo ako svaki konvergentan niz kojem su svi članovi u* F *ima limes u* F.

Propozicija vrijedi u bilo kojem metričkom ili topološkom prostoru, a ne samo u $\mathbb{C}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ bilo koji podskup. Neka je (a_k) niz kompleksnih brojeva u S koji je konvergentan po našoj definiciji. To znači da se nakon određenog indeksa stabilizira, a limes mu je vrijednost na kojoj se stabilizira. Budući da su članovi niza u S, i limes mu je u S, pa je po propoziciji 10.29 S zatvoren skup. U topologiji koja odgovara našem pojmu konvergencije svi podskupovi od $\mathbb{C}$ su zatvoreni i otvoreni. To je takozvana *diskretna topologija*, koja odgovara diskretnoj metrici

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } z_1 = z_2, \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Topologija na $\mathbb{C}[[z]]$ izvedena iz definicije konvergencije (10.18) ipak nije diskretna topologija. Niz funkcija izvodnica $(F_k(z))_k$ ne mora se stabilizirati da bi bio konvergentan, što pokazuje primjer $F_k(z) = z^k$. Prsten formalnih redova potencija možemo promatrati kao produkt prebrojivo mnogo kopija od $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}[[z]] = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \ldots$$

Kao topološki prostor, $\mathbb{C}[[z]]$ je prebrojivi produkt diskretnih topoloških prostora $(\mathbb{C}, 2^{\mathbb{C}})$. U zadatku 10.25 podsjećamo se na pojam produktne topologije.

Beskonačne sume i produkte funkcija izvodnica definiramo kao limese niza parcijalnih suma i parcijalnih produkata, ako ti limesi postoje:

$$\sum_{k\geq 0} F_k(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} F_i(z),$$

$$\prod_{k\geq 0} F_k(z) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=0}^{k} F_i(z).$$

Neka je $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ bilo koja funkcija izvodnica. Stavimo $F_n(z) = b_n z^n$ i $G_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} F_n(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} b_n z^n$. Jasno je da su $G_k(z)$ polinomi i da vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} G_k(z) = G(z)$. Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 10.30. *Za svaku funkciju izvodnicu $G(z)$ postoji niz polinoma $(G_k(z))_k$ takav da je $\lim\limits_{k\to\infty} G_k(z) = G(z)$.*

Drugim riječima, prsten polinoma $\mathbb{C}[z]$ je gusti podskup prstena formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$. Nadalje, funkciju izvodnicu $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ ipak možemo promatrati kao beskonačnu sumu funkcija izvodnica oblika $F_n(z) = b_n z^n$, a ne samo kao formalni red potencija. Takve sume uvijek konvergiraju u topologiji koju smo uveli na $\mathbb{C}[[z]]$. Kriteriji konvergencije u $\mathbb{C}[[z]]$ dani su u sljedećem teoremu. Oslanjaju se na pojam reda definiran formulom (10.7).

Teorem 10.31. *Neka je $(F_k(z))_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz funkcija izvodnica.*

(a) Vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = 0$ u $\mathbb{C}[[z]]$ ako i samo ako vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$.

(b) Beskonačna suma $\sum\limits_{k\geq 0} F_k(z)$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$ ako i samo ako vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$.

(c) Neka je $\operatorname{ord} F_k(z) > 0$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Tada beskonačni produkt $\prod\limits_{k\geq 0}(1 + F_k(z))$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$ ako i samo ako vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$.

Kriterij po kojem prepoznajemo konvergenciju u $\mathbb{C}[[z]]$ je "obični limes" u proširenom skupu realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Članovi niza $(\operatorname{ord} F_k(z))_{k\in\mathbb{N}_0}$ su realni brojevi ili $+\infty$ u slučaju kad je $F_k(z) = 0$. Limes $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$ znači

$$(\forall M > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad k \geq k_0 \Rightarrow \operatorname{ord} F_k(z) > M.$$

Iz kriterija (a) i (b) vidimo da je beskonačna suma $\sum\limits_{k\geq 0} F_k(z)$ konvergentna ako i samo ako opći član $F_k(z)$ teži prema 0 u $\mathbb{C}[[z]]$. Za "obične redove" kompleksnih ili realnih brojeva to je samo nužan uvjet konvergencije, ne i dovoljan uvjet. Opći član harmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ teži prema 0, ali taj red nije konvergentan u $\mathbb{C}$ ili $\mathbb{R}$.

Dokaz teorema 10.31.

(a) Neka vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = 0$ u $\mathbb{C}[[z]]$. To znači da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $k_0(n) \in \mathbb{N}_0$ takav da je $a_n^{(k)} = 0$ za sve $k \geq k_0(n)$. Neka je $K_0 = \max\{k_0(0), k_0(1), \ldots, k_0(n)\}$. Tada za sve $k \geq K_0$ vrijedi $a_i^{(k)} = 0$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, pa je $\operatorname{ord} F_k(z) > n$. Dakle,

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists K_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad k \geq K_0 \ \Rightarrow\ \operatorname{ord} F_k(z) > n.$$

To je upravo definicija limesa $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$.

Obrnuto, neka vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$. Kao što smo vidjeli, to znači

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad k \geq k_0 \ \Rightarrow\ \operatorname{ord} F_k(z) > n.$$

Iz $\operatorname{ord} F_k(z) > n$ slijedi $a_n^{(k)} = 0$, pa imamo definiciju limesa $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = 0$ u $\mathbb{C}[[z]]$.

(b) Neka vrijedi $\sum\limits_{k\geq 0} F_k(z) = G(z)$ za neku funkciju izvodnicu $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. To znači da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da za sve $k \geq k_0$ vrijedi $\sum\limits_{i=0}^{k} a_n^{(i)} = b_n$. Prema tome, za sve $k > k_0$ vrijedi $a_n^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k} a_n^{(i)} - \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_n^{(i)} = b_n - b_n = 0$. Po definiciji limesa u $\mathbb{C}[[z]]$ vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = 0$, pa po (a) dijelu slijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$.

Obrnuto, neka vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$, iz čega po (a) dijelu slijedi $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = 0$. To znači da su za čvrsti $n \in \mathbb{N}_0$ svi članovi niza $(a_n^{(k)})_k$ od nekog mjesta nadalje nule, pa se niz parcijalnih suma $(\sum\limits_{i=0}^{k} a_n^{(i)})_k$ od tog mjesta nadalje stabilizira. To upravo znači da beskonačna suma $\sum\limits_{k\geq 0} F_k(z)$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$.

(c) Pretpostavka $\operatorname{ord} F_k(z) > 0$ znači da je $a_0^{(k)} = 0$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$. Pretpostavimo da beskonačni produkt $\prod\limits_{k\geq 0} (1 + F_k(z))$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$. Tvrdimo da tada vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$, tj. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)(\forall k \in \mathbb{N}_0)\ k \geq k_0 \ \Rightarrow \operatorname{ord} F_k(z) \geq n$. Dokazujemo tu tvrdnju indukcijom po n. Za $n = 1$ možemo uzeti $k_0 = 0$ zbog pretpostavke $\operatorname{ord} F_k(z) > 0$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$, tj. da postoji $k_1 \in \mathbb{N}_0$ takav da $k \geq k_1 \ \Rightarrow \operatorname{ord} F_k(z) \geq n - 1$. Zbog konvergencije beskonačnog produkta $\prod\limits_{k\geq 0} (1 + F_k(z))$ postoji $k_2 \in \mathbb{N}_0$ takav da $k \geq k_2 \ \Rightarrow\ \langle z^n \rangle \prod\limits_{i=0}^{k} (1 + F_i(z)) = \langle z^n \rangle \prod\limits_{i=0}^{k-1} (1 + F_i(z))$. Iz toga slijedi da je koeficijen uz z^n u sljedećem izrazu jednak nuli:

$$\prod_{i=0}^{k} (1 + F_i(z)) - \prod_{i=0}^{k-1} (1 + F_i(z)) = F_k(z) \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (1 + F_i(z)). \tag{10.19}$$

Uzmimo $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, pa za sve $k \geq k_0$ vrijedi $\operatorname{ord} F_k(z) \geq n - 1$ (po pretpostavci indukcije) i $\langle z^n \rangle F_k(z) \cdot \prod\limits_{i=0}^{k-1} (1 + F_i(z)) = 0$. Iz toga slijedi $\langle z^n \rangle F_k(z) = 0$, tj. $\operatorname{ord} F_k(z) \geq n$. Time je korak indukcije dokazan.

Obrnuto, pretpostavimo $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$ i fiksiramo $n \in \mathbb{N}_0$. Treba pokazati da postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da je $\langle z^n\rangle \prod\limits_{i=0}^{k}(1+F_i(z))$ konstanta za sve $k \geq k_0$. Izaberemo $k_0 \in \mathbb{N}_0$ takav da je $\operatorname{ord} F_k(z) > n$ za sve $k \geq k_0$. Onda je na desnoj strani izraza (10.19) koeficijent uz z^n jednak 0, pa na lijevoj strani imamo $\langle z^n\rangle \prod\limits_{i=0}^{k}(1+F_i(z)) = \langle z^n\rangle \prod\limits_{i=0}^{k-1}(1+F_i(z))$, $\forall k \geq k_0$. To znači da beskonačni produkt $\prod\limits_{k\geq 0}(1+F_k(z))$ konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$.

□

Iz kriterija (c) slijedi da su svi beskonačni produkti s kojima smo radili konvergentni. Na primjer, funkcija izvodnica za broj particija (10.13) je odgovarajućeg oblika:

$$F(z) = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^k} = \prod_{k\geq 1}(1+z^k+z^{2k}+z^{3k}+\ldots) = \prod_{k\geq 1}(1+F_k(z))$$

za $F_k(z) = z^k + z^{2k} + z^{3k} + \ldots$. Vidimo da je $\operatorname{ord} F_k(z) = k$, što znači da su pretpostavke za konvergenciju beskonačnog produkta ispunjene: $\operatorname{ord} F_k(z) > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{ord} F_k(z) = +\infty$. Na isti način slijedi da beskonačni produkti (10.14), (10.15) i (10.16) konvergiraju u $\mathbb{C}[[z]]$. Preostaje opravdati "beskonačna kraćenja" i druge korake u dokazu teorema 10.25.

Teorem 10.32. *Neka su $(F_k(z))_k$ i $(G_k(z))_k$ konvergentni nizovi u $\mathbb{C}[[z]]$ s limesima $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(z) = F(z)$ i $\lim\limits_{k\to\infty} G_k(z) = G(z)$. Onda je niz produkata $(F_k(z)\cdot G_k(z))_k$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty}(F_k(z)\cdot G_k(z)) = F(z)\cdot G(z)$.*

Dokaz teorema nalazi se u [27, teorem 7.35 na str. 255]. Uzmimo na primjer beskonačne produkte $F(z) = \prod\limits_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}}$ i $G(z) = \prod\limits_{k\geq 1}(1-z^{2k})$ za koje smo u dokazu teorema 10.25 tvrdili da su međusobno inverzni. Kao nizove $(F_k(z))_k$ i $(G_k(z))_k$ uzmimo parcijalne produkte: $F_k(z) = \prod\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{1-z^{2i}}$ i $G_k(z) = \prod\limits_{i=1}^{k}(1-z^{2i})$. Kad ih pomnožimo, smijemo kratiti konačno mnogo faktora u brojniku i nazivniku: $F_k(z)\cdot G_k(z) = 1$. Po teoremu 10.32 vrijedi

$$F(z)\cdot G(z) = \lim_{k\to\infty} F_k(z)\cdot \lim_{k\to\infty} G_k(z) = \lim_{k\to\infty}(F_k(z)\cdot G_k(z)) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

Na sličan način dokazujemo da su beskonačni produkti (10.13) i (10.16) međusobno inverzni te da vrijede tvrdnje

$$\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k-1}}\cdot\prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^{2k}} = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{1-z^k}$$

i

$$\prod_{k\geq 1}(1-z^k)(1+z^k) = \prod_{k\geq 1}(1-z^k)\cdot\prod_{k\geq 1}(1+z^k)$$

koje smo koristili u dokazu teorema 10.25.

10.4 Lagrangeova formula inverzije

U prstenu polinoma $\mathbb{C}[z]$ imamo još jednu algebarsku operaciju, kompoziciju. Neka su $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ polinomi stupnja $\deg P(z) = m$ i $\deg Q(z) = n$. Označimo im koeficijente $P(z) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i z^i$, $a_m \neq 0$ i $Q(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j z^j$, $b_n \neq 0$. Raspišimo kompoziciju:

$$(P \circ Q)(z) = P(Q(z)) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, Q(z)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} b_j z^j \right)^i.$$

Prema multinomnom teoremu (3.1) vrijedi

$$(P \circ Q)(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j_0+\ldots+j_n=i} \binom{i}{j_0, \ldots, j_n} (b_0)^{j_0} (b_1 z)^{j_1} (b_2 z^2)^{j_2} \cdots (b_n z^n)^{j_n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j_0+\ldots+j_n=i} a_i \binom{i}{j_0, \ldots, j_n} b_0^{j_0} b_1^{j_1} b_2^{j_2} \cdots b_n^{j_n} \, z^{j_1+2j_2+\ldots+nj_n}.$$

Najveću potenciju z^{mn} dobivamo za $i = m$, $j_0 = \ldots = j_{n-1} = 0$, $j_n = m$, a odgovarajući koeficijent je $a_m \cdot b_n^m \neq 0$. Prema tome, kompozicija je polinom stupnja $\deg(P \circ Q)(z) = mn$. U sljedećem teoremu nabrojana su svojstva kompozicije polinoma.

Teorem 10.33. *Za sve polinome $P, Q, R \in \mathbb{C}[z]$ vrijedi*

(a) $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ *(asocijativnost kompozicije),*

(b) $(P + Q) \circ R = P \circ R + Q \circ R$ *(distributivnost kompozicije prema zbrajanju),*

(c) $(P \cdot Q) \circ R = (P \circ R) \cdot (Q \circ R)$ *(distributivnost kompozicije prema množenju),*

(d) $(P \circ Q)' = (P' \circ Q) \cdot Q'$ *(lančano pravilo za derivaciju kompozicije).*

Želimo definirati kompoziciju funkcija izvodnica $F, G \in \mathbb{C}[[z]]$, $F(z) = \sum\limits_{i \geq 0} a_i z^i$, $G(z) = \sum\limits_{j \geq 0} b_j z^j$. Ako je vanjski faktor F kompozicije $F \circ G$ polinom, kompozicija je dobro definirana:

$$(F \circ G)(z) = F(G(z)) = \sum_{i=0}^{m} a_i G(z)^i.$$

Potencije $G(z)^i = G(z) \cdots G(z)$ su produkti konačno mnogo funkcija izvodnica, tj. elementi iz $\mathbb{C}[[z]]$, a kompozicija je njihova konačna linearna kombinacija. Međutim, ako F nije polinom, onda je kompozicija $F(G(z)) = \sum\limits_{i \geq 0} a_i G(z)^i$ beskonačna suma u $\mathbb{C}[[z]]$ koja ne mora konvergirati. Slobodni član kompozicije je $F(G(0)) = F(b_0) = \sum\limits_{i \geq 0} a_i b_0^i$, što nije dobro definirano ako je $b_0 = \langle z^0 \rangle G(z)$ izvan radijusa konvergencije od $F(z)$. Ako je $b_0 = 0$, tj. $\operatorname{ord} G(z) > 0$, onda beskonačna suma konvergira u $\mathbb{C}[[z]]$. Naime, $\operatorname{ord}(a_i G(z)^i) \geq i \to +\infty$ kada $i \to \infty$, pa konvergencija slijedi prema teoremu 10.31 (b). Limes beskonačne sume je po definiciji kompozicija $(F \circ G)(z)$. Koeficijent kompozicije uz z^n možemo odrediti s konačno mnogo operacija u $\mathbb{C}[[z]]$.

Lema 10.34. *Neka su* $F, G \in \mathbb{C}[[z]]$, $F(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i$ *i* $\operatorname{ord} G(z) > 0$. *Tada vrijedi*

$$\langle z^n \rangle (F \circ G)(z) = \langle z^n \rangle \sum_{i=0}^{n} a_i G(z)^i.$$

Dokaz. $(F \circ G)(z) = \sum_{i\geq 0} a_i G(z)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i G(z)^i + \sum_{i>n} a_i G(z)^i$. Red $\operatorname{ord} \sum_{i>n} a_i G(z)^i$ je veći od n, pa ta beskonačna suma ne može utjecati na koeficijent uz z^n. $\square$

Idući teorem je sličan teoremu 10.32.

Teorem 10.35. *Neka su* $(F_k(z))_k$ *i* $(G_k(z))_k$ *konvergentni nizovi u* $\mathbb{C}[[z]]$ *s limesima* $\lim_{k\to\infty} F_k(z) = F(z)$, $\lim_{k\to\infty} G_k(z) = G(z)$ *i neka je* $\operatorname{ord} G_k(z) > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$. *Onda vrijedi* $\operatorname{ord} G(z) > 0$ *i* $\lim_{k\to\infty} (F_k \circ G_k)(z) = (F \circ G)(z)$.

Dokaz se nalazi u [27, teorem 7.61 na str. 263]. Iz teorema slijedi da kompozicija funkcija izvodnica, ako je definirana, ima ista svojstva kao kompozicija polinoma.

Teorem 10.36. *Za sve funkcije izvodnice* $F, G, H \in \mathbb{C}[[z]]$ *vrijedi*

(a) *ako je* $\operatorname{ord} G(z) > 0$ *i* $\operatorname{ord} H(z) > 0$, *onda je* $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$,

(b) *ako je* $\operatorname{ord} H(z) > 0$, *onda je* $(F + G) \circ H = F \circ H + G \circ H$,

(c) *ako je* $\operatorname{ord} H(z) > 0$, *onda je* $(F \cdot G) \circ H = (F \circ H) \cdot (G \circ H)$,

(d) *ako je* $\operatorname{ord} G(z) > 0$, *onda je* $(F \circ G)' = (F' \circ G) \cdot G'$.

Dokaz. Dokažimo npr. asocijativnost. Prvo trebamo provjeriti $\operatorname{ord}(G \circ H)(z) > 0$, da bi kompozicija $F \circ (G \circ H)$ bila dobro definirana. Neka je $F(z) = \sum_{i\geq 0} a_i z^i$, $G(z) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j$ i $H(z) = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$. Po pretpostavci je $b_0 = c_0 = 0$, pa po lemi 10.34 slijedi $\langle z^0 \rangle (G \circ H)(z) = \langle z^0 \rangle (b_0 \cdot H(z)^0) = \langle z^0 \rangle (0 \cdot 1) = 0$. Dakle, $\operatorname{ord}(G \circ H)(z) > 0$. Po propoziciji 10.30 postoje nizovi polinoma $(F_k(z))_k$, $(G_k(z))_k$ i $(H_k(z))_k$ takvi da je $\lim_{k\to\infty} F_k(z) = F(z)$, $\lim_{k\to\infty} G_k(z) = G(z)$ i $\lim_{k\to\infty} H_k(z) = H(z)$. Iz teorema 10.35 i teorema 10.33 (a) slijedi

$$(F \circ G) \circ H = \lim_{k\to\infty} (F_k \circ G_k) \circ H_k = \lim_{k\to\infty} F_k \circ (G_k \circ H_k) = F \circ (G \circ H).$$

Ostala svojstva kompozicije funkcija izvodnica dokazujemo istom tehnikom. $\square$

Neutralni element za kompoziciju je funkcija izvodnica $I(z) = z$. Za svaku funkciju izvodnicu $F \in \mathbb{C}[[z]]$ vrijedi $F(z) \circ I(z) = I(z) \circ F(z) = F(z)$. Kompozicija $F(z) \circ I(z)$ je dobro definirana jer je $\operatorname{ord} I(z) = 1 > 0$, a kompozicija $I(z) \circ F(z)$ je dobro definirana jer je vanjski faktor $I(z) = z$ polinom. Zanima nas pojam inverza funkcije izvodnice obzirom na kompoziciju, tj. kompozicijskog inverza u $\mathbb{C}[[z]]$.

Teorem 10.37. *Neka je* $\mathcal{S} = \{F \in \mathbb{C}[[z]] \mid \operatorname{ord} F(z) = 1\}$ *skup svih funkcija izvodnica reda* 1.

(a) Skup $\mathcal{S}$ je zatvoren obzirom na kompoziciju.

(b) Za svaki $F \in \mathcal{S}$ postoji jedinstveni $G \in \mathcal{S}$ takav da je $(F \circ G)(z) = (G \circ F)(z) = z$.

Drugim riječima, skup $\mathcal{S}$ svih funkcija izvodnica reda 1 s kompozicijom kao binarnom operacijom čini grupu.

Dokaz. (a) Neka su $F, G \in \mathcal{S}$, tj. $F(z) = \sum_{i\geq 1} a_i z^i$ i $G(z) = \sum_{j \geq 1} b_j z^j$ pri čemu su $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$. Računamo kompoziciju:

$$(F \circ G)(z) = \sum_{i\geq 1} a_i G(z)^i = a_1 G(z) + \sum_{i \geq 2} a_i G(z)^i = a_1 b_1 z + \dots$$

Vidimo da je $\mathrm{ord}(F \circ G)(z) = 1$, tj. $F \circ G \in \mathcal{S}$.

(b) Tražimo lijevi kompozicijski inverz od $F(z) = \sum_{i \geq 1} a_i z^i \in \mathcal{S}$, tj. funkciju izvodnicu $G(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$ takvu da je $(G \circ F)(z) = z$. Očito trebamo uzeti $b_0 = 0$ i $b_1 = \frac{1}{a_1}$. Neka je $n > 1$ i pretpostavimo da znamo koeficijente $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$. Po lemi 10.34 vrijedi

$$0 = \langle z^n \rangle I(z) = \langle z^n \rangle (G \circ F)(z) = \langle z^n \rangle \left(\sum_{j=0}^{n} b_j F(z)^j \right) =$$

$$= \langle z^n \rangle \left(b_n F(z)^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j F(z)^j \right) = b_n a_1^n + \langle z^n \rangle \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j F(z)^j \right).$$

Iz toga slijedi $b_n = \frac{-1}{a_1^n} \langle z^n \rangle \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j F(z)^j \right)$, pa koeficijente lijevog kompozicijskog inverza G možemo računati rekurzivno i oni su jednoznačno određeni s koeficientima od F. Tvrdimo da je G ujedno desni kompozicijski inverz od F. Neka je H lijevi kompozicijski inverz od G (po upravo dokazanom on postoji i jedinstven je). Onda je $H = H \circ z = H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F = z \circ F = F$. Dakle, vrijedi $F \circ G = z$, pa je G obostrani kompozicijski inverz od F.

□

Kompozicijski inverz od $F(z)$ označavamo $F^{(-1)}(z)$. *Lagrangeova*[5] *formula inverzije* pomaže nam izračunati koeficijente kompozicijskog inverza jednostavnije nego u dokazu teorema 10.37.

Teorem 10.38 (Lagrangeova formula inverzije). *Za $F(z) = \sum_{i \geq 1} a_i z^i$, $a_1 \neq 0$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\langle z^n \rangle F^{(-1)}(z) = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(\frac{z}{F(z)} \right)^n. \tag{10.20}$$

[5]Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.), talijanski matematičar i astronom.

Funkcija izvodnica F je reda $\operatorname{ord} F(z) = 1$ i nema multiplikativni inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$. Kvocijent $\frac{z}{F(z)}$ računamo u polju formalnih Laurentovih redova $\mathbb{C}((z))$. Uočite razliku između kompozicijskog inverza $F^{(-1)}(z)$ i multiplikativnog inverza $F(z)^{-1}$. Ekvivalentan iskaz Lagrangeove formule inverzije služi za rješavanje jednadžbi oblika

$$f(z) = z \cdot G(f(z)) \tag{10.21}$$

u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$. Ovdje je $G \in \mathbb{C}[[z]]$, $\operatorname{ord} G(z) = 0$ zadana funkcija izvodnica, a tražimo funkciju izvodnicu $f \in \mathbb{C}[[z]]$ implicitno zadanu jednadžbom (10.21). Zapišimo jednadžbu u obliku $\frac{f(z)}{G(f(z))} = z$, odnosno $F(f(z)) = z$ za $F(z) = \frac{z}{G(z)}$. Vidimo da je $f(z) = F^{(-1)}(z)$, pa iz formule (10.20) dobijemo koeficijente tražene funkcije izvodnice $f(z)$:

$$\langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(G(z)^n \right). \tag{10.22}$$

Sljedeći dokaz je iz knjige [39, teorem 5.4.2 na str. 38].

Dokaz teorema 10.38. Označimo koeficijente kompozicijskog inverza $F^{(-1)}(z) = \sum\limits_{i \geq 1} b_i z^i$. Komponiranjem s $F(z)$ "iznutra" dobivamo

$$F^{(-1)}(F(z)) = \sum_{i \geq 1} b_i F(z)^i = z.$$

Primijenimo formalnu derivaciju, uz korištenje teorema 10.9 i teorema 10.36 (d), te podijelimo s $F(z)^n$ u polju formalnih Laurentovih redova $\mathbb{C}((z))$:

$$\sum_{i \geq 1} i\, b_i F(z)^{i-1} \cdot F'(z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} i\, b_i F(z)^{i-n-1} \cdot F'(z) = \frac{1}{F(z)^n}. \tag{10.23}$$

Primijetimo da je koeficijent uz z^{-1} u derivaciji formalnog Laurentovog reda uvijek 0:

$$\langle z^{-1} \rangle \left(\sum_{i \geq m} c_i z^i \right)' = \langle z^{-1} \rangle \sum_{i \geq m} i \cdot c_i\, z^{i-1} = 0 \cdot c_0 = 0.$$

Za $i \neq n$, članovi sume na lijevoj strani jednadžbe (10.23) su derivacije:

$$F(z)^{i-n-1} \cdot F'(z) = \left(\frac{1}{i-n} F(z)^{i-n} \right)'.$$

Zato je koeficijent uz z^{-1} sume jednak odgovarajućem koeficijentu člana za $i = n$:

$$\langle z^{-1} \rangle \sum_{i \geq 1} i\, b_i F(z)^{i-n-1} \cdot F'(z) = \langle z^{-1} \rangle \left(n\, b_n F(z)^{-1} \cdot F'(z) \right) = n\, b_n \langle z^{-1} \rangle \frac{F'(z)}{F(z)} =$$

$$= n\, b_n \langle z^{-1} \rangle \frac{a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots}{a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots} = n\, b_n \langle z^{-1} \rangle \left(\frac{1}{z} + \ldots \right) = n\, b_n.$$

To je jednako koeficijentu uz z^{-1} izraza na desnoj strani jednadžbe (10.23):

$$\langle z^{-1}\rangle \frac{1}{F(z)^n} = \langle z^{-1}\rangle \left[z^{-n}\left(\frac{z}{F(z)}\right)^n\right] = \langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n.$$

Izjednačavanjem dobijemo formulu (10.20). □

Primjer 10.39. *Odredite kompozicijski inverz od $F(z) = z + z^2$ u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$.*

Rješenje. Primijetimo da je $\operatorname{ord} F(z) = 1$, pa $F(z)$ pripada skupu $\mathcal{S}$ iz teorema 10.37 i ima kompozicijski inverz. Označimo ga $G(z) = F^{(-1)}(z)$. Znamo da vrijedi $F(G(z)) = z$, tj. $G(z) + G(z)^2 = z$. To je kvadratna jednadžba $G(z)^2 + G(z) - z = 0$, koju riješimo po $G(z)$:

$$G(z)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4z}}{2}.$$

Predznak $\pm$ odredimo uvrštavanjem $G(0)$, kao u primjeru 10.11. Ako stavimo predznak $-$, dobijemo $G(0) = -1$, što nije dobro jer znamo da je $\operatorname{ord} G(z) = 1$. S predznakom $+$ dobijemo $G(0) = 0$. Zaključujemo da je zatvorena formula za kompozicijski inverz

$$G(z) = \frac{-1 + \sqrt{1+4z}}{2}.$$

Koeficijente $g_n = \langle z^n\rangle G(z)$ moguće je odrediti s pomoću binomnog reda (10.11), slično kao za funkciju izvodnicu Catalanovih brojeva iz primjera 10.11. Jednostavnije ih je izvesti iz Lagrangeove formule inverzije (10.20) i teorema 10.15:

$$g_n = \langle z^n\rangle F^{(-1)}(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{z+z^2}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \frac{1}{(1+z)^n} =$$

$$= \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \frac{1}{(1-(-z))^n} = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1}(-z)^k = \frac{1}{n}(-1)^{n-1}\binom{2(n-1)}{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} C_{n-1},\ \ n \geq 1.$$

Ovdje je C_{n-1} Catalanov broj. □

Formulu za Catalanove brojeve $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ također možemo izvesti direktno, bez korištenja binomnog reda (10.11). U primjeru 10.11 vidjeli smo da funkcija izvodnica Catalanovih brojeva $F(z)$ zadovoljava jednadžbu $z \cdot F(z)^2 - F(z) + 1 = 0$. Zapišimo je u obliku $F(z) - 1 = z \cdot F(z)^2$, odnosno uz oznaku $f(z) = F(z) - 1$ kao $f(z) = z \cdot (f(z)+1)^2$. Ovo je jednadžba oblika (10.21) za $G(z) = (z+1)^2$. Iz Lagrangeove formule inverzije (10.22) slijedi

$$\langle z^n\rangle f(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle G(z)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle (z+1)^{2n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ \ n \geq 1.$$

Primjer 10.40. *Neka je* $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$ *funkcija izvodnica za Fibonaccijeve brojeve, a* $G(z)$ *njezin kompozicijski inverz u* $\mathbb{C}[[z]]$. *Odredite zatvorenu formulu za* $G(z)$ *i koeficijente* g_n *u razvoju* $G(z) = \sum\limits_{n\geq 1} g_n z^n$.

Rješenje. Iz $F(G(z)) = z$ dobijemo jednadžbu $\frac{G(z)}{1-G(z)-G(z)^2} = z$, odnosno $zG(z)^2 + (1+z)G(z) - z = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe po $G(z)$ dobijemo

$$G(z)_{1,2} = \frac{-1-z\pm\sqrt{1+2z+5z^2}}{2z}.$$

Uvrštavanjem $G(0)$ za predznak $-$ dobijemo $\frac{-1}{0}$, što nema smisla, a za predznak $+$ dobijemo izraz oblika $\frac{0}{0}$. L'Hospitalovim pravilom izračunamo $\lim\limits_{z\to 0} \frac{-1-z+\sqrt{1+2z+5z^2}}{2z} = 0$, pa je to zatvorena formula za $G(z)$. Koeficijente odredimo iz Lagrangeove formule inverzije (10.20):

$$\begin{aligned}
g_n &= \langle z^n\rangle F^{(-1)}(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(1-z-z^2\right)^n = \\
&= \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(1-(z+z^2)\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(z+z^2)^k = \\
&= \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k z^k(1+z)^k = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k z^k \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} z^i = \\
&= \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{i} z^{k+i}.
\end{aligned}$$

Koeficijent uz z^{n-1} dobijemo za $k+i = n-1$, tj. $i = n-1-k$:

$$g_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{n-1-k}, \quad n\geq 1.$$

□

Primjer 10.41. *Odredite kompozicijski inverz funkcije izvodnice* $F(z) = \frac{z}{1+z^5}$.

Rješenje. U ovom primjeru ne možemo odrediti zatvorenu formulu za $F^{(-1)}(z)$. Uvrštavanjem $F(G(z)) = z$ dobijemo jednadžbu petog stupnja $z\cdot G(z)^5 - G(z) + z = 0$, koju ne možemo riješiti po $G(z)$. Međutim, s pomoću Lagrangeove formule inverzije (10.20) ipak možemo odrediti koeficijente:

$$g_n = \langle z^n\rangle F^{(-1)}(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(1+z^5\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{5k}.$$

Izjednačavanjem $n-1=5k$ vidimo da nenul koeficijent dobijemo samo za $n=5k+1\equiv 1 \pmod 5$:

$$g_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\dbinom{n}{(n-1)/5}, & n\equiv 1 \pmod 5,\\[2ex] 0, & n\not\equiv 1 \pmod 5.\end{cases}$$

□

Primjer 10.42. *Odredite koeficijente funkcije izvodnice $T\in\mathbb{C}[[z]]$ koja zadovoljava jednadžbu $T(z)=z\cdot e^{T(z)}$.*

Rješenje. Ni ovu jednadžbu ne možemo riješiti eksplicitno, tj. ne možemo odrediti zatvorenu formulu za $T(z)$. Iz Lagrangeove formule inverzije (10.22) dobivamo koeficijente

$$\langle z^n\rangle T(z)=\frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle e^{nz}=\frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle\sum_{k\geq 0}\frac{n^k}{k!}z^k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{n^{n-1}}{n!}.$$

□

Vidimo da je $T(z)$ iz prethodnog primjera eksponencijalna funkcija izvodnica niza $t_0=0$ i $t_n=n^{n-1}$ za $n\geq 1$. Prema Cayleyevoj formuli (teoremu 3.17), n^{n-2} je broj stabala s n vrhova. Ovdje niz t_n interpretiramo kao broj stabala s jednim istaknutim vrhom, takozvanih *korijenskih stabala*. Za dokaz Cayleyeve formule pomoću funkcija izvodnica trebamo kombinatorno interpretirati kompoziciju

$$e^{T(z)}=1+T(z)+\frac{1}{2!}T(z)^2+\frac{1}{3!}T(z)^3+\frac{1}{4!}T(z)^4+\ldots=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}T(z)^k.$$

Koeficijent uz z^n u k-tom članu sume je

$$\langle z^n\rangle\frac{1}{k!}T(z)^k=\frac{1}{k!}\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\frac{t_{i_1}}{i_1!}\cdots\frac{t_{i_k}}{i_k!}.$$

Stoga je $\frac{1}{k!}T(z)^k$ eksponencijalna funkcija izvodnica niza

$$n!\langle z^n\rangle\frac{1}{k!}T(z)^k=\frac{1}{k!}\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\frac{n!}{i_1!\cdots i_k!}t_{i_1}\cdots t_{i_k}=\frac{1}{k!}\sum_{i_1+\ldots+i_k=n}\binom{n}{i_1\cdots i_k}t_{i_1}\cdots t_{i_k},$$

koji prebrojava skupove od k međusobno disjunktnih korijenskih stabala s ukupno n vrhova. To su aciklički grafovi s n vrhova i točno k komponenti povezanosti te istaknutim vrhom u svakoj komponenti. Sumiranjem po svim $k\geq 0$ dobivamo eksponencijalnu funkciju izvodnicu za ukupan broj acikličkih grafova s n vrhova kojima su komponente povezanosti korijenska stabla, takozvanih *korijenskih šuma*. Označimo taj broj s f_n i odgovarajuću eksponencijalnu funkciju izvodnicu $F(z)=\sum\limits_{n\geq 0}\frac{f_n}{n!}z^n$. Time smo kombinatorno dokazali formulu

$$F(z)=e^{T(z)}. \tag{10.24}$$

Za dokaz Cayleyeve formule trebamo još jednu vezu između nizova (t_n) i (f_n).

Propozicija 10.43. *Za sve $n \geq 0$ vrijedi $t_{n+1} = (n+1)f_n$.*

Dokaz. Neka je zadana korijenska šuma s vrhovima $\{1, \ldots, n\}$. Izaberemo prirodan broj $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ i preimenujemo vrhove redom u $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1\}$. Zatim dodamo vrh i kao novi korijen i povežemo ga s korijenima stabala koja čine zadanu šumu. Tako dobivamo korijensko stablo s $n+1$ vrhova. Obrnuto, od svakog korijenskog stabla s $n+1$ vrhova možemo napraviti korijensku šumu brisanjem korijena i, preimenovanjem preostalih vrhova redom u $\{1, \ldots, n\}$ i izborom vrha koji je bio spojen s i kao korijena svake komponente povezanosti. Opisane transformacije su jedna drugoj inverzne, pa je $t_{n+1} = (n+1)f_n$. □

Iz propozicije slijedi

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f_n}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 1} \frac{t_n}{n!} z^n = \frac{1}{z} T(z). \quad (10.25)$$

Iz formula (10.24) i (10.25) slijedi funkcionalna jednadžba $T(z) = z \cdot e^{T(z)}$ iz primjera 10.42. Kao što smo vidjeli, s pomoću Lagrangeove formule inverzije dobivamo koeficijente $t_n = n^{n-1}$. To je još jedan dokaz Cayleyeve formule za broj stabala.

Veza između eksponencijalnih funkcija izvodnica za broj korijenskih stabala i korijenskih šuma (10.24) je primjer takozvane eksponencijalne formule. Formula vrijedi općenitije, za familije kombinatornih objekata od kojih se jedna gradi iz druge "slaganjem komponenti". Više o eksponencijalnoj formuli i njezinim primjenama na prebrojavanje grafova, permutacija, particija skupova i drugih objekata pročitajte u 3. poglavlju knjige [45], koja je dostupna na web stranici autora.

Još jedna važna knjiga dostupna na web stranici autora je [13]. U njoj je detaljno obrađena analitička strana teorije funkcija izvodnica. Proučavanjem kompleksnih funkcija koje one definiraju na području konvergencije metodama matematičke analize izvode se asimptotske ocjene za kombinatorne formule ili čak probleme prebrojavanja za koje nemamo egzaktna rješenja.

Zadaci

Zadatak 10.1. *Vidjeli smo da prsten polinoma $\mathbb{C}[z]$ ima prebrojivu bazu, pa je njegova dimenzija kao vektorskog prostora nad kompleksnim brojevima* $\dim \mathbb{C}[z] = \aleph_0$. *Koja je dimenzija vektorskog prostora formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$?*

Zadatak 10.2. *Dokažite formule* (10.5), (10.6), (10.8) *i* (10.9).

Zadatak 10.3. *Nađite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu niza $a_n = n^2$, $n \geq 0$.*

Zadatak 10.4. *Niz peterokutnih brojeva zadan je formulom $p_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu tog niza.*

Zadatak 10.5. *Neka je $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ multiplikativni inverz od $F(z) = \frac{1}{(1-z)^{m+1}}$ u prstenu formalnih redova potencija $\mathbb{C}[[z]]$. Odredite koeficijente b_n.*

Zadatak 10.6. *Neka je* $G(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *multiplikativni inverz od* $F(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$ *u prstenu formalnih redova potencija* $\mathbb{C}[[z]]$. *Odredite koeficijente* b_n.

Zadatak 10.7. *Razvijte funkciju* $F(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$ *(drugo rješenje (10.10) kvadratne jednadžbe za Catalanove brojeve) u Laurentov red, tj. odredite joj koeficijente u polju* $\mathbb{C}((z))$.

Zadatak 10.8. *Neka je* a_n *broj* n*-članih podmultiskupova multiskupa* $\{A^\infty, B^{10}, C^5\}$. *Odredite zatvorenu formulu za funkciju izvodnicu* $F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. *S pomoću funkcije izvodnice izračunajte broj* 10*-članih podmultiskupova.*

Zadatak 10.9. *U supermarketu na odjelu voća prodaju se lubenice, banane, mango, šljive i mandarine. Neka je* a_n *broj načina na koji možemo kupiti* n *komada voća tako da vrijedi: broj lubenica je* 0 *ili* 1, *broj banana je paran, broj manga je* 0, 1 *ili* 2, *broj šljiva je neparan i broj mandarina je djeljiv s* 3. *Voćke iste vrste smatramo identičnima. Napišite funkciju izvodnicu niza* (a_n) *u zatvorenom obliku. Razvojem u red potencija izvedite formulu za* a_n.

Zadatak 10.10. *Zadan je niz* $a_n = 2\cdot 3^n + (-4)^n$, $n \geq 0$. *Odredite funkciju izvodnicu tog niza i nađite linearnu rekurziju koju zadovoljava.*

Zadatak 10.11. *Odredite funkciju izvodnicu niza zadanog rekurzijom* $(n+2)a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ *i početnim uvjetima* $a_0 = a_1 = 1$.

Zadatak 10.12. *Nacrtajte usmjereni graf zadan matricom susjedstva*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i odredite funkciju izvodnicu za broj šetnji duljine n *koje počinju i završavaju u prvom vrhu tog grafa.*

Zadatak 10.13. *Dokažite formulu* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left\{ {n \atop m} \right\} z^n = \frac{z^m}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)}$.

Zadatak 10.14. *U vlaku se nalazi* $n \geq 2$ *putnika. Na koliko načina putnici mogu izaći na četiri stanice tako da na prvoj stanici izađe najviše jedan putnik, na drugoj stanici paran broj putnika, na trećoj stanici barem jedan putnik, a na četvrtoj stanici svi koji su ostali u vlaku?*

Zadatak 10.15. *U hladnjaku kafića nalazi se* 15 *bočica soka od naranče,* 6 *bočica soka od jabuke i* 20 *bočica soka od borovnice. U kafić je došlo društvo od* n *matematičara. Njihova narudžba glasi: "Donesi nam svakom po jednu bočicu soka tako da broj sokova od naranče bude djeljiv s* 5, *broj sokova od jabuke bude prost i da dobijemo bar* 3 *soka od borovnice". Na koliko načina konobar može zadovoljiti narudžbu ako je bitno koji matematičar pije koju vrstu soka? Sokove iste vrste smatramo identičnima. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu i odredite taj broj za* $n = 10$.

Zadatak 10.16. *Mobilni tim za cijepljenje raspolaže s* 20 *doza cjepiva Pfizer,* 50 *doza cjepiva Moderna i* 100 *doza cjepiva AstraZeneca. Na koliko načina tim može provesti cijepljenje n štićenika doma za starije osobe? Svaki štićenik dobiva jednu dozu cjepiva, a doze cjepiva od istog proizvođača su identične. Napišite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za ovaj problem. Uz pomoć eksponencijalne funkcije izvodnice i nekog programa za računalnu algebru odredite broj načina za $n = 100$.*

Zadatak 10.17. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ fiksan. Označimo s a_n broj injekcija s n-članog skupa u k-člani skup, a s b_n broj surjekcija s n-članog skupa na k-člani skup. Napišite zatvorene formule za eksponencijalne funkcije izvodnice $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ i $G(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$.*

Zadatak 10.18. *Iz teorema 6.5 izvedite zatvoreni oblik eksponencijalne funkcije izvodnice za broj deranžmana $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} z^n$.*

Zadatak 10.19. *Iz Binetove formule* (10.4) *izvedite zatvoreni oblik eksponencijalne funkcije izvodnice niza Fibonaccijevih brojeva $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{F_n}{n!} z^n$.*

Zadatak 10.20. *Izvedite formulu za binomnu konvoluciju Fibonaccijevih brojeva*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k\, F_{n-k}.$$

Zadatak 10.21. *Dokažite formule*

$$\sum_{n\geq 0} \left\{ n \atop m \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{m!}(e^z - 1)^m \quad i \quad \sum_{n\geq 0} \left[n \atop m \right] \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{m!}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^m.$$

Zadatak 10.22. *Napišite zatvorenu formulu za broj particija od n u točno tri dijela.*

Zadatak 10.23. *Dokažite da je broj particija od n u dijelove koji se ponavljaju najviše tri puta jednak broju particija od n u kojima se parni dijelovi ponavljaju najviše jednom, a na neparne dijelove nema ograničenja.*

Zadatak 10.24. *Dokažite propoziciju 10.29.*

Zadatak 10.25. *Neka je (X_i, τ_i), $i \in I$ familija topoloških prostora. Definirajte topologiju na Kartezijevom produktu $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ (tzv. Tihonovljeva[6] ili produktna topologija).*

Zadatak 10.26. *Za funkciju izvodnicu $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} n z^n$ odredite multiplikativni inverz u polju $\mathbb{C}((z))$ i kompozicijski inverz u prstenu $\mathbb{C}[[z]]$.*

Zadatak 10.27. *Odredite koeficijente multiplikativnog i kompozicijskog inverza funkcije izvodnice $F(z) = z \cdot (1-z)^m$, $m \in \mathbb{N}$.*

[6] Andrej Nikolajevič Tihonov (1906.-1993.), sovjetski i ruski matematičar i geofizičar.

Zadatak 10.28. *Odredite koeficijent uz* z^{2021} *funkcije izvodnice* $f \in \mathbb{C}[[z]]$ *koja zadovoljava jednadžbu* $f(z) - 2z \cdot f(z)^5 = 4z$.

Zadatak 10.29. *U prstenu* $\mathbb{C}[[z]]$ *riješite kubnu jednadžbu* $2z + 4f(z)^2 = f(z) + 4f(z)^3$, *tj. odredite koeficijente funkcije izvodnice* $f(z)$ *koja zadovoljava tu jednadžbu.*

Zadatak 10.30. *U prstenu* $\mathbb{C}[[z]]$ *riješite kubnu jednadžbu* $f(z)^3 + f(z) = z$.

Zadatak 10.31. *U prstenu* $\mathbb{C}[[z]]$ *riješite jednadžbu četvrtog stupnja* $f(z)^4 - f(z) + z = 0$.

Zadatak 10.32. *Odredite koeficijente funkcije izvodnice* $W \in \mathbb{C}[[z]]$ *koja zadovoljava jednadžbu* $W(z)e^{W(z)} = z$. *To je takozvana* Lambertova[7] funkcija.

[7] Johann Heinrich Lambert (1728.-1777.), švicarski matematičar, fizičar, filozof i astronom.

Rješenja nekih zadataka

Zadatak 1.1. $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 36\,000$.

Zadatak 1.2. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 - 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 5 = 154\,755$.

Zadatak 1.3. $\binom{5}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + \binom{5}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 64800$.

Zadatak 1.4. Funkcija ima k^n, a injekcija ima $k(k-1)\cdots(k-n+1)$. Ovaj produkt nazivamo *padajućim faktorijelom* i označavamo $k^{\underline{n}}$.

Zadatak 1.6. Primijetimo da je $45 \cdot 10^{n-2}$ pola od ukupnog broja n-znamenkastih prirodnih brojeva, $9 \cdot 10^{n-1}$. Uspostavit ćemo bijekciju između skupa svih n-znamenkastih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenata i skupa svih n-znamenkastih brojeva s parnim brojem neparnih znamenaka. Neka je f funkcija koja broj x promijeni tako da mu zadnju znamenku poveća za jedan modulo 10. Time zadnja znamenka mijenja parnost, pa broj neparnih znamenaka od x iz neparnog prelazi u paran broj. Funkcija f je bijekcija jer ima inverznu funkciju, koja broju x zadnju znamenku smanjuje za jedan modulo 10.

Zadatak 1.7. Znamenka $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ javlja se na svakom položaju (kao znamenka jedinice, desetice, stotice...) $8 \cdot 7 \cdots (8-n+2) = 8^{\underline{n-1}}$ puta. Doprinos te znamenke zbroju je $i \cdot 8^{\underline{n-1}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} 10^j = i \cdot 8^{\underline{n-1}} \cdot \frac{10^n-1}{9}$, pa zbroj iznosi $(\sum_{i=1}^{9} i) \cdot 8^{\underline{n-1}} \cdot \frac{10^n-1}{9} = 5 \cdot 8^{\underline{n-1}} \cdot (10^n - 1)$.

Zadatak 1.8. (d) Pretpostavimo da su $g : T \to S$ i $h : T \to S$ inverzne funkcije od f, tj. da vrijedi $g \circ f = h \circ f = id_S$ i $f \circ g = f \circ h = id_T$. Onda je $g = id_S \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ id_T = h$.

Zadatak 1.9. $p_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.

Zadatak 1.10. Na dva načina prebrojavamo skup svih incidentnih parova (vrh,brid).

Zadatak 1.11. Iz prethodnog zadatka slijedi da je zbroj stupnjeva svih vrhova grafa paran. Kad bi broj vrhova neparnog stupnja bio neparan, zbroj svih stupnjeva bio bi neparan. Tvrdnja se zove lema o rukovanju zbog sljedeće interpretacije. U društvu od n ljudi neki su se međusobno rukovali, a neki nisu. Društvo modeliramo grafom: vrhovi su ljudi, a susjedni su oni koji su se rukovali. Tada broj ljudi koji su se rukovali neparno mnogo puta mora biti paran.

Zadatak 2.3. Dokaz je analogan dokazu teorema 1.6, ali prebrojavamo injekcije.

Zadatak 2.4. $\sum\limits_{0}^{n+1} x^{\underline{-3}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{-2}}}{-2}\Big|_0^{n+1} = \frac{-1}{2(x+1)(x+2)}\Big|_0^{n+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

Zadatak 2.5. $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(i+j)^2 = \sum\limits_{1}^{n+1}\sum\limits_{1}^{n+1}(x+y)^2\,\delta y\,\delta x = \sum\limits_{1}^{n+1}\sum\limits_{1}^{n+1}\left[(x+y)^{\underline{2}} + (x+y)^{\underline{1}}\right]\delta y\,\delta x =$

$= \sum\limits_{1}^{n+1}\left[\frac{(x+y)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(x+y)^{\underline{2}}}{2}\right]\Big|_1^{n+1}\delta x = \sum\limits_{1}^{n+1}\left[\frac{(x+n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(x+n+1)^{\underline{2}}}{2} - \frac{(x+1)^{\underline{3}}}{3} - \frac{(x+1)^{\underline{2}}}{2}\right]\delta x =$

$= \left[\frac{(x+n+1)^{\underline{4}}}{12} + \frac{(x+n+1)^{\underline{3}}}{6} - \frac{(x+1)^{\underline{4}}}{12} - \frac{(x+1)^{\underline{3}}}{6}\right]\Big|_1^{n+1} =$

$= \frac{(2n+2)^{\underline{4}}}{12} + \frac{(2n+2)^{\underline{3}}}{6} - \frac{(n+2)^{\underline{4}}}{12} - \frac{(n+2)^{\underline{3}}}{6} - \frac{(n+2)^{\underline{4}}}{12} - \frac{(n+2)^{\underline{3}}}{6} + \frac{2^{\underline{4}}}{12} + \frac{2^{\underline{3}}}{6} = \frac{(n+1)n^2(7n+5)}{6}$.

Zadatak 2.6. $\Delta(c^{\underline{x}}) = c^{\underline{x+1}} - c^{\underline{x}} = c^{\underline{x}}(c-x-1) = \frac{c^{\underline{x+2}}}{c-x}$. Uvrstimo $c=-2$ i zamijenimo $x \to x-2$, pa dobijemo $\Delta((-2)^{\underline{x-2}}) = \frac{(-2)^{\underline{x}}}{-x}$, odnosno $\Delta(-(-2)^{\underline{x-2}}) = \frac{(-2)^{\underline{x}}}{x}$. Slijedi $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-2)^{\underline{k}}}{k} = \sum\limits_{1}^{n+1}\frac{(-2)^{\underline{x}}}{x}\,\delta x = -(-2)^{\underline{x-2}}\Big|_1^{n+1} = -(-2)^{\underline{n-1}} + (-2)^{\underline{-1}} = (-1)^n\,n! - 1$.

Zadatak 2.7. (a) $\sum\limits_{1}^{n+1} x\,3^x\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow \Delta f(x)=1, \\ \Delta g(x)=3^x \Rightarrow g(x)=\frac{3^x}{2} \\ \quad\Rightarrow Eg(x)=\frac{3^{x+1}}{2} \end{array}\right| = \frac{1}{2}x\,3^x\Big|_1^{n+1} - \frac{1}{2}\sum\limits_{1}^{n+1}3^{x+1}\,\delta x =$

$= \frac{1}{2}\left[(n+1)3^{n+1}-3\right] - \frac{1}{2}\;\frac{3^{x+1}}{2}\Big|_1^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(n+1)3^{n+1}-3\right] - \frac{1}{4}\left[3^{n+2}-9\right] = \frac{1}{4}\left[(2n-1)3^{n+1}+3\right]$.

(b) $\sum\limits_{1}^{n+1} x\,F_x\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow \Delta f(x)=1, \\ \Delta g(x)=F_x \Rightarrow g(x)=F_{x+1} \\ \quad\Rightarrow Eg(x)=F_{x+2} \end{array}\right| = x\,F_{x+1}\Big|_1^{n+1} - \sum\limits_{1}^{n+1}F_{x+2}\,\delta x =$

$= (n+1)\,F_{n+2} - F_2 - F_{x+3}\Big|_1^{n+1} = (n+1)\,F_{n+2} - 1 - F_{n+4} + F_4 = n\,F_{n+2} - F_{n+3} + 2$.

(c) $\sum\limits_{1}^{n+1}\frac{2x+1}{2^x}\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=2x+1 \Rightarrow \Delta f(x)=2, \\ \Delta g(x)=(\frac{1}{2})^x \Rightarrow g(x)=\frac{(\frac{1}{2})^x}{\frac{1}{2}-1} \\ \quad= -2^{1-x} \quad\Rightarrow Eg(x)=-2^{-x} \end{array}\right| = -(2x+1)2^{1-x}\Big|_1^{n+1} + 2\sum\limits_{1}^{n+1}(\frac{1}{2})^x\,\delta x =$

$= -(2n+3)\,2^{-n} + 3 - 2^{2-x}\Big|_1^{n+1} = -(2n+3)\,2^{-n} + 3 - 2^{1-n} + 2 = 5 - (2n+5)\,2^{-n}$.

(d) $\sum\limits_{1}^{n+1} x^2\,2^x\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=x^2 \Rightarrow \Delta f(x)=2x+1, \\ \Delta g(x)=2^x \Rightarrow g(x)=2^x \\ \quad\Rightarrow Eg(x)=2^{x+1} \end{array}\right| = x^2\,2^x\Big|_1^{n+1} - \sum\limits_{1}^{n+1}(2x+1)2^{x+1}\,\delta x =$

$$= \left| \begin{array}{l} f(x)=2x+1 \Rightarrow \Delta f(x)=2,\\ \Delta g(x)=2^{x+1}\Rightarrow g(x)=2^{x+1}\\ \quad\Rightarrow Eg(x)=2^{x+2}\end{array}\right| = (n+1)^2\,2^{n+1}-2-(2x+1)\,2^{x+1}\Big|_1^{n+1}+\sum_1^{n+1}2^{x+3}\,\delta x =$$

$$= (n+1)^2\, 2^{n+1} - 2 - (2n+3)\, 2^{n+2} + 12 + 2^{x+3}\Big|_1^{n+1} = (n^2-2n+3)\, 2^{n+1}-6.$$

(e) $$\sum_1^{n+1}\frac{2x+1}{x(x+1)}\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=2x+1\Rightarrow \Delta f(x)=2,\\ \Delta g(x)=(x-1)^{\underline{-2}}\Rightarrow g(x)=\\ \frac{(x-1)^{\underline{-1}}}{-1}=\frac{-1}{x}\quad\Rightarrow Eg(x)=\frac{-1}{x+1}\end{array}\right| = \frac{-(2x+1)}{x}\Big|_1^{n+1}+2\sum_1^{n+1}x^{\underline{-1}}\,\delta x =$$

$$= -\frac{2n+3}{n+1}+3+2H_x\Big|_1^{n+1} = \frac{n}{n+1}+2(H_{n+1}-1)=2H_{n+1}-\frac{n+2}{n+1}=2H_n-\frac{n}{n+1}.$$

(f) $$\sum_0^{n} H_x\, x^{\underline{-2}}\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=H_x\Rightarrow \Delta f(x)=\frac{1}{x+1},\\ \Delta g(x)=x^{\underline{-2}}\Rightarrow g(x)=\frac{x^{\underline{-1}}}{-1}\\ \quad=\frac{-1}{x+1}\quad\Rightarrow Eg(x)=\frac{-1}{x+2}\end{array}\right| = \frac{-H_x}{x+1}\Big|_0^{n}+\sum_0^{n}\frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\delta x =$$

$$= \frac{-H_n}{n+1}+\sum_0^{n}x^{\underline{-2}}\,\delta x = \frac{-H_n}{n+1}-\frac{1}{x+1}\Big|_0^{n} = \frac{-H_n}{n+1}-\frac{1}{n+1}+1 = 1-\frac{1+H_n}{n+1}.$$

(g) $$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}H_k = \sum_1^{n+1}\binom{x}{2}H_x\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=H_x\Rightarrow \Delta f(x)=\frac{1}{x+1}\\ \Delta g(x)=\binom{x}{2}\Rightarrow g(x)=\binom{x}{3}\\ \Rightarrow Eg(x)=\binom{x+1}{3}\end{array}\right| = \binom{x}{3}H_x\Big|_1^{n+1} -$$

$$-\sum_1^{n+1}\frac{1}{x+1}\cdot\binom{x+1}{3}\,\delta x = \binom{n+1}{3}H_{n+1}-\sum_1^{n+1}\frac{1}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{\cancel{x+1}}{3}\binom{x}{2}\,\delta x = \binom{n+1}{3}H_{n+1}-\frac{1}{3}\binom{x}{3}\Big|_1^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{3}\left(H_{n+1}-\frac{1}{3}\right).$$

(h) Integral $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$ izračunava se tako da se dva puta parcijalno integrira i prebaci na lijevu stranu. Na sličan način izračunat ćemo neodređenu sumu:

$$\sum 2^x F_x\,\delta x = \left|\begin{array}{l} f(x)=F_x\Rightarrow \Delta f(x)=F_{x-1},\\ \Delta g(x)=2^x\Rightarrow g(x)=2^x\\ \quad\Rightarrow Eg(x)=2^{x+1}\end{array}\right| = 2^x\,F_x-\sum 2^{x+1}\,F_{x-1}\,\delta x =$$

$$= \left|\begin{array}{l} f(x)=2^{x+1}\Rightarrow \Delta f(x)=2^{x+1},\\ \Delta g(x)=F_{x-1}\Rightarrow g(x)=F_x\\ \quad\Rightarrow Eg(x)=F_{x+1}\end{array}\right| = 2^x\,F_x-2^{x+1}\,F_x+\sum 2^{x+1}\,F_{x+1}\,\delta x =$$

$$= \left|\begin{array}{l} f(x)=F_{x+1}\Rightarrow \Delta f(x)=F_x,\\ \Delta g(x)=2^{x+1}\Rightarrow g(x)=2^{x+1}\\ \quad\Rightarrow Eg(x)=2^{x+2}\end{array}\right| = -2^x\,F_x+2^{x+1}\,F_{x+1}-4\sum 2^x F_x\,\delta x.$$

Sad prebacimo zadnji član na lijevu stranu i podijelimo s 5, pa dobijemo $\sum 2^x F_x\,\delta x = \frac{1}{5}\,(2^{x+1}\,F_{x+1}-2^x\,F_x)$. Određena suma je $\sum\limits_1^{n+1} 2^x F_x\,\delta x = \frac{1}{5}\,(2^{n+2}\,F_{n+2}-2^{n+1}\,F_{n+1}-2)$.

Zadatak 2.8. $\sum\limits_0^n \binom{x}{m} H_x \,\delta x = \left| \begin{array}{l} f(x) = H_x \Rightarrow \Delta f(x) = \frac{1}{x+1}, \\ \Delta g(x) = \binom{x}{m} \Rightarrow g(x) = \binom{x}{m+1} \\ \quad \Rightarrow Eg(x) = \binom{x+1}{m+1} \end{array} \right| =$

$= \binom{x}{m+1} H_x \Big|_0^n - \sum\limits_0^n \frac{1}{x+1} \binom{x+1}{m+1} \delta x = \binom{n}{m+1} H_n - \sum\limits_0^n \frac{1}{\cancel{x+1}} \frac{\cancel{x+1}}{m+1} \binom{x}{m} \delta x = \binom{n}{m+1} H_n - \frac{1}{m+1} \sum\limits_0^n \binom{x}{m} \delta x =$

$= \binom{n}{m+1} H_n - \frac{1}{m+1} \binom{x}{m+1} \Big|_0^n = \binom{n}{m+1} \left(H_n - \frac{1}{m+1} \right).$

Zadatak 3.1. Rastavite skup svih puteva od $(0,0)$ do (n,n) na disjunktne podskupove prema točki u kojoj put siječe pravac $y = n - x$.

Zadatak 3.3. Neka je x_i broj bombona koje dobiva i-to dijete. Rasporedi bombona odgovaraju cjelobrojnim rješenjima jednadžbe $x_1 + \ldots + x_s = k$ uz uvjete $x_i \geq 0$, kojih prema propoziciji 3.4 ima $\binom{k+s-1}{k}$.

Zadatak 3.4. Supstitucijom $y_i = x_i - i$ jednadžba prelazi u $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$, $y_i \geq 0$. Prema propoziciji 3.4 broj rješenja je $\binom{11}{3} = 165$.

Zadatak 3.5. $\mu' = (8, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$.

Zadatak 3.6. Skup $\mathcal{P}$ svih particija skupa $\{1, \ldots, n\}$ podijelimo na dva disjunktna podskupa: particije koje ne sadrže jednočlane blokove ($\mathcal{P}_1$) i particije koje sadrže bar jedan jednočlani blok ($\mathcal{P}_2$). Znamo da je $|\mathcal{P}| = B_n$ i $|\mathcal{P}_1| = V_n$, pa treba uspostaviti bijekciju između $\mathcal{P}_2$ i skupa $\mathcal{P}_1'$ svih particija od $\{1, \ldots, n+1\}$ koje ne sadrže jednočlane blokove. Tada je $|\mathcal{P}_2| = |\mathcal{P}_1'| = V_{n+1}$ i po principu sume dobivamo $B_n = V_n + V_{n+1}$.

Funkcija $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1'$ transformira particiju iz $\mathcal{P}_2$ tako da jednočlane blokove zamijeni s njihovom unijom i doda im element $n+1$. Na taj način dobivamo particiju od $\{1, \ldots, n+1\}$ bez jednočlanih blokova, tj. element iz $\mathcal{P}_1'$. Obrnuto, funkcija $g : \mathcal{P}_1' \to \mathcal{P}_2$ particiju iz $\mathcal{P}_1'$ transformira tako da iz bloka koji sadrži $n+1$ izbaci taj element, a ostale elemente iz tog bloka rastavi na jednočlane blokove. Na taj način dobivamo particiju iz $\mathcal{P}_2$. Funkcije f i g su jedna drugoj inverzne, dakle bijekcije.

Zadatak 3.7. Formula se može dokazati indukcijom po n, uz pomoću rekurzije 3.12 i primjera 3.10. Pokušajte naći direktan kombinatorni dokaz!

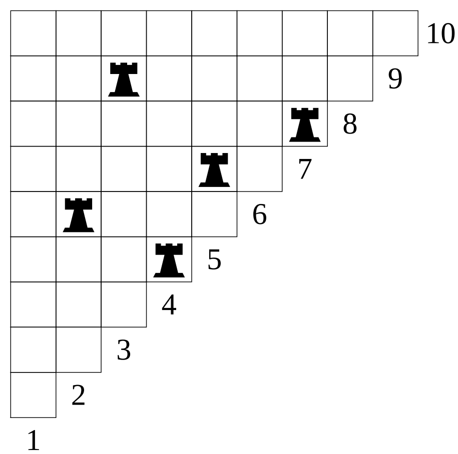
Zadatak 3.9. Dokaz je analogan zadacima 1.5 i 2.3, ali prebrojavamo surjekcije.

Zadatak 3.10. (a) Ako je N skup predmeta, a K skup kutija, rasporedima predmeta u kutije odgovaraju funkcije $f : N \to K$. Broj rasporeda je k^n. (b) Ako je x_i broj predmeta u i-toj kutiji, rasporedima predmata u kutije odgovaraju cjelobrojna rješenja jednadžbe $x_1 + \ldots + x_k = n$ uz uvjete $x_i \geq 0$. Broj rasporeda je $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$. (c) Ako je N skup predmeta, rasporedima predmeta u kutije odgovaraju particije skupa N s najviše k blokova. Broj rasporeda je $\sum\limits_{i=1}^{k} \left\{ {n \atop i} \right\}$. (d) Rasporedima predmeta u kutije odgovaraju particije prirodnog broja n s najviše k pribrojnika (tj. duljine $\leq k$). Broj rasporeda je

$\sum\limits_{i=1}^{k} p(n,i)$.

Zadatak 3.11. (a) Rasporedima predmeta u kutije odgovaraju surjekcije $f : N \to K$. Broj rasporeda je $\mathrm{Sur}(n,k)$. (b) Rasporedima predmata u kutije odgovaraju cjelobrojna rješenja jednadžbe $x_1 + \ldots + x_k = n$ uz uvjete $x_i > 0$. Broj rasporeda je $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{n-k}$. (c) Rasporedima predmeta u kutije odgovaraju particije skupa N s točno k blokova. Broj rasporeda je $\left\{ {n \atop k} \right\}$. (d) Rasporedima predmeta u kutije odgovaraju particije prirodnog broja n s točno k pribrojnika (duljine k). Broj rasporeda je $p(n,k)$.

Zadatak 3.12.



Zadatak 3.13. $\{\{1,4,5,7\},\{2\},\{3,9\},\{6,10\},\{8\}\}$.

Zadatak 3.14. Vidi [2].

Zadatak 3.15. $\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 1 & 3 & 1 & 6 & 10 & 1 \end{array}$.

Zadatak 4.1. Neka je G grupa reda n. Za svaki $g \in G$ definiramo funkciju $\pi_g : G \to G$, $\pi_g(x) = gx$. Ta funkcija ima inverznu funkciju $\pi_{g^{-1}}$, pa je bijekcija, tj. permutacija elemenata grupe G. Pridruživanje $g \mapsto \pi_g$ je monomorfizam grupa (injektivni homomorfizam), a njegova slika je podgrupa od $S(G)$ izomorfna s grupom G. Ovdje je $S(G)$ grupa svih permutacija elemenata od G, koju možemo identificirati sa simetričnom grupom S_n.

Zadatak 4.2. Za $1 < s \leq n$, broj ciklusa stupnja n i duljine s je $\binom{n}{s}(s-1)!$. Za $s = 1$ svi "ciklusi duljine jedan" predstavljaju istu permutaciju (identitetu), pa je broj takvih ciklusa 1.

Zadatak 4.3. Permutaciju π stupnja 11 (shvaćenu kao uređenu n-torku različitih elemenata iz $\{1,\ldots,n\}$) podijelimo na jedan ciklus duljine 5 i tri ciklusa duljine 2:

$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6,\pi_7,\pi_8,\pi_9,\pi_{10},\pi_{11})$$
$$\downarrow$$
$$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5)(\pi_6,\pi_7)(\pi_8,\pi_9)(\pi_{10},\pi_{11}).$$

Cikličkim permutiranjem elemenata unutar ciklusa donja permutacija ostaje ista, pa broj $11!$ trebamo podijeliti s $5\cdot2\cdot2\cdot2$. Osim toga donja permutacija ostaje ista kad međusobno permutiramo cikluse duljine 2. Zato je broj permutacija cikličkog tipa $(5,2,2,2)$ jednak $\frac{11!}{5\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3!}=166\,320$.

Zadatak 4.4. Ako je permutacija π produkt disjunktnih ciklusa

$$\pi=(i_1\,\cdots\,i_s)\,(j_1\,\cdots\,j_t)\cdots,$$

onda je konjugirana permutacija $\sigma\pi\sigma^{-1}$ produkt disjunktnih ciklusa

$$\sigma\pi\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\,\cdots\,\sigma(i_s))\,(\sigma(j_1)\,\cdots\,\sigma(j_t))\cdots.$$

To provjerimo tako da promotrimo u što lijeva i desna strana preslikavaju proizvoljni $j\in\{1,\ldots,n\}$. Budući da je σ surjekcija, možemo ga zapisati kao $j=\sigma(i)$. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $i=i_1$, pa produkt ciklusa s desne strane preslikava j u $\sigma(i_2)$. Permutacija s lijeve strane radi isto: $(\sigma\pi\sigma^{-1})(j)=(\sigma\pi\sigma^{-1})(\sigma(i_1))=\sigma(\pi(i_1))=\sigma(i_2)$. Time smo dokazali da konjugirane permutacije imaju isti cikliči tip. Obrnuto, dvije permutacije π_1 i π_2 istog cikličkog tipa konjugirane su permutacijom σ koju dobijemo tako da cikluse odgovarajuće veličine od π_1 i π_2 napišemo jedne ispod drugih.

Zadatak 4.5. Particija n-članog skupa na $n-2$ blokova sastoji se od jednog bloka veličine 3 i $n-3$ blokova veličine 1, ili od dva bloka veličine 2 i $n-4$ blokova veličine 1. U prvom slučaju particija ima $\binom{n}{3}$, a u drugom slučaju ih ima $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. Analogna formula za Stirlingove brojeve prve vrste je $\left[{n \atop n-2}\right]=2\binom{n}{3}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$. U prvom slučaju od izabrana tri broja možemo napraviti dva ciklusa duljine 3.

Zadatak 4.6. Prebrojavamo permutacije od $\{1,\ldots,n\}$ koje imaju dva ciklusa. Pretpostavimo da je jedan ciklus duljine k, a drugi duljine $n-k$. Elemente u prvom ciklusu biramo na $\binom{n}{k}$ načina, zatim ih složimo u ciklus na $(k-1)!$ načina, a preostale elemente na $(n-k-1)!$ načina. Vrijedi $\binom{n}{k}(k-1)!(n-k-1)!=(n-1)!\frac{n}{k(n-k)}=(n-1)!\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)$. Formula slijedi tako da sumiramo po $k=1,\ldots,n-1$ i podijelimo s 2, jer smo svaku permutaciju brojali 2 puta.

Zadatak 4.7. Neka je $S=\{1,\ldots,n+1\}$. Lijeva strana prebrojava particije skupa S na $m+1$ blokova, odnosno permutacije skupa S sa $m+1$ ciklusa. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih takvih particija, odnosno permutacija. Podijelit ćemo ga na disjunktne podskupove tako da dobijemo sume na desnoj strani.

U prvom slučaju neka je $\mathcal{P}_k$ skup svih particija u kojima je $n-k$ elemenata iz $\{1,\ldots,n\}$ u bloku koji sadrži element $n+1$, a k elemenata nije u tom bloku. Particija iz $\mathcal{P}_k$

jednoznačno je određena kad izaberemo tih k elemenata i particioniramo ih na m blokova, pa je $|\mathcal{P}_k| = \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$.

U drugom slučaju neka je $\mathcal{P}_k$ skup svih permutacija u kojima je $n-k$ elemenata iz $\{1,\ldots,n\}$ u ciklusu koji sadrži element $n+1$, a k elemenata nije u tom ciklusu. Da bismo odredili permutaciju iz $\mathcal{P}_k$ biramo tih k elemenata i napravimo od njih permutaciju s m ciklusa, a preostalih $n-k$ elemenata i element $n+1$ složimo u ciklus duljine $n-k+1$ na $(n-k)!$ načina. Zato je $|\mathcal{P}_k| = \binom{n}{k} \left[{k \atop m} \right] (n-k)!$.

Zadatak 4.8. Ovo je generalizacija identiteta iz primjera 4.14. Prebrojavamo particije n-članog skupa s k blokova od kojih su m istaknuti, odnosno permutacije n-članog skupa s k ciklusa od kojih su m istaktnuti.

Zadatak 4.9. Neka je $S = \{1,\ldots,n+m+1\}$ i $\mathcal{P}$ skup svih particija od S na m blokova, tako da $|\mathcal{P}|$ bude lijeva strana prvog identiteta. Podijelimo $\mathcal{P}$ na disjunktne podskupove prema najvećem elementu $x \in S$ koji nije u jednočlanom bloku. Brojevi od $x+1$ do $n+m+1$ su u jednočlanim blokovima i ima ih $n+m-x+1$. Blokova ima m, pa mora vrijediti $n+m-x+1 \le m$, odnosno $x \ge n+1$. Označimo $k = x-n-1$ i neka je $\mathcal{P}_k$ skup svih particija iz $\mathcal{P}$ u kojima je $n+k+1$ najveći element iz S koji nije u jednočlanom bloku. Upravo smo dokazali da je $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{P}_m$ (disjunktna unija), pa prema principu sume vrijedi $|\mathcal{P}| = \sum\limits_{k=0}^{m} |\mathcal{P}_k|$. Particije iz $\mathcal{P}_k$ sadrže $m-k$ jednočlanih blokova $\{n+k+2\},\ldots,\{n+m+1\}$, a preostale blokove dobijemo tako da elemente $\{1,\ldots,n+k\}$ particioniramo na k blokova i jednom od njih dodamo element $n+k+1$. Zato je $|\mathcal{P}_k| = k \left\{ {n+k \atop k} \right\}$.

Drugi identitet dokazujemo analogno. Skup $\mathcal{P}$ svih permutacija od S koje imaju m ciklusa podijelimo na disjunktne podskupove prema najvećem elementu $x \in S$ koji nije u jednočlanom ciklusu, tj. nije fiksna točka permutacije. Ako s $\mathcal{P}_k$ označimo skup svih permutacija kojima je $n+k+1$ najveća nefiksna točka, vrijedi $|\mathcal{P}| = \sum\limits_{k=0}^{m} |\mathcal{P}_k|$. Permutacija iz $\mathcal{P}_k$ fiksira elemente $n+k+2,\ldots,n+m+1$, što nam daje $m-k$ ciklusa duljine 1. Elemente $\{1,\ldots,n+k\}$ permutiramo tako da dobijemo k ciklusa, a zatim jednom od tih ciklusa dodajemo element $n+k+1$. To možemo napraviti na $n+k$ načina (vidi dokaz teorema 4.5), pa je $|\mathcal{P}_k| = (n+k) \left[{n+k \atop k} \right]$.

Zadatak 4.10. Prema teoremu 4.8, lijeva strana je broj rasporeda $n-m$ slopova na ploči Δ_{n+1}. Desnu stranu dobivamo tako da rasporede podijelimo prema broju slopova koji nisu u prvom stupcu, nego u dijelu ploče Δ_n. Ako se u Δ_n nalazi $n-k$ slopova, a u prvom stupcu preostalih $k-m$ slopova, takvih rasporeda ima $\left[{n \atop k} \right] \binom{k}{k-m} = \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}$.

Zadatak 4.11. Identitet je ekvivalentan s $\sum\limits_{i\ge 1} \left[{n \atop 2i} \right] = \sum\limits_{i \ge 0} \left[{n \atop 2i+1} \right]$ i možemo ga dokazati uspostavljanjem bijekcije između permutacija stupnja n s parnim brojem ciklusa i neparnim brojem ciklusa. Ako su za permutaciju $\pi \in S_n$ elementi 1 i 2 u istom ciklusu $(1\ a_1\ \cdots\ a_i\ 2\ b_1\ \cdots\ b_j)$, rastavimo ga na dva ciklusa $(1\ a_1\ \cdots\ a_i)$ i $(2\ b_1\ \cdots\ b_j)$. Ako su elementi 1 i 2 u različitim ciklusima $(1\ a_1\ \cdots\ a_i)$ i $(2\ b_1\ \cdots\ b_j)$, spojimo ih u jedan ciklus $(1\ a_1\ \cdots\ a_i\ 2\ b_1\ \cdots\ b_j)$. Tako dobivamo bijekciju iz S_n u S_n koja je sama sebi inverz i mijenja parnost broja ciklusa. Alternativni dokaz koristi teorem 4.8 i uspostavlja bijekciju između skupa rasporeda parnog/neparnog broja slabih topova na ploču Δ_n.

Zadatak 4.13. (c) Iz teorema 4.10 i 4.9 slijedi $x^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\sum\limits_{j=0}^{n} \left[{n \atop j} \right] \left\{ {j \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}}$. Pokazuje se da je koeficijent $\sum\limits_{j=0}^{n} \left[{n \atop j} \right] \left\{ {j \atop k} \right\}$ upravo Lahov broj $L(n,k)$. Pogledajte članak [24] o sumama ovog oblika.

Zadatak 4.14. Koeficijent uz n^j je $\sum\limits_{i=j}^{m+1} \frac{(-1)^{i-j}}{i} \left\{ {m \atop i-1} \right\} \left[{i \atop j} \right]$.

Zadatak 5.1. Za $\mu = (3,2,1,1)$ je $R(\mu, x) = 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3$. Topovski ekvivalentne particije su $(4,2,1)$, $(3,3,1)$ i $(3,2,2)$. To se najlakše ustanovi s pomoću teorema 5.4, tražeći particije s pridruženim multiskupom $\{4^3, 5^2, 6, 7\}$.

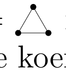
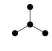
Zadatak 5.2. Ploča $\square_n$ je Ferrersov dijagram particije $(n, n, \ldots, n)$ (n pribrojnika). Za obje particije pridruženi multiskup je $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, pa su topovski ekvivalentne po teoremu 5.4.

Zadatak 5.3. $\operatorname{per} I_n = 1$, $\operatorname{per} J_n = n!$. Za n paran je $\operatorname{per} A_n = (\frac{n}{2}!)^2$, a za n neparan je $\operatorname{per} A_n = (\frac{n-1}{2}!) \cdot (\frac{n+1}{2}!)$.

Zadatak 5.5. Graf $K_{n,n}$ je jako regularan s parametrima $(2n, n, 0, n)$.

Zadatak 5.6. Petersenov graf P ima polinom sparivanja $M(P,x) = 1 + 15x + 75x^2 + 145x^3 + 90x^4 + 6x^5$. Broj savršenih sparivanja je 6 (vodeći koeficijent). Dva savršena sparivanja prikazana su na slici 5.5, a još četiri dobiju se rotacijom desnog sparivanja na toj slici.

Zadatak 5.7. Matrice susjedstva A_1, A_2 istog grafa dobivene različitim numeracijama njegovih vrhova su slične. Točnije, postoji permutacijska matrica P takva da je $A_2 = P \cdot A_1 \cdot P^{-1}$. Zato matrice A_1 i A_2 imaju isti karakteristični polinom i iste svojstvene vrijednosti (spektar). *Spektralna teorija grafova* proučava svojstva grafa na osnovu njegovih svojstvenih vrijednosti; vidi knjigu [32].

Zadatak 5.8. Na primjer, za $G_1 =$  i $G_2 =$  je $M(G_1, x) = M(G_2, x) = 1 + 3x$. Broj bridova grafa G je $m_1(G)$, što je koeficijent uz x u $M(G,x)$ i suprotni koeficijent uz x^{n-2} u $\mu(G,x)$.

Zadatak 5.9. Formula za $m_2(G)$ slijedi tako da biramo bilo koja dva brida od G i oduzimamo izbore za koje bridovi imaju zajednički vrh. Po lemi o rukovanju je $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2e$. Funkcija $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2$ poprima minimalnu vrijednost uz taj uvjet ako i samo ako je $d_i = \frac{2e}{n}$ za

$i = 1, \ldots, n$. Formulu za $m_2(G)$ možemo zapisati kao $\frac{e(e+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2$. Zaključujemo da je graf regularan ako i samo ako odgovarajući koeficijent u polinomu sparivanja poprima najveću moguću vrijednost $\frac{(n-4)e^2+ne}{2n}$.

Zadatak 5.10. Sparivanje potpunog grafa K_n sastoji se od k međusobno disjunktna dvočlana podskupa vrhova. Biramo ih tako da izaberemo $2k$ vrhova i poslažemo ih u niz, što možemo na $n^{\underline{2k}}$ načina. Grupiramo ih redom dva po dva, a pritom redoslijed k parova i redoslijed elemenata unutar parova nisu bitni. Zato broj $n^{\underline{2k}}$ treba podijeliti s $k!$ i 2^k.

Zadatak 5.11. Biramo k od $n-1$ bridova od P_n tako da nisu susjedni. To je ekvivalentno prebrojavanju binarnih nizova koji se sastoje od k jedinica i $n-1-k$ nula u kojima nema susjednih jedinica. Postavimo k jedinica i razdvojimo ih s $k-1$ nula. Preostalih $n-1-k-(k-1) = n-2k$ nula raspoređujemo na $k+1$ mjesta. Po "principu kuglica i štapića" to možemo na $\binom{n-2k+k}{k} = \binom{n-k}{k}$ načina.

Zadatak 5.12. Iz propozicija 5.7 i 5.6 slijedi $M(P_n, x) = M(P_{n-1}, x) + x \cdot M(P_{n-2}, x)$. Početni uvjeti su $M(P_1, x) = 1$ i $M(P_2, x) = 1 + x$.

Zadatak 6.2. $\binom{32}{5} - \binom{4}{1}\binom{24}{5} + \binom{4}{2}\binom{16}{5} - \binom{4}{3}\binom{8}{5} = 57344$.

Zadatak 6.3. $2^{6n} - 2^{3n} - 2^{4n} + 2^{2n}$.

Zadatak 6.4. Označimo planinare brojevima $1, \ldots, n$. Rasporede hodanja identificiramo s permutacijama tog skupa. Pretpostavimo da je prije promjene raspored hodanja bio $(1, 2, \ldots, n)$. Prebrojavamo permutacije u kojima se ne pojavljuju podnizovi $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $\ldots$, $(n-1, n)$. Neka je A_i skup svih permutacija u kojima se pojavljuje podniz $(i, i+1)$, za $i = 1, \ldots, n-1$. Za $I \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$ vrijedi $|A_I| = (n-|I|)!$. Po formuli (6.1), broj traženih rasporeda hodanja je

$$|A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c| = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} (n-i)!.$$

Zadatak 6.5. Ukupan broj permutacija zadanog multiskupa je $\binom{2n}{2,\ldots,2} = \frac{(2n)!}{2^n}$. Neka je A_i skup svih permutacija u kojima su elementi a_i susjedni. Za $I \subseteq N$ vrijedi $|A_I| = \frac{(2n-|I|)!}{2^{n-|I|}}$. Po formuli (6.1), broj permutacija u kojima su susjedni elementi različiti je

$$|A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{I \subseteq N} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{(2n-i)!}{2^{n-i}}.$$

Zadatak 6.6. Ukupan broj grafova je $2^{\binom{n}{2}}$: za svaki dvočlani podskup od V odlučujemo je li brid ili nije brid. Neka je A_i skup svih grafova u kojima je vrh i izoliran. Za $I \subseteq V$ vrijedi $|A_I| = 2^{\binom{n-|I|}{2}}$. Po formuli (6.1), broj grafova bez izoliranih vrhova je

$$|A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c| = |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| = \sum_{I \subseteq V} (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 2^{\binom{n-i}{2}}.$$

Zadatak 6.7. Broj matrica B bez uvjeta na retke je $(n^2)!$. Broj matrica B kojima se zadanih i redaka podudara s matricom A je $(n(n-i))!$. Po formuli (6.1), traženi broj matrica B je $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n(n-i))!$.

Zadatak 6.8. Topovski polinom ploče P je $R(P,x)=(1+x)(1+3x+x^2)^2=1+7x+17x^2+17x^3+7x^4+x^5$. Po teoremu 6.6, broj permutacija sa zabranjenim pozicijama iz P je $\sum\limits_{k=0}^{5}(-1)^k\,r_k(P)\,(5-k)!=5!-7\cdot 4!+17\cdot 3!-17\cdot 2!+7\cdot 1!-1\cdot 0!=26$.

Zadatak 6.9. Topovski polinom zabranjenih pozicija je $R(P,x)=(1+x)(1+3x+x^2)=1+4x+4x^2+x^3$. Po teoremu 6.6, broj permutacija je $\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k\,r_k(P)\,(4-k)!=4!-4\cdot 3!+4\cdot 2!-1\cdot 1!=7$.

Zadatak 6.10. Topovski polinom zabranjenih pozicija je $R(P,x)=(1+4x+2x^2)(1+2x)^2=1+8x+22x^2+24x^3+8x^4$. Po teoremu 6.6, broj permutacija je $\sum\limits_{k=0}^{4}(-1)^k\,r_k(P)\,(6-k)!=6!-8\cdot 5!+22\cdot 4!-24\cdot 3!+8\cdot 2!=160$.

Zadatak 6.11. Topovski polinom zabranjenih pozicija na grbu Republike Hrvatske je $R(P,x)=1+7x+14x^2+6x^3$. Broj rasporeda topova je $5!-7\cdot 4!+14\cdot 3!-6\cdot 2!=24$.

Zadatak 7.1. $g(\emptyset)=1$, $g(\{1\})=g(\{2\})=2$, $g(\{3\})=3$, $g(\{1,2\})=5$, $g(\{1,3\})=g(\{2,3\})=7$, $g(\{1,2,3\})=17$. Vidimo da vrijedi $f(\{1,3\})=g(\emptyset)-g(\{1\})-g(\{3\})+g(\{1,3\})$ i $f(\{1,2,3\})=-g(\emptyset)+g(\{1\})+g(\{2\})+g(\{3\})-g(\{1,2\})-g(\{1,3\})-g(\{2,3\})+g(\{1,2,3\})$.

Zadatak 7.2. Lijeva strana prebrojava skup svih funkcija $f:N\to I$, pri čemu je $|N|=n$ i $|I|=i$. Da bi dobili desnu stranu, rastavimo taj skup prema kardinalitetu slike funkcije $|\operatorname{Im}(f)|=j$.

Zadatak 7.3. Lijeva strana prebrojava skup svih permutacija i-članog skupa, a za desnu stranu rastavimo taj skup prema broju fiksnih točaka permutacije $i-j$. Formulu iz teorema 6.5 dobijemo primjenom korolara 7.4 na funkcije $f(i)=d_i$, $g(i)=i!$.

Zadatak 7.4. $\sum\limits_{j=0}^{i}\binom{i}{j}F_j=F_{2i}$. Iz korolara 7.4 slijedi $\sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}F_{2j}=F_i$.

Zadatak 7.5. Za svake dvije funkcije $f,g:\{0,1,\ldots,n\}\to\mathbb{R}$ vrijedi

$$g(i)=\sum_{j=0}^{i}\left\{{i \atop j}\right\}f(j)\quad\Longleftrightarrow\quad f(i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\left[{i \atop j}\right]g(j)$$

i

$$g(i)=\sum_{j=0}^{i}\begin{bmatrix} i\\ j\end{bmatrix} f(j) \iff f(i)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\left\{\begin{matrix} i\\ j\end{matrix}\right\} g(j).$$

Zadatak 7.6. Primijenimo korolar 7.4 na funkcije $F(i)=i!\cdot f(i)$ i $G(i)=i!\cdot g(i)$.

Zadatak 7.8. Djelitelji od m su oblika $p_1^{x_1}\cdots p_n^{x_n}$ za $x_i\in\{0,1,\ldots,e_i\}$. Slijedi $\tau(m)=(e_1+1)\cdots(e_n+1)$ i $\sigma(m)=\sum\limits_{x_1=0}^{e_1}\cdots\sum\limits_{x_n=0}^{e_n}p_1^{x_1}\cdots p_n^{x_n}=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{x_i=0}^{e_i}p_i^{x_i}\right)=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i^{e_i+1}-1}{p_i-1}$.

Zadatak 7.10. Djelitelji od $m\cdot n$ su oblika $d\cdot d'$ za $d\mid m$ i $d'\mid n$. Uz to, ako je $M(m,n)=1$, onda je i $M(d,d')=1$. Zato vrijedi

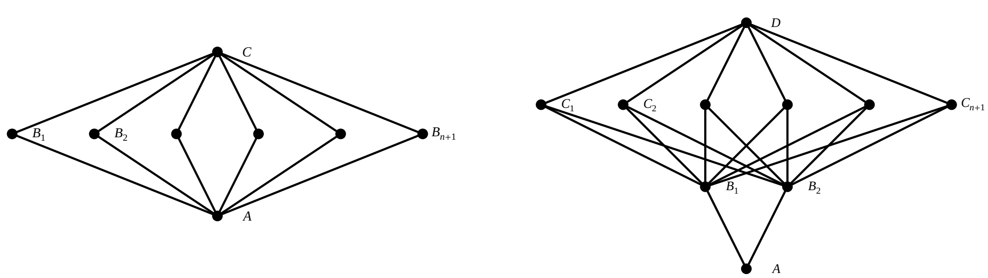
$$g(m\cdot n)=\sum_{d\,|m}\sum_{d'\,|n}f(d\cdot d')=\sum_{d\,|m}\sum_{d'\,|n}f(d)\cdot f(d')=\left(\sum_{d\,|m}f(d)\right)\cdot\left(\sum_{d'\,|n}f(d')\right)=g(m)\cdot g(n).$$

Zadatak 7.11. U Booleovoj rešetki $(2^S,\subseteq)$ operacija $x\vee y$ je unija, a operacija $x\wedge y$ presjek skupova x i y. Najmanji element je prazan skup $\emptyset$, a najveći element je skup S. U skupu $\mathbb{N}$ s relacijom djeljivosti operacija $x\vee y$ je najmanji zajednički višekratnik, a operacija $x\wedge y$ je najveći zajednički djelitelj prirodnih brojeva x i y. Najmanji element je broj 1, a najveći element ne postoji.

Zadatak 7.14. $\dim T_n(\mathbb{R})=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}$.

Zadatak 7.16. Najmanja moguća dimenzija incidencijske algebre $I(P)$ je n. Postiže se za parcijalni uređaj u kojem nikoja dva različita elementa nisu usporediva. Najveća moguća dimenzija je $\frac{n(n+1)}{2}$ i postiže se za totalni uređaj.

Zadatak 7.17. Neka je $X=\{A,B_1,\ldots,B_{n+1},C\}$ s parcijalnim uređajem $A\le B_i$, $A\le C$, $B_i\le C$. Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $(X,\le)$ prikazan je na slici 10.2 lijevo. Lanac od A do C duljine 1 je $\{A,C\}$, a duljine 2 su $\{A,B_i,C\}$. Po teoremu 7.19 je $\mu(A,C)=-1+n+1=n$. Nadalje, neka je $X=\{A,B_1,B_2,C_1,\ldots,C_{n+1},D\}$ s parcijalnim uređajem $A\le B_i$, $A\le C_j$, $A\le D$, $B_i\le C_j$, $B_i\le D$, $C_j\le D$. Hasseov



Slika 10.2: Hasseovi dijagrami p. u. skupova u kojima je $\mu(A,C)=n$ i $\mu(A,D)=-n$.

dijagram parcijalno uređenog skupa $(X, \leq)$ prikazan je na slici 10.2 desno. Lanac od A do D duljine 1 je $\{A, D\}$, duljine 2 su $\{A, B_i, D\}$ i $\{A, C_j, D\}$ (ima ih $n+3$), a duljine 3 su $\{A, B_i, C_j, D\}$ (ima ih $2(n+1)$). Po teoremu 7.19 je $\mu(A, D) = -1+n+3-2(n+1) = -n$.

Zadatak 7.18. $\zeta^2(x,y) = \sum\limits_{z\in[x,y]} \zeta(x,z)\zeta(z,y) = \sum\limits_{z\in[x,y]} 1 = |\,[x,y]\,|$. Vidimo da je $\zeta^2(x,y)$ kardinalitet segmenta $[x,y]$.

Zadatak 9.2. (a) $\mathbb{P}(A \cap B = \emptyset) = \frac{3^n}{4^n}$. (b) $\mathbb{P}(A \cup B = N) = \frac{3^n}{4^n}$. (c) $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{4}$. (d) $\mathbb{E}(Y) = \frac{3n}{4}$. (e) $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{2}$.

Zadatak 9.3. (a) $\mathbb{P}(A \cap B = \emptyset) = \binom{n-k}{k}/\binom{n}{k}$. (b) $\mathbb{P}(A \cup B = N) = \binom{k}{2k-n}/\binom{n}{k}$. (c) $\mathbb{P}(i \in A \cap B) = \frac{k^2}{n^2}$. (d) $\mathbb{P}(|A \cap B| = i) = \binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}/\binom{n}{k}$. (e) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{k} i\,\mathbb{P}(X = i)$ $= \sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}\binom{n-k}{k-i}\,/\,\binom{n}{k}$. (f) $\mathbb{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbb{P}(i \in A \cap B) = \frac{k^2}{n^2}$. (g) $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{k^2}{n}$.

Zadatak 10.3. Formulu $\sum\limits_{n\geq 0} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ iz primjera 10.8 deriviramo i pomnožimo sa z:

$$\sum_{n\geq 0} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Zadatak 10.4. Iz primjera 10.8 i zadatka 10.3 slijedi

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} p_n z^n = \frac{3}{2}\sum_{n\geq 0} n^2 z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0} nz^n = \frac{3}{2}\frac{z(1+z)}{(1-z)^3} - \frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z(1+2z)}{(1-z)^3}.$$

Zadatak 10.5. Očito je $G(z) = (1-z)^{m+1}$, pa je po binomnom teoremu $b_n = (-1)^n\binom{m+1}{n}$.

Zadatak 10.6. Zatvorena formula za $F(z)$ je $\frac{1}{(1-z)^2}$. Stoga je $G(z) = (1-z)^2 = 1-2z+z^2$. Koeficijenti su $b_0 = 1$, $b_1 = -2$, $b_2 = 1$ i $b_n = 0$ za $n \geq 3$.

Zadatak 10.8. Prva zagrada odgovara broju elemenata A u podmultiskupu, druga zagrada broju elemenata B, a treća zagrada broju elemenata C:

$$F(z) = (1 + z + z^2 + \ldots) \cdot (1 + z + \ldots + z^{10}) \cdot (1 + z + \ldots + z^5) =$$
$$= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1-z^{11}}{1-z} \cdot \frac{1-z^6}{1-z} = \frac{(1-z^{11})(1-z^6)}{(1-z)^3}.$$

Koristimo se teoremom 10.15 da bismo odredili koeficijent a_{10}:

$$F(z) = (1-z^{11})(1-z^6)\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}z^n \quad\Longrightarrow\quad a_{10} = \langle z^{10}\rangle F(z) = \binom{12}{2} - \binom{6}{2} = 51.$$

Zadatak 10.9. Zagrade odgovaraju redom broju kupnjenih lubenica, banana, manga, šljiva i mandarina:

$$F(z) = (1+z)(1+z^2+z^4+\ldots)(1+z+z^2)(z+z^3+z^5+\ldots)(1+z^3+z^6+\ldots) = \frac{z}{(1-z)^3(1+z)}.$$

Rastavimo funkciju izvodnicu na parcijalne razlomke i razvijemo je u red potencija:

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+z} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-z)^3} = \\ &= -\frac{1}{8}\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n - \frac{1}{8}\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\binom{n+1}{1} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2} z^n = \\ &= \sum_{n\geq 0}\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{8} - \frac{1}{4}(n+1) + \frac{1}{2}\binom{n+2}{2}\right] z^n. \end{aligned}$$

Izraz u uglatoj zagradi je formula za a_n.

Zadatak 10.10.

$$F(z) = \sum_{n\geq 0}(2\cdot 3^n + (-4)^n) z^n = 2\cdot\sum_{n\geq 0} 3^n z^n + \sum_{n\geq 0}(-4)^n z^n = 2\cdot\frac{1}{1-3z} + \frac{1}{1+4z} = \frac{3+5z}{1+z-12z^2}.$$

Prema teoremu 10.10, niz zadovoljava rekurziju $a_{n+2} + a_{n+1} - 12a_n = 0$ uz početne uvjete $a_0 = 3$, $a_1 = 2$.

Zadatak 10.11. Zapišimo traženu funkciju izvodnicu kao

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n = 1 + z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n = 1 + z + \sum_{n\geq 0} a_{n+2} z^{n+2}.$$

Primijenimo formalnu derivaciju i iskoristimo rekurziju:

$$\begin{aligned} F'(z) &= 1 + \sum_{n\geq 0}(n+2)a_{n+2}z^{n+1} = 1 + \sum_{n\geq 0}(a_{n+1}+a_n)z^{n+1} = 1 + \sum_{n\geq 0} a_{n+1}z^{n+1} + \\ &+ z\cdot\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 1 + F(z) - 1 + z\cdot F(z) = (1+z)F(z). \end{aligned}$$

Funkcija izvodnica zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $F'(z) = (1+z)F(z)$. Riješimo je metodom separacije varijabli i tako dobijemo formulu $F(z) = e^{z+\frac{z^2}{2}}$.

Zadatak 10.12. $A(z) = \frac{1}{1-2z^2-z^3}$.

Zadatak 10.14. Označimo putnike brojevima $1, \ldots, n$, a stanice slovima a, b, c, d. Raspored izlaženja identificiramo s funkcijom $f : \{1, \ldots, n\} \to \{a, b, c, d\}$ koja zadovoljava uvjete na kardinalitete praslika $|f^{-1}(a)| \leq 1$, $|f^{-1}(b)|$ je paran i $|f^{-1}(c)| \geq 1$. Alternativno, raspored izlaženja je nizu duljine n sastavljenom od slova a, b, c, d u kojem se pojavljuje najviše jedno slovo a, paran broj slova b i barem jedno slovo c. Eksponencijalna funkcija izvodnica za broj takvih funkcija ili nizova je

$$F(z) = (1+z)\cdot\left(1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)\cdot\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots\right).$$

Zagrade odgovaraju redom slovima a, b, c i d. Sredimo funkciju izvodnicu i raspišemo je kao zbroj redova potencija:

$$F(z) = (1+z)\cdot\frac{e^z+e^{-z}}{2}\cdot(e^z-1)\cdot e^z = \frac{1}{2}\left(e^{3z}+e^z+ze^{3z}+ze^z-e^{2z}-ze^{2z}-1-z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\tfrac{3^n}{n!}z^n+\sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}z^n+\sum_{n\geq 0}\tfrac{3^n}{n!}z^{n+1}+\sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}z^{n+1}-\sum_{n\geq 0}\tfrac{2^n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 0}\tfrac{2^n}{n!}z^{n+1}-1-z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\tfrac{3^n}{n!}z^n+\sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}z^n+\sum_{n\geq 1}\tfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}z^n+\sum_{n\geq 1}\tfrac{1}{(n-1)!}z^n-\sum_{n\geq 0}\tfrac{2^n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 1}\tfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}z^n-1-z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\tfrac{3^n}{n!}z^n+\sum_{n\geq 0}\tfrac{1}{n!}z^n+\sum_{n\geq 1}\tfrac{n3^{n-1}}{n!}z^n+\sum_{n\geq 1}\tfrac{n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 0}\tfrac{2^n}{n!}z^n-\sum_{n\geq 1}\tfrac{n2^{n-1}}{n!}z^n-1-z\right).$$

Zbog uvjeta $n \geq 2$ zadnja dva člana u zagradi možemo zanemariti. Traženi broj rasporeda izlaženja je

$$n!\langle z^n\rangle F(z) = \cancel{n!}\,\frac{1}{2\cdot\cancel{n!}}\left(3^n+1+n3^{n-1}+n-2^n-n2^{n-1}\right) =$$
$$= \frac{3^{n-1}(n+3)-2^{n-1}(n+2)+n+1}{2}.$$

Zadatak 10.15. Prebrojavamo n-permutacije multiskupa $\{N^{16}, J^6, B^{20}\}$ u kojima je broj slova N djeljiv s 5, broj slova J je prost i broj slova B je barem 3. Na i-tom mjestu nalazi se slovo N, J ili B ako i-ti matematičar pije sok od naranče, jabuke ili borovnice. Eksponencijalna funkcija izvodnica za ovaj problem je

$$F(z) = \left(1+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^{10}}{10!}+\frac{z^{15}}{15!}\right)\cdot\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\right)\cdot\left(\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{20}}{20!}\right).$$

Traženi broj je

$$10!\langle z^{10}\rangle F(z) = 10!\left(1\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{8!}+1\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7!}+1\cdot\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{5!}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}\right) = 2937.$$

Zadatak 10.16. $F(z) = \left(1+\frac{z}{1!}+\ldots+\frac{z^{20}}{20!}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{1!}+\ldots+\frac{z^{50}}{50!}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{1!}+\ldots+\frac{z^{100}}{100!}\right).$
Za $n = 100$ broj rasporeda je $100!\cdot\langle z^{100}\rangle F(z)$. U programu *Maxima* [30] dobijemo ga sljedećim naredbama:

```
s(n):=sum(z^k/k!,k,0,n); 100!*coeff(expand(s(20)*s(50)*s(100)),z,100);
```

Rezultat je 1205645631235016246631448443327724542104148486.

Zadatak 10.17. $F(z) = (1+z)^k$, $G(z) = (e^z - 1)^k$.

Zadatak 10.18. $F(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.

Zadatak 10.19. $F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{\Phi z} - e^{-\Psi z}\right)$, gdje je $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $-\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Zadatak 10.22. Transponiranjem Ferrersovih dijagrama, kao u teoremu 3.6, vidimo da je broj particija od n u tri dijela jednak broju particija od n s najvećim pribrojnikom 3. Za to možemo direktno napisati funkciju izvodnicu:

$$F(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) \cdot (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots) \cdot (z^3 + z^6 + z^9 + \ldots).$$

Prva zagrada odgovara broju jedinica, druga broju dvojki, a treća broju trojki (počinje sa z^3 jer se mora pojaviti bar jedna trojka). Sređivanjem dobijemo $F(z) = \frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$.

Zadatak 10.26. U primjeru 10.8 vidjeli smo da je zatvorena formula $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. Iz toga vidimo da je multiplikativni inverz $F(z)^{-1} = \frac{(1-z)^2}{z} = \frac{1-2z+z^2}{z} = z^{-1} - 2 + z$. Zatvorenu formulu kompozicijskog inverza $G(z) = F^{(-1)}(z)$ dobijemo iz $F(G(z)) = z \Rightarrow z \cdot G(z)^2 - (1+2z)G(z) + z = 0 \Rightarrow G(z) = \frac{1+2z-\sqrt{1+4z}}{2z}$. Koeficijente dobijemo iz Lagrangeove formule inverzije (10.20):

$$\langle z^n\rangle G(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle\,(1-z)^{2n} = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k z^k =$$

$$= \frac{1}{n}\,(-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = (-1)^{n-1}\,C_n.$$

Zadatak 10.27. Iz teorema 10.15 dobijemo $F(z)^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-z)^m} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\binom{m-1+n}{n} z^n = \sum_{n\geq 0}\binom{m-1+n}{n} z^{n-1} = \sum_{n\geq -1}\binom{m+n}{n+1} z^n$. Iz Lagrangeove formule inverzije (10.20) i teorema 10.15 slijedi

$$\langle z^n\rangle F^{(-1)}(z) = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \left(\frac{z}{F(z)}\right)^n = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \frac{1}{(1-z)^{mn}} = \frac{1}{n}\langle z^{n-1}\rangle \sum_{k\geq 0}\binom{mn-1+k}{k} z^k =$$

$$= \frac{1}{n}\binom{mn-1+n-1}{n-1} = \frac{1}{n}\binom{(m+1)n-2}{n-1} = \frac{1}{mn-1}\binom{(m+1)n-2}{n}.$$

Zadatak 10.28. Jednadžbu transformiramo u $f(z) = z \cdot (4 + 2f(z)^5) = z \cdot G(f(z))$ za

$G(z) = 4 + 2z^5$. Po Lagrangeovoj formuli inverzije (10.22) vrijedi

$$a_n = \langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(G(z)^n \right) = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(4 + 2z^5 \right)^n =$$
$$= \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k}\, 2^k\, z^{5k} = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{2n-k}\, z^{5k}.$$

Za $n = 2021$ dobijemo $a_{2021} = \dfrac{1}{2021} \dbinom{2021}{404} 2^{3638}$.

Zadatak 10.29. $f(z) \cdot (1 - 4f(z) + 4f(z)^2) = 2z \Rightarrow f(z) = z \cdot \frac{2}{1-4f(z)+4f(z)^2} = z \cdot G(f(z))$ za $G(z) = \frac{2}{1-4z+4z^2} = \frac{2}{(1-2z)^2}$. Po Lagrangeovoj formuli inverzije (10.22) je

$$a_n = \langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle G(z)^n = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(\frac{2}{(1-2z)^2} \right)^n = \frac{2^n}{n} \langle z^{n-1} \rangle \left(1 + (-2z)\right)^{-2n}.$$

Razvojem u binomni red (10.11) i sređivanjem generaliziranog binomnog koeficijenta dobijemo

$$a_n = \frac{2^n}{n} \langle z^{n-1} \rangle \sum_{k \geq 0} \binom{-2n}{k} (-2)^k z^k = \frac{2^n}{n} \binom{-2n}{n-1} (-2)^{n-1} = \frac{2^{2n-1}}{n} \binom{3n-2}{n-1}.$$

Zadatak 10.30. $f(z) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{3k}{k} z^{2k+1}$.

Zadatak 10.31. $f(z) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{3k+1} \binom{4k}{k} z^{3k+1}$.

Kazalo

binomna inverzija, 67
binomni koeficijent, 2, 19
broj
  Bellov, 22, 30, 35–37, 42
  Catalanov, 18
  Fibonaccijev, 13
  figurativni, 5
  harmonijski, 13
  kvadratni, 5
  Lahov, 42, 43
  peterokutni, 5, 7, 22, 119, 120
  Stirlingov, druge vrste, 23, 34, 36, 39, 40
  Stirlingov, prve vrste, 34, 36–38, 40
  trokutni, 4

ciklus (u grafu; za permutaciju vidi *ciklička permutacija*), 27, 50, 55, 62, 64

deranžman, 59
determinanta, 48
dvostruko prebrojavanje, 2

faktorijele, 2, 59
  padajuće, 9
  rastuće, 10
Ferrersov dijagram, 20, 25, 39, 45, 48
formula
  Cayleyeva, 28, 131, 132
  eksponencijalna, 132
  Newton-Leibnizova, 10, 11
  parcijalne sumacije, 14
  Pascalova, 12, 23, 35
  uključivanja-isključivanja, 57–59

Gaussov trik, 4
graf, 5
  bipartitan, 50
  jako regularan, 5
  Petersenov, 5, 50, 87

kombinacija, 2
  multiskupa, 19

multinomni koeficijent, 19

operator
  deriviranja, 9
  diferencijski, 9, 10
  pomaka, 14

particija
  broja, 20
  skupa, 22
permanenta, 48
permutacija, 2
  ciklička, 33–35, 41, 141–143
  multiskupa, 19
  sa zabranjenim pozicijama, 60
polinom
  Hermiteov, 53
  karakteristični, 52
  sparivanja, 49, 51–53
  topovski, 45–48
  Čebiševljev, 53
princip
  jednakosti, 2
  kuglica i štapića, 20, 61, 145
  produkta, 1
  razlike, 2
  sume, 1

rešetka, 82
  Booleova, 71, 75–77, 83, 85, 86, 96, 98, 147
  Youngova, 82

sparivanje, 49
stablo, 27, 28

korijensko, 131
suma
neodređena, 10
određena, 11

teorem
binomni, 2, 3, 16, 19, 30, 108
Birkhoff-von Neumannov, 89
Cayleyev, 33, 41, 141
Dilworthov, 87
Erdős-Ko-Rado, 98
Eulerov o peterokutnim brojevima, 120
Hallov, o braku, 53, 54
Kőnig-Egerváryjev, 88
Mirskyjev, 86
multinomni, 19
nejednakost LYM, 97
Nikomahov, 31
Ramseyev, 91
Spernerov, 96
topološko sortiranje, 71
topovska ekvivalencija, 48

Youngov dijagram, 20

Bibliografija

[1] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method. Fourth edition*, John Wiley & Sons, Inc., 2016.

[2] A. T. Benjamin, M. E. Orrison, *Two quick combinatorial proofs of* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$, The College Mathematics Journal **33** (2002), No. 5, 406–408.

[3] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs that really count. The art of combinatorial proof*, Mathematical Association of America, 2003.

[4] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, North-Holland, 1982.

[5] F. Butler, M. Can, J. Haglund, J. B. Remmel, *Rook theory notes*, 2011. `http://www.math.ucsd.edu/~remmel/files/Book.pdf`

[6] A. E. Brouwer, *Parameters of strongly regular graphs*, `https://www.win.tue.nl/~aeb/graphs/srg/srgtab.html`

[7] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of graphs*, Springer, 2012.

[8] A. E. Brouwer, H. Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, 2021. `https://homepages.cwi.nl/~aeb/math/srg/rk3/srgw.pdf`

[9] P. J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press, 1994.

[10] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2009. `https://web.math.pmf.unizg.hr/~duje/utb/utblink.pdf`

[11] P. Erdős, G. Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, Compositio Math. **2** (1935), 463–470.

[12] P. Erdős, *Some remarks on the theory of graphs*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 292–294.

[13] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, 2009. `http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf`

[14] C. D. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman & Hall, 1993.

[15] C. Godsil, K. Meagher, *Erdős-Ko-Rado theorems: algebraic approaches*, Cambridge University Press, 2016.

[16] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic graph theory*, Springer-Verlag, 2001.

[17] J. R. Goldman, J. T. Joichi, D. E. White, *Rook theory. I. Rook equivalence of Ferrers boards*, Proc. Amer. Math. Soc. **52** (1975), 485–492.

[18] W. T. Gowers, *The two cultures of mathematics*, u *Mathematics: frontiers and perspectives* (ur. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax i B. Mazur), Amer. Math. Soc., 2000., str. 65–78. `https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/2cultures.pdf`

[19] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics, 2nd edition*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[20] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1980.

[21] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), no. 1, 1–82.

[22] S. Jukna, *Extremal combinatorics. With applications in computer science. Second edition*, Springer, 2011.

[23] G. O. H. Katona, *A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem*, J. Combinatorial Theory Ser. B **13** (1972), 183–184.

[24] M. Knežević, V. Krčadinac, L. Relić, *Matrix products of binomial coefficients and unsigned Stirling numbers*, u *Proceedings of the 3rd Croatian Combinatorial Days* (urednici T. Došlić, S. Majstorović), Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2021., str. 35–44. `https://doi.org/10.5592/CO/CCD.2020.04`

[25] D. E. Knuth, *The art of computer programming. Vol. 1. Fundamental algorithms. Third edition*, Addison-Wesley, 1997.

[26] V. Krčadinac, *Matematičkim očekivanjem do kombinatoričkih identiteta*, Poučak **90** (2022), 4–10. `https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/pub/ocekivanje.pdf`

[27] N. A. Loehr, *Bijective combinatorics*, CRC Press, 2011.

[28] L. Lovász, M. D. Plummer, *Matching theory*, North-Holland Publishing Co., 1986.

[29] M. Marohnić, M. Bašić i dr., *Diskretna matematika – vježbe*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2015. `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/SKRIPTA.pdf`

[30] *Maxima, a computer algebra system.* `http://maxima.sourceforge.net`

[31] I. Nakić, *Diskretna matematika*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2012. `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf`

[32] B. Nica, *A brief introduction to spectral graph theory*, European Mathematical Society, 2018.

[33] M. Petkovšek, T. Pisanski, *Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers*, The Pi Mu Epsilon Journal **12** (2007), No. 7, 417–424.

[34] F. P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1929), no. 4, 264–286.

[35] G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **2** (1964), 340–368.

[36] J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, Wiley, New York, 1958.

[37] N. J. A. Sloane (urednik), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`

[38] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume 1, Second edition*, Cambridge University Press, 2012.

[39] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics, Volume 2*, Cambridge University Press, 1999.

[40] J. Touchard, *Sur un problème de permutations*, C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 631–633.

[41] L. G. Valiant, *The complexity of computing the permanent*, Theoret. Comput. Sci. **8** (1979), no. 2, 189–201.

[42] D. Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[43] Wikipedia, *Rogers-Ramanujan identities*, siječanj 2021.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Rogers-Ramanujan_identities`

[44] Wikipedia, *Topological sorting*, prosinac 2020.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Topological_sorting`

[45] H. S. Wilf, *generatingfunctionology*, Academic Press, Inc., 1994.
`https://www2.math.upenn.edu/~wilf/gfology2.pdf`

[46] D. Zeilberger, *Enumerative and algebraic combinatorics*, u *The Princeton companion to mathematics* (ur. T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader), Princeton University Press, 2008., str. 550–561.
`http://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimPDF/enuPCM.pdf`