ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
9. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

ΘΕΜΑΤΑ

1. **(Εμβολιασμός)** Σε ένα πληθυσμό ατόμων, το 80% είναι εμβολιασμένα. Από όσα έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 0.1%. Αντίθετα, από όσα δεν έχουν εμβολιαστεί, θα νοσήσει βαριά το 10%.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Σε περίπτωση που κάποιο άτομο νοσήσει βαριά, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει εμβολιαστεί;

   (β΄) *(1 μονάδα)* Όποιο άτομο νοσεί βαριά αυτόματα πηγαίνει σε μια μονάδα εντατικής θεραπείας (ΜΕΘ), για την εισαγωγή στην οποία δεν λαμβάνεται υπόψιν αν το άτομο είναι εμβολιασμένο ή όχι. Αν μια μονάδα εντατικής θεραπείας έχει 52 θέσεις, ποια είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του πλήθους των ασθενών σε αυτή που έχει εμβολιαστεί;

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Μπορείτε να δώσετε μια προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας του προηγούμενου σκέλους;

2. **(Δειγματοληπτικός έλεγχος)** Σε ένα πληθυσμό 100 ατόμων, υπάρχουν 22 που νοσούν με κορωνοϊό. Επιλέγονται ακριβώς 7 άτομα προκειμένου να υποβληθούν σε εξέταση.

   (α΄) *(1 μονάδα)* Ποια είναι η πιθανότητα να νοσούν το πολύ δύο από όσα άτομα επιλεγούν για εξέταση;

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Κατά μέσο όρο, πόσα από τα άτομα που θα επιλεγούν για την εξέταση θα νοσούν με κορωνοϊό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **(Διαγνωστικός έλεγχος)** Ένα τεστ κορωνοϊού μπορεί να βγει θετικό ή αρνητικό. Η πιθανότητα να βγει θετικό ενώ ο εξεταζόμενος δεν έχει τον κορωνοϊό είναι 0.1, ενώ η πιθανότητα να βγει αρνητικό ενώ ο εξεταζόμενος έχει τον κορωνοϊό είναι 0.05. Το 90% όσων υποβάλλονται στο τεστ δεν έχουν κορωνοϊό.

(α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται επιπλέον, ότι τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ σε ένα άτομο είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, εφόσον αυτό το άτομο έχει τον κορωνοϊό. Αν ένα άτομο υποβληθεί σε δύο διαδοχικά τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω ότι, σε αντίθεση με το προηγούμενο σκέλος, τα αποτελέσματα διαδοχικών τεστ στο ίδιο άτομο είναι πάντα τα ίδια και, επομένως, τυχόν σφάλματα είναι συστηματικά. Αν ένας εξεταζόμενος υποβληθεί σε 2 τεστ και βγουν και τα δύο θετικά, ποια η πιθανότητα να έχει όντως τον κορωνοϊό;

4. **(Χρόνοι εμβολιασμού)** *(2 μονάδες)* Ένα ανεμβολίαστο άτομο θα εμβολιαστεί με ένα μονοδοσικό εμβόλιο μετά από χρόνο X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ του $a = 0$ και του $b = 2$. Το ίδιο άτομο θα κολλήσει τον κορωνοϊό μετά από επίσης τυχαίο χρόνο Y, που όμως έχει πυκνότητα

$$f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου το άτομο να κολλήσει τον κορωνοϊό αφού έχει εμβολιαστεί, πριν όμως περάσει χρόνος ίσος με 2 μετά τη χρονική στιγμή που θα γίνει ο εμβολιασμός.

5. **(Θέσεις ΜΕΘ)** Έστω πόλη με πληθυσμό $N = 10^6$ ατόμων και με 1050 θέσεις ΜΕΘ. Αν κάποιο άτομο είναι εμβολιασμένο, η πιθανότητα να χρειαστεί νοσηλεία σε ΜΕΘ είναι 10^{-4}, ενώ αν δεν είναι εμβολιασμένο η πιθανότητα είναι 10^{-3}.

(α΄) *(1 μονάδα)* Έστω πως στην πόλη δεν είναι κανένα άτομο εμβολιασμένο. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστούν νοσηλεία σε ΜΕΘ περισσότερα άτομα από τις διαθέσιμες θέσεις;

(β΄) *(1 μονάδα)* Έστω, εναλλακτικά, πως το κάθε άτομο στην πόλη είναι εμβολιασμένο με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από όλα τα άλλα. Πόσες θέσεις χρειάζονται τώρα ώστε η πιθανότητα να καταληφθούν όλες οι θέσεις ΜΕΘ να μην υπερβαίνει το 0.1%;

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad (A\cup B)'=A'\cap B',\quad (A\cap B)'=A'\cup B',$$
$$P(A)\geq 0\,\forall A\in\mathcal{F},\quad P(\Omega)=1,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\Rightarrow P(_1\cup{}_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$
$$P(A')=1-P(A),\quad P(\emptyset)=0,\quad P(A)\leq 1,\quad A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B),\quad P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B),$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B),\ P(A\cup B)\leq P(A)+P(B),\ P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(A'\cap B)+P(A'\cap B'\cap C),$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C),\ P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B').$$

Διατάξεις k αντικ. από N: $\frac{N!}{(N-k)!}$, Συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N}{k}=\frac{N!}{k!(N-k)!}$,
Επαναληπτικές διατάξεις μήκους k από αντικ.: N^k, Επαναληπτικοί συνδυασμοί k αντικ. από N: $\binom{N+k-1}{k}=\binom{N+k-1}{-1}$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}),$$
$$P()=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B'),\quad P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')},$$
$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}),$$
$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_N)P(B_N)}\quad (\{B_i\}\text{ διαμέριση}).$$
$$A,B\text{ ανεξάρτητα}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(B)=P(B|A)\Leftrightarrow P(A)=P(A|B).$$

$$p_X(x)=P(X=x)=P(\{\omega:X(\omega)=x\})\,\forall x\in S_X,\quad F_X(x)=P(X\leq x),\quad \lim_{t\to x^-}F(t)=P(X<x),\quad E(X)=\sum_{x\in S_X}xp_X(x),$$
$$E(g(X))=\sum_{x\in S_X}g(x)p_X(x),\quad E(aX+b)=aE(X)+b,\quad E(\sum_{i=1}^n a_ig_i(X))=\sum_{i=1}^n a_iE(g_i(X)),$$
$$\sigma^2=\mathrm{VAR}(X)=E\big[(X-\mu)^2\big]=E(X^2)-(E(X))^2,\quad \mathrm{VAR}(aX+b)=a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$\sum_{k=0}^\infty x^k=\frac{1}{1-x},\quad \sum_{k=0}^\infty kx^k=\frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{k=0}^\infty {}^2x^k=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\ e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!},\quad (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
$$X\sim\text{Bern}(p),\quad p_X(0)=1-p,\ p_X(1)=p,\ E(X)=p,\ \mathrm{VAR}(X)=p(1-p),$$
$$X\sim\text{Διων}(N,p),\ p_X(k)=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k},\ E(X)=Np,\ \mathrm{VAR}(X)=Np(1-p),$$
$$X\sim\text{Γεωμ}(p),\ p_X(k)=(1-p)^{k-1}p,\ E(X)=1/p,\ \mathrm{VAR}(X)=(1-p)/p^2,\ P(X\geq m+n|X>n)=P(X\geq m),\ m\geq 1,n\geq 0,$$
$$X\sim\text{Υπερ}(N,k,n),\ p_X(m)=\frac{\binom{k}{m}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}},\ E(X)=\frac{nk}{N},\ \mathrm{VAR}(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)},$$
$$X\sim\text{Poisson}(\lambda),\ p_X(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ E(X)=\lambda,\ \mathrm{VAR}(X)=\lambda.$$

$$p_{XY}(x,y)=P(X=x,Y=y)\quad\forall x\in S_X,\,\forall y\in S_Y,\quad p_X(x)=\sum_{y\in S_Y}p_{XY}(x,y),\quad p_Y(y)=\sum_{x\in S_X}p_{XY}(x,y),$$
$$E(g(X,Y))=\sum_{x,y}g(x,y)p_{XY}(x,y),\quad E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c,\quad E(\sum_{k=1}^K g_k(X,Y))=\sum_{k=1}^K E(g_k(X,Y)),$$
$$\mathrm{COV}(X,Y)=E\big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\big]=E(XY)-E(X)E(Y),\ \mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\mathrm{COV}(X,Y),$$
$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες}\Leftrightarrow P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)\,\forall A,B\Leftrightarrow p_{XY}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\,\forall x,y,$$
$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες}\Rightarrow E(g(X)h(Y))=E(g(X))E(h(Y)),\quad \mathrm{COV}(X,Y)=0,\quad p_{X+Y}(m)=\sum_{k=-\infty}^\infty p_X(k)p_Y(m-k),\ m\in\mathbb{Z},$$
$$E(\sum_{i=1}^n a_iX_i+b)=\sum_{i=1}^n a_iE(X_i)+b,\quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n\mathrm{VAR}(X_i)+2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx, \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{c} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{c}^{t} f(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_{a}^{t} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{t}^{b} f(x)\,dx,$$

$$P(X\in B) = \int_B f(t)\,dt, \quad P[a\le X\le b] = \int_a^b f(x)\,dx, \quad F(x) = P(X\le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad F'(x) = f(x),$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \quad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, \quad E(aX+b) = aE(X)+b, \quad E(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(X)) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(X)),$$

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = E\big[(X-\mu)^2\big] = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \mathrm{VAR}(aX+b) = a^2\mathrm{VAR}(X).$$

$$X\sim U[a,b], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{για } x\in[a,b], \\ 0, & \text{για } x\notin[a,b], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x<a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b, \\ 1, & x>b, \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{VAR}(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$X\sim \text{Εκθ}(\theta), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & \text{για } x\ge 0, \\ 0, & \text{για } x<0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\ge 0, \end{cases} \quad E(X)=\theta, \quad \mathrm{VAR}(X)=\theta^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \text{για } x\in\mathbb{R}, \quad E(X)=\mu, \quad \mathrm{VAR}(X)=\sigma^2,$$

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1), \quad P(a\le X\le b) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big),$$

$$Z\sim N(0,1), \quad \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, \quad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx, \quad \Phi(x) = 1-\Phi(-x).$$

$$R = \{(x,y): a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

$$R = \{(x,y): a\le y\le b,\ \phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\}, \quad \iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dA = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy,$$

$$P[(X,Y)\in R] = \iint_R f_{XY}(x,y)\,dA, \quad P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d) = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_{XY}(x,y)\,dA = \begin{cases} \int_a^b\Big(\int_c^d f_{XY}(x,y)dy\Big)dx, \\ \int_c^d\Big(\int_a^b f_{XY}(x,y)dx\Big)dy, \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx, \quad E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)\,dxdy,$$

$$E(aX+bY+c) = aE(X)+bE(Y)+c, \quad E(\sum_{k=1}^{K} g_k(X,Y)) = \sum_{k=1}^{K} E(g_k(X,Y)),$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)\ \forall A,B \Leftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\ \forall x,y,$$

$$X,Y\,\text{ανεξάρτητες} \Rightarrow E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y)), \quad \mathrm{COV}(X,Y)=0, \quad f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(z-t)\,dt,$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_iX_i + b) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)+b, \quad \mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{VAR}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathrm{COV}(X_i,X_j).$$

$$X\ge 0,\ c>0 \Rightarrow P(X\ge c)\le\frac{E(X)}{c}, \qquad c>0 \Rightarrow P(|X-E(X)|\ge c)\le\frac{\mathrm{VAR}(X)}{c^2},$$

$$X_1, X_2, \ldots \text{ ανεξ. με κοινή κατ.}, \ E(X_i)=\mu,\ \bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \Rightarrow \begin{cases} \forall\epsilon>0,\ P\big(|\bar{X}_N-\mu|<\epsilon\big)\to 1, \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\lim_{N\to\infty}\bar{X}_N = \mu\big) = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{VAR}(X_i)=\sigma^2,\ \bar{S}_N = \frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu) = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i\Big)-N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \Rightarrow \begin{cases} P\big(a\le\bar{S}_N\le b\big)\to\Phi(b)-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\le a\big)\to\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty, \\ P\big(\bar{S}_N\ge a\big)\to 1-\Phi(a), \quad \text{καθώς } N\to\infty. \end{cases}$$
