1. Simpleks metoda – algebarski pristup. Inicijalizacija

1. Riješite zadaću linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 8x_4 & \to & \min \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 13x_4 & \leq & 4 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 12x_4 & \leq & 5 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & + & 14x_4 & \leq & 3 \\ & & & & & & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}\,. \end{array}$$

Rezultat: $\mathbf{x}^* = (0, 53, 0, 4)^\tau$.

2. Odredite minimum i maksimum funkcije cilja $c = 4x + 5y$ na skupu zadanom uvjetima

$$\begin{aligned} 10x + y &\geq 10 \\ 5x + 4y &\geq 20 \\ 3x + 7y &\geq 21 \\ x + 12y &\geq 12 \\ x, y &\geq 0\,, \end{aligned}$$

koristeći pomoćnu zadaću inicijalizacije. Pokušajte iskoristiti istu tablicu za određivanje minimuma i maksimuma.

Rezultat: c neomeđena odozgo, $c_{\min} = \frac{449}{23}$, $x_{\min} = \frac{56}{23}$, $y_{\min} = \frac{45}{23}$.

3. (Varijanta transportnog problema) Tvrtka ima tri skladišta iz kojih robu (ili dio robe) treba transportirati prema trgovinama na način da trgovina T_1 dobije barem 15 jedinica robe, a trgovina T_2 barem 20 jedinica robe. Na raspolaganju je po 12 jedinica robe u svakom skladištu, a u tablici je dan trošak transporta jedinice robe iz skladišta prema trgovinama.

	T_1	T_2
S_1	13	15
S_2	6	7
S_3	15	15

Cilj je organizirati transport, ali tako da je ukupni trošak transporta minimalan.

a) Modelirajte problem zadaćom linearnog programiranja.

b) Zapišite zadaću u standardnoj formi i riješite je simpleks metodom, rješavajući prvo pomoćnu zadaću inicijalizacije.

Rješenje: Ako je x_{ij} količina transportirane robe iz $i-$tog skladišta u $j-$tu trgovinu, zadaća optimizacije glasi: $\sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (c_{ij} su dani u tablici), uz uvjete $x_{11} + x_{12} \leq 12$, $x_{21} + x_{22} \leq 12$, $x_{31} + x_{32} \leq 12$, $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 15$, $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$, $x_{ij} \geq 0$. Rez: $x_{11} = 12$, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 3$, $x_{22} = 9$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 11$, gdje x_{ij} označava transportiranu količinu robe iz S_i u T_j.

4.* Zadaću optimizacije

$$\begin{aligned} -x + |2x - y| &\to \min \\ x + y &\leq 10 \\ 2x + y &\leq 15 \\ x, y &\geq 0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

svedite na zadaću linearnog programiranja i riješite simpleks metodom.

Rješenje: Gornju apsolutnu vrijednost možemo zamijeniti novom varijablom $t \geq 0$ i dodati uvjete $2x - y \leq t$ i $2x - y \geq -t$, tako da nova zadaća glasi

$$\begin{aligned} -x + t &\to \min \\ 2x - y - t &\leq 0 \\ 2x - y + t &\geq 0 \\ x + y &\leq 10 \\ 2x + y &\leq 15 \\ x, y, t &\geq 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Primijetimo, za optimalnu točku (x^*, y^*, t^*) nove zadaće mora vrijediti $t^* = |2x^* - y^*|$, jer bi u suprotnom (zbog prva dva uvjeta) vrijedilo $t^* > |2x^* - y^*|$, što vodi na kontradikciju jer bi $(x^*, y^*, |2x^* - y^*|)$ bila dopustiva točka s manjom vrijednošću funkcije cilja. Označimo funkciju cilja nove zadaće s $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, a originalne s $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

Pokažimo da su zadaće optimizacije (1) i (2) ekvivalentne u sljedećem smislu:

a) Ako je (x^*, y^*) rješenje zadaće (1) onda je (x^*, y^*, t^*), uz $t^* = |2x^* - y^*|$, rješenje zadaće (2).
b) Ako je (x^*, y^*, t^*) rješenje zadaće (2) onda je (x^*, y^*) rješenje zadaće (1).

Za dokaz tvrdnje a) pretpostavimo suprotno: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ je dopustiva točka zadaće (2) za koju vrijedi $g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) < g(x^*, y^*, t^*)$. Prema gornjem komentaru mora vrijediti $\hat{t} = 2\hat{x} - \hat{y}$, što vodi na kontradikciju, jer je $(\hat{x}, \hat{y})$ dopustiva točka zadaće (1) i vrijedi $f(\hat{x}, \hat{y}) = g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) < g(x^*, y^*, t^*) = f(x^*, y^*)$.

Dokaz tvrdnje b) provodimo slično: ako je (x^*, y^*, t^*) optimalna, onda je, prema gornjem komentaru, $t^* = |2x^* - y^*|$ pa je $g(x^*, y^*, t^*) = f(x^*, y^*) \leq f(x, y) = g(x, y, |2x - y|)$ za svaku dopustivu točku (x, y) originalne zadaće.

Drugi pristup uvodi dvije nove varijable $u, v \geq 0$ te se apsolutna vrijednost zamjenjuje s $u + v$ i dodaje se uvjet $2x - y = u - v$. Primijetimo, niti jedan pristup ne bi bio dobar da je ispred apsolutne vrijednosti negativan koeficijent.

Rezultat: $x^* = \frac{10}{3}$, $y^* = \frac{20}{3}$.

5. Pomoću Gauss–Jordanovih transformacija riješite sustav

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 7 \\ 2x + y - z &= 3 \\ x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Rezultat: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

6. Pomoću Gauss–Jordanovih transformacija riješite sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Rezultat: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

7. Pomoću Gauss–Jordanovih transformacija odredite sliku $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ i jezgru $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

u ovisnosti o realnom parametru λ.

Rezultat: Ako je $\lambda = -2$ bazu za $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ čine prvi i treći stupac, a bazu za $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ vektori $(-1, 2, 0, 0)^\tau$ i $(2, 1, 0, 1)^\tau$. Inače, bazu za $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ čine prvi, treći i četvrti stupac, a bazu za $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ vektor $(-1, 2, 0, 0)^\tau$.

8. Riješite zadaću svođenjem na zadaću linearnog programiranja

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\to \min \\ x - 2y &\geq 2 \\ x + y &\leq 5 \\ x - 3y &\leq 5 \end{aligned}$$

Rezultat:

$$\begin{aligned} u + v &\to \min \\ -u \leq x &\leq u \\ -v \leq y &\leq v \\ x - 2y &\geq 2 \\ x + y &\leq 5 \\ x - 3y &\leq 5 \\ u, v &\geq 0 \end{aligned}$$

Appletom simplex.jar dolazimo do rješenja $x = 0$, $y = -1$, $u = 0$, $v = 1$.

9. Stolarska tvrtka ima ugovorenu isporuku prozora za sljedećih 6 mjeseca, redom: 100, 250, 190, 140, 220 i 110. Cijene proizvodnje variraju zbog cijena materijala, režija, planiranih godišnjih odmora i slično i po prozoru u sljedećih 6 mjeseci redom iznose (u eurima): 50, 45, 55, 48, 52 i 50. Zbog tih fluktuacija, tvrtka može u pojedinim mjesecima proizvoditi i viškove, ali se na skladištenje svakog prozora plaća 8 eura (svaki mjesec u kojem prozor ostaje neprodan, tj na skladištu). Modelirajte problem optimalne organizacije proizvodnje zadaćom linearnog programiranja i riješite pomoću appleta simplex.jar.

Rješenje: Ako s x_i, $i = 1, \ldots, 6$ označimo broj proizvedenih prozora u $i-$tom mjesecu, a s v_i, $i = 1, \ldots, 5$ višak (neprodanih) prozora u $i-$ tom mjesecu (u 6. mjesecu nema viška - skladište ostaje prazno istekom 6. mjeseca) zadaću zapisujemo u vidu

$$\begin{aligned} 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6 + 8\sum_{i=1}^{5} v_i &\to \min \\ x_1 - v_1 &= 100 \\ x_2 + v_1 - v_2 &= 250 \\ x_3 + v_2 - v_3 &= 190 \\ x_4 + v_3 - v_4 &= 140 \\ x_5 + v_4 - v_5 &= 220 \\ x_6 + v_5 &= 250 \\ x_i, v_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Applet daje rješenje $x_1 = 100$, $x_2 = 440$, $x_3 = 0$, $x_4 = 140$, $x_5 = 220$, $x_6 = 250$, $v_2 = 190$, a ostali v_i su nule.

10. Funkciju $f(x, y) = \max\{3x + y, 2x - y\}$ želimo minimizirati na skupu

$$\begin{aligned} x - 2y &\geq 2 \\ x + y &\leq 5 \\ x - 3y &\leq 5 \end{aligned}$$

Zapišite ovaj problem u vidu zadaće linearnog programiranja i rješite ga.

Rezultat:

$$\begin{aligned} t &\to \min \\ 3x + y &\leq t \\ 2x - y &\leq t \\ x - 2y &\geq 2 \\ x + y &\leq 5 \\ x - 3y &\leq 5 \end{aligned}$$

Appletom simplex.jar dolazimo do rješenja $x = \frac{4}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$, $t = 2$.

2. Osnovni (geometrijski) pojmovi

1. Riješite sljedeće zadaće geometrijskom metodom

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 4 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\to \min \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Rezultat: a) $c^* = 11$, $\mathbf{x}^* = (1, 3)$, b) funkcija cilja neograničena odozdo.

2. Dokažite tvrdnju: Skup $K \subseteq \mathbf{R}^n$ je konveksan ako i samo ako za svaki $\alpha, \beta \geq 0$ vrijedi $(\alpha + \beta)K = \alpha K + \beta K$.

3. Dokažite tvrdnju: Konus $C \subseteq \mathbf{R}^n$ je konveksan ako i samo ako za svaki $x, y \in C$ vrijedi $x + y \in C$.

4. Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksni konus. Dokažite:

   a) $\operatorname{aff} K = K - K$

   b) $(-K) \cap K$ je najveći vektorski potprostor sadržan u K.

5. Neka je $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ afino preslikavanje te $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ linearno preslikavanje. Dokažite:

   a) Slika $T(K_1)$ konveksnog (afinog) skupa $K_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ i praslika $T^{-1}(K_2)$ konveksnog (afinog) skupa $K_2 \subseteq \mathbf{R}^m$ su konveksni (afini) skupovi.

   b) Slika $S(C_1)$ konveksnog konusa $C_1 \subseteq \mathbf{R}^n$ i praslika $S^{-1}(C_2)$ konveksnog konusa $C_2 \subseteq \mathbf{R}^m$ su konveksni konusi.

   c) Za svaki $M \subseteq \mathbf{R}^n$ vrijedi $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$ i $T(\operatorname{aff} M) = \operatorname{aff} T(M)$.

   d) Za svaki $M \subseteq \mathbf{R}^n$ vrijedi $S(\mathrm{C}(M)) = \mathrm{C}(S(M))$.

6. Nađite primjer zatvorenog skupa čija konveksna ljuska nije zatvoren skup (v. Zadatak 11).

7. Dokažite da je skup
$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n+1} : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq x_{n+1} \right\}$$
konveksni konus (zovemo ga Lorentzov konus).

8. Dokažite tvrdnju: za svaka dva skupa $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ vrijedi $\operatorname{conv}(S_1 \cap S_2) \subseteq (\operatorname{conv} S_1) \cap (\operatorname{conv} S_2)$. Vrijedi li obratna inkluzija? Obrazložite! Što ako presjek zamijenimo unijom?

9.* (Carathéodoryjev teorem za konusnu ljusku) Dokažite tvrdnju: Svaki netrivijalni vektor konusne ljuske skupa S može se prikazati kao konusna kombinacija linearno nezavisnih vektora iz S.

10. Neka je $X \subseteq \mathbf{R}^n$. Označimo s $Y \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ skup
$$Y = \left\{ (\mathbf{x}, 1) \in \mathbf{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in X \right\}.$$

    a) Dokažite ekvivalenciju: $\mathbf{x} \in \operatorname{conv} X$ ako i samo ako $(\mathbf{x}, 1) \in \mathrm{C}(Y)$

    b) Koristeći Zadatak 9 i tvrdnju dijela a) dokažite Carathéodoryjev teorem.

11.* Ako je skup $S \subseteq \mathbf{R}^n$ kompaktan, dokažite da je $\operatorname{conv} S$ također kompaktan.

    Uputa: Iskoristite Carathéodorijev teorem.

12. Dokažite tvrdnju: ako su skupovi $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksni onda je za svaki $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ skup $\alpha A + \beta B$ također konveksan.

13. Dokažite: Skupovi $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$ su (jako) separirani ako i samo ako su $A - B$ i $\mathbf{0}$ (jako) separirani.

14. Dokažite tvrdnju: Ako skup C nije konveksan tada postoji točka $x \in \mathbf{R}^n \setminus C$ koja se ne može jako separirati od skupa C.

15. Neka je $S \subseteq \mathbf{R}^n$ neprazan skup. Dokažite da S, $\operatorname{Cl} S$ i $\operatorname{conv} S$ imaju istu afinu ljusku.

16. Dokažite jednakosti

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}^\tau) = \mathbf{R}^n$$
$$\mathcal{N}(\mathbf{A}^\tau) \oplus \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^m\,.$$

Rješenje: Za prvu jednakost uočimo da su potprostori na lijevoj strani okomiti: za svaki $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ i svaki $\mathbf{y} = \mathbf{A}^\tau \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}^\tau)$ vrijedi

$$\mathbf{y}^\tau \mathbf{z} = (\mathbf{A}^\tau \mathbf{x})^\tau \mathbf{z} = \mathbf{x}^\tau \mathbf{A} \mathbf{z} = 0$$

pa tvrdnja vrijedi jer je, prema teoremu o rangu i defeku, suma dimenzija tih potprostora jednaka n.

17. (Metoda najmanjih kvadrata) Neka je $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m \setminus \mathcal{R}(\mathbf{A})$ te $\widehat{\mathbf{b}}$ projekcija točke $\mathbf{b}$ na sliku $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Koristeći Teorem 3.3 i Zadatak 16 dokažite da je $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, gdje je $\mathbf{x}$ rješenje normalnog sustava jednadžbi

$$\mathbf{A}^\tau \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\tau \mathbf{b}\,. \tag{3}$$

Preciznije, dokažite da sustav (3) uvijek ima rješenje te da svako rješenje $\mathbf{x}$ poprima istu vrijednost $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Nadalje, rješenje $\mathbf{x}$ sustava je jedinstveno ako i samo ako je $d(\mathbf{A}) = 0$.

18. Neka je $C \subseteq \mathbf{R}^n$ neprazan, zatvoren i konveksan skup, $C \neq \mathbf{R}^n$. Dokažite da C možemo prikazati kao presjek zatvorenih poluprostora na sljedeći način

$$C = \bigcap_{\substack{\mathbf{x} \in \partial C \\ P \text{ potporna hip. kroz } \mathbf{x} \\ C \subseteq P^-}} P^-\,.$$

19. Neka je $C \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan skup, disjunktan s $\operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$. Dokažite da postoji $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\sup\{\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} : \mathbf{x} \in C\} \leq 0$.

Rješenje: Kako je $\operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$ konveksan skup (lako provjerimo po definiciji) to skupove C i $\operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$ možemo separirati hiperravninom tj. postoji $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ i $\beta \in \mathbf{R}$ takvi da je

$$\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} \leq \beta \leq \mathbf{q}^\tau \mathbf{y}\,,\ \mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in \operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+\,.$$

U gornjoj ocjeni možemo $\operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$ zamijeniti s $\mathbf{R}^n_+ = \operatorname{Cl} \operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$ (aproksimiramo takav $\mathbf{y}$ nizom iz $\operatorname{Int} \mathbf{R}^n_+$ i prijeđemo na limes u gornjoj nejednakosti):

$$\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} \leq \beta \leq \mathbf{q}^\tau \mathbf{y}\,,\ \mathbf{x} \in C, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n_+\,. \tag{4}$$

Posebno, ako uvrstimo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ imamo $\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} \leq 0$ što daje prvu tvrdnju. Ostaje pokazati da je $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n_+$. Pretpostavimo suprotno: $q_i := \mathbf{q}^\tau \mathbf{e}_i < 0$ za neki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Stoga za $t \to +\infty$ imamo $t\mathbf{q}^\tau \mathbf{e}_i \to -\infty$ što daje kontradikciju (u (4) piše $\beta \leq \mathbf{q}^\tau \mathbf{y}$ za svaki $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n_+$).

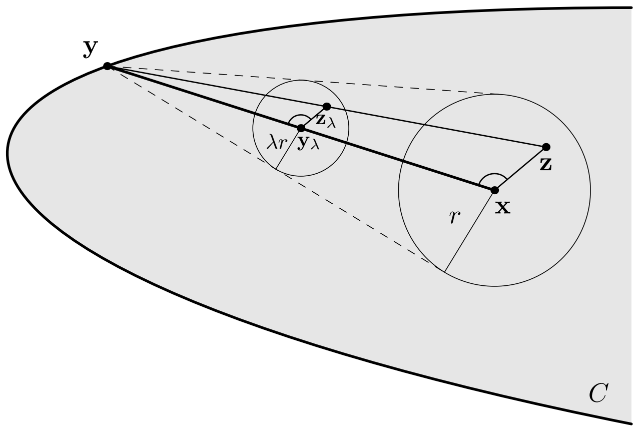
20. Dokažite tvrdnju: ako je skup $C \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan, onda je i $\operatorname{Cl} C$ konveksan.

21.* Neka je $C \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan skup. Dokažite tvrdnje

a) Ako je $\mathbf{x} \in \operatorname{Int} C$ i $\mathbf{y} \in C$ onda je cijeli interval $[x, y\rangle$ sadržan u $\operatorname{Int} C$.

b) Skup $\operatorname{Int} C$ je konveksan.

c) Ako pretpostavku $\mathbf{y} \in C$ u dijelu a) zamijenimo pretpostavkom $\mathbf{y} \in \operatorname{Cl} C$ onda i dalje vrijedi isti zaključak dijela a).



Slika 1: Skica uz uputu za rješenje Zadatka 21.a)

d) Ako je $\operatorname{Int} C$ neprazan onda je $\operatorname{Cl}(\operatorname{Int} C) = \operatorname{Cl} C$ i $\partial(\operatorname{Int} C) = \partial C$.

e) Vrijedi $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} C) = \operatorname{Int} C$ i $\partial(\operatorname{Cl} C) = \partial C$.

Uputa: a) Ako je $B(\mathbf{x}, r) \subseteq C$ i $\mathbf{y}_\lambda = (1-\lambda)\mathbf{y}+\lambda\mathbf{x}$ za neki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, onda je $B(\mathbf{y}_\lambda, \lambda r) \subseteq C$ (v. Sliku 1 – raspisati ekvivalenciju, uz oznake sa slike: $\|\mathbf{z}_\lambda - \mathbf{y}_\lambda\| < \lambda r$ ako i samo ako $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < r$, gdje je $\mathbf{z}$ definiran s $(1 - \lambda)\mathbf{y} + \lambda\mathbf{z} = \mathbf{z}_\lambda$). b) Iskoristiti tvrdnju a) za $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \operatorname{Int} C$. c) Aproksimirati $\mathbf{y}$ nizom $(\mathbf{y}^k) \subseteq C$. Za $\mathbf{y}^k$ iskoristiti dokaz tvrdnje a): za $\mathbf{y}^k_\lambda := (1 - \lambda)\mathbf{y}^k + \lambda\mathbf{x}$ vrijedi $B(\mathbf{y}^k_\lambda, \lambda r) \subseteq C$. Kako $\mathbf{y}^k_\lambda$ konvergira prema $\mathbf{y}_\lambda$ to (koristeći definiciju konvergencije niza uz $\varepsilon = \frac{\lambda r}{2}$) za dovoljno veliki k slijedi $B(\mathbf{y}_\lambda, \frac{\lambda r}{2}) \subseteq B(\mathbf{y}^k_\lambda, \lambda r) \subseteq C$. d) Za dokaz prve jednakosti iskoristiti tvrdnju c), a druga jednakost slijedi iz nje, direktno iz definicije ruba $\partial(\operatorname{Int} C)$. e) Dokažimo prvu jednakost, druga je direktna posljedica. Ako je $\operatorname{Int} C$ prazan, onda vrijedi $\operatorname{Int}(\operatorname{Cl} C) = \emptyset$, prema Zadacima 15 i 22. Inače, skup na desnoj strani je očito sadržan u lijevoj strani jednakost. Za obratnu inkluziju, uzmimo proizvoljan $\mathbf{z} \in \operatorname{Int} \operatorname{Cl} C$ i neki $\mathbf{x} \in \operatorname{Int} C$ (po pretpostavci je skup neprazan), ako je $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, gotovi smo, a inače uzmimo $r > 0$ takav da je $B(\mathbf{z}, r) \subseteq \operatorname{Cl} C$. Neka je $\mathbf{w}$ bilo koja točka te kugle koja leži na pravcu određenom s $\mathbf{x}$ i $\mathbf{z}$, ali ne iz segmenta $[\mathbf{x}, \mathbf{z}]$. Iskoristiti tvrdnju c) za točke $\mathbf{x}$ i $\mathbf{w}$ pa slijedi tvrdnja, jer $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}\rangle$.

22.* Neka je $C \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan skup. Dokažite da je $\operatorname{Int} C$ neprazan ako i samo ako je $\operatorname{aff} C = \mathbf{R}^n$.

Uputa: Nužnost je trivijalna. Za dokaz dovoljnosti, neka su $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ točke skupa C koje ne leže u istoj hiperravnini skupa $\mathbf{R}^n$ (kažemo da su *afino nezavisne*). BSOMP $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ (inače translatiramo skup C za $\mathbf{v}_0$), što povlači da su $\mathbf{v}_i$ linearno nezavisni. Definiramo regularno linearno preslikavanje T s $T\mathbf{v}_i := \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ono preslikava skup $P := \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ u standardni simpleks $K = \operatorname{conv}\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, kojeg možemo reprezentirati presjekom zatvorenih poluprostora $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ i $x_1 + \cdots + x_n \leq 1$. Ako svugdje stavimo stroge nejednakosti dobivamo otvoreni skup O, koji je očito neprazan. Dakle, K ima neprazan otvoren podskup O (to mu je zapravo interior), pa je i $T^{-1}(O)$ otvoren skup, sadržan u P, odnosno C.

3. Separacija točke od konačnogeneriranog konusa

1. Neka je V vektorski potprostor u $\mathbf{R}^n$ čija je baza $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_d\}$. Dokažite da vrijedi

$$V = \mathrm{C}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_d, -\mathbf{q}_1 - \cdots - \mathbf{q}_d)\,.$$

2. Zadan je konačno generirani konus $C = \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ uz $\mathbf{a}_1 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, -2)$ i $\mathbf{a}_4 = (1, -6, -5)$ te $\mathbf{b} = (1, 2 - \alpha, \alpha)$. Odredite sve vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ uz koje vektor $\mathbf{b}$ ne pripada konusu C i za svaki takav α zapišite vektor normale razdvajajuće hiperravnine iz teorema separacije za konačnogenerirani konus.

3. Zadan je konačnogenerirani konus $C = \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uz $\mathbf{a}_1 = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-7, 1, 3)$ i vektore kanonske baze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Odredite sve vrijednosti parametra $t \in \mathbf{R}$ uz koje vektor $\mathbf{b} = (1 + t, 3 - t, 2)$ ne pripada konusu C i za svaki takav t zapišite vektor normale razdvajajuće hiperravnine iz teorema separacije za konačnogenerirani konus.

4. Zadan je konačno generirani konus $C = C(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ uz $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$ i $\mathbf{a}_4 = (1, 1, -1)$ te $\mathbf{b} = (2, 3, \alpha + 2)$. Odredite najmanju vrijednost α' parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ uz koju vektor $\mathbf{b}$ pripada konusu C. Za $\alpha < \alpha'$ odredite vektor normale razdvajajuće hiperravnine iz teorema separacije za konačno generirani konus.

5. Neka je $C = \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ pri čemu su a_i vektori različiti od $\mathbf{0}$. Dokažite da je ekvivalentno:

   a) C ne sadrži pravac kroz ishodište.

   b) Za svaki $i = 1, \ldots m$ vrijedi $-\mathbf{a}_i \notin C$.

   c) Postoji vektor $\mathbf{c}$ takav da za svaki $\mathbf{a} \in C \setminus \{\mathbf{0}\}$ vrijedi $\mathbf{c}^\tau \mathbf{a} < 0$.

   Uputa: Dokazati implikacije a $\Rightarrow$ b $\Rightarrow$ c $\Rightarrow$ a. Za b $\Rightarrow$ c separirati C i vektor $-\mathbf{a}_i$, za svaki i, i zbrojiti dobivene vektore normale.

6. Nemarni student je svoje rješenje zadatka o separaciji točke od konačnogeneriranog konusa C ostavio na kiši pa je donji dio tablica posve nečitljiv. Konus C je zadan pomoću četiri generatora $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_4 \in \mathbf{R}^3$. Vidljivi tio tablica glasi:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{e}_1$	-1	0	1
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$	-1	1	0
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$

   Koje sve vektore normala razdvajajućih hiperravnina iz teorema separacije možemo dobiti, varirajući vektor $\mathbf{b} \notin C$? Kako na osnovu te informacije provjeriti pripada li vektor $\mathbf{b} = (-3, 2, -1)^\tau$, odnosno $\mathbf{c} = (-1, 2, 3)^\tau$ konusu C?

   Uputa: Prema teoremu, trebamo provjeriti sve linearno nezavisne dvočlane podskupove $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j\}$ – svaki vektor normale razdvajajuće hiperravnine iz teorema mora biti okomit na neki od tih podskupova. Primjerice, za $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ uočavamo da se taj podskup pojavljuje u bazi prve i druge tablice. Iz prve čitamo da je vektor negativne dualne baze (poviriti u dokaz teorema) koji odgovara vektoru $\mathbf{a}_3$ jednak $\mathbf{q}_1 = -(1, 1, 0)^\tau$, a u drugoj tablici vektor negativne dualne baze koji odgovara vektoru $\mathbf{a}_4$ je jednak $-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^\tau$. Naravno, oni su kolinearni (jer su okomiti na $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$), ali kako gledaju u istom smjeru (odn. pripadaju istoj zraci iz ishodišta) to je $\mathbf{q}_1^\tau \mathbf{a}_i \leq 0$, za svaki i pa je $\mathbf{q}_1$ jedan od traženih vektora (primjerice razdvaja samog sebe od C).

   Nastavljajući za sve ostale dvočlane podskupove (ima ih još 5), dolazimo do ostalih vektora $\mathbf{q}_2 = -(0, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{q}_3 = -(0, -1, 1)^\tau$ i $\mathbf{q}_4 = -(-2, -1, 3)^\tau$. Za odgovor na drugo pitanje, dovoljno je uočiti da vrijedi reprezentacija (prikaz konusa C u vidu *poliedarskog konusa*)

$$C = \bigcap_{i=1}^{4} \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{q}_i^\tau \mathbf{x} \leq 0\},$$

   tako da je potrebno samo računati skalarne produkte $\mathbf{q}_i^\tau \mathbf{b}$ i $\mathbf{q}_i^\tau \mathbf{c}$.

7. Vezano uz algoritam separacije vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ od konačnogeneriranog konusa $C = \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4)$ izračunali smo sljedeće tablice:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$\mathbf{a}_3$	0	1	-2
$\mathbf{x}$	-1	1	2
$\mathbf{y}$	1	$-\frac{1}{2}$	2

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$
$\mathbf{e}_1$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\mathbf{a}_2$	0	1	2
$\mathbf{x}$	-1	1	4
$\mathbf{y}$	1	$-\frac{1}{2}$	1

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$
$\mathbf{e}_2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\mathbf{e}_3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\mathbf{a}_4$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{x}$	-1	-1	2
$\mathbf{y}$	1	-1	$\frac{1}{2}$

a) Možemo li iz gonjih tablica zaključiti pripadaju li vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ konusu C? Ako vektor ne pripada konusu, zapišite vektor normale razdavajajuće hiperravnine iz teorema separacije.

b) Kao u dijelu a), je li $\mathbf{a}_1 + \mathbf{y} \in C$? Obazložite!

c) Zapišite konus C kao poliedarski konus, koristeći isključivo gornje tablice.

8. Prikažite konačnogenerirani konus $\mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$ kao poliedarski konus, ako je $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 4, 5)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_4 = (-1, 5, 4)^\tau$ i $\mathbf{a}_5 = (1, -2, -2)^\tau$.

Rješenje: Prema teoremu separacije za konačnogenerirani konus, potrebno je provjeriti sve dvočlane (linearno nezavisne) skupove generatora konusa i ispitati daju li oni vektor normale razdvajajuće hiperravnine za neki $\mathbf{b}$ ili, jednostavnije rečeno, vektor normale potporne hiperravnine konusa. Konkretno, primjerice za skup $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ dovoljno je uzeti bilo koji od preostalih generatora konusa koji s njima čini bazu za $\mathbf{R}^3$. Iz tablice algoritma separacije (bez retka $\mathbf{b}$) u kojoj su ta tri generatora u bazi, čitamo kandidata za vektor normale potporne hiperravnine – vektor negativne dualne baze $\mathbf{q}$ koji odgovara trećem (dodanom) generatoru (u prvom dijelu tablice u tom stupcu uzmemo suprotne koeficijente). Ako su u nastavku tog stupca svi koeficijenti veći ili jednaki nuli, taj vektor $\mathbf{q}$ je zaista vektor normale potporne hiperravnine (jer je $\mathbf{q}^\tau \mathbf{a}_i \leq 0$ za svaki i te imamo jednakost za $i = 1, 2$). Primijetimo, u tom slučaju $\mathbf{q}$ određuje hiperravninu kroz $\mathbf{0}$) koja razdvaja konus C od $\mathbf{b} = \mathbf{q}$. Prolazeći kroz sve parove (njih ukupno 10), primjerice koristeći applet `simplex.jar`, dolazimo do rješenja: $C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$, uz $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -9 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

9. Odredite matricu $\mathbf{Q}$ za koju je

$$\mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{Q}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\},$$

pri čemu je $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)^\tau$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)^\tau$ i $\mathbf{a}_4 = (1, 1, 5)^\tau$.

Rez: $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Zadan je konačnogenerirani konus $C = \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$ uz $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1, 1, 2, 3)$ i $\mathbf{a}_4 = (2, -1, -1, -3, -5)$ te $\mathbf{b} = (4, 2, -1, -5, -3)$.

Pripada li vektor $\mathbf{b}$ konusu C? Ako ne, zapišite vektor normale razdvajajuće hiperravnine iz teorema separacije za konačnogenerirani konus.

Rez: $\mathbf{q} = (-1, 1, -3, 0, 0)^\tau$

11. Zadan je poliedarski konus

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 \le 0\,,\ x_1 - 2x_2 + x_3 \le 0\,,\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}\,.$$

Prikažite ga kao konačnogenerirani konus.

Rez: Prema dokazu Farkas-Minkowski-Weylovog teorema i postupku opisanom u rješenju Zadatka 8 računamo: $\mathbf{q}_1 = (0, 1, 0)^\tau$, $\mathbf{q}_2 = (0, 1, 2)^\tau$, $\mathbf{q}_3 = (1, 1, 0)^\tau$ i $\mathbf{q}_4 = (3, 2, 1)^\tau$.

12. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i poliedarski konus $C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$. Prikažite C kao konačnogenerirani konus (tj. odredite mu ekstremne recesivne smjerove).

Rez: Ekstremni recesivni smjerovi su $\mathbf{q}_1 = (0, 0, 0, -1)^\tau$, $\mathbf{q}_2 = (-1, 1, -1, -1)^\tau$, $\mathbf{q}_3 = (-2, 1, -1, -2)^\tau$ i $\mathbf{q}_4 = (-1, 0, -1, -1)^\tau$. Primijetimo, ako konačnogenerirani konus $C(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ $(= C)$ ponovno prikažemo kao poliedarski, dobivamo da je četvrti redak matrice $\mathbf{A}$ nepotreban u definiciji poliedarskog konusa C, što smo mogli primijetiti u gornjem računu: za četvrti redak matrice $\mathbf{A}$ vrijedi $a_4 \in \mathrm{C}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5)$ pa je četvrta nejednakost $\mathbf{a}_4^\tau \mathbf{x} \le 0$ *suvišna* (eng. *redundant*) tj. posljedica je ostalih nejednakosti, konkretnije prve, druge i pete. Ispitajte postoje li suvišne nejednakosti u Zadatku 11.

13. Zadane su dvije simpleks tablice koje odgovaraju istoj zadaći linearnog programiranja (α je realan parametar)

	x_1	w_1	w_2	b
x_2	1	0	1	1
x_3	-1	1	0	1
w_3	1	1	-1	2
w_4	$2\alpha - 2$	$\alpha + 1$	-2	$5 + \alpha$
z	1	$4\alpha + 1$	-2	3

	x_3	w_1	w_2	b
x_2	-1	1	1	2
x_1	-1	1	0	1
w_3	-1	2	-1	3
w_4	$2 - 2\alpha$	$3\alpha - 1$	-2	$3\alpha + 3$
z	-1	$4\alpha + 2$	-2	4

Koristeći samo informacije iz tih dviju tablica (ne računajući daljnje tablice!) odgovorite na pitanja:

a) Za koje α zadaća nema dopustivih točaka?

b) Za koje α je funkcija cilja neograničena odozgo na promatranom dopustivom skupu?

c) Uz koje α zadaća linearnog programiranja poprima maksimalnu vrijednost?

d) Uz koje α zadaća poprima maksimalnu vrijednost, ali točka maksimuma nije jedinstvena? Obrazložite!

Rez: d) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

14. Dokažite da vektor $b = (1, 0, 8)$ pripada konusu $C(a_1, a_2, a_3, a_4)$, za $a_1 = (1, 2, 2)$, $a_2 = (2, 5, 1)$, $a_3 = (-1, -3, 1)$, $a_4 = (3, 7, 3)$. Nadite prikaz $b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_4 a_4$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \geq 0$ za koji je zbroj koeficijenata $\alpha_1 + \cdots + \alpha_4$ maksimalan.

    Rez: $b = 3a_2 + 5a_3$.

4. Reprezentacija poliedarskog skupa

1. Zapišite recesivni konus poliedarskog skupa K (primijetite, skup je neprazan: $\mathbf{0} \in K$):

$$K = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, 2x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5, x_1 + 2x_3 \geq -1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}.$$

   Je li $(1, 0, 0, 1)$ vrh poliedarskog skupa K?

2. Neka je S zatvoren konveksan skup. Dokažite da je recesivni konus $\operatorname{rec} S$ zatvoren konveksan konus.

3. Provjerite zadovoljava li skup

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 3, x_1 \geq 0\}$$

   pretpostavke teorema o egzistenciji recesivnih smjerova i, ako da, odredite mu recesivni konus.

4. Neka su $U \subseteq \mathbf{R}^m$ i $V \subseteq \mathbf{R}^n$ zatvoreni konveksni konusi te $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$ i $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Definiramo $K = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \in U, \mathbf{x} \in V\}$. Ako je K neprazan, dokažite da je $\operatorname{rec} K = \{\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{q} \in U, \mathbf{q} \in V\}$.

5. Dokažite: Skup $P \subseteq \mathbf{R}^n$ je politop ako i samo ako je P omeđeni poliedarski skup.

6. Ako su P i Q poliedarski skupovi u $\mathbf{R}^n$ dokažite da je $P + Q$ poliedarski skup.

7. Neka je $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ linearni operator i $K \subseteq \mathbf{R}^n$ poliedarski skup. Dokažite da je $S(K)$ poliedarski skup.

8. Neka je $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ linearna funkcija i $K \subseteq \mathbf{R}^n$ neprazan poliedarski skup. Koristeći (samo) rezultat o reprezentaciji poliedarskog skupa dokažite tvrdnju: f poprima maksimum na skupu K ako i samo ako je f ograničena odozgo na K.

9. Neka je poliedarski skup $K = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ neprazan. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) K ima bar jedan vrh
   b) $r(\mathbf{A}) = n$
   c) K ne sadrži pravac
   d) $\operatorname{rec} K$ ne sadrži pravac.

   Rješenje: (a$\Leftrightarrow$b) znamo s predavanja (nužnost slijedi iz definicije vrha, a obratno iz činjenice da u slučaju $r(\mathbf{A}) = n$ dokaz teorema reprezentacije daje vrhove $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$).

   (c$\Leftrightarrow$d) Neka su $\mathbf{x} \in K$ i $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Tada imamo $\mathbf{x} + t\mathbf{q} \in K$ za svaki $t \in \mathbf{R}$ ako i samo ako (po definiciji recesivnog smjera) $\mathbf{q} \in \operatorname{rec} K$ i $-\mathbf{q} \in \operatorname{rec} K$, a to je ekvivalentno činjenici da $\operatorname{rec} K$ sadrži pravac (sa smjerom $\mathbf{q}$).

(a⇒c) Neka je $\mathbf{v}$ vrh skupa K. Pretpostavimo suprotno: K sadrži pravac. No tada sadrži i paralelan pravac točkom $\mathbf{v}$, što daje kontradikciju s činjenicom da je $\mathbf{v}$ ekstremna točka skupa K (uzmemo bilo koje dvije točke tog pravca, jednako udaljene od $\mathbf{v}$).

(d⇒b) Neka rec$K$ ne sadrži pravac. Pretpostavimo suprotno: $r(\mathbf{A}) < n-1$, tj. $d(\mathbf{A}) \geq 1$. Stoga postoji netrivijalan vektor $\mathbf{q}$ iz jezgre matrice $\mathbf{A}$ ($\mathbf{Aq} = \mathbf{0}$). No tada je $\mathbf{q} \in \mathrm{rec}K$ ($\mathbf{Aq} \leq \mathbf{0}$) i $-\mathbf{q} \in \mathrm{rec}K$ ($-\mathbf{Aq} \leq \mathbf{0}$) pa rec$K$ sadrži pravac sa smjerom $\mathbf{q}$.

10. Poliedarski skup zadan je nejednakostima

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ -x_1 - x_2 &\leq -2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1\,. \end{aligned}$$

Odredite mu reprezentaciju (tj. ekstremne točke i ekstremne recesivne smjerove, ako postoje) koristeći postupak opisan u dokazu teorema reprezentacije poliedarskog skupa. Skicirajte dani skup u ravnini i provjerite dobiveno rješenje.

Rez: $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)^\tau$, $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)^\tau$, $\mathbf{q}_1 = (1,1)$, $\mathbf{q}_2 = (2,1)$. Alternativno, zadatak možemo riješiti standardnim simpleks tablicama. Potrebno je proći kroz sve dopustive simpleks tablice i iz njih očitati vrhove. Oprez: u standardnim simpleks tablicama unosimo suprotne koeficijente ($-\mathbf{A}$) i podrazumijevamo uvjet $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Očitanje ekstremnih recesivnih smjerova je tim pristupkom iznimno jednostavno (kako?) jer su sve varijable (x_1, x_2) slobodne. U suprotnom bi to bilo otežano pa je zbog toga bolje ne koristiti ovu alternativu.

11. Odredite reprezentaciju poliedarskog skupa

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & -3 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 6\,. \end{array}$$

Rez: $\mathbf{v}_1 = (-1,4,1)^\tau$, $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}, \frac{4}{3}\right)^\tau$, $\mathbf{q}_1 = (1,-1,-1)$, $\mathbf{q}_2 = (1,-3,-2)$, $\mathbf{q}_3 = (1,1,-1)$ i $\mathbf{q}_4 = (-2,1,-1)$ (ekstremne recesivne smjerove smo skalirali pozitivnim faktorom; naravno, vrhove ne smijemo – oni su već skalirani tako da je zadnja komponenta, koja odgovara λ iz dokaza teorema, jednaka 1).

12. Odredite ekstremne recesivne smjerove konusa

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 0\,. \end{array}$$

Rez: $\mathbf{q}_1 = (-3,-5,-1)^\tau$, $\mathbf{q}_2 = (-1,1,1)^\tau$ i $\mathbf{q}_3 = (1,1,-1)^\tau$. Primijetimo, sve informacije se mogu pročitati iz tablice u kojoj bazu čine $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ i $\mathbf{a}_4$ (drugi redak daje suvišnu nejednakost).

13. Odredite vrhove i ekstremne recesivne smjerove poliedarskog skupa

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & -2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & -3 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & \leq & -5\,. \end{array}$$

Rez: $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{7}{2}, -3\right)^\tau$, $\mathbf{q}_1 = (-3,-2)^\tau$ i $\mathbf{q}_2 = (-3,-4)^\tau$.

14. Neka je $S \subseteq \{0,1\}^n$ i $P = \operatorname{conv} S$. Dokažite da je skup svih vrhova skupa P upravo skup S.

15. Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksan skup i $\mathbf{x}$ najudaljenija (uz euklidsku normu) točka skupa K od dane točke $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Dokažite da je $\mathbf{x}$ ekstremna točka skupa K.

    Uputa: Dokažite da je $\mathbf{x}$ izložena točka skupa K.

16. Pretpostavimo da zadaća linearnog programiranja ima slobodnu varijablu x_j. Kad transformiramo tu zadaću u standardnu formu zamjenom $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^\pm \geq 0$ pokažite da nova zadaća ne može imati vrh za kojeg su oba $x_j^+ i\ x_j^-$ različita od nule.

    Uputa: Dokažite da takva točka ne može biti ekstremna točka.

17. Neka je $K = P + C$ rastav poliedarskog skupa K na politop $P = \operatorname{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ i konus $C = \operatorname{rec}K$. Dokažite da se svaki vrh skupa K nalazi među $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k$.

    Rješenje: Pretpostavimo suprotno: neka je $\mathbf{v} \in K$ vrh skupa $K := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ koji nije jednak niti jednoj od točaka $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k$. Kako je $\mathbf{v}$ izložena točka skupa K, to postoji $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ takav da za $\beta := \mathbf{q}^\tau \mathbf{v}$ za svaki $\mathbf{x} \in K \setminus \{\mathbf{v}\}$ vrijedi $\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} < \beta$. Ako je $\operatorname{rec}K = \{\mathbf{0}\}$, onda za neke skalare $\lambda_i \geq 0$ čija je suma 1 (dakle, bar jedan je pozitivan) imamo $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i$ što daje kontradikciju:

    $$\mathbf{q}^\tau \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{q}^\tau \mathbf{v}_i < \beta\,.$$

    Inače, ako je $\operatorname{rec}K = \mathrm{C}(\mathbf{q}_1, \ldots \mathbf{q}_s)$, ($\mathbf{q}_j \neq \mathbf{0}$) onda za svaki j vrijedi $\mathbf{q}^\tau \mathbf{q}_j \leq 0$ (u suprotnom, ako za neki j imamo $\mathbf{q}^\tau \mathbf{q}_j > 0$ onda $\mathbf{q}^\tau(\mathbf{v}_1 + t\mathbf{q}_j) \to +\infty$ kad $t \to +\infty$ što je nemoguće zbog $\mathbf{q}^\tau \mathbf{x} \leq \beta$, za svaki $\mathbf{x} \in K$). Slično kao u prvom slučaju dolazimo do kontradikcije: ako je $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^s t_j \mathbf{q}_j$ za neke $\lambda_i \geq 0$ čija je suma 1 i neke $t_j \geq 0$ i , onda je

    $$\mathbf{q}^\tau \mathbf{v} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{q}^\tau \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^s t_j \mathbf{q}^\tau \mathbf{q}_j \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{q}^\tau \mathbf{v}_i < \beta\,.$$

18. Neka je $P = \operatorname{conv}\{v_1, \ldots, v_r\}$ politop i $b \notin P$. Zapišite jednadžbu hiperravnine H za koju je $P \subseteq H^-$ i $b \in \operatorname{Int} H^+$.

5. Dualnost u linearnom programiranju

1. Primarna zadaća glasi

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -3x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

   a) Zapišite dualnu zadaću.
   b) Pomoću uvjeta komplementarnosti ispitajte je li točka $\overline{\mathbf{x}} = (3,1)$ optimalna za primarnu zadaću.

c) Zapišite i dokažite tvrdnju o uvjetima komplementarnosti za zadaću linearnog programiranja koju ste koristili u dijelu b.

Rezultat: b) Da, pripadna komplementarna točka je $y = (0, 0, -1, 4)$.

2. Primarna zadaća glasi

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\to \min \\ 7x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -3x_1 + x_2 &\geq -4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

a) Zapišite dualnu zadaću.

b) Pomoću uvjeta komplementarnosti ispitajte je li točka $\overline{\mathbf{x}} = (1, 4)$ optimalna za primarnu zadaću.

c) Je li $\overline{\mathbf{x}}$ vrh poliedarskog skupa gornje primarne zadaće?

Rezultat: b) Da, pripadna komplementarna točka je $y = (0, 0, 1, 0)$. c) Ne, od gornjih uvjeta, $\overline{x}$ zadovoljava samo jedan u vidu jednakosti.

3. Zadaći linearnog programiranja

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +3x_5 & \to \min \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & +3x_5 & \geq 4 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +x_5 & \geq 3 \\ & & & & x_i & \geq 0 \qquad i = 1, 2, ..., 5 \end{array} \right.$$

zapišite dualnu zadaću. Dualnu zadaću riješite grafički i pomoću tog rješenja odredite rješenje polazne zadaće.

Rezultat: Jedinstveno rješenje dualne zadaće je $y = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, a jedinstveno rješenje primarne $x = (1, 0, 0, 0, 1)$.

4. Primarna zadaća glasi

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & \to & \min \\ 2x_1 & & +x_3 & \geq & 3 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0\,. \end{array}$$

a) Zapišite dualnu zadaću i pomoću uvjeta komplementarnosti dokažite da je $\left(0, \frac{1}{2}, 4\right)$ točka minimuma primarne zadaće.

b) Koristeći uvjete komplementarnosti odredite skup svih točaka minimuma primarne zadaće. Zapišite sve optimalne vrhove primarne zadaće.

Rezultat: b) Da, pripadna komplementarna točka je $y = (0, -1)$. c) Analizom uvjeta komplementarnosti za rješenje dualne zadaće $y = (0, -1)$ dolazimo do optimalnih vrhova primarne zadaće $(0, 1, 3)$ i $(0, 0, 5)$, a skup svih točaka minimuma je segment određen njima.

5. Pokažite bez korištenja simpleks metode da je $\mathbf{x}^* = (5/26, 5/2, 27/26)$ optimalno rješenje linearne zadaće

$$\begin{cases} 9x_1 & +14x_2 & +7x_3 & \to & \max \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 6 \\ 5x_1 & +4x_2 & +x_3 & \leq & 12 \\ & 2x_2 & & \leq & 5\,. \end{cases}$$

Rezultat: Dopustivi skup dualne zadaće se sastoji od samo jedne točke $y = (2, 1, 4)$ koja sa zadanom točkom x^* (dopustiva je!) zadovoljava uvjete komplementarnosti.

6. Primarna zadaća glasi

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \to & \min \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & \geq & 1 \\ & 3x_2 & -6x_3 & = & 0 \\ x_1, & & x_3 & \geq & 0\,. \end{array}$$

Zapišite dualnu zadaću i pomoću uvjeta komplementarnosti dokažite da je $\left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ točka minimuma primarne zadaće.

Rezultat: Pripadne komplementarne točke su oblika $y = (-3t, 2 - 3t, t)$, $t \leq 0$.

7. Primarna zadaća linearnog programiranja glasi

$$\begin{array}{rrrrrcl} -3x_1 & +x_2 & +4x_3 & +6x_4 & -20x_5 & \to & \min \\ x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = & 6 \\ & -x_2 & & & -2x_5 & \geq & -4 \\ & & x_3 & & -x_5 & \geq & 5 \\ & & & 2x_4 & -2x_5 & \geq & 14 \\ & 2x_2 & -6x_3 & & +4x_5 & \geq & -30 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0\,. \end{array}$$

a) Zapišite dualnu zadaću i uvjete komplementarnosti.

b) Ako dualna zadaća ima optimalnu točku $\mathbf{y}^* = (-4, 3, 4, 5, 0)$, odredite optimalnu točku primarne zadaće koristeći uvjete komplementarnosti.

c) Postoji li ekstremna točka dopustivog skupa primarne zadaće čije su bar 4 komponente jednake 0?

8. Dokažite da se dualna zadaća zadaće

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\tau \mathbf{y} &\to \min \\ \mathbf{A}^\tau \mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^\tau \mathbf{y} &\leq 1 \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

može iskoristiti za nalazak vrha skupa danog uvjetima $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$.

9. Dokažite da za zadaće

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{z}^\tau \mathbf{x} & \to & \max \\ \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{lcl} \mathbf{z}^\tau \mathbf{x} & \to & \max \\ \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{c} \end{array},$$

gdje su $\mathbf{b}, \mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, vrijedi tvrdnja: ili obje zadaće imaju rješenje ili ga nema niti jedna.

10. Zadaći

$$\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \to & \min \\ \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \mu_1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & \geq & \mu_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & \geq & \mu_3 \end{array}$$

zapišite i riješite dualnu zadaću u ovisnosti o realnim parametrima $\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3$. Odredite rješenje polazne zadaće.

Rez: Optimalna točka primarne zadaće glasi: a) za $\lambda = 1$ bilo koje rješenje jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$; b) za $\lambda \leq -2$ funkcija cilja je neograničena odozdo na dopustivom skupu; c) inače, jedinstveno rješenje sustava gornja tri uvjeta u kojem su sve nejednakosti ($\geq$) zamijenjene jednakostima.

11. *(Stroga komplementarnost)* Zadana je primarna zadaća $\mathbf{z}^\tau \mathbf{x} \to \max$, $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ za koju pretpostavljamo da poprima rješenje. Neka je $j \in \{1, \ldots n\}$. Ako svako optimalno rješenje primarne zadaće ima j-tu komponentu jednaku nuli, onda postoji optimalno rješenje $\mathbf{y}$ dualne zadaće za koju je j-ta komponenta vektora $\mathbf{u} := \mathbf{A}^\tau \mathbf{y} - \mathbf{z}$ pozitivna.

Posljedično, postoji rješenje $\mathbf{x}$ primarne zadaće i rješenje $\mathbf{y}$ dualne zadaće, uz pripadne pomoćne varijable $\mathbf{w}$ i $\mathbf{u}$ za koje u svakoj od $m + n$ jednakosti $x_j u_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$ te $y_i w_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$ je točno jedan od faktora jednak nuli.

Rješenje: Označimo primarnu zadaću s (P), a dualnu s (D) te s $\mathbf{y}^*$ optimalnu točku od (D). Neka je $(\mathbf{A}^\tau \mathbf{y}^* - \mathbf{z})_j = 0$ (inače nemamo što dokazivati).

Ako je c^* optimalna vrijednost promotrimo zadaću (P') maksimizacije x_j uz uvjete $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{z}^\tau \mathbf{x} \geq c^*$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (znamo da poprima maksimalnu vrijednost 0) i njenu dualnu zadaću (D'): $\mathbf{b}^\tau \mathbf{q} - sc^* \to \min$ (po $\mathbf{q}$ i s), uz uvjete $\mathbf{A}^\tau \mathbf{q} - s\mathbf{z} \geq \mathbf{e}_j$, $\mathbf{q}, s \geq 0$. Minimalna vrijednost dualne zadaće se (prema teoremu jake dualnosti) također poprima i jednaka je 0, uz optimalnu točku $(\mathbf{q}^*, s^*)$. Imamo dva slučaja: a) $s^* = 0$, b) $s^* > 0$. Nije teško uočiti da je u slučaju a) $\mathbf{y}^* + \mathbf{q}^*$ optimalna točka zadaće (D) za koju je j-ta pomoćna varijabla u_j pozitivna, a u slučaju b) je $\mathbf{q}^*/s^*$ optimalna točka zadaće (D) s pozitivnom j-tom pomoćnom varijablom.

12. Zadaću minimizacije

$$\begin{aligned} -x_2 + |2x_1 + x_2| &\to \min \\ 3x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

zapišite kao zadaću linearnog programiranja. Zapišite i odredite sva rješenja dualne zadaće te, pomoću toga, odredite sva rješenja polazne zadaće.

13. Zadaću minimizacije

$$\begin{aligned} &|x_1 - x_2| \to \min \\ &3x_1 - x_2 \leq t \\ &\qquad x_1 \geq 0\,, \end{aligned}$$

gdje je t realan parametar, zapišite kao zadaću linearnog programiranja. Zapišite i riješite dualnu zadaću u ovisnosti o parametru t i koristeći uvjete komplementarnosti odredite rješenje polazne zadaće.

14. Zadaći

$$\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & x_2 & + & \beta x_3 & \to & \min \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & \alpha \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

zapišite i riješite dualnu zadaću u ovisnosti o realnim parametrima α i β. Pomoću uvjeta komplementarnosti odredite skup svih rješenja (u ovisnosti o parametrima) polazne zadaće.

15. Pretpostavimo da je poliedarski skup $K = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ neprazan, gdje je $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$ i $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Neka su $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ i $d \in \mathbf{R}$ zadani. Zapišite dualnu zadaću zadaće $\mathbf{c}^\tau\mathbf{x} \to \max$, $\mathbf{x} \in K$ i dokažite ekvivalenciju sljedećih tvrdnji:

    a) Svaki vektor $\mathbf{x}$ za kojeg je $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ također zadovoljava $\mathbf{c}^\tau\mathbf{x} \leq d$.

    b) Postoji vektor $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{A}^\tau\mathbf{y} = \mathbf{c}$ i $\mathbf{b}^\tau\mathbf{y} \leq d$.

16. Primarna zadaća glasi

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &\to \max \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\geq -3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

    a) Riješite zadaću simpleks metodom.

    b) Zapišite dualnu zadaću i odredite joj rješenje, koristeći dio a).

17. Neka je dana primarna zadaća

$$\begin{cases} \mathbf{z}^\tau\mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,. \end{cases}$$

    a) Zapišite dualnu zadaću.

    b) Iskažite i dokažite rezultat slabe dualnosti, bez pozivanja na tvrdnje s predavanja.

    c) Ako je $\mathbf{x}^*$ dopustiva točka primarne zadaće i $\mathbf{y}^*$ dopustiva točka dualne zadaće te vrijedi $\mathbf{z}^\tau\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\tau\mathbf{y}^*$ pokažite da su dane točke optimalne.

    d) Provedite isto u slučaju da je primarna zadaća dana u sljedećem obliku:

$$\begin{cases} \mathbf{z}^\tau\mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,. \end{cases}$$

18. Dana je zadaća

$$\begin{cases} \begin{array}{cccc} 3x_1 & +4x_2 & \to & \max \\ x_1 & +2x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & +x_2 & \leq & 8 \\ 3x_1 & +5x_2 & \leq & 26 \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}\,. \end{array} \end{cases}$$

    Pokažite bez rješavanje dualne zadaće da svako optimalno rješenje dualne zadaće $\mathbf{y}^*$ zadovoljava $y_1^* = 0$.

19.* (Sedlasta točka Lagrangeovog funkcionala) Neka je dana primarna zadaća u obliku

$$\begin{cases} \mathbf{c}^\tau\mathbf{x} \to \max \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,. \end{cases}$$

    Definiramo Lagrangeov funkcional

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}^\tau\mathbf{x} + \mathbf{p}^\tau(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ zovemo *sedlastom točkom* Lagrangeovog funkcionala L ako

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{p}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}.$$

Dokažite da je par $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$ sedlasta točka ako i samo ako je $\mathbf{x}^*$ optimalno rješenje primarne zadaće i $\mathbf{p}^*$ optimalno rješenje njoj dualne zadaće.

20. Pokažite da zadaća

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrrrll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & +3x_5 & \to \min & \\ -x_1 & & +x_3 & +3x_4 & -x_5 & \geq 1 & \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & -x_5 & \geq 1 & \\ & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +x_5 & \geq 3 & \\ & & & & x_i & \geq 0 & i = 1, ..., 5 \end{array} \end{cases}$$

ima optimalno rješenje $\mathbf{x}^*$ takvo da je $\mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2^* \mathbf{x}_3^* \neq 0$.

21. Zadani su skupovi X, Y i $S \subseteq X \times Y$ te funkcija $f : S \to \mathbf{R}$. Označimo s π_1 i π_2 projekcije s $X \times Y$ na X, odnosno Y te za $x \in X$ i $y \in Y$ uvedimo

$$S_x := \{y \in Y : (x, y) \in S\}, \; S_y := \{x \in X : (x, y) \in S\}$$

(uočite da vrijedi $S = \bigcup_{x \in \pi_1(S)} \{x\} \times S_x = \bigcup_{y \in \pi_2(S)} S_y \times \{y\}$).

Dokažite da vrijedi

$$\inf_S f = \inf_{x \in \pi_1(S)} \inf_{y \in S_x} f(x, y) = \inf_{y \in \pi_2(S)} \inf_{x \in S_y} f(x, y).$$

Rješenje: Dokažimo prvu jednakost, druga će vrijediti po simetriji. Ako je funkcija f neomeđena odozdo na S nije teško provjeriti da su obje strane jednakosti jednake $-\infty$. Neka je stoga f omeđena odozdo na S.

$\boxed{\leq}$ Imamo $\inf_S f \leq f(x, y)$ za svaki $(x, y) \in S$ pa posebno možemo fiksirati $x \in \pi_1(S)$ i uzeti infimum po $y \in S_x$:

$$\inf_S f \leq \inf_{y \in S_x} f(x, y), \; x \in \pi_1(S).$$

Sada uzimanjem infimuma po x slijedi tražena nejednakost.

$\boxed{\geq}$ Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Postoji $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ takav da je $f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < \inf_S f + \varepsilon$. Stoga je $\inf_{y \in S_{\widetilde{x}}} f(\widetilde{x}, y) \leq f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < \inf_S f + \varepsilon$ te $\inf_{x \in \pi_1(S)} \inf_{y \in S_x} f(x, y) < \inf_S f + \varepsilon$. Zbog proizvoljnosti epsilona slijedi tvrdnja.

22. Neka je

$$f(x, y, z) = e^{-x} + \frac{x^2 z}{y}, \; x, y, z > 0.$$

Dokažite da je

$$\inf_{x,y>0} \sup_{z>0} f(x, y) \neq \sup_{z>0} \inf_{x,y>0} f(x, y).$$

6. Nelinearno programiranje

1. Neka je $K \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksni skup. Kažemo da je $f : K \to \mathbf{R}$ kvazikonveksna ako je za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$
$$f\big((1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}\big) \le \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}\,.$$
Dokažite da je $f : K \to \mathbf{R}$ kvazikonveksna funkcija ako i samo ako je za svaki $M \in \mathbf{R}$ skup
$$\{\mathbf{x} \in K : f(\mathbf{x}) \le M\}$$
konveksan.

2. Neka je $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$ matrica čiji su svi elementi pozitivni. Dokažite da je funkcija zadana formulom
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\mathbf{A}\mathbf{x})_i}$$
konveksna funkcija na $\langle 0, +\infty\rangle^n$.

   Uputa: Iskoristiti da je $x \mapsto \frac{1}{x}$ konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$.

3. Neka su $h : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, h konveksna te za svaki $i \in \{1, \dots k\}$ vrijedi (barem) jedno od:
   a) h je neopadajuća u $i-$toj varijabli i g_i je konveksna
   b) h je nerastuća u $i-$toj varijabli i g_i je konkavna
   c) g_i je afina.

   Dokažite da je tada $h \circ g$ konveksna.

4. Neka su $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ te je s $\|\cdot\|$ označena euklidska norma na $\mathbf{R}^m$. Dokažite da je $f : B(\mathbf{0}, 1) \to \mathbf{R}$ dana s
$$f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\|^2}{1 - \mathbf{x}^\tau \mathbf{x}}$$
konveksna.

   Uputa: Prethodni zadatak i Zadatak 6.8 s predavanja.

5. Za realan parametar α promotrimo zadaću
$$\begin{aligned} x_1 + \alpha x_2 &\to \min \\ -x_1 + x_2^2 &\le 4 \\ x_1^2 + x_2^2 &\le 8 \\ x_1,\, x_2 &\ge 0\,. \end{aligned}$$
   a) Odredite skup $S \subseteq \mathbf{R}$ svih parametara α za koje je točka $(0, 2)$ optimalna točka zadaće.
   b) Za koje vrijednosti parametra α iz dijela a) je $(0, 2)$ jedinstvena optimalna točka zadaće.
   c) Zapišite teorem pomoću kojeg za skup S iz dijela a) možemo zaključiti istinitost tvrdnje: za svaki $\alpha \in S$ točka $(0, 2)$ je optimalna točka zadaće. Provjerite jesu li za gornju zadaću pretpostavke teorema ispunjene i dokažite teorem.

   Rezultat: a) $-4 \le \alpha \le 0$, b) $-4 \le \alpha < 0$.

6. Zapišite problem određivanja projekcije točke $(a, 10-a)$ (a je realan parametar), na skup $S \subseteq \mathbf{R}^2$ zadan uvjetima

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2 &\le 4 \\ x_1 &\le 1 \\ x_1,\, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

kao zadaću konveksnog programiranja (pokažite da se zaista radi o zadaći konveksnog programiranja). Provjerite Slaterov uvjet i, rješavajući pripadni KKT sustav, odredite sve vrijednosti realnog parametra a uz koje je tražena projekcija točka $(1, 3)$.

Uputa: Minimiziramo kvadrat euklidske norme (ekvivalentno je) tj. funkciju $(x_1-a)^2+(x_2-10+a)^2$, uz gornja 4 uvjeta. Multiplikatori λ_3 i λ_4 su nula zbog uvjeta komplementarnosti; preostali uvjeti na λ_1, λ_2 se svode na $5 \le a \le 7$.

7. Zapišite problem određivanja projekcije točke $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, na skup $S \subseteq \mathbf{R}^2$ zadan uvjetima

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 - x_2 &\le -5 \\ x_1 + x_2 &\le 7 \\ x_1,\, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

kao zadaću konveksnog programiranja te odredite sve vrijednosti realnih parametara a i b uz koje je tražena projekcija točka $(0, 5)$.

Rezultat: $b \le 5, a - b \le -5$.

8. Za zadani realan parametar α promotrimo zadaću

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - 3x_2 &\to \min \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 5x_2 &\le 0 \\ 3x_1 - x_2 &\le 6\,. \end{aligned}$$

   a) Zapišite teorem o karakterizaciji konveksnosti funkcije pomoću Hesseove matrice. Provjerite je li gornja zadaća zadaća konveksnog programiranja (obrazložite tvrdnje!). Zapišite Karush-Kuhn-Tuckerove uvjete pridružene zadaći.

   b) Odredite sve vrijednosti parametra α uz koje je točka $(2, 0)$ optimalna točka zadaće.

9. Zapišite problem određivanja projekcije točke $(a, 4)$, gdje je a realan parametar, na skup $S \subseteq \mathbf{R}^2$ zadan uvjetima

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 4 \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 &\le 0 \\ x_1 + x_2^2 &\le 2 \end{aligned}$$

kao zadaću optimizacije i odredite sve vrijednosti parametra a uz koji je tražena projekcija točka $(1, 1)$.

10. Za zadani realan parametar c promotrimo zadaću

$$\begin{aligned} -x_1 + cx_2 &\to \min \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_1 + 2x_2 &\le 2\,. \end{aligned}$$

   a) Odredite sve vrijednosti parametra c uz koje je točka $(2, 0)$ optimalna točka zadaće.

b) Kako glasi rješenje dijela a), ako u zadnjem uvjetu zapišemo jednakost umjesto nejednakosti?

Rezultat: a) $-2 \leq c \leq \frac{1}{2}$, b) $-2 \leq c$.

11. Odredite sve vrijednosti parametra c uz koje zadaća

$$\begin{aligned} cx_1 + x_2 &\to \min \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 25 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

poprima minimum u točki $(4, 3)$.

12. Koristeći Farkaševu lemu ispitajte vrijedi li za svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ implikacija

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & -x_3 & \geq 0 \\ x_1 & -x_2 & & \geq 0 \\ x_1 & & +x_3 & \geq 0 \end{array} \right. \implies 6x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 0\,?$$

Rezultat: Da, $(1, 3, 2)^\tau$ je nenegativno rješenje (transponiranog) sustava iz Farkaševe leme.

13. Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & \geq & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & \geq & 0 \\ \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & \alpha^2 x_3 & < & 0 \end{array}$$

rješiv?

Rezultat: $\alpha \leq -2$, $-1 < \alpha < 1$ i $\alpha > 1$ (iskoristiti Korolar 6.19 i ispitati za koje vrijednosti α nije rješiv alternativni sustav).

14. a) Zadaći linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\tau \mathbf{y} &\to \max \\ \mathbf{A}^\tau \mathbf{y} &\leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

zapišite dualnu zadaću.

b) Iskažite Farkaševu lemu. Pokažite da teorem jake dualnosti za par dualnih zadaća iz dijela a) povlači Farkaševu lemu.

c) Koristeći Farkaševu lemu dokažite ($\mathbf{C} \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbf{R})$, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^m$): sustav $\mathbf{Cx} \leq \mathbf{d}$ ima rješenje ako i samo ako svaki $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ za kojeg vrijedi $\mathbf{C}^\tau \mathbf{q} = 0$ zadovoljava $\mathbf{d}^\tau \mathbf{q} \geq \mathbf{0}$.

15. Tražimo krug najmanjeg radijusa u $\mathbf{R}^2$ koji sadrži zadane točke (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, n$. Formulirajte problem kao zadaću konveksnog programiranja i zapišite sustav KKT uvjeta.

16. a) Koristeći Farkaševu lemu dokažite da točno jedan sustav od sljedeća dva ima rješenje

i. $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\,,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

ii. $\mathbf{A}^\tau \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\,,\ \mathbf{y} \geq 0\,,\ \mathbf{y}^\tau \mathbf{b} < 0.$

b) Ako zadaća

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T\mathbf{x} &\to \max \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5}$$

nema dopustive točke dokažite primjenom dijela a) ovog zadatka da njoj dualna zadaća ne poprima minimum (nema dopustive točke ili joj je funkcija cilja neograničena odozdo na dopustivom skupu).

17. Odredite sve točke ravnine čija je projekcija na skup S točka $(1,1)$, ako je S zadan uvjetima

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\le 2 \\ x + y &\ge 0 \\ e^{x-y} + x^2 &\le 2\,. \end{aligned}$$

Rezultat: Točke (a,b) takve da je $a - b \ge 0$, $a + 3b \ge 4$.

18. U ovisnosti o realnom parametru α riješite zadaću

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \alpha z &\to \min \\ x + y + z^2 &\le 5 \\ x + y + z &= 5\,. \end{aligned}$$

Rezultat: Optimalna točka je $(2,2,1)$ za $\alpha \le 4$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$ za $\alpha \ge 5$, a inače $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, 5-\alpha\right)$.

7. Numeričke metode optimizacije

1. Napravite dvije iteracije metode najbržeg silaska za

$$f(x,y,z) = 4x^2 - 4y - 4xy + 11y^2 - 12yz + 4z^2 \to \min,$$

uz početnu aproksimaciju $\mathbf{x} = (0,0,0)$. Kolika je udaljenost 1. i 2. iteracije od rješenja? Konvergira li metoda?

2. Dokažite da Newtonova metoda i metoda najbržeg silaska dostižu točku globalnog minimuma funkcije $f(x,y) = (x - e^y)^2$ ako za početnu aproksimaciju uzmemo ishodište.

3. Neka je $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x$. Dokažite da za svaki izbor početne aproksimacije metoda najbržeg silaska konvergira točki globalnog minimuma funkcije f.

4. Promatramo problem $f(x,y) = x^2 - \sqrt{2}xy + y^2 \to \min$. Odredite sve točke ravnine iz kojih metoda najbržeg silaska u jednoj iteraciji dostiže minimum.

5. Napravite dvije iteracije Newtonove metode uz početnu aproksimaciju $(1/2, 2)$ za problem

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2) + y^2 \to \min\,.$$

6. Dokažite da funkcija $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2$ ima jedinstvenu točku lokalnog minimuma u kojoj se ujedno dostiže globalni minimum. Objasnite što se događa s Newtonovom metodom za traženje ekstrema funkcije f ako za početnu aproksimaciju uzmemo $(1,1)$.

7. Neka je $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = x^4 - x^2 + 2xy + y^2$. Nađite točke minimuma funkcije f i odredite sve točke ravnine iz kojih Newtonova metoda u jednom koraku dostiže točku minimuma.

8. Promotrimo zadaću

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Zadaću rješavamo metodom barijerne funkcije svodeći je na zadaću maksimizacije

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + \mu\,(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3) &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Riješite ovu zadaću (u ovisnosti o parametru $\mu > 0$) i ispitajte konvergenciju točke maksimuma kad $\mu \searrow 0$.

M. Erceg, P. Kunštek, M. Vrdoljak