

Esercitazioni
Controllo Robusto e Nonlineare

Filippo Ottaviani

19 dicembre 2025

Indice

1 Soluzione ARE	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Problema Linear Quadratic Regulator	1
1.3 LQR ad orizzonte finito	2
1.4 LQR ad orizzonte infinito	2
1.5 Calcolo della DRE	3
1.6 Stazionarizzazione della DRE	3
1.7 Codice	3
2 Regolazione del pendolo linearizzato	7
2.1 Introduzione	7
2.2 Modello del sistema	8
2.3 Principio di separazione	8
2.4 Condizioni preliminari	9
2.5 Costruzione del regolatore e dell'osservatore	9
2.5.1 Regolatore	9
2.5.2 Osservatore	10
2.6 Sistema a ciclo chiuso	10
2.7 Codice	11
3 Soluzione equazioni nonlineari	22
3.1 Introduzione	22
3.2 Definizione del sistema	22
3.3 Esistenza	23
3.4 Unicità	23
3.5 Completezza	23
3.6 Codice	24
4 Analisi diodo tunnel	27
4.1 Introduzione	27
4.2 Modellazione del dispositivo	27
4.3 Analisi locale dei sistemi non lineari	27
4.4 Classificazione degli equilibri	28
4.5 Codice	30

5 Massa-molla-smorzatore	36
5.1 Introduzione	36
5.2 Definizione del modello	36
5.3 Analisi dei quattro casi	37
5.3.1 Caso lineare	37
5.3.2 Primo caso non lineare	37
5.3.3 Secondo caso non lineare	38
5.3.4 Terzo caso non lineare	39
5.4 Codice	40
6 Controllo adattativo	46
6.1 Introduzione	46
6.2 Progetto del controllore con parametro noto	46
6.3 Legge di controllo adattativa	47
6.3.1 Funzione di Lyapunov	47
6.3.2 Legge di adattamento	47
6.3.3 Convergenza del parametro	48
6.4 Codice	49
7 Controllo robot planare	54
7.1 Modello del robot planare a due link	54
7.2 Regolazione spazio dei giunti e operativo	55
7.2.1 Spazio dei giunti	55
7.2.2 Spazio operativo	57
7.3 Tuning dei guadagni per assegnazione del tasso di convergenza locale	58
7.4 Inseguimento di traiettorie nello spazio dei giunti con parametri noti	59
7.5 Inseguimento di traiettorie nello spazio operativo con parametri noti	60
7.5.1 Dinamica inversa nello spazio operativo	60
7.5.2 Legge di controllo implementata	61
7.6 Inseguimento di traiettoria adattativo nello spazio dei giunti	61
7.6.1 Controllo adattativo di Slotine-Li	61
7.6.2 Legge di adattamento	62
7.6.3 Implementazione	62
7.7 Codice	63

8 Robot uniciclo	83
8.1 Modello cinematico	83
8.2 Definizione dell'errore di inseguimento	83
8.2.1 Errore	83
8.2.2 Dinamica dell'errore	84
8.3 Progetto del controllore via Lyapunov	84
8.3.1 Derivata \dot{V}	85
8.3.2 Scelta della legge di controllo	85
8.3.3 Verifica della stabilità	86
8.4 Codice	87
9 Funzioni ausiliarie	93

1 Soluzione ARE

Soluzione equazione di Riccati algebrica numerica.

1.1 Introduzione

L'**equazione algebrica di Riccati** (ARE) è un'equazione matriciale non lineare che rappresenta una soluzione del problema di controllo ottimo LQR (Linear Quadratic Regulator) ad orizzonte infinito. In LQR, l'ARE permette di calcolare la matrice di guadagno ottimale che minimizza un costo quadratico, garantendo prestazioni ottimali del sistema controllato.

1.2 Problema Linear Quadratic Regulator

Il **Problema Linear Quadratic Regulator** è una particolare casistica del problema di controllo ottimo che prevede alcune ipotesi di interesse pratico:

- la dinamica lineare.
- il costo quadratico, si vuole minimizzare, quindi, l'energia associata allo stato e all'input.
- nessun vincolo generico.

Sotto tali ipotesi si ottiene la seguente formulazione del problema:

$$\min_{(x,u) \in X \times U} \int_0^{t_f} (x(s)^T Q x(s) + u(s)^T R u(s)) ds + x(t_f)^T S x(t_f) \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \forall t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

dove si introducono le seguenti matrici di costo:

- \mathbf{Q} rappresenta costo sullo stato; è simmetrica e semidefinita positiva, altrimenti esisterebbero stati pozzo in cui il sistema rimarrebbe intrappolato. Grazie alla sua simmetria può essere scritto come $Q = E^T E$.
- \mathbf{R} rappresenta costo sul controllo; è simmetrica e definita positiva altrimenti il controllo avrebbe costo negativo o nullo e sarebbe impossibile minimizzare, esisterebbero infinite soluzioni.
- \mathbf{S} rappresenta costo terminale; è simmetrica e semidefinita positiva. Ho omesso questa matrice di costo nella sezione relativa alla ARE poiché nei problemi ad orizzonte infinito non è contemplato lo stato finale.

La simmetria è richiesta perché implica la diagonalizzabilità e lo spettro reale. Il problema LQR ha due varianti principali:

- **Orizzonte finito:** la soluzione è un controllo $u^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che porta il sistema in uno stato finale $x(t_f)$.
- **Orizzonte infinito:** la soluzione è un controllo $u^* : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che minimizza i costi per $t \rightarrow \infty$.

1.3 LQR ad orizzonte finito

La soluzione del problema LQR ad orizzonte finito è il controllo risultante dalla minimizzazione 1.2 che posso scrivere come:

$$u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \frac{\partial}{\partial x} V(t, x) \quad (3)$$

che posso sostituire nell'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman e, supponendo che la soluzione sia del tipo $V(t, x) = x^T P(t)x$, ottengo:

$$\begin{cases} -\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \\ P(t_f) = S \end{cases} \quad (4)$$

nota come equazione differenziale di Riccati (DRE), soluzione del problema LQR ad orizzonte finito.

Allora posso scrivere la soluzione a ciclo chiuso del sistema come segue:

$$u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T P(t)x \quad (5)$$

1.4 LQR ad orizzonte infinito

Il problema LQR ad orizzonte infinito può essere risolto in maniera simile tenendo conto del fatto che, se l'istante finale t_f è arbitrariamente grande, il valore della V^* non dipenderà dal tempo. Si ottiene, quindi, l'equazione di HJB stazionaria che impone l'indipendenza di P dal tempo. Di conseguenza posso scrivere il controllo ottimo come:

$$\underline{u}^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T P \underline{x} \quad (6)$$

la matrice P può essere ricavata dall'equazione:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P \quad (7)$$

nota come l'equazione algebrica di Riccati (ARE). Da notare che la ARE rappresenta la soluzione stazionaria della DRE, cioè per $\dot{P} = 0$

1.5 Calcolo della DRE

Per risolvere numericamente l'equazione algebrica di Riccati si può passare attraverso la formulazione dell'equazione differenziale di Riccati cercandone la soluzione stazionaria. Per risolvere la DRE occorre verificare tre condizioni:

1. positiva semidefinitezza di Q .
2. positiva definitezza di R .
3. controllabilità della coppia (A, B) .

Per le prime due condizioni è sufficiente controllare il segno del più piccolo autovalore di Q e di R . Per la terza, invece, occorre costruire la matrice di controllabilità della coppia (A, B) , \mathcal{R}_{AB} , e verificare se è a rango pieno. A queste ipotesi se ne aggiunge una quarta, ossia che la coppia (E, A) sia osservabile. Quest'ultima verifica assicura che la soluzione P_∞ della ARE è definita positiva e quindi il sistema controllato è asintoticamente stabile.

Verificate queste ipotesi, procedo con il calcolo di P_∞ che può essere ricavata dalla **stazionarizzazione della DRE** invece di risolvere direttamente l'equazione algebrica, si simula l'evoluzione dinamica della matrice $P(t)$. Se il sistema è stabilizzabile e rilevabile, partendo da una condizione iniziale $P(t_f) = P_f$, la matrice $P(t)$ convergerà a un valore costante integrando all'indietro.

1.6 Stazionarizzazione della DRE

Scrivo l'equazione differenziale come segue:

$$-\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q \quad (8)$$

e procedo con i seguenti passaggi:

1. Si imposta una condizione iniziale ($P(0) = 0$).
2. Si integra all'indietro nel tempo l'equazione differenziale numericamente.
3. Quando $\dot{P}(t) \approx 0$ (la derivata si annulla), il valore di $P(t)$ è la soluzione della ARE.

1.7 Codice

Lo script principale definisce il sistema, verifica le condizioni per il calcolo della ARE e invoca la funzione `solve_ARE_through_DRE.m`.

```
clear all;
clc;
```

```

close all;

addpath('funzioni','1')
pkg load control

% Definisco il sistema
A = [-1 2; -3 -4];
B = [1; 0];
E = eye(2);
Q = E'*E;
R = 1;

% Scelgo un orizzonte temporale T sufficientemente lungo
T_horizon = 100;

% Q deve essere semidefinita positiva
if ~is_pos_semidefinite(Q)
    error('ARE non risolvibile: Q non      semidefinita positiva!');
end

% R deve essere definita positiva
if ~is_pos_definite(R)
    error('ARE non risolvibile: R non      definita positiva!');
end

% (A,B) deve essere controllabile
if ~is_controllable(A, B)
    error('ARE non risolvibile: la coppia (A, B) non      controllabile!
');
end

% (E,A) deve essere osservabile
if ~is_observable(E, A)
    error('ARE non risolvibile: la coppia (A, B) non      osservabile!')
;

```

```

end

% Soluzione della ARE
P_inf = solve_ARE_through_DRE(A, B, Q, R, T_horizon);

fprintf('\nSoluzione dell equazione algebrica di Riccati (ARE)\n')
disp(P_inf)

```

La funzione `solve_ARE_through_DRE.m` integra all'indietro il risultato della DRE e restituisce la P_∞ ottenuta dopo un tempo che si ritiene sufficiente per la convergenza. Per utilizzare `ode45`, è stato necessario operare una vettorizzazione della matrice \mathbf{P} . Nel codice, questo avviene tramite il comando `P(:)`, che impila le colonne della matrice $n \times n$ in un vettore $n^2 \times 1$.

```

function P_inf = solve_ARE_through_DRE(A, B, Q, R, T)
[n, ~] = size(A);

% Imposto e vettorizzo la condizione finale P(T) = 0
P_tf = zeros(n);
P_tf_vec = P_tf(:);

% Definisco l'intervallo di integrazione all'indietro: [T, 0]
tspan = [T, 0];

% Integro all'indietro
% ode45 chiama la funzione 'compute_DRE' ad ogni passo
[t_backward, P_vec_backward] = ode45(@(t, P_vec) compute_DRE(P_vec
, A, B, Q, R, n), tspan, P_tf_vec);

% Riordino i risultati in avanti nel tempo (da t=0 a t=T)
t = flipud(t_backward);
P_vec = flipud(P_vec_backward);

% Converto i risultati da forma vettoriale (usata da ode45)
% a forma matriciale (un array 3D)
num_points = length(t);
P_sol = zeros(n, n, num_points);
for i = 1:num_points

```

```

P_vec_i = P_vec(i, :)';
P_sol(:, :, i) = reshape(P_vec_i, n, n); % Ricostruisco la
    matrice n x n
end

% La soluzione dell'ARE      P(0)
P_inf = P_sol(:,:,1);

```

end

La funzione `compute_DRE.m` calcola numericamente \dot{P} attraverso la formulazione teorica della DRE. La funzione esegue l'operazione di `reshape` ad ogni passo di integrazione per calcolare la derivata matriciale, per poi ri-vettorizzare il risultato.

```

function Pdot_vec = compute_DRE(P_vec, A, B, Q, R, n)

% Ricostruisco la matrice P (n x n) dal vettore P_vec (n^2 x 1)
P = reshape(P_vec, n, n);

% Calcolo la derivata P_dot usando l'equazione di Riccati
Pdot = -(A'*P + P*A + Q - P*B*inv(R)*B'*P);

% Vettorizzo l'output Pdot per restituirlo a ode45
Pdot_vec = Pdot(:);

```

end

2 Regolazione del pendolo linearizzato

Regolazione con informazione parziale del carrello con pendolo linearizzato.

2.1 Introduzione

Il problema della regolazione del carrello con pendolo (*inverted pendulum on a cart*) con informazione parziale riguarda la **progettazione di un controllore** in grado di stabilizzare il sistema quando alcune variabili di stato non sono direttamente misurabili. Il sistema è descritto dalle equazioni dinamiche non lineari del pendolo inverso montato su un carrello. Linearizzando intorno alla posizione di equilibrio (pendolo verticale, carrello fermo) si ottiene il modello lineare. Lo stato è rappresentato da:

- Posizione del carrello x_c .
- Velocità del carrello v_c .
- Angolo del pendolo rispetto alla verticale θ_p .
- Velocità angolare del pendolo ω_p .

I parametri fondamentali per la caratterizzazione del sistema sono:

- Massa del carrello M .
- Massa del pendolo m .
- Lunghezza del pendolo l .
- Accelerazione gravitazionale g .

Le uscite sono l'unica informazione a disposizione del regolatore e si tratta di:

- Posizione del carrello x_c .
- Angolo del pendolo θ_p .

Scrivo il vettore di stato come segue:

$$x = \begin{bmatrix} x_c \\ v_c \\ \theta_p \\ \omega_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ \dot{x}_c \\ \theta_p \\ \dot{\theta}_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

2.2 Modello del sistema

Il modello del sistema con pendolo e carrello è un problema non lineare ma in questa esercitazione tratterò il modello linearizzato e la sua regolazione al fine di equilibrare il pendolo fissato sul carrello $\theta_p = 0$. Date le premesse, scrivo le matrici di design del sistema lineare:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Considero nulla la matrice D . Il modello permette di scrivere la legge di controllo in retroazione dallo stato $u = -K\hat{x}$. Non avendo a disposizione lo stato completo ma una versione parziale e rumorosa, occorre stimarlo. La legge di controllo diventa, quindi, la seguente:

$$u = -K\hat{x} \quad (11)$$

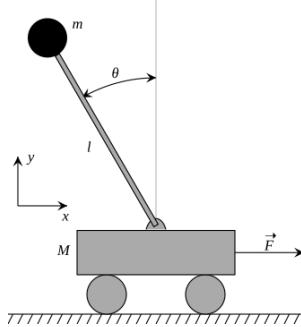


Figura 1: Pendolo inverso su un carrello

2.3 Principio di separazione

Principio di separazione: in un sistema lineare che gode delle proprietà di osservabilità e stabilizzabilità, la progettazione di un regolatore con retroazione di stato stimato può essere divisa in due fasi indipendenti: la progettazione del regolatore e quella dell'osservatore, senza che l'una influenzi i poli dell'altra.

Il sistema di regolazione progettato si basa sul principio di separazione quindi posso scomporre il problema in due sotto-problemi duali:

- **Regolatore:** progetto un guadagno K come se avessimo accesso a tutto lo stato x , minimizzando un indice di costo quadratico J ; realizzo, quindi, un controllore LQR. Questo garantisce la stabilità e le prestazioni desiderate per la dinamica del sistema.

- **Osservatore:** progetta un osservatore con guadagno L per stimare lo stato \hat{x} a partire dalle uscite misurate y . Questo oggetto, duale al precedente è chiamato Filtro di Kalman.

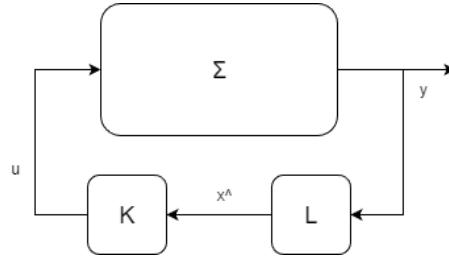


Figura 2: Sistema a ciclo chiuso con osservatore e regolatore

2.4 Condizioni preliminari

Prima di costruire il regolatore occorre verificare le seguenti tre ipotesi che abbiamo trattato come condizioni necessarie e sufficienti per poter realizzare il controllo:

- La coppia (A, B) deve essere **stabilizzabile** per rendere possibile il compito di stabilizzazione del sistema, cioè deve esistere un K per cui:

$$\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^- \quad (12)$$

Garantisce che posso stabilizzare il sistema con l'ingresso u .

- La coppia (A, C) deve essere **rilevabile** per accettare l'esistenza di un controllo stabilizzante dall'uscita per cui deve esistere L tale che:

$$\sigma(A - LC) \subset \mathbb{C}^- \quad (13)$$

Garantisce che posso ricostruire lo stato (o almeno la sua parte instabile) dalle misure y . Senza questa proprietà, l'errore di stima non convergerebbe a zero e il controllo fallirebbe.

2.5 Costruzione del regolatore e dell'osservatore

2.5.1 Regolatore

Occorre, innanzitutto, definire le matrici di peso Q_{reg} e R_{reg} . Lo scopo del controllo è quello di penalizzare l'angolo del pendolo così da raggiungere il riferimento $\theta = 0$. Si intende dare una rilevanza molto minore al resto dello stato, in particolare in molti esempi online si lascia una penalità molto

ridotta per la velocità che si lascia libera di variare pur di equilibrare il pendolo. Per quanto riguarda il controllo, non è di interesse penalizzarlo. Valori tipici in casi simili a questo sono:

$$Q_{reg} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{reg} = 0.1 \quad (14)$$

A questo punto, posso calcolare il guadagno del regolatore sulla base delle matrici (A , B , Q_{reg} , R_{reg}) grazie alla funzione `lqr`, una funzione della libreria `control`. Ho deciso però di sfruttare i risultato dell'esercitazione precedente, trovando P_∞ attraverso la ARE e calcolare, di conseguenza, il guadagno K come segue:

$$u = - \underbrace{R^{-1}B^T P_\infty}_K x \quad (15)$$

2.5.2 Osservatore

Il principio di separazione la costruzione dell'osservatore è duale a quella del regolatore con la differenza delle matrici Q ed R utilizzate. La prima, Q_{obs} , rappresenta la covarianza di processo mentre, la seconda, R_{obs} la covarianza di misura. Anche in questo caso, uso matrici di utilizzo comune negli esempi reperibili.

$$Q_{obs} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{obs} = 0.1 \quad (16)$$

Per trovare il guadagno dell'osservatore L ho utilizzato la stesso procedimento descritto per il regolatore sulla base delle matrici (A^T , C^T , Q_{obs} , R_{obs}) e, grazie alla funzione realizzata nell'esercitazione precedente trovo la P_∞ da cui:

$$L = (R^{-1}C P_\infty)^T \quad (17)$$

2.6 Sistema a ciclo chiuso

A questo punto si simula il sistema a ciclo chiuso completo di osservatore e regolatore. Scrivo la dinamica del sistema con le nuove matrici complete dei guadagni K e L :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Scelgo, quindi, una vettore di stato per le condizioni di stato $x_0 = [1, 0, 0.3, 0]^T$ e la sua versione stimata $\hat{x}_0 = [0, 0, 0, 0]^T$. A questo punto, simulo il sistema e grafico l'andamento di stato reale, stimato ed errore nel tempo.

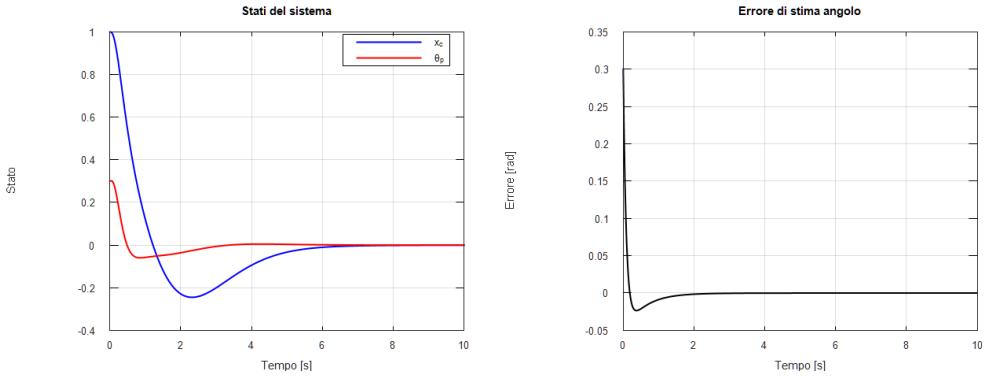


Figura 3: Andamento degli stati del sistema (sinistra) e dell'errore di stima del angolo del pendolo (destra)

2.7 Codice

Lo script principale `lin_pendulum_control.m` definisce i parametri fisici della scena e le matrici di design derivate dal modello, verifica le condizioni per attuare il controllo LQR e definisce le matrici di penalità per LQR (Q ed R). Calcola, dunque, i guadagni K ed L attraverso la funzione `solve_ARE_through_DRE` (ho inserito anche un confronto con quello ottenuto dalla funzione `lqr`) invoca la funzione per la simulazione del sistema a ciclo chiuso.

```

clear;
clc;
close all;

pkg load control;

addpath('1', '2', 'funzioni')

% Parametri del sistema
M = 2.0;      % Massa del carrello [kg]
m = 0.1;       % Massa del pendolo [kg]
l = 0.5;       % Lunghezza del pendolo [m]
g = 9.81;      % Accelerazione di gravit [m/s^2]

% Tempo per l'integrazione di P_inf
T_horizon = 10

% Definizione delle modello linearizzato

```

```

A = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, -m*g/M, 0;
      0, 0, 0, 1;
      0, 0, (M+m)*g/(M*l), 0];

B = [0;
      1/M;
      0;
      1/(M*l)];

C = [1, 0, 0, 0;
      0, 0, 1, 0];

D = zeros(size(C,1), size(B,2));

% (A,B) deve essere controllabile
if is_controllable(A, B)
    disp('La coppia (A, B) controllabile')
else
    error('ARE non risolvibile: la coppia (A, B) non controllabile!');
end

% (A, C) deve essere rilevabile
if is_detectable(A, C)
    disp('La coppia (A, C) rilevabile')
else
    error('ARE non risolvibile: la coppia (A, C) non rilevabile!');
end

% FILTRO DI KALMAN-BUCY

% Progetto del regolatore LQR
Q_reg = diag([10, 1, 100, 1]); % Pesi sugli statici: [pos, v_pos, theta,
                                v_theta]

```

```

R_reg = 0.1; % Peso sull'ingresso di controllo

K_fun = lqr(A, B, Q_reg, R_reg);
P_inf_reg = solve_ARE_through_DRE(A, B, Q_reg, R_reg, T_horizon);
K_cal = inv(R_reg) * B' * P_inf_reg;
disp('\nGuadagno del controllore K:\n');
disp('Guadagno K della funzione lqr');
disp(K_fun);
disp('Guadagno K calcolato dalla mia ARE');
disp(K_cal);

K = K_cal

% Progetto dell'osservatore dello stato
Q_obs = diag([100, 100, 100, 100]); % Rumore di processo fittizio
R_obs = diag([1, 1]); % Rumore di misura fittizio (su
pos e angolo)

% Calcolo il guadagno dell'osservatore per dualit
L_fun = lqr(A', C', Q_obs, R_obs)';
P_inf_obs = solve_ARE_through_DRE(A', C', Q_obs, R_obs, T_horizon);
L_cal = (inv(R_obs) * C * P_inf_obs)';
disp('Guadagno dell osservatore L:\n');
disp('Guadagno L della funzione lqr');
disp(L_fun);
disp('Guadagno L calcolato dalla mia ARE');
disp(L_cal);

L = L_cal

% Simulazione del sistema a ciclo chiuso
t_span = 0:0.01:10;

% Condizione iniziale
x0_sys = [1; 0; 0.3; 0];
x0_obs = [0; 0; 0; 0];
x0_total = [x0_sys; x0_obs];

```

```

% Definizione della dinamica completa
dynamics = @(t, z) closed_loop_dynamics(t, z, A, B, C, K, L);

[t, z] = ode45(dynamics, t_span, x0_total);

% Estrazione stati
x_real = z(:, 1:4); % Stati veri
x_hat = z(:, 5:8); % Stati stimati

% Plot dello stato
plot_state(x_real, x_hat, t)

# REGOLAZIONE DALL'USCITA
omega = 1.0;
Amp = 0.5; % Ampiezza riferimento

% Matrice dinamica dell'esosistema S (3x3)
S = [0, omega, 0;
      -omega, 0, 0;
      0, 0, 0];

% Matrice di disturbo sull'ingresso P
P_dist = zeros(4, 3);
P_dist(2, 3) = 1/M; % w3 agisce come una forza costante sul carrello

% Matrice Qw per definire l'errore e = y_d - y
Qw = [-1, 0, 0; % y1_des = w1
       0, 0, 0]; % y2_des = 0 (angolo equilibrato)

% Verifica condizioni H1
disp('Autovalori Esosistema S:');
disp(eig(S));

```

```

% Risoluzione equazioni del regolatore
[Pi, Gamma] = solve_regulation_sylvester(A, B, P_dist, S, C, Qw);

disp('Matrice Pi:'); disp(Pi);
disp('Matrice Gamma:'); disp(Gamma);

% Progetto dell'osservatore esteso
n = size(A,1);
nw = size(S,1);

Ae = [A, P_dist; zeros(nw, n), S];
Ce = [C, Qw];

% Verifico H3: rilevabilità del sistema esteso
if is_detectable(Ae, Ce)
    disp('Il sistema esteso è rilevabile.')
else
    error('Il sistema esteso non è rilevabile.');
end

% Progetto guadagno L_obs per il sistema esteso
Q_obs_ext = diag([100*ones(1,n), 1000*ones(1,nw)]); % Alta fiducia sul
    modello, incertezza su w
R_obs_ext = diag([0.1, 0.1]);
L_obs_ext = lqr(Ae', Ce', Q_obs_ext, R_obs_ext)';

disp('Guadagno Osservatore Esteso L_obs_ext:');
disp(L_obs_ext);

% Condizioni iniziali
w0 = [Amp; 0; 0];           % Stato esosistema (generazione sinusoidale)
xe0_hat = zeros(n+nw, 1); % Stima iniziale (vuota)

% Stato totale per ode45
z0 = [x0_sys; w0; xe0_hat];

```

```

dynamics_fun = @(t, z) output_regulation_dynamics(t, z, A, B, P_dist,
C, Qw, S, K, Pi, Gamma, L_obs_ext);
[t, z] = ode45(dynamics_fun, t_span, z0);

% Estrazione dati
x_hist = z(:, 1:4);
w_hist = z(:, 5:7);
xe_hat_hist = z(:, 8:end);
x_hat_hist = xe_hat_hist(:, 1:4);
w_hat_hist = xe_hat_hist(:, 5:end);

% Calcolo segnali d'interesse
y_hist = (C * x_hist)';
y_des_hist = (-Qw * w_hist)'; % y_des derivato da Qw*w = -y_des
u_hist = zeros(length(t), 1);
err_hist = zeros(length(t), 2);

for i = 1:length(t)
    % Legge di controllo: u = K(x_hat - Pi*w_hat) + Gamma*w_hat
    x_h = x_hat_hist(i,:)';
    w_h = w_hat_hist(i,:)';
    u_hist(i) = -K * x_h + (Gamma - K*Pi) * w_h;
    err_hist(i, :) = (C * x_hist(i,:)' + Qw * w_hist(i,:))';
end

% Plot
plot_state_or(t, y_hist, y_des_hist, err_hist, w_hist, w_hat_hist)

```

La funzione `closed_loop_dynamics.m` calcola le matrici del sistema a ciclo chiuso includendo osservatore e regolatore e simula l'andamento dello stato e della sua stima.

```

function dz = closed_loop_dynamics(t, z, A, B, C, K, L)
    % Estraggo gli stati reali e stimati
    x = z(1:4);
    x_hat = z(5:8);

    % Uscita

```

```

y = C * x;

% Legge di controllo basata sullo stato stimato
u = -K * x_hat;

% Dinamica del sistema reale
dx = A * x + B * u;

% Dinamica dell'osservatore
dx_hat = A * x_hat + B * u + L * (y - C * x_hat);

% Combina derivate
dz = [dx; dx_hat];

end

```

La funzione `output_regulation_dynamics.m` simula il sistema a ciclo chiuso con la regolazione dall'uscita.

```

function dz = output_regulation_dynamics(t, z, A, B, P, C, Q, S, K, Pi
, Gamma, L_obs)
% Estrazione stati
n = size(A, 1);
nw = size(S, 1);
x = z(1:n); % Stato sistema
w = z(n+1 : n+nw); % Stato esosistema
xe_hat = z(n+nw+1 : end); % Stato osservatore esteso [x_hat; w_hat
]

x_hat = xe_hat(1:n); % Stima dello stato
w_hat = xe_hat(n+1:end); % Stima riferimento e rumore

% Calcolo misure
y_meas = C * x;

% Calcolo controllo (Feedforward + Feedback)
u = -K * (x_hat - Pi * w_hat) + Gamma * w_hat;

```

```

% Dinamica del sistema
dx = A * x + B * u + P * w;

% Dinamica esosistema
dw = S * w;

% Misuro l'errore regolato e = Cx + Qw
output_e = C * x + Q * w;

% Uscita stimata dall'osservatore
output_e_hat = C * x_hat + Q * w_hat;

% Aggiornamento osservatore
Be = [B; zeros(nw, size(B,2))];
Ae = [A, P; zeros(nw, n), S];
dxe_hat = Ae * xe_hat + Be * u + L_obs * (output_e - output_e_hat)
;
dz = [dx; dw; dxe_hat];

end

```

La funzione `solve_regulation_sylvester.m` risolve il sistema di equazioni di Sylvester per ottenere Π e Γ .

```

function [Pi, Gamma] = solve_regulation_sylvester(A, B, P, S, C, Q)
n = size(A, 1);
m = size(B, 2);
nw = size(S, 1);
p = size(C, 1);

% Numero totale di incognite
num_unknowns = n*nw + m*nw;

% Riscriviamo  $\Pi \cdot S - A \cdot \Pi - B \cdot \Gamma = P$ 
term1 = kron(S', eye(n)) - kron(eye(nw), A);
term2 = -kron(eye(nw), B);

% Riscriviamo  $C \cdot \Pi + 0 \cdot \Gamma = -Q$ 

```

```

term3 = kron(eye(nw), C);
term4 = zeros(p*nw, m*nw);

% Costruzione matrice sistema
M_sys = [term1, term2;
          term3, term4];
knowns = [P(:); -Q(:)];

% Risoluzione sistema lineare
sol = M_sys \ knowns;

% Estrazione soluzioni e reshape
vec_Pi = sol(1 : n*nw);
vec_Gamma = sol(n*nw + 1 : end);
Pi = reshape(vec_Pi, n, nw);
Gamma = reshape(vec_Gamma, m, nw);
end

```

La funzione `plot_state` serve a mostrare i grafici degli andamenti dello stato della sua stima e dell'errore di stima.

```

function plot_state(x_real, x_hat, t)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
figure('Name', 'Regolazione dall uscita del pendolo linearizzato')
;

subplot(1,2,1);
plot(t, x_real(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, x_real(:,3), 'r', 'LineWidth', 2);
title('Stati del sistema');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Stato');
legend('x_{c}', '\theta_p');
grid on;

subplot(1,2,2);

```

```

plot(t, x_real(:,3) - x_hat(:,3), 'k', 'LineWidth', 2);
title('Errore di stima angolo');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Errore [rad]');
grid on;
end

```

La funzione `plot_state` serve a mostrare i grafici degli andamenti dello stato della sua stima e dell'errore di stima nel caso di regolazione dall'uscita.

```

function plot_state_or(t, y_hist, y_des_hist, err_hist, w_hist,
w_hat_hist)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
figure('Name', 'Regolazione dall uscita');

subplot(1,3,1);
plot(t, y_hist(:,1), 'b', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot(t, y_des_hist(:,1), 'r--', 'LineWidth', 1.5);
title('Regolazione posizione carrello x_p');
legend('Reale', 'Riferimento');
grid on;

subplot(1,3,2);
plot(t, y_hist(:,2), 'b', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot(t, y_des_hist(:,2), 'r--', 'LineWidth', 1.5);
title('Regolazione angolo \theta_p = 0');
grid on;

subplot(1,3,3);
plot(t, err_hist(:,1), 'k', 'LineWidth', 1.5);
title('Errore di regolazione (posizione)');
xlabel('Tempo [s]');
grid on;

figure('Name', 'Stima esosistema');

```

```
plot(t, w_hist(:,1), 'b');
hold on;
plot(t, w_hat_hist(:,1), 'r--');
title('Stima stato w_1 (riferimento)');
legend('Vero', 'Stimato');
grid on;
end
```

3 Soluzione equazioni nonlineari

Soluzione equazioni nonlineari analitica e numerica con commenti su esistenza, unicità e completezza delle soluzioni.

3.1 Introduzione

A differenza dei sistemi lineari, che rappresentano un'astrazione spesso ideale, i sistemi non lineari descrivono in modo più accurato la maggior parte dei fenomeni del mondo reale. Tuttavia, questa maggiore aderenza alla realtà introduce notevoli complessità. Una delle differenze fondamentali risiede nel comportamento delle loro soluzioni. Mentre per i sistemi lineari l'esistenza, l'unicità e la stabilità globale sono spesso garantite, per i sistemi non lineari è cruciale analizzare nel dettaglio le condizioni di:

- **Esistenza:** esiste almeno una soluzione che parte da una data condizione iniziale?
- **Unicità:** quella soluzione è l'unica per il sistema?
- **Completezza:** la soluzione è tale per ogni istante di tempo $t \geq 0$?

Una volta verificate queste condizioni è possibile cercare la soluzione del sistema attraverso uno tra i seguenti due metodi:

- **Analitico:** derivazione manuale dell'equazione differenziale ordinaria. Si tratta di una soluzione esatta e continua.
- **Numerico:** soluzione basata sulla funzione di risoluzione di equazioni differenziali ordinarie `ode45` utilizzata in Octave e MATLAB, basata su un metodo esplicito di Runge-Kutta. Si tratta di un'approssimazione puntuale della soluzione.

3.2 Definizione del sistema

Per questa esercitazione ho scelto due sistemi non lineari semplici per poter svolgere i passaggi analitici:

$$\dot{x}_1 = x^2 \quad \text{e} \quad \dot{x}_2 = -x^3 \quad (19)$$

Dato un sistema non lineare autonomo del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (20)$$

le condizioni di esistenza, unicità e completezza possono essere verificate senza il calcolo diretto dell'equazione differenziale non lineare che è spesso complesso o impossibile. In particolare, si sfruttano i seguenti tre teoremi fondamentali per i sistemi non lineari.

3.3 Esistenza

Teorema di Caratheodory: assumendo che $f(t, x)$ sia continua rispetto ad $x(t)$ e continua a tratti rispetto a t , allora esiste una soluzione $x(t)$ al sistema 20. L'esistenza dipende dalla continuità della $f(x)$ ed è verificata per entrambe le funzioni non lineari che definiscono la dinamica dei due sistemi.

3.4 Unicità

Lemma di Lipschitz per l'unicità: Sia $f : [a, b] \times D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua su $D \forall t \in [a, b]$. Supponendo che $\frac{\partial f}{\partial x}$ esista e che sia continua su $[a, b] \times D$. Se, per un insieme convesso $W \subset D$, esiste una costante $L \geq 0$ tale che:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L \quad \forall (t, x) \in [a, b] \times W \quad (21)$$

allora la f è lipschitziana localmente. Questo implica l'unicità della soluzione in un intervallo limitato. Per comodità ho verificato una condizione più forte, la continua derivabilità:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -3x^2 \quad (22)$$

Entrambe le derivate sono continue dunque i sistemi sono localmente lipschitziani quindi, la soluzione è unica, almeno localmente. Non posso estendere globalmente l'unicità delle soluzioni perché questo richiederebbe la lipschitzianità globale delle due funzioni non lineari f_1 ed f_2 . Questa condizione non è verificata poiché:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2x = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow \infty} -3x^2 = -\infty \quad (23)$$

entrambe le funzioni hanno derivate illimitate quindi non sono globalmente lipschitziane.

3.5 Completezza

Teorema di Lipschitz per la completezza: sia $f(x, t)$ continua a tratti rispetto a t tale che soddisfa la condizione di Lipschitz in $x \forall t \geq t_0 \forall x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Sia $W \subset D$ un insieme compatto e $x_0 \in W$. Assumendo che qualsiasi soluzione a 20 appartiene a W . Allora, per tale sistema, esiste una soluzione unica definita $\forall t \geq t_0$. Occorre verificare, quindi, che la soluzione $x(t)$ rimanga in un insieme compatto. In questo caso, invece di calcolare la soluzione per valutarla si può fare una valutazione qualitativa del suo andamento. Nel caso del primo sistema, la dinamica dello stato è quadratica quindi sempre positiva, di conseguenza, la soluzione non è limitata per $t \rightarrow \infty$. Mi aspetto, quindi, che la soluzione assuma valori infiniti in tempo finito (*finite time escape*). Nel caso del secondo sistema, invece, per valori positivi di t la dinamica rimane negativa, quindi la soluzione risulta decrescente e tendente a 0. La condizione è soddisfatta, dunque il secondo sistema ammette una soluzione completa ($\forall t \geq 0$).

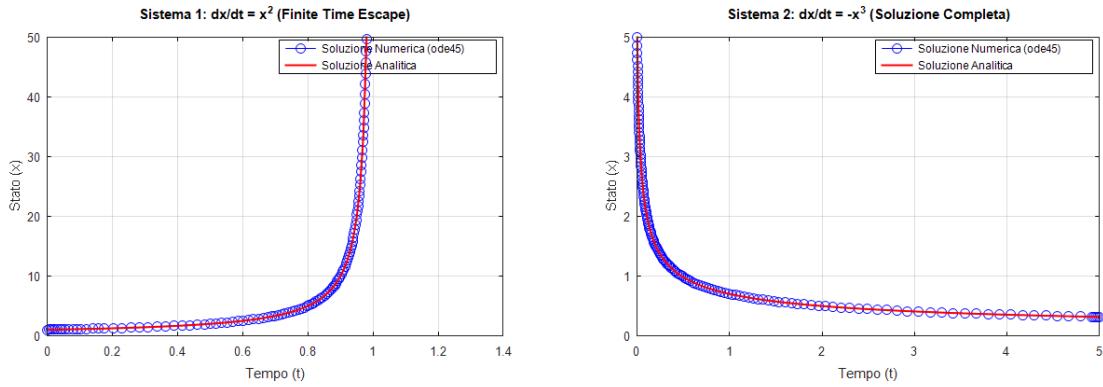


Figura 4: Soluzioni analitiche e numeriche del sistema 1 (sinistra) e del sistema 2 (destra)

3.6 Codice

Lo script `nonlinear_systems` definisce i due sistemi e invoca su ciascuno la funzione di soluzione analitica e quella di soluzione numerica.

```

clear all;
clc;
close all;

addpath('3')

%% SISTEMA 1: dx/dt = x^2
% Definisco il problema
f1 = @(t, x) x^2; % Funzione di stato
f1_analitica = @(t, x0) x0 ./ (1 - t.*x0); % Soluzione analitica
t_span1 = [0, 5]; % Intervallo di tempo desiderato
x0_1 = 1;           % Condizione iniziale

% Calcolo la soluzione numerica (ode45)
[t_num1, x_num1] = numeric_solution(f1, t_span1, x0_1);

% Calcolo la soluzione analitica (solo per il plotting, evitando l'
% asintoto)
t_plot_analitico1 = linspace(0, 0.99, 100);

```

```

[t_an1, x_an1] = analytical_solution(f1_analitica, t_plot_analitico1,
x0_1);

% Plotting
titolo1 = 'Sistema 1: dx/dt = x^2 (Finite Time Escape)';
plot_sol(1, titolo1, t_num1, x_num1, t_an1, x_an1);
ylim([0, 50]); % Limito l'asse y per vedere il comportamento

%% SISTEMA 2: dx/dt = -x^3
% Definisco il problema
f2 = @(t, x) -x^3; % Funzione di stato
f2_analitica = @(t, x0) x0 ./ sqrt(1 + 2.*t.*x0.^2); % Soluzione
analitica
t_span2 = [0, 5]; % Intervallo di tempo
x0_2 = 5; % Condizione iniziale

% Calcolo la soluzione numerica (ode45)
[t_num2, x_num2] = numeric_solution(f2, t_span2, x0_2);

% Calcolo l'analitica sugli stessi punti della numerica per un
confronto diretto
[t_an2, x_an2] = analytical_solution(f2_analitica, t_num2, x0_2);

% Plotting
titolo2 = 'Sistema 2: dx/dt = -x^3 (Soluzione Completa)';
plot_sol(2, titolo2, t_num2, x_num2, t_an2, x_an2);

La funzione numeric_solution utilizza ode45 per derivare  $x$ .

function [t_num, x_num] = numeric_solution(fun_handle, t_span, x0)

% Opzioni standard per il risolutore
options = odeset('RelTol', 1e-6, 'AbsTol', 1e-9);
disp('Avvio risolutore numerico ode45...');

try
    % ode45 gestisce gli errori di "finite time escape"
    [t_num, x_num] = ode45(fun_handle, t_span, x0, options);
end

```

```

    disp('Soluzione numerica calcolata.');

catch ME

    disp(['Errore durante ode45: ', ME.message]);
    disp('La simulazione potrebbe essersi interrotta.');
    t_num = [];
    x_num = [];

end

```

end

La funzione `analytical_solution` calcola i valori a partire dalla formulazione ottenuta con il calcolo analitico svolto a mano.

```

function [t_an, x_an] = analytical_solution(fun_analitica_handle,
    t_punti, x0)

    % Calcolo della soluzione analitica
    disp('Calcolo soluzione analitica...');

    t_an = t_punti;
    x_an = fun_analitica_handle(t_an, x0);
    disp('Soluzione analitica calcolata.');

end

```

La funzione `plot_sol` genera un grafico di confronto tra soluzione numerica e analitica.

```

function plot_solutions(fig_num, titolo, t_num, x_num, t_an, x_an)

graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici

    % Grafico di confronto
    figure(fig_num);
    plot(t_num, x_num, 'b-o', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 4); %
        Numerica
    hold on;
    plot(t_an, x_an, 'r-', 'LineWidth', 2); % Analitica
    title(titolo);
    xlabel('Tempo (t)');
    ylabel('Stato (x)');
    legend('Soluzione Numerica (ode45)', 'Soluzione Analitica');
    grid on;
    hold off;

```

end

4 Analisi diodo tunnel

Analisi degli equilibri circuito con diodo tunnel.

4.1 Introduzione

Il diodo tunnel è un componente elettronico in cui il semiconduttore viene pesantemente drogato per sfruttare l'effetto tunnel quantistico per operare a frequenze molto elevate, generando una caratteristica di resistenza negativa nella sua curva, ideale per oscillatori, amplificatori e circuiti a microonde ad alta velocità, nonostante le basse potenze, grazie alla sua rapidità di commutazione.

Per analizzare i punti di equilibrio occorre caratterizzare il componente attraverso un modello non lineare, trovare i valori che annullano la dinamica e caratterizzare la stabilità di ciascun attraverso lo jacobiano definendo se un punto di equilibrio è una sella, un nodo (stabile o instabile), un fuoco (stabile o instabile) o un centro.

4.2 Modellazione del dispositivo

Il modello più accreditato del diodo tunnel è definito dal sistema suggerito dal Politecnico di Milano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{\alpha}{C}x_2 - \frac{\beta}{C}x_2^3 \end{cases} \quad (24)$$

tali che $v_L = L\dot{x}_1$ è la tensione sull'induttore e $i_C = Cx_2$ la corrente sul condensatore.

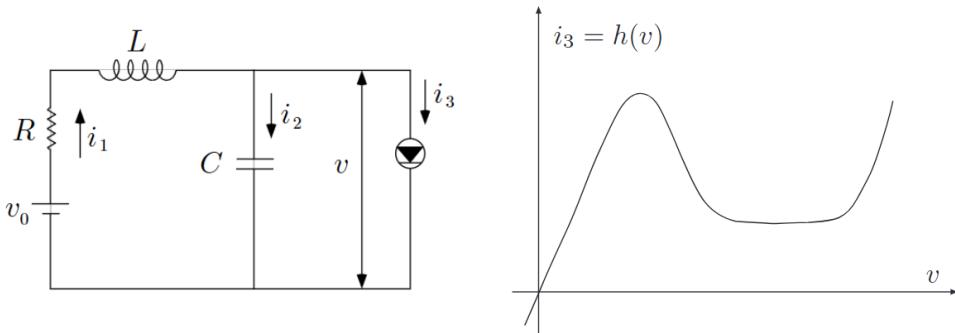


Figura 5: Circuito schematico del diodo tunnel (sinistra) e la sua curva caratteristica per la corrente che lo attraversa (destra).

4.3 Analisi locale dei sistemi non lineari

Il comportamento di un sistema non lineare intorno ad un punto di equilibrio è simile a quello di un sistema lineare. Per comprendere l'andamento locale del sistema non lineare, quindi, lo si linearizza e

se ne studia il comportamento attorno ai punti di equilibrio. Per fare ciò, ci si avvale dello sviluppo in serie di Taylor che, data l'evoluzione del sistema $x(t) = x_e + \delta(t)$, descrive l'andamento attorno ad x_e come segue:

$$f(x_e + \delta(t)) \approx f(x_e) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_e} \cdot \delta(t) \quad (25)$$

Per definizione $f(x_e) = 0$ mentre il termine restante non è altro che la matrice jacobiana $J(x_e)$ che contiene le derivate parziali della funzione $f(x)$ in x_e moltiplicata per $\delta(t)$. In questo modo ottengo un sistema lineare di cui posso studiare gli autovalori e, di conseguenza, il comportamento:

$$\dot{x}(t) = J(x_e)x(t) \quad (26)$$

Per cercare i punti di equilibrio assegno dei valori arbitrari alle costanti ($R = 1$, $B = 1$, $\alpha = 3$ e $\beta = 1$), pongo \dot{x}_1 e \dot{x}_2 a 0 e risolvo il sistema di due equazioni a due incognite:

$$\begin{cases} -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 = 0 \\ -\frac{1}{C}x_1 + \frac{\alpha}{C}x_2 - \frac{\beta}{C}x_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Ne ricavo tre soluzioni che si traducono in punti di equilibrio $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $P_3 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

4.4 Classificazione degli equilibri

Questo sistema approssima il comportamento del sistema non lineare originale in un intorno sufficientemente piccolo del punto di equilibrio x_e . Lo studio di questo sistema lineare è si basa sulla valutazione degli autovalori (λ_i) della matrice jacobiana $J(x_e)$:

$$J(x_e) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \Big|_{x=x_e} \quad (28)$$

Nella valutazione della natura (reale o immaginaria) e del segno dei suoi autovalori si distinguono tre casi fondamentali:

- **Autovalori reali:** allora il sistema può essere scritto come:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ \dot{z}_2(t) = \lambda_2 z_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1(t) = z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (29)$$

In base al valore degli autovalori si determina la natura del punto di equilibrio:

- Se tutti gli autovalori sono negativi l'equilibrio è un *nodo stabile*.

- Se tutti gli autovalori sono positivi l'equilibrio è un *nodo instabile*.
- Se gli autovalori hanno segni discordi l'equilibrio è un punto di *sella*.

- **Autovalori complessi coniugati:** allora il sistema può essere scritto come:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \alpha z_1(t) - \beta z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = \beta z_1(t) + \alpha z_2(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \theta + \beta t \end{cases} \quad (30)$$

dove $r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ e $\theta = \arcsin(z_2/z_1)$. In base al valore degli autovalori si determina la natura del punto di equilibrio:

- Se il parametro α è negativo lo stato del sistema converge a 0, l'equilibrio è un *fuoco stabile*.
- Se il parametro α è positivo lo stato del sistema diverge, l'equilibrio è un *fuoco instabile*.
- Se il parametro α è nullo lo stato oscilla intorno a 0, l'equilibrio è un *centro*.

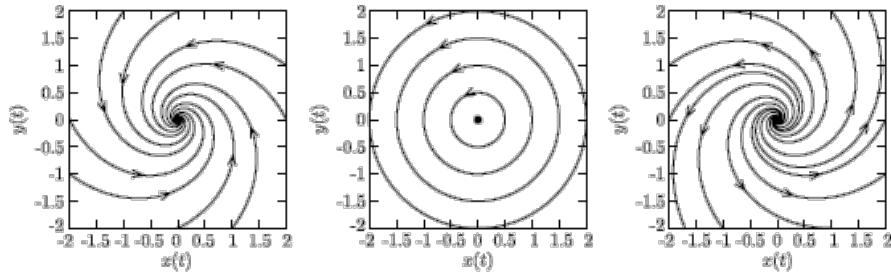


Figura 6: Visualizzazione planare di un fuoco stabile, un centro (centro) e un fuoco instabile (destra)

- **Autovalori nulli:** Se c'è almeno un autovalore nullo l'origine non è l'unico punto di equilibrio, ci sono infatti infiniti punti di equilibrio dato che $Ax = 0$ anche per $x \neq 0$.

Procedo con la **classificazione dei punti di equilibrio** tramite lo studio degli autovalori trovati.

Grazie al calcolo simbolico trovo lo jacobiano e caratterizzo come segue i punti di equilibrio:

- Per il punto di equilibrio $(0, 0)$ gli autovalori sono $\lambda_1 = 2,73$ e $\lambda_2 = -0,73$. Il primo è positivo e, dunque, instabile mentre il secondo è negativo quindi stabile. Questo denota che l'origine è un punto di sella.
- Per il punto di equilibrio $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Essendo reali, negativi e coincidenti, si tratta di un nodo stabile (localmente asintoticamente stabile).
- Anche per il punto di equilibrio $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ quindi ha le stesse proprietà del precedente.

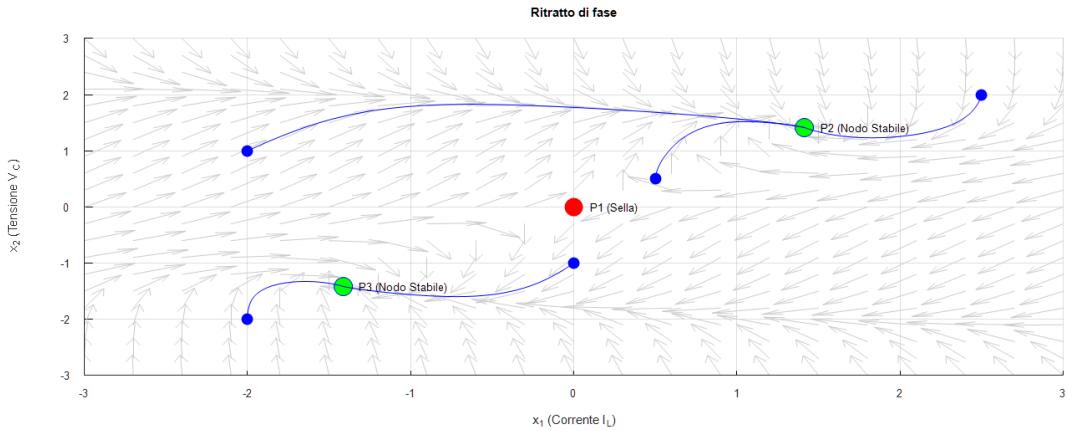


Figura 7: Ritratto di fase dei punti di equilibrio e traiettorie d'esempio

4.5 Codice

Lo script principale `tunnel_diode.m` del progetto definisce i parametri del circuito (R, L, C, α, β) e le equazioni differenziali non lineari del sistema. Lo script calcola analiticamente i tre punti di equilibrio, determina la matrice jacobiana simbolica e coordina l'analisi richiamando le altre due funzioni per lo studio della stabilità e la visualizzazione grafica.

```

clc;
clear all;
close all;

addpath('4')
pkg load control
pkg load symbolic

% Definisco le variabili simboliche per l'analisi
syms x1 x2

% Costanti del circuito
R = 1;
L = 1;
C = 1;
alpha = 3;
beta = 1;

```

```

% Definisco le equazioni di stato (il sistema non lineare f(x))
f1 = -R/L * x1 + 1/L * x2;
f2 = -1/C * x1 + alpha/C * x2 - beta/C * x2^3;
f = [f1; f2];

disp('Sistema non lineare dx/dt = f(x):');
disp(['dx1/dt = ', char(f1)]);
disp(['dx2/dt = ', char(f2)]);

% Trovo i punti (x1, x2) tali che f(x) = 0 (analiticamente)
P1 = [0; 0];
P2 = [sqrt(2); sqrt(2)];
P3 = [-sqrt(2); -sqrt(2)];

% Convertiamo in double per l'analisi numerica
P1_num = double(P1);
P2_num = double(P2);
P3_num = double(P3);

disp('\nTrovati 3 punti di equilibrio:');
disp('P1:');
disp(P1_num');
disp('P2:');
disp(P2_num');
disp('P3:');
disp(P3_num');

% Calcoliamo la matrice jacobiana
disp('')
disp('Calcolo matrice jacobiana');

J = jacobian(f, [x1, x2]);

disp('J(x1, x2) =');

```

```

disp(J);

% Analizzo e classifico i punti di equilibrio
disp('Analisi di stabilit per ciascun equilibrio');

analyze_equilibrium_point(J, x1, x2, P1_num)
analyze_equilibrium_point(J, x1, x2, P2_num)
analyze_equilibrium_point(J, x1, x2, P3_num)

% Creo una funzione "handle" per ode45
fun_diodo = @(t, x) [
    -R/L * x(1) + 1/L * x(2);
    -1/C * x(1) + alpha/C * x(2) - beta/C * x(2)^3
];
disp('Avvio simulazione e plot del ritratto di fase');

plot_vector_field(R, L, C, alpha, beta, P1_num, P2_num, P3_num,
    fun_diodo)

```

La funzione `analyze_equilibrium_point.m` prende in ingresso lo jacobiano simbolico e le coordinate di un punto di equilibrio specifico. Valuta numericamente la matrice nel punto, ne calcola gli autovalori e stampa la classificazione della stabilità basandosi sulla parte reale degli autovalori.

```

function analyze_equilibrium_point(J, x1, x2, P_num)
J_P = double(subs(J, [x1, x2], P_num'));
[V, D] = eig(J_P);
poli_P = diag(D);

disp('Equilibrio P = :' + P_num);
disp(' Jacobiano J(P2):');
disp(J_P);
disp(' Autovalori (Poli):');
disp(poli_P');

% Classificazione
if all(real(poli_P) < 0)
    disp(' -> STABILE (Nodo/Fuoco stabile)');

```

```

elseif all(real(poli_P) > 0)
    disp(' -> INSTABILE (Nodo/Fuoco instabile)');
elseif any(real(poli_P) > 0) && any(real(poli_P) < 0)
    disp(' -> INSTABILE (Punto di Sella)');
else
    disp(' -> Caso critico');
end
disp('');
end

```

La funzione `plot_vector_field.m` è dedicata alla visualizzazione grafica. Genera il ritratto di fase del sistema: disegna il campo vettoriale, evidenzia i punti di equilibrio con colori diversi e simula numericamente alcune traiettorie rappresentative partendo da condizioni iniziali diverse per mostrare l'evoluzione temporale del sistema.

```

function plot_vector_field(R, L, C, alpha, beta, P1_num, P2_num,
P3_num, fun_diodo)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici

% Creiamo la griglia per il campo vettoriale (quiver plot)
[X1_grid, X2_grid] = meshgrid(-3:0.3:3, -3:0.3:3);
u = -R/L * X1_grid + 1/L * X2_grid;
v = -1/C * X1_grid + alpha/C * X2_grid - beta/C * X2_grid.^3;

% Normalizziamo le frecce per una migliore visualizzazione (
% evitiamo divisione per zero)
denom = sqrt(u.^2 + v.^2) + eps;
u_norm = u ./ denom;
v_norm = v ./ denom;

figure(1);
hold on;

% Plot del campo vettoriale
quiver(X1_grid, X2_grid, u_norm, v_norm, 'Color', [0.8 0.8 0.8]);

% Plot dei punti di equilibrio

```

```

plot(P1_num(1), P1_num(2), 'ro', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'r');
text(P1_num(1)+0.1, P1_num(2), 'P1 (Sella)', 'Color', 'k');
plot(P2_num(1), P2_num(2), 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
text(P2_num(1)+0.1, P2_num(2), 'P2 (Nodo Stabile)', 'Color', 'k');
plot(P3_num(1), P3_num(2), 'bo', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
text(P3_num(1)+0.1, P3_num(2), 'P3 (Nodo Instabile)', 'Color', 'k');

% 3. Plot di alcune traiettorie
disp('Calcolo traiettorie di esempio');
t_span = [0 20];

% Condizioni iniziali di esempio
condizioni_iniziali =
    0.5, 0.5;
    0.0, -1.0;
    2.5, 2.0;
    -2.0, 1.0;
    -2.0, -2.0
];

for i = 1:size(condizioni_iniziali, 1)
    [t, x_sim] = ode45(fun_diodo, t_span, condizioni_iniziali(i,:));
    plot(x_sim(:, 1), x_sim(:, 2), 'b-', 'LineWidth', 1.5);

    % Plot del punto di partenza
    plot(x_sim(1,1), x_sim(1,2), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b');
end

% Impostazioni finali del grafico
title('Ritratto di fase');
xlabel('x_1 (Corrente I_L)');

```

```
ylabel('x_2 (Tensione V_C)');
axis([-3 3 -3 3]);
grid on;
hold off;
end
```

5 Massa-molla-smorzatore

Analisi sistemi massa-molla-smorzatore. Casi lineare e non-lineari seguenti:

$$M\ddot{x} = -k_1x \pm k_2x^3 - \beta_1\dot{x} - \beta_2\dot{x}^3$$

$$M\ddot{x} = -k_1x + k_2x^3 - \beta_1\dot{x} + \beta_2\dot{x}^3$$

5.1 Introduzione

Il sistema massa-molla-smorzatore è un modello fisico fondamentale utilizzato per descrivere e analizzare il comportamento dinamico di sistemi meccanici soggetti a oscillazioni, vibrazioni e forze esterne. È alla base di molte applicazioni ingegneristiche, dall'analisi sismica delle strutture agli ammortizzatori dei veicoli.

5.2 Definizione del modello

Il sistema *massa-molla-smorzatore* può essere modellato come segue:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-k_1x_1 \pm k_2x_1^3 - \beta_1x_2 - \beta_2x_2^3) \end{cases} \quad (31)$$

dove x_1 rappresenta la posizione del carrello mentre $x_2 = \dot{x}_1$ la sua velocità. Definisco di tre casi:

- Approssimazione lineare.
- Versione non lineare con molla indurente ($-k_2x_1^3$).
- Versione non lineare con molla ammorbidente ($+k_2x_1^3$).
- Versione non lineare con contributo ($\beta_2\dot{x}_1^3$) positivo.

Assegno i valori ai parametri fisici del sistema:

- Massa del carrello $M = 1$.
- Costante elastica della molla lineare $k_1 = 1$.
- Costante elastica della molla non lineare $k_2 = 1$.
- Smorzamento passivo $\beta_1 = 0.5$.
- Smorzamento attivo $\beta_2 = 1$.

5.3 Analisi dei quattro casi

5.3.1 Caso lineare

Il primo caso è quello in cui adotto un modello approssimato con dinamica lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k_1}{M}x_1 - \frac{\beta_1}{M}x_2 \end{cases} \quad (32)$$

L'unico punto x_e che annulla la derivata $\dot{x} = f(x_e) = 0$ è $P_1 = (0, 0)$, l'origine. Lo jacobiano calcolato nel punto è il seguente:

$$J(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Gli autovalori calcolati nel codice sono $\lambda_{1,2} = -0,25 \pm j0.968$, hanno parte reale strettamente negativa quindi l'equilibrio x_e è localmente asintoticamente stabile. Trattandosi di un sistema lineare la stabilità dell'equilibrio è anche globale. Data la parte immaginaria non nulla, lo classifico come un fuoco stabile.

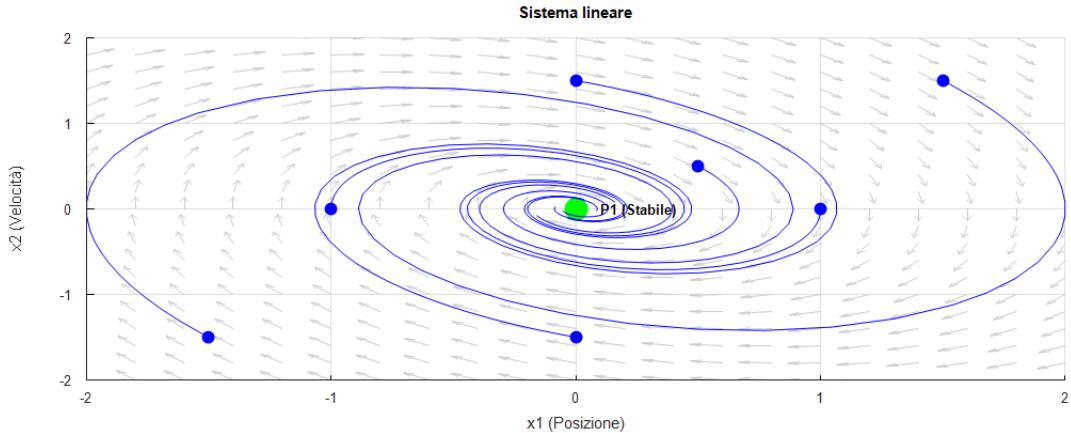


Figura 8: Traiettorie nel diagramma di fase nel caso lineare

5.3.2 Primo caso non lineare

Il secondo caso introduce una non-linearità sulla molla del tipo $-k_2x^3$ che rappresenta una molla indurente (la forza della molla aumenta all'aumentare dello spostamento). La forza è $F = -k_1x_1 - k_2x_1^3 - \beta_1x_2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-k_1x_1 - k_2x_1^3 - \beta_1x_2) \end{cases} \quad (34)$$

I punti di equilibrio si trovano ponendo $\dot{x}_1 = 0 \implies x_2 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0 \implies -k_1 x_1 - k_2 x_1^3 = 0$. Questa equazione, $x_1(k_1 + k_2 x_1^2) = 0$, assumendo $k_1, k_2 > 0$, ha tre soluzioni di cui solo una reale $x_1 = 0$. Anche in questo caso, l'unico punto di equilibrio è $x_e = (0, 0)$. La matrice jacobiana $J(x_e)$ è:

$$J(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1 - 3k_2 x_1^2}{M} & -\frac{\beta_1}{M} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Calcolandola nell'equilibrio $x_e = (0, 0)$, otteniamo:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Questa è la stessa matrice del caso lineare. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = -0.25 \pm j0.968$ di conseguenza, l'origine è un fuoco stabile. In questo caso, la non-linearietà non ha alterato né il numero né la stabilità locale dei punti di equilibrio.

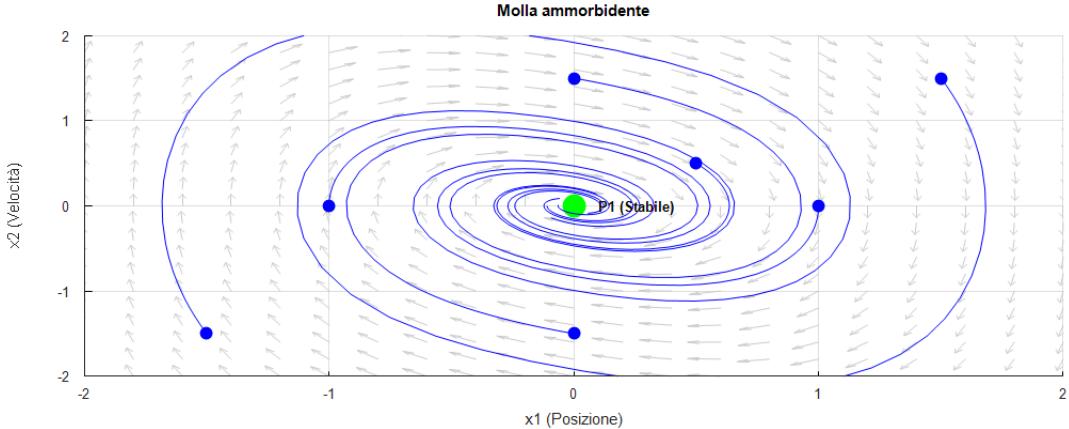


Figura 9: Traiettorie nel diagramma di fase nel caso con molla ammorbidente

5.3.3 Secondo caso non lineare

Il terzo caso introduce una non-linearietà del tipo $+k_2 x_1^3$ che rappresenta il caso di una molla ammorbidente (la forza della molla si riduce all'aumentare dello spostamento). La forza è $F = -k_1 x_1 + k_2 x_1^3 - \beta_1 x_2$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-k_1 x_1 + k_2 x_1^3 - \beta_1 x_2) \end{cases} \quad (37)$$

I punti di equilibrio richiedono $x_2 = 0$ e $-k_1 x_1 + k_2 x_1^3 = 0$. Questa equazione, $x_1(k_2 x_1^2 - k_1) = 0$, ha tre soluzioni reali:

$$x_1 = 0 \vee x_1 = \sqrt{k_1/k_2} = 1 \vee x_1 = -\sqrt{k_1/k_2} = -1 \quad (38)$$

Ci sono quindi tre punti di equilibrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (-1, 0)$. La matrice Jacobiana $J(x_e)$ per questo sistema è:

$$J(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1+3k_2x_1^2}{M} & -\frac{\beta_1}{M} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Devo analizzare lo jacobiano in ciascun punto:

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = -0.25 \pm j0.968$. Come nei casi precedenti, l'origine è localmente asintoticamente stabile, un fuoco stabile. Poiché x_1 appare al quadrato nello Jacobiano, l'analisi è identica per P_2 e P_3 .

$$J(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1+3(1)(\pm 1)^2}{1} & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 \approx 1.19$ e $\lambda_2 \approx -1.69$. Avendo un autovalore con parte reale positiva e uno con parte reale negativa, entrambi P_2 e P_3 sono equilibri instabili, nello specifico punti di sella.

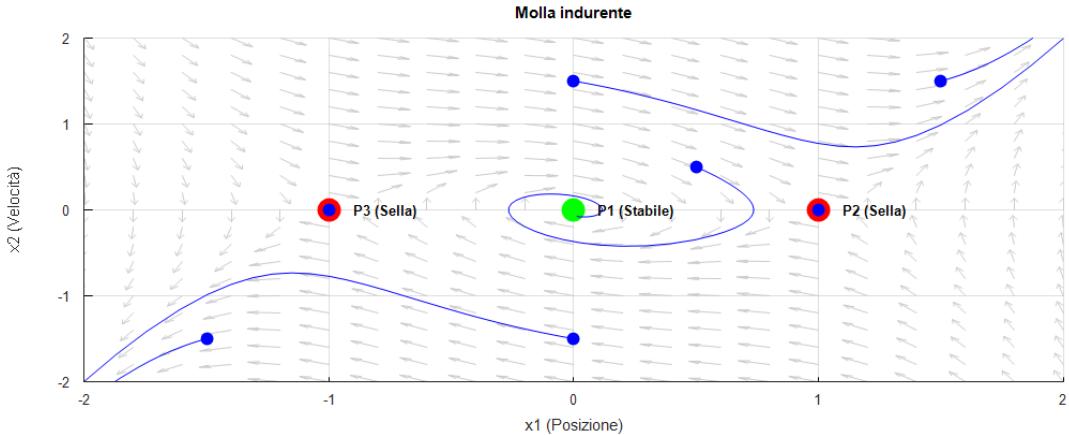


Figura 10: Traiettorie nel diagramma di fase nel caso con molla indurente

5.3.4 Terzo caso non lineare

Il quarto caso differisce dal terzo per il segno del quarto contributo $\beta_2\dot{x}^3$ che corrisponde ad uno smorzamento negativo attivo.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M}(-k_1x_1 + k_2x_1^3 - \beta_1x_2 + \beta_2x_2^3) \end{cases} \quad (42)$$

Imponendo $\dot{x} = 0$, ottengo $x_2 = 0$. Sostituendo nella seconda equazione, tutti i termini dipendenti dalla velocità si annullano (sia β_1 che β_2). L'equazione per la posizione resta $-k_1x_1 + k_2x_1^3 = 0$.

Di conseguenza, i punti di equilibrio sono gli stessi del caso precedente: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (-1, 0)$. Lo jacobiano è:

$$J(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1+3k_2x_1^2}{M} & \frac{-\beta_1+3\beta_2x_2^2}{M} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Ovviamente le matrici $J(P_i)$ sono identiche a quelle del secondo caso non lineare perché x_2 equivale a zero per tutti e tre i punti e dunque viene meno il contributo di β_2 . Quindi P_1 rimane un fuoco stabile e $P_{2,3}$ rimangono punti di sella. La non-linearità sulla velocità non altera la stabilità locale degli equilibri statici. Sebbene localmente invariato, il termine $+\beta_2x_2^3$ cambia drasticamente il comportamento lontano dall'equilibrio. A differenza dell'attrito viscoso che dissipava energia, questo termine diventa significativo quando la velocità è elevata, accelerando la divergenza delle traiettorie instabili.

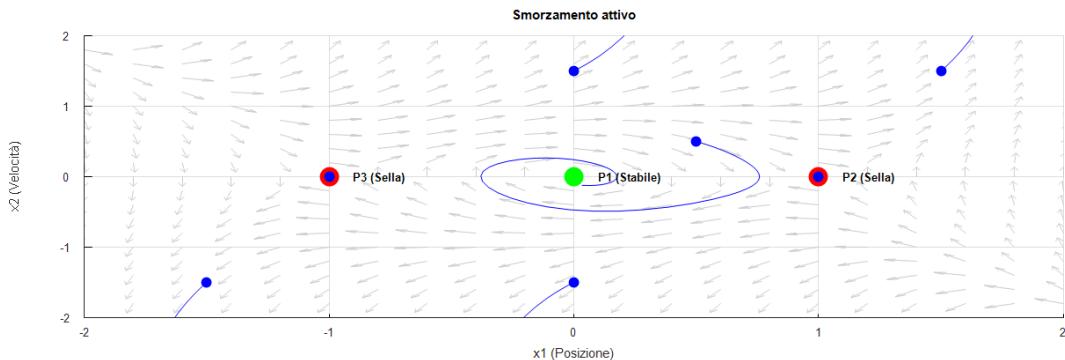


Figura 11: Traiettorie nel diagramma di fase nel caso con smorzamento attivo

5.4 Codice

Lo script principale `mass_spring_damper.m` definisce i parametri fisici del sistema (massa M , rigidezza k_1 , smorzamenti β_1 e β_2) e un parametro non lineare (k_2). Imposta le equazioni differenziali e le matrici jacobiane per quattro casi diversi: lineare, molla "ammorbidente" ($k_2 > 0$), molla "indurente" ($k_2 < 0$) e smorzamento attivo ($\beta_2x_2^3$). Infine, lancia l'analisi di stabilità e il plot del ritratto di fase per ciascun caso.

```

clc;
clear all;
close all;

pkg load control
pkg load symbolic

addpath('5')

```

```

% Parametri comuni
M = 1.0; % Massa
k1 = 1.0; % Termine della molla lineare
k2 = 1.0; % Termine della molla non lineare
beta1 = 0.5; % Smorzamento passivo
beta2 = 1 % Smorzamento attivo

% Caso 1: lineare
f_linear = @(t, x) [
    x(2);
    (1/M) * (-k1*x(1) - beta1*x(2))
];
J_linear = @(x) [0, 1; -k1/M, -beta1/M];

% Caso 2: non lineare (molla "ammorbidente")
f_hard = @(t, x) [
    x(2);
    (1/M) * (-k1*x(1) + k2*x(1)^3 - beta1*x(2))
];
J_hard = @(x) [0, 1; (-k1 + 3*k2*x(1)^2)/M, -beta1/M];

% Caso 3: non lineare (molla "indurente")
f_soft = @(t, x) [
    x(2);
    (1/M) * (-k1*x(1) - k2*x(1)^3 - beta1*x(2))
];
J_soft = @(x) [0, 1; (-k1 - 3*k2*x(1)^2)/M, -beta1/M];

% Caso 4: non lineare (smorzamento attivo)
f_act_damp = @(t, x) [
    x(2);
    (1/M) * (-k1*x(1) + k2*x(1)^3 - beta1*x(2) + beta2*x(2)^3)
];

```

```

J_act_damp = @(x) [0, 1; (-k1 + 3*k2*x(1)^2)/M, (-beta1 + 3*beta2*x(2)
^2)/M];

% Condizioni iniziali
cond_iniziali = [
    1, 0;
    -1, 0;
    0, 1.5;
    0, -1.5;
    1.5, 1.5;
    -1.5, -1.5;
    0.5, 0.5
];

% Analisi caso 1
P_linear = [0, 0];
analyze_system(1, 'Sistema lineare', J_linear, P_linear);
plot_phase_portrait(1, f_linear, cond_iniziali);

% Analisi caso 2
P_soft = [0, 0];
analyze_system(2, 'Molla ammorbidente', J_soft, P_soft);
plot_phase_portrait(2, f_soft, cond_iniziali);

% Analisi caso 3
P_hard = [
    0, 0;
    sqrt(k1/k2), 0;
    -sqrt(k1/k2), 0
];
analyze_system(3, 'Molla indurente', J_hard, P_hard);
plot_phase_portrait(3, f_hard, cond_iniziali);

% Analisi caso 4
P_act_damp = [

```

```

0, 0;
sqrt(k1/k2), 0;
-sqrt(k1/k2), 0
];
analyze_system(4, 'Smorzamento attivo', J_act_damp, P_act_damp);
plot_phase_portrait(4, f_act_damp, cond_iniziali);

```

La funzione `analyze_system.m` esegue l'analisi di stabilità locale dei punti di equilibrio. Prende in ingresso la funzione che calcola lo jacobiano, i punti di equilibrio da analizzare e il numero della figura su cui disegnare. Per ogni punto, calcola gli autovalori dello jacobiano linearizzato e determina se il punto è stabile (nodo/fuoco stabile) o instabile (punto di sella o altro), stampando i risultati a video e marcando i punti sul grafico con colori diversi (verde per stabile, rosso per instabile).

```

function analyze_system(fig_num, title_str, J_func, P_equilibri)
figure(fig_num);
title(title_str);
hold on;
disp(' ');
disp(['Analisi: ', title_str]);

for i = 1:size(P_equilibri, 1)
    P_num = P_equilibri(i, :);
    J_P = J_func(P_num);
    poli_P = eig(J_P);

    disp(['Equilibrio P', num2str(i), ' = (', num2str(P_num(1)), ', '
        ', num2str(P_num(2)), ')']);
    disp(' Jacobiano J(P):');
    disp(J_P);
    disp(' Autovalori:');
    disp(poli_P);

    % Classificazione
    if all(real(poli_P) < 0)
        disp(' -> STABILE (Nodo/Fuoco stabile)');
        plot(P_num(1), P_num(2), 'go', 'MarkerSize', 10, 'MarkerFaceColor', 'g');
    end
end

```

```

    text(P_num(1)+0.1, P_num(2), ['P', num2str(i), ' (Stabile)
    '], 'Color', 'k', 'FontWeight', 'bold');

elseif any(real(poli_P) > 0) && any(real(poli_P) < 0)
    disp(' -> INSTABILE (Punto di sella)');
    plot(P_num(1), P_num(2), 'ro', 'MarkerSize', 10, '
        MarkerFaceColor', 'r');

    text(P_num(1)+0.1, P_num(2), ['P', num2str(i), ' (Sella)'
    '], 'Color', 'k', 'FontWeight', 'bold');

else
    disp(' -> INSTABILE (altri casi)');
    plot(P_num(1), P_num(2), 'rx', 'MarkerSize', 10, '
        MarkerFaceColor', 'r');

    text(P_num(1)+0.1, P_num(2), ['P', num2str(i), ' (
Instabile)'), 'Color', 'k', 'FontWeight', 'bold');

end
end

```

La funzione `plot_phase_portrait.m` si occupa della visualizzazione grafica delle dinamiche del sistema (ritratto di fase). Genera una griglia di punti nello spazio delle fasi (posizione vs velocità) e calcola il vettore derivata in ogni punto per disegnare il campo vettoriale (le frecce grigie). Successivamente, simula numericamente l'evoluzione temporale del sistema partendo da diverse condizioni iniziali predefinite usando `ode45` e sovrappone le traiettorie risultanti (linee blu) al campo vettoriale.

```

function plot_phase_portrait(fig_num, f_handle, condizioni_iniziali)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
figure(fig_num);

% Creo la griglia per il campo vettoriale
[X1_grid, X2_grid] = meshgrid(-2:0.2:2, -2:0.2:2);
u = zeros(size(X1_grid));
v = zeros(size(X2_grid));

for i = 1:numel(X1_grid)
    dxdt = f_handle(0, [X1_grid(i); X2_grid(i)]);
    u(i) = dxdt(1);
    v(i) = dxdt(2);

```

```

end

% Normalizzo le frecce per una migliore visualizzazione
norme = sqrt(u.^2 + v.^2);
norme(norme == 0) = 1;
quiver(X1_grid, X2_grid, u./norme, v./norme, 'AutoScaleFactor',
        0.5, 'Color', [0.8 0.8 0.8]);

% Simulo e grafico le traiettorie
t_span = [0 10];
for i = 1:size(condizioni_iniziali, 1)
    [t, x_sim] = ode45(f_handle, t_span, condizioni_iniziali(i,:))
    ;
    plot(x_sim(:, 1), x_sim(:, 2), 'b-', 'LineWidth', 1.5);
    plot(x_sim(1,1), x_sim(1,2), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b', 'MarkerSize', 5);
end

xlabel('x1 (Posizione)');
ylabel('x2 (Velocit )');
axis([-2 2 -2 2]);
grid on;
hold off;
end

```

6 Controllo adattativo

Controllo adattativo sistema scalare.

$$\dot{x} = ax + u$$

Stabilizzazione ed inseguimento di traiettoria. Analisi e simulazioni.

6.1 Introduzione

L'esercizio richiede di progettare un controllore adattativo che raggiunga due obiettivi:

- **Stabilizzazione:** portare lo stato $x(t)$ a convergere a zero a partire da una condizione arbitraria $x(0)$.
- **Inseguimento:** far sì che lo stato $x(t)$ segua una traiettoria desiderata $x_d(t)$ minimizzando l'errore $e(t)$ di inseguimento nel tempo.

tenendo conto del parametro a sconosciuto.

6.2 Progetto del controllore con parametro noto

Se il parametro a fosse noto, potrei progettare direttamente il controllore, definendo la dinamica dell'errore di inseguimento:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d = (ax + u) - \dot{x}_d \quad (44)$$

L'obiettivo è imporre una dinamica dell'errore asintoticamente stabile. Una scelta classica è ricondurlo ad una dinamica lineare del primo ordine:

$$\dot{e} = -Ke \quad (\text{con } K > 0) \quad (45)$$

In questo scenario ideale, l'errore decadrebbe esponenzialmente a zero con una costante di tempo $\tau = 1/K$. Se conoscessi il valore esatto di a , potrei calcolare un ingresso di controllo u^* che cancella la dinamica naturale del sistema e impone quella desiderata. Uguagliando la dinamica reale a quella desiderata:

$$ax + u^* - \dot{x}_d = -Ke \quad (46)$$

da cui ricavo, risolvendo per u^* :

$$u^* = \underbrace{-ax}_{\text{cancellazione}} + \underbrace{\dot{x}_d}_{\text{feedforward}} - \underbrace{Ke}_{\text{feedback stabilizzante}} \quad (47)$$

6.3 Legge di controllo adattativa

Nel caso in cui il parametro sia ignoto occorre adottare una sua stima tempo-variante $\hat{a}(t)$, che verrà aggiornata in tempo reale da una legge di adattamento. La legge di controllo diventa:

$$u(t) = -\hat{a}(t)x(t) + \dot{x}_d(t) - \lambda e(t) \quad (48)$$

Riscrivo anche la dinamica dell'errore con la nuova formulazione del controllo $u(t)$:

$$\dot{e} = ax + (-\hat{a}x + \dot{x}_d - \lambda e) - \dot{x}_d = \dot{e} = (a - \hat{a}(t))x - \lambda e = \dot{e}(t) = \tilde{a}(t)x(t) - \lambda e(t) \quad (49)$$

dove $\tilde{a}(t)$ è l'errore di stima di a . Il mio obiettivo è che il sistema che modella l'errore abbia uno stato che converge asintoticamente a 0, voglio, cioè, che sia un sistema asintoticamente stabile.

6.3.1 Funzione di Lyapunov

Per assicurarmi di ciò, posso sfruttare il **secondo criterio di Lyapunov** e costruire una funzione candidata $V(e, \tilde{a})$ che rappresenti l'energia dell'errore del sistema. Una scelta classica è la forma quadratica definita positiva che segue:

$$V(e, \tilde{a}) = e^2 + \frac{1}{\gamma} \tilde{a}^2 \quad (50)$$

dove $\gamma > 0$ è un parametro di progetto, detto *guadagno di adattamento*, che determina quanto velocemente reagisce l'algoritmo di stima agli errori. Calcolo la derivata di V rispetto al tempo (\dot{V}) per analizzare la stabilità:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial V}{\partial \tilde{a}} \dot{\tilde{a}} = 2e\dot{e} + \frac{2}{\gamma} \tilde{a}\dot{\tilde{a}} = 2e(\tilde{a}x - \lambda e) - \frac{2}{\gamma} \tilde{a}\dot{\tilde{a}} = -2\lambda e^2 + 2e\tilde{a}x - \frac{2}{\gamma} \tilde{a}\dot{\tilde{a}} \quad (51)$$

Mi interessa raccogliere il termine da annullare che moltiplica \tilde{a} :

$$\dot{V} = -2\lambda e^2 + 2\tilde{a} \left(ex - \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{a}} \right) \quad (52)$$

in modo da poter ridurre la derivata \dot{V} al solo termine $-2\lambda e^2$ sempre negativo o nullo. Per farlo impongo:

$$ex - \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{a}} = 0 \quad (53)$$

6.3.2 Legge di adattamento

Risolvendo per $\dot{\tilde{a}}$, otteniamo la **legge di adattamento**:

$$\dot{\tilde{a}}(t) = \gamma x(t)e(t) \quad (54)$$

A queste condizioni ottengo che $\dot{V} = -2\lambda e^2 \leq 0 \ \forall t$ quindi:

- $V(t)$ è limitata quindi sia l'errore di inseguimento che $e(t)$ che quello di stima $\tilde{a}(t)$ lo sono.
- Applicando il Lemma di Barbalat, dato che $\dot{e}(t)$ è limitata (assumendo segnali limitati) posso affermare che $e(t) \rightarrow 0$ asintoticamente.

6.3.3 Convergenza del parametro

È importante notare che la stabilità asintotica dell'errore di inseguimento ($e \rightarrow 0$) non garantisce la convergenza del parametro stimato al valore vero ($\tilde{a} \rightarrow 0$). La convergenza della stima $\hat{a} \rightarrow a$ avviene solo se il segnale di riferimento soddisfa la condizione di **Eccitazione Persistente (PE)**:

- Nel caso di **stabilizzazione** ($x_d = 0$), il segnale decade a zero rapidamente. Quando $x \rightarrow 0$, la legge di aggiornamento $\dot{\hat{a}} = \gamma xe$ si annulla, e la stima si ferma a un valore costante errato. Questo non è un problema per l'obiettivo di controllo (l'errore e va comunque a zero), ma la stima non è accurata.
- Nel caso di **inseguimento** ($x_d = \sin(t)$), il segnale varia continuamente, soddisfacendo la condizione PE. Questo "eccita" costantemente l'algoritmo di adattamento, portando la stima \hat{a} a convergere asintoticamente al valore vero a .

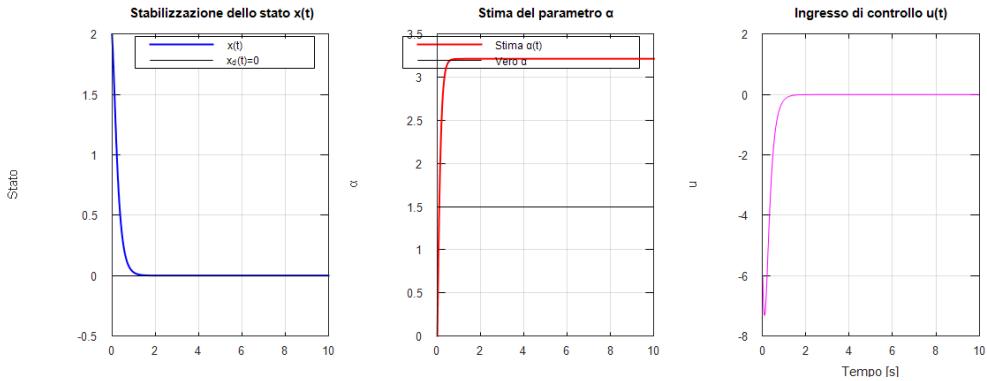


Figura 12: Stabilizzazione

Come si apprezza dalla Figura 12 la stima converge ad un valore inesatto come ci si aspettava.

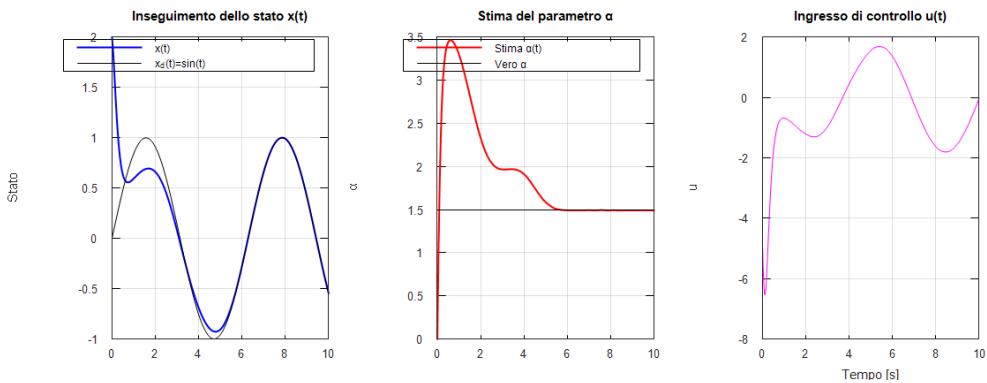


Figura 13: Inseguimento del riferimento

6.4 Codice

Lo script principale `adaptive_control.m` definisce i parametri del sistema ("vero" α e stima iniziale $\hat{\alpha}$), i parametri del controllore (λ e γ) e le condizioni di simulazione. Lo script esegue due simulazioni distinte usando `ode45`: una per la stabilizzazione a zero ($x_d = 0$) e una per l'inseguimento di una sinusoide ($x_d = \sin(t)$). Infine, ricostruisce i segnali di controllo e chiama la funzione di plotting.

```

clear all;
close all;
clc;

addpath('6')

% Parametri del sistema
global a_true lambda gamma

% Valore reale del parametro
a_true = 1.5;

% Parametri di progetto del controllore
lambda = 3.0;           % Velocit di convergenza dell'errore
gamma  = 5.0;            % Guadagno di adattamento

% Parametri di simulazione
T_sim = 10;
dt = 0.01;

```

```

t_span = 0:dt:T_sim;

% Condizioni iniziali
x0 = 2; % Stato iniziale del sistema
a_hat0 = 0; % Stima iniziale del parametro 'a'
initial_state = [x0; a_hat0];

% Stabilizzazione
disp('Avvio simulazione di stabilizzazione');
type_ref = 1; % Stabilizzazione
[t1, y1] = ode45(@(t,y) system_dynamics(t, y, type_ref), t_span,
initial_state);

% Inseguimento di traiettoria
disp('Avvio simulazione di inseguimento');
type_ref = 2; % Inseguimento sinusoide
[t2, y2] = ode45(@(t,y) system_dynamics(t, y, type_ref), t_span,
initial_state);

% Ricostruzione segnali di controllo e riferimenti per i grafici
u1 = zeros(length(t1),1);
xd1 = zeros(length(t1),1);
for i=1:length(t1)
    [~, u_val, xd_val] = system_dynamics(t1(i), y1(i,:)', 1);
    u1(i) = u_val;
    xd1(i) = xd_val;
end

u2 = zeros(length(t2),1);
xd2 = zeros(length(t2),1);
for i=1:length(t2)
    [~, u_val, xd_val] = system_dynamics(t2(i), y2(i,:)', 2);
    u2(i) = u_val;
    xd2(i) = xd_val;
end

```

```
plot_res(y1, y2, xd1, xd2, t1, t2, u1, u2, a_true)
```

La funzione `system_dynamics.m` descrive la dinamica del sistema "aumentato" (stato del sistema di base e stato della stima del parametro). Implementa le equazioni differenziali:

- $\dot{x} = ax + u$ (dinamica del sistema scalare).
- $\dot{\hat{a}} = \gamma xe$ (legge di adattamento). Inoltre, calcola l'errore di inseguimento $e = x - x_d$ e applica la legge di controllo adattativa $u = -\hat{a}x + \dot{x}_d - \lambda e$.

```
function [dydt, u, x_d] = system_dynamics(t, y, type)
global a_true lambda gamma

x = y(1);           % Stato attuale
a_hat = y(2);      % Stima attuale del parametro

% Definizione traiettoria desiderata x_d(t) e sua derivata dx_d(t)
if type == 1
    % Stabilizzazione
    x_d = 0;
    dx_d = 0;
else
    % Inseguimento sinusoidale
    x_d = sin(t);
    dx_d = cos(t);
end

% Calcolo Errore
e = x - x_d;

% Legge di controllo
u = -a_hat * x + dx_d - lambda * e;

% Dinamica del sistema
dxdt = a_true * x + u;

% Legge di adattamento
```

```

da_hat_dt = gamma * x * e;
dydt = [dxdt; da_hat_dt];
end

```

La funzione `plot_res.m` dedicata alla visualizzazione dei risultati. Genera due figure separate (una per la stabilizzazione, una per l'inseguimento), ciascuna contenente tre grafici:

- Confronto tra lo stato reale $x(t)$ e il riferimento desiderato $x_d(t)$.
- Evoluzione della stima del parametro $\hat{\alpha}(t)$ rispetto al valore vero.
- Andamento dell'ingresso di controllo $u(t)$.

```

function plot_res(y1, y2, xd1, xd2, t1, t2, u1, u2, a_true)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
% Stabilizzazione
figure(1);
set(gcf, 'Name', 'Stabilizzazione', 'NumberTitle', 'off');
subplot(1,3,1);
plot(t1, y1(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t1, xd1, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title(' Stabilizzazione dello stato x(t)');
legend('x(t)', 'x_d(t)=0');
ylabel('Stato');

subplot(1,3,2);
plot(t1, y1(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot([min(t1) max(t1)], [a_true a_true], 'k-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title('Stima del parametro \alpha');
legend('Stima \alpha(t)', 'Vero \alpha');
ylabel('\alpha');

subplot(1,3,3);
plot(t1, u1, 'm', 'LineWidth', 1.5);
grid on;

```

```

title('Ingresso di controllo u(t)');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u');

% Inseguimento
figure(2);
set(gcf, 'Name', 'Inseguimento', 'NumberTitle', 'off');
subplot(1,3,1);
plot(t2, y2(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t2, xd2, 'k-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title('Inseguimento dello stato x(t)');
legend('x(t)', 'x_d(t)=sin(t)');
ylabel('Stato');

subplot(1,3,2);
plot(t2, y2(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot([min(t2) max(t2)], [a_true a_true], 'k-', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title('Stima del parametro \alpha');
legend('Stima \alpha(t)', 'Vero \alpha');
ylabel('\alpha');

subplot(1,3,3);
plot(t2, u2, 'm', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
title('Ingresso di controllo u(t)');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('u');

end

```

7 Controllo robot planare

Controllo robot planare a 2 link:

- *Regolazione spazio dei giunti e operativo.*
- *Tuning dei guadagni per assegnazione del tasso di convergenza locale.*
- *Inseguimento di traiettorie nello spazio dei giunti e nello spazio operativo con parametri noti.*
- *Inseguimento di traiettoria adattativo nello spazio dei giunti.*

7.1 Modello del robot planare a due link

Il robot a due bracci (RR) è un sistema non lineare e accoppiato. Le sue equazioni del moto si ottengono tramite il formalismo di Lagrange fornito durante le lezioni:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + g(q) = u \quad (55)$$

dove $q = [q_1, q_2]^T$ vettore delle coordinate dei giunti e le matrici sono definite come segue:

- $B(q)$: matrice di inerzia (simmetrica e definita positiva):

$$B(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_4 \end{bmatrix} \quad (56)$$

- $C(q, \dot{q})\dot{q}$: vettore delle forze di Coriolis e centrifughe:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -2\theta_3 \dot{q}_2 \sin(q_2) & -\theta_3 \dot{q}_2 \sin(q_2) \\ \theta_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

- $F(\dot{q})$: vettore delle forze di attrito ai giunti:

$$F(\dot{q}) = \begin{bmatrix} F_1 \dot{q}_1 \\ F_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

- $g(q)$: vettore delle forze gravitazionali.

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_5 \cos(q_1) + \theta_6 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_6 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (59)$$

- u : vettore delle coppie applicate ai giunti (ingresso di controllo).

I parametri reali forniti sono:

- $\theta_1 = I_1 + m_1 \frac{l_1^2}{4} + m_2 (\frac{l_2^2}{4} + l_1^2) + I_2 = 10.6125$

- $\theta_2 = I_2 + m_2 \frac{l_2^2}{4} = 0.85$
- $\theta_3 = m_2 l_1 \frac{l_2}{2} = 2.25$
- $\theta_4 = m_2 \frac{l_2^2}{2} + I_2 = 1.6$
- $\theta_5 = (m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 l_1)g = 80.9325$
- $\theta_6 = m_2 \frac{l_2}{2} g = 14.7150$

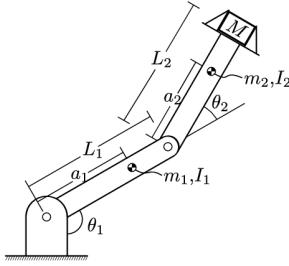


Figura 14: Schema di base di un robot RR planare

7.2 Regolazione spazio dei giunti e operativo

7.2.1 Spazio dei giunti

L'obiettivo è portare i giunti a una configurazione desiderata $q_d = [q_{d1}, q_{d2}]^T$ con velocità nulla. Facendo riferimento alla **teoria della stabilità di Lyapunov**, cerco di progettare un controllore che renda il punto di equilibrio ($q = q_d$, $\dot{q} = 0$) globalmente asintoticamente stabile. Una delle soluzioni più citate per problemi come questo è il controllore PD con compensazione della gravità che viene fornita nel testo dell'esercitazione. Scrivo quindi un controllo proporzionale e derivativo aggiungendo il termine $g(q)$:

$$u = K_P(q_d - q) - K_D \dot{q} + g(q) \quad (60)$$

Per dimostrare formalmente la stabilità, utilizzo il **secondo criterio di Lyapunov**. Definisco l'errore di posizione $\tilde{q} = q - q_d$. Considero la seguente funzione candidata di Lyapunov, che rappresenta l'energia totale del sistema a ciclo chiuso (energia cinetica ed energia potenziale):

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T B(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_P \tilde{q} \quad (61)$$

Con questa formulazione la funzione V risulta avere due caratteristiche fondamentali per la stabilità asintotica globale:

- **Definita positiva:** la matrice di inerzia $B(q)$ è sempre definita positiva per natura fisica. Il guadagno K_P è positivo per costruzione.

- **Radialmente illimitata:** poiché V è una forma quadratica, essa tende a infinito quando la norma dello stato \tilde{q} tende a infinito.

Questa proprietà sono cruciali per assicurare la stabilità globale per il **teorema Barbashin-Krasovskii**.

Il passo successivo è calcolare la derivata di V lungo le traiettorie del sistema per verificarne la negativa definitezza:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} + \dot{q}^T K_P \dot{q} \quad (62)$$

Sostituisco ora l'accelerazione \ddot{q} ricavandola dall'equazione dinamica del robot. Sapendo che $B(q)\ddot{q} = u - C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q}) - g(q)$, sostituisco la legge di controllo u :

$$B(q)\ddot{q} = [K_P(-\tilde{q}) - K_D\dot{q} + g(q)] - C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q}) - g(q) = -K_P\tilde{q} - K_D\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q}) \quad (63)$$

Ora inserisco questa espressione nella derivata \dot{V} :

$$\dot{V} = \dot{q}^T (-K_P\tilde{q} - K_D\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - F(\dot{q})) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{B}(q) \dot{q} + \dot{q}^T K_P \dot{q} \quad (64)$$

Posso eliminare il termine $\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$ perché è *skew-symmetric*. Rimane quindi:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_D \dot{q} - \dot{q}^T F(\dot{q}) \quad (65)$$

Poiché K_D è definita positiva e l'attrito $F(\dot{q})$ dissipava sempre energia (ha lo stesso segno della velocità), entrambi i termini sono non positivi:

$$\dot{V} \leq 0 \quad \forall(\tilde{q}, \dot{q}) \quad (66)$$

La derivata è semidefinita negativa. Essa si annulla quando $\dot{q} = 0$, indipendentemente dal valore dell'errore di posizione \tilde{q} . Questo garantisce la stabilità semplice nel senso di Lyapunov (lo stato rimane limitato), ma non basta da solo a provare la convergenza asintotica a zero dell'errore di posizione.

Per dimostrare la stabilità asintotica, invochiamo il **principio di invarianza di LaSalle**, devo cercare il più grande insieme invariante contenuto nell'insieme S dove la derivata della funzione di Lyapunov è nulla:

$$S = \{(\tilde{q}, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = 0\} \quad (67)$$

Dall'espressione di \dot{V} , vedo che $\dot{V} = 0$ implica necessariamente che la velocità sia nulla:

$$\dot{V} = 0 \implies \dot{q} = 0 \quad (68)$$

Può il sistema rimanere indefinitamente in uno stato dove $\dot{q} = 0$ ma $\tilde{q} \neq 0$? Se il sistema rimane nell'insieme S , allora deve valere $\dot{q}(t) \equiv 0$ per tutto il tempo. Questo implica che anche l'accelerazione deve essere nulla: $\ddot{q}(t) \equiv 0$.

Sostituendo $\dot{q} = 0$ e $\ddot{q} = 0$ nell'equazione della dinamica a ciclo ottengo:

$$B(q) \cdot 0 + C(q, 0) \cdot 0 + F(0) + g(q) = K_P(q_d - q) - K_D \cdot 0 + g(q) \quad (69)$$

I termini inerziali, centrifughi e di attrito si annullano. I termini gravitazionali si elidono a vicenda. rimane solo l'equazione di equilibrio statico:

$$0 = K_P(q_d - q) = -K_P\tilde{q} \quad \text{e quindi} \quad \tilde{q} = 0 \quad (70)$$

Quindi, l'unico punto invariante in cui l'energia smette di decrescere è l'origine dello spazio di stato: ($\tilde{q} = 0$, $\dot{q} = 0$). Pertanto, per il **teorema Barbashin-Krasovskii- LaSalle**, tutte le traiettorie convergeranno asintoticamente a questo equilibrio. Il sistema è Globalmente Asintoticamente Stabile.

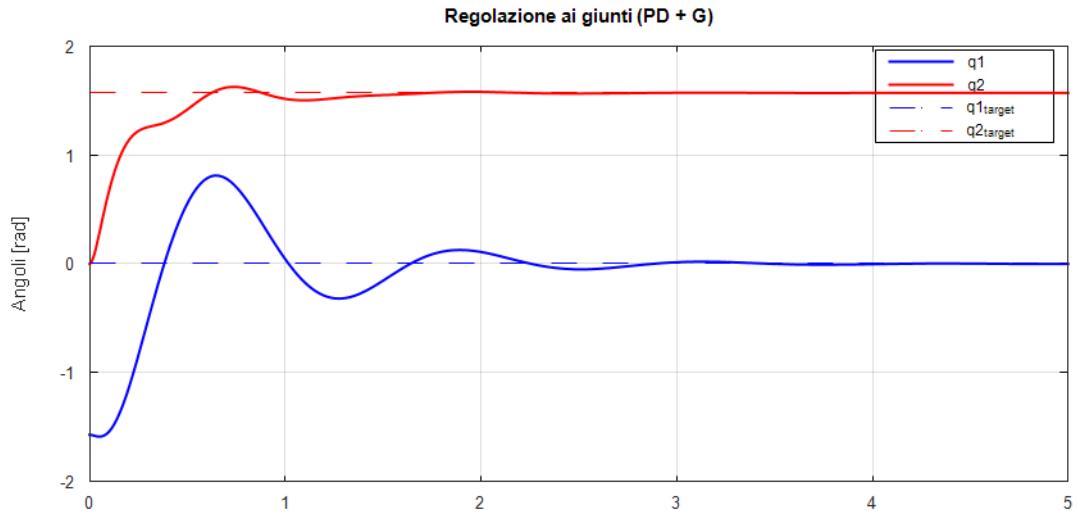


Figura 15: Controllo basato sullo spazio dei giunti

7.2.2 Spazio operativo

L'obiettivo è portare l'*end-effector* ad una posizione desiderata $x_d = [x_d, y_d]^T$. Definisco l'errore cartesiano: $\tilde{x} = x_d - x(q)$. La legge di controllo più usata è:

$$F_{task} = K_P\tilde{x} - K_D\dot{\tilde{x}} \quad (71)$$

Per applicare questa forza virtuale tramite i motori ai giunti, usiamo lo jacobiano:

$$u = J^T(q)F_{task} + g(q) = J^T(q)[K_P(x_d - x) - K_DJ(q)\dot{q}] + g(q) \quad (72)$$

Posizione dell'*end-effector* (con lunghezze link l_1, l_2):

$$\begin{cases} x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{cases} \quad (73)$$

Ricavo lo jacobiano analitico $J(q) = \frac{\partial x}{\partial q}$:

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (74)$$

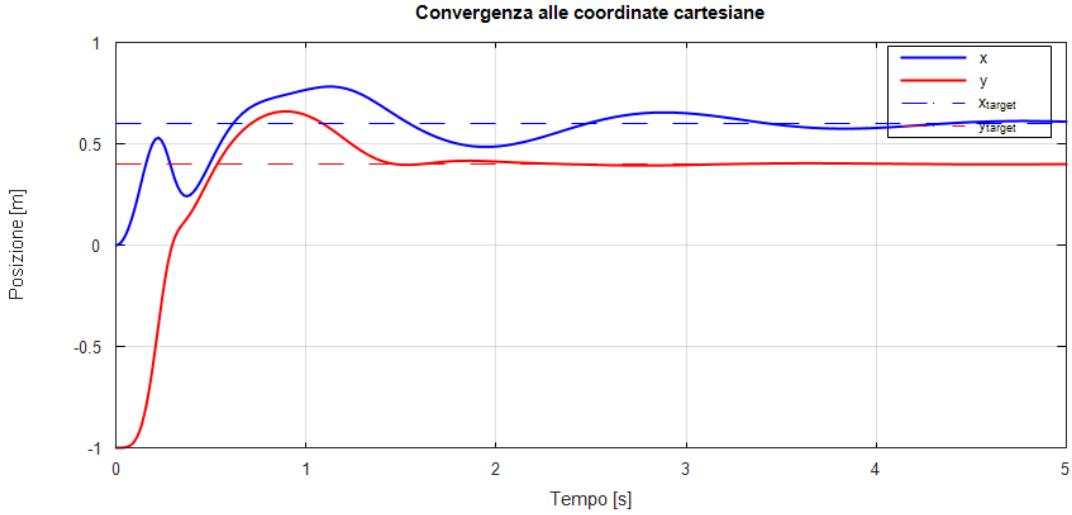


Figura 16: Controllo basato sullo spazio operativo

7.3 Tuning dei guadagni per assegnazione del tasso di convergenza locale

La scelta dei guadagni K_P e K_D è fondamentale per determinare le prestazioni dinamiche del sistema come il tempo di salita e la sovraelongazione). Sebbene il sistema sia non lineare, è possibile effettuare un tuning basato sulla linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio desiderato q_d . L'equazione dell'errore $\tilde{q} = q_d - q$ in un intorno dell'equilibrio, trascurando le non linearità residue, si comporta approssimativamente come un sistema del secondo ordine disaccoppiato (assumendo K_P e K_D diagonali):

$$B(q_d)\ddot{\tilde{q}} + K_D\dot{\tilde{q}} + K_P\tilde{q} \approx 0 \quad (75)$$

Se considero ogni giunto i separatamente, l'equazione caratteristica è:

$$J_{ii}\ddot{\tilde{q}}_i + k_{Di}\dot{\tilde{q}}_i + k_{Pi}\tilde{q}_i = 0 \quad (76)$$

dove J_{ii} è l'elemento diagonale della matrice d'inerzia $B(q_d)$. Questa equazione può essere riscritta in forma canonica:

$$\ddot{\tilde{q}}_i + 2\zeta\omega_n\dot{\tilde{q}}_i + \omega_n^2\tilde{q}_i = 0 \quad (77)$$

Confrontando i termini, otteniamo le relazioni per il tuning:

$$\omega_n^2 = \frac{K_{Pi}}{J_{ii}} \implies K_{Pi} = J_{ii}\omega_n^2 \quad (78)$$

$$2\zeta\omega_n = \frac{K_{Di}}{J_{ii}} \implies K_{Di} = J_{ii}2\zeta\omega_n \quad (79)$$

Per imporre un comportamento desiderato, scegliamo:

- ω_n : la pulsazione naturale, che determina la velocità di risposta (banda passante).
- ζ : il coefficiente di smorzamento (tipicamente $\zeta = 1$ per risposta critica senza overshoot).

Stimando l'inerzia media o massima J_{ii} , possiamo calcolare i guadagni ottimali.

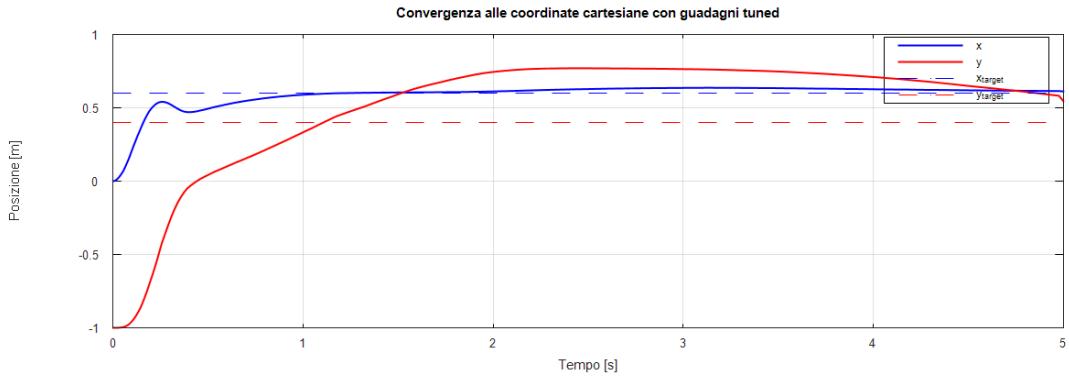


Figura 17: Controllo basato sullo spazio operativo con tuning dei parametri

In Figura 17 è visibile la riproposizione del compito precedente con il tuning dei parametri K_P e K_D sulla base dei prestazioni desiderate ζ e ω_n .

7.4 Inseguimento di traiettorie nello spazio dei giunti con parametri noti

Mentre la regolazione si preoccupa solo di portare q a q_{des} (dove $\dot{q}_{des} = \ddot{q}_{des} = 0$), l'inseguimento di traiettoria richiede che il robot assuma una specifica dinamica dello stato $q_d(t)$. Il solo controllo in *feedback* non è più sufficiente perché si rende necessario prevedere l'evoluzione dello stato, è necessaria una componente di *feedforward*.

La tecnica introdotta prende il nome di **Computed Torque** ed ha l'obiettivo di cancellare le nonlinearità del modello in maniera esatta. Il sistema robot, altamente non lineare e accoppiato, viene trasformato in un sistema lineare e disaccoppiato (una serie di doppi integratori $\ddot{e} = u_{PID}$). Questo modello prevede di scrivere l'errore come segue:

$$\ddot{e} + K_D \dot{e} + K_P e = 0 \quad (80)$$

Le leggi di controllo dei due integratori risultano quindi:

$$u_{aux} = \ddot{q} + K_D \dot{e} + K_P e \quad u = Bu_{aux} + C\dot{q} + F + g \quad (81)$$

In Figura 18 si vede come questo metodo garantisca una convergenza molto rapida sia in posizione che in velocità. Entrambi gli inseguimenti sembrano soddisfacenti già prima del secondo.

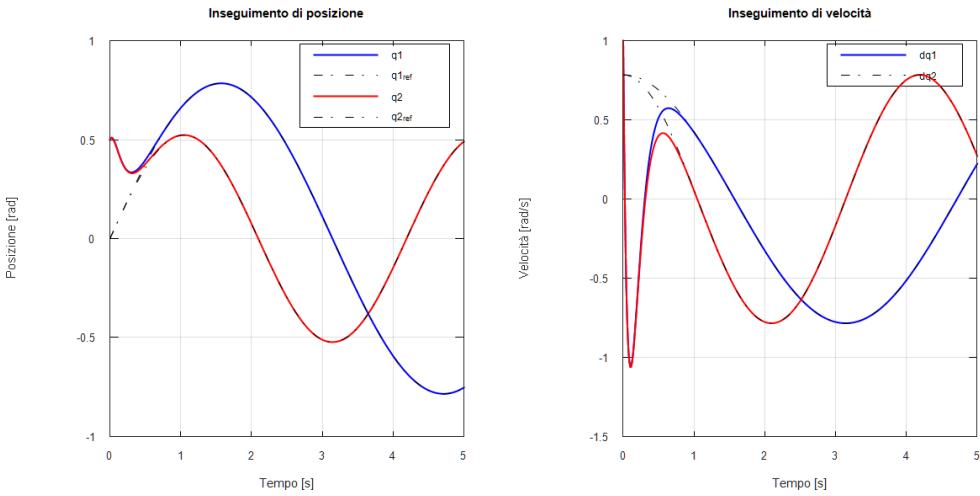


Figura 18: Inseguimento della traiettoria nello spazio dei giunti

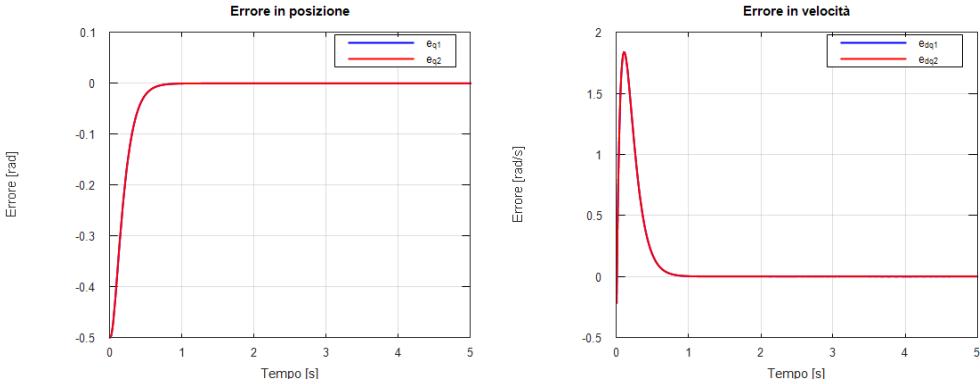


Figura 19: Errore di inseguimento della traiettoria nello spazio dei giunti

7.5 Inseguimento di traiettorie nello spazio operativo con parametri noti

A differenza del controllo ai giunti (dove il riferimento è θ_1, θ_2), qui il riferimento è una traiettoria cartesiana $x_d(t)$, nell'esempio ho usato un cerchio. I motori agiscono sui giunti (u), ma l'errore è definito nello spazio cartesiano ($e = x_d - x$). Laggiunta rispetto alla sezione precedente dell'esercitazione è tradurre le traiettorie desiderate nello spazio cartesiano in controllo ai giunti.

7.5.1 Dinamica inversa nello spazio operativo

La strategia adottata è la linearizzazione esatta nello spazio operativo che risulta essere molto consigliata per approcciare questo tipo di problema. Partiamo dalla relazione cinematica differenziale dell'accelerazione:

$$\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q,\dot{q})\dot{q} \quad (82)$$

Invertendo questa relazione (assumendo di non essere in singolarità), trovo l'accelerazione ai giunti necessaria per ottenere una certa accelerazione cartesiana \ddot{x} :

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{x} - \dot{J}\dot{q}) \quad (83)$$

Inserendo questo nel modello dinamico $B\ddot{q} + n = u$, ottengo la legge di controllo:

$$u = B(q)J^{-1}(q)(\underbrace{v_{cart}}_{acc. cart. desiderata} - \dot{J}\dot{q}) + C\dot{q} + F + g \quad (84)$$

7.5.2 Legge di controllo implementata

Il termine v_{cart} (accelerazione comandata) è calcolato come un PD in feedforward sull'errore cartesiano:

$$v_{cart} = \ddot{x}_d + K_D\dot{e} + K_P e \quad (85)$$

Questo impone all'errore cartesiano una dinamica lineare del secondo ordine:

$$\ddot{e}_x + K_D\dot{e}_x + K_P e_x = 0 \quad (86)$$

Un punto cruciale è l'implementazione di del termine $-\dot{J}\dot{q}$ che include lo jacobiano derivato che so rende necessario perché permette al controllore di compensare le accelerazioni centrifughe e di Coriolis che nascono dalla trasformazione cinematica stessa. L'inclusione di \dot{J} rende l'inseguimento preciso anche a velocità elevate.

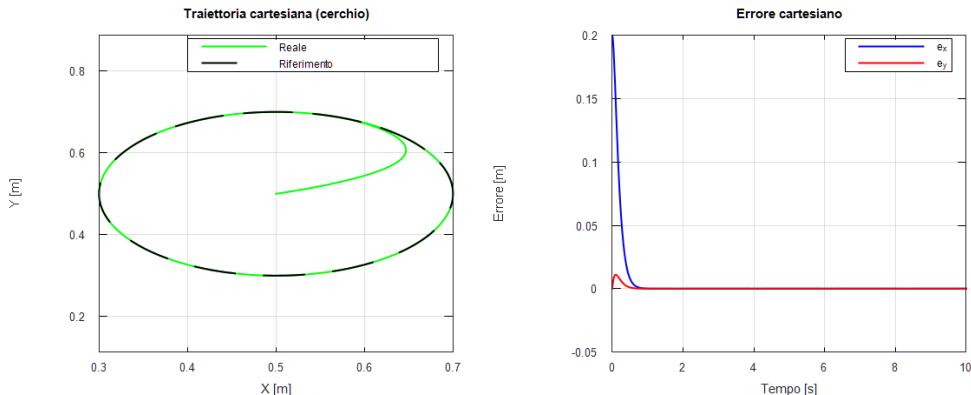


Figura 20: Inseguimento di traiettoria nello spazio operativo

7.6 Inseguimento di traiettoria adattativo nello spazio dei giunti

7.6.1 Controllo adattativo di Slotine-Li

Nel *Computed Torque Control* standard che ho usato per l'inseguimento di traiettoria, la legge di controllo si basa sulla conoscenza esatta delle matrici B , C , F e g ma se queste sono ignote non

è possibile cancellare esattamente la componente non lineare. La soluzione a questo problema è il **controllo adattativo di Slotine-Li** che suggerisce di riscrivere la dinamica del robot come segue:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \theta \quad (87)$$

dove θ è un vettore costante contenente i parametri fisici (masse, inerzie, ecc.) e Y è una matrice chiamata **regressore**, che dipende solo da q, \dot{q}, \ddot{q} che sono quantità note o misurabili. Invece di usare i parametri veri θ (ignoti), uso una stima $\hat{\theta}(t)$ che cambia nel tempo:

$$u = Y(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{\theta} - K_D s \quad (88)$$

dove $\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda\tilde{q}$ è la velocità di riferimento virtuale, $s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{q} + \Lambda\tilde{q}$ è la superficie di scorrimento, una misura composita dell'errore. Il primo termine $Y\hat{\theta}$ cerca di compensare la dinamica usando la stima attuale. Il secondo termine $(-K_D s)$ è un feedback robusto che spinge l'errore a zero.

7.6.2 Legge di adattamento

Per aggiornare la stima $\hat{\theta}$ uso una legge basata sul gradiente dell'errore:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma Y^T s \quad (89)$$

Dove Γ è una matrice diagonale dei tassi di apprendimento (learning rate).

7.6.3 Implementazione

Per effettuare la stima effettuiamo una regressione che ha l'obiettivo di ricostruire completamente la matrice Y che sostituisce idealmente i parametri che abbiamo ammesso di non conoscere. Anche la dinamica del robot deve essere riscritta per calcolare l'errore composito che il regressore deve annullare.

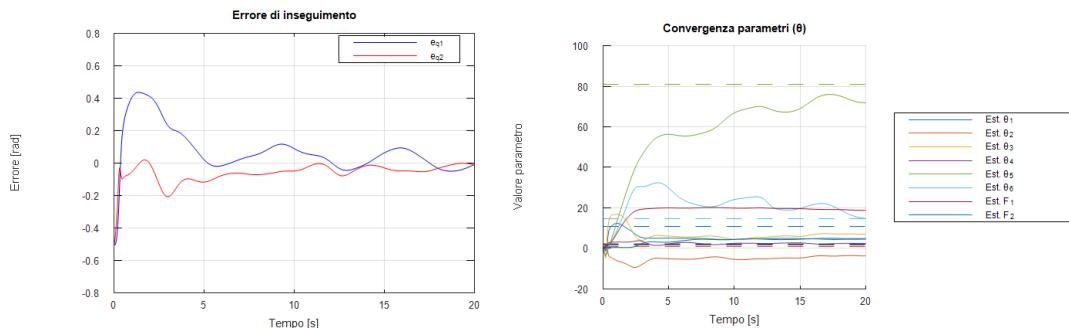


Figura 21: Errore di inseguimento (sinistra) e andamento della stima dei parametri (destra)

7.7 Codice

Lo script principali `rr_robot_control.m` ha diversi compiti: inizializzazione e definizione del modello, regolazione nello spazio dei giunti, regolazione nello spazio operativo, inseguimento di traiettoria nello spazio dei giunti, inseguimento di traiettoria nello spazio operativo e controllo adattativo.

```
clear all;
close all;
clc;

addpath('7')

global theta geom

% Parametri dinamici
theta = [10.6125; 0.85; 2.25; 1.6; 80.9325; 14.7150];

% Parametri geometrici (Assunti per la cinematica)
geom.l1 = 0.5; % Lunghezza link 1 [m]
geom.l2 = 0.5; % Lunghezza link 2 [m]

% Guadagni del controllore
Kp = diag([500, 500]);
Kd = diag([50, 50]);

%% CONTROLLO NELLO SPAZIO DEI GIUNTI
disp('\nRegolazione spazio giunti');

% Target: Vogliamo portare il robot in una configurazione specifica
q_des = [0; pi/2];

% Condizione iniziale (fermo in posizione diversa: braccio gi )
q0_joint = [-pi/2; 0; 0; 0];

% Simulazione
T_sim = 5;
```

```

% Chiamata a ode45 per risolvere la dinamica controllata ai giunti
[t_j, y_j] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_joint(t, y, q_des, Kp, Kd),
[0 T_sim], q0_joint);

plot_res_joint(t_j, y_j, q_des, T_sim)

%% CONTROLLO NELLO SPAZIO OPERATIVO
disp('\nRegolazione spazio operativo');

% Target in coordinate cartesiane (x, y)
x_des = 0.6;
y_des = 0.4;
target_pos = [x_des; y_des];

% Condizione iniziale
q0_op = [-pi/2; 0; 0; 0];

% Chiamata a ode45 per risolvere la dinamica controllata nello spazio
% operativo
[t_op, y_op] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_operational(t, y,
target_pos, Kp, Kd), [0 T_sim], q0_op);

% Visualizzazione dei risultati
plot_res_op(0, y_op, target_pos, t_op);

%% TUNING DEI GUADAGNI
omega_des = 10 % Pulsazione naturale desiderata [rad/s]
zeta_des = 1.0; % Smorzamento desiderato

[Kp_tuned, K_tuned] = gain_tuning(omega_des, zeta_des, q_des)

% Riprovo l'esercitazione precedente con i nuovi guadagni
[t_op_tun, y_op_tun] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_operational(t, y,
target_pos, Kp_tuned, K_tuned), [0 T_sim], q0_op);
plot_res_op(1, y_op_tun, target_pos, t_op);

```

```

%% CONTROLLO IN TRAIETTORIA NELLO SPAZIO DEI GIUNTI
disp('Inseguimento di traiettorie nello spazio dei giunti con
      parametri noti');

% Definizione delle traiettorie desiderata
A_traj = [pi/4; pi/6];           % Ampiezze [rad]
w_traj = [1.0; 1.5];            % Frequenze [rad/s]

% Condizione iniziale
q0 = [0.5; 0.5];
dq0 = [1; 1];
x0 = [q0; dq0];

% Simulazione
T_sim = 5;
disp('Avvio simulazione Computed Torque...');

[t, y] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_computed_torque(t, y, A_traj,
w_traj, Kp, Kd), [0 T_sim], x0);

% Risultati
q = y(:, 1:2);
dq = y(:, 3:4);

% Ricostruzione riferimenti per il plot
q_des = zeros(length(t), 2);
dq_des = zeros(length(t), 2);
for i=1:length(t)
    q_des(i,:) = (A_traj .* sin(w_traj*t(i)))';
    dq_des(i,:) = (A_traj .* w_traj .* cos(w_traj*t(i)))';
end

% Plot
plot_res_traj(t, q, dq, q_des, dq_des)

```

```

%% CONTROLLO IN TRAIETTORIA NELLO SPAZIO OPERATIVO
disp('Inseguimento traiettoria nello spazio operativo');

% Definizione Cerchio
traj_data.Center = [0.5; 0.5];
traj_data.Radius = 0.2;
traj_data.Omega = 1.5;

% Partenza
q0_op_tr = [0; pi/2];
dq0_op_tr = [0; 0];
x0_op_tr = [q0_op_tr; dq0_op_tr];

% Simulazione
T_sim_op = 10;
[t_opt, y_opt] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_op_track(t, y, traj_data,
Kp, Kd), [0 T_sim_op], x0_op_tr);

% Analisi risultati e plot
x_real = zeros(length(t_opt), 2);
x_des_tr = zeros(length(t_opt), 2);
e_x = zeros(length(t_opt), 2);

for i=1:length(t_opt)
    % Posizione reale (cinematica diretta)
    [pos_real, ~] = get_kinematics(y_opt(i,1:2)');
    x_real(i,:) = pos_real';

    % Ricalcolo riferimento al tempo t_opt(i)
    C = traj_data.Center;
    R = traj_data.Radius;
    w = traj_data.Omega;
    t_val = t_opt(i);
    xd = C + [R*cos(w*t_val); R*sin(w*t_val)];
    x_des_tr(i,:) = xd';

```

```

e_x(i,:) = (xd - pos_real)';
end

% Plot dei risultati
plot_res_op_traj(t_opt, x_real, x_des_tr, e_x)

%% CONTROLLO ADATTIVO
disp('Inseguimento adattativo');

% Parametri di attrito "reali"
F_real = [2; 2];
T_adapt = [0 20]

% Parametri Adattativi
Lambda = diag([5, 5]); % Guadagno sulla posizione
Kd_adapt = diag([20, 20]); % Guadagno sulla "sliding variable"
Gamma = eye(8) * 2; % Velocit di apprendimento parametri
Gamma(5,5) = 10;
Gamma(6,6) = 10;

% Condizioni iniziali: stato + stima parametri
theta_hat0 = zeros(8, 1);
y0_adapt = [x0; theta_hat0]; % [q; dq; theta_hat]
[t_ad, y_ad] = ode45(@(t,y) robot_dynamics_adaptive(t, y, A_traj,
w_traj, Lambda, Gamma, Kd_adapt), T_adapt, y0_adapt);

% Estrazione dati
q_ad = y_ad(:, 1:2);
dq_ad = y_ad(:, 3:4);
theta_hist = y_ad(:, 5:end);

% Ricostruzione riferimento
q_des_ad = zeros(length(t_ad), 2);
for i=1:length(t_ad)
    q_des_ad(i,:) = (A_traj .* sin(w_traj*t_ad(i)))';

```

```

end

% Vettore parametri veri completo
theta_real_full = [theta; F_real];
plot_res_adaptive(t_ad, q_ad, dq_ad, theta_hist, q_des_ad,
theta_real_full);

```

La funzione `robot_dynamics_joint.m` implementa un Controllo PD con compensazione della gravità nello spazio dei giunti (Joint Space Control).

```

function dy = robot_dynamics_joint(t, y, q_des, Kp, Kd)
    % Assicuriamoci che y sia un vettore colonna
    y = y(:);
    q = y(1:2);
    dq = y(3:4);

    % Recuperiamo le matrici dinamiche
    [B, C, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq);

    e_q = q_des - q; % Errore di posizione ai giunti

    % Controllo PD + Compensazione gravit (g)
    u = Kp * e_q - Kd * dq + g;

    % Dinamica
    ddq = B \ (u - C*dq - F - g);
    dy = [dq; ddq];

```

La funzione `robot_dynamics_operational.m` implementa un Controllo PD con compensazione della gravità nello spazio operativo (Operational Space Control).

```

function dy = robot_dynamics_operational(t, y, x_des, Kp, Kd)
    % Assicuriamoci che y sia un vettore colonna (4x1)
    y = y(:);
    q = y(1:2); dq = y(3:4);

    % Calcolo matrici dinamiche (B, C, g, F)
    [B, C, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq);

```

```

% Calcolo cinematica e jacobiano
[x_curr, J] = get_kinematics(q);

% Legge di controllo nello spazio operativo
e_x = x_des - x_curr;

% Velocit cartesiana reale
dx = J * dq;

% Forza virtuale cartesiana richiesta (2x1)
F_task = Kp * e_x - Kd * dx;

% Mappatura in coppie ai giunti tramite J trasposto +
% Compensazione Gravit
u = J' * F_task + g;

% 4. Dinamica diretta del robot
ddq = B \ (u - C*dq - F - g);
dy = [dq; ddq];

end

```

La funzione `robot_dynamics_computed_torque.m` implementa il controllo Computed Torque per l'inseguimento di traiettoria nello spazio dei giunti.

```

function dy = robot_dynamics_computed_torque(t, y, A_traj, w_traj, Kp,
Kd)

y = y(:);
q = y(1:2);
dq = y(3:4);

% Generazione traiettoria di riferimento
qd = A_traj .* sin(w_traj*t);
dqd = A_traj .* w_traj .* cos(w_traj*t);
ddqd = -A_traj .* w_traj.^2 .* sin(w_traj*t);

% Calcolo matrici dinamiche

```

```

[B, C, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq);

% Legge di controllo Computed Torque
e = qd - q;
de = dqd - dq;

% Ingresso ausiliario (doppio integratore stabilizzato)
u_aux = ddqd + Kd*de + Kp*e;

% Linearizzazione tramite feedback (Calcolo Coppia)
u = B * u_aux + C*dq + F + g;

% Dinamica diretta
ddq = B \ (u - C*dq - F - g);
dy = [dq; ddq];

end

```

La funzione `robot_dynamics_op_track.m` implementa un controllo a Coppia Calcolata nello spazio operativo.

```

function dy = robot_dynamics_op_track(t, y, traj_data, Kp, Kd)

y = y(:);
q = y(1:2);
dq = y(3:4);

% Riferimenti cartesiani (cerchio)
C = traj_data.Center;
R = traj_data.Radius;
w = traj_data.Omega;

xd = C + [R*cos(w*t); R*sin(w*t)];
dxd = [-R*w*sin(w*t); R*w*cos(w*t)];
ddxd = [-R*w^2*cos(w*t); -R*w^2*sin(w*t)];

% Cinematica attuale
[x, J] = get_kinematics(q);

```

```

% Calcolo della dJ
dJ = get_jacobian_dot(q, dq);
dJ_dq = dJ * dq;

dx = J * dq;

% Legge di controllo operativa
e = xd - x;
de = dxd - dx;

% Accelerazione cartesiana virtuale
v_cart = dxd + Kd*de + Kp*e;

% Mappatura nello spazio dei giunti
ddq_ref = J \ (v_cart - dJ_dq);

% Dinamica inversa (Computed Torque)
[B, C_mat, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq);

tau = B * ddq_ref + C_mat*dq + F + g;

% Dinamica diretta
ddq = B \ (tau - C_mat*dq - F - g);
dy = [dq; ddq];

end

```

La funzione `robot_dynamics_adaptive.m` implementa il controllo adattativo di Slotine-Li.

```

function dy = robot_dynamics_adaptive(t, y_aug, A_traj, w_traj, Lambda
, Gamma, Kd)
% Stato aumentato
q = y_aug(1:2);
dq = y_aug(3:4);
theta_hat = y_aug(5:end);

% Generazione traiettoria
qd = A_traj .* sin(w_traj*t);

```

```

dqd = A_traj .* w_traj .* cos(w_traj*t);
ddqd = -A_traj .* w_traj.^2 .* sin(w_traj*t);

% Errore
e = q - qd;

% Velocit e accelerazione di riferimento "virtuali"
dqr = dqd - Lambda * e;
ddqr = ddqd - Lambda * (dq - dqd);

% Superficie di scorrimento s = dq - dqr = de + Lambda*e
s = dq - dqr;

% Calcolo Regressore Y(q, dq, dqr, ddqr)
Y = get_regressor(q, dq, dqr, ddqr);

% Legge di controllo: Feedforward Adattativo (Y*theta_hat) +
Feedback PD (Kd*s)
u = Y * theta_hat - Kd * s;

% Legge di adattamento (Update Parametri)
d_theta_hat = -Gamma * Y' * s;

% Utilizziamo i parametri "veri" (ignoti al controllore) per la
simulazione
[B, C, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq);

% Dinamica diretta: B*ddq + C*dq + F + g = tau
ddq = B \ (u - C*dq - F - g);

% Derivata dello stato aumentato
dy = [dq; ddq; d_theta_hat];

end

```

La funzione `get_dynamic_matrices.m` restituisce le matrici che compongono il modello dinamico del robot nella forma: $B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F\dot{q} = \tau$.

```

function [B, C, g, F] = get_dynamic_matrices(q, dq)
    global theta
    t1=theta(1);
    t2=theta(2);
    t3=theta(3);
    t4=theta(4);
    t5=theta(5);
    t6=theta(6);

    c1 = cos(q(1));
    c2 = cos(q(2));
    s2 = sin(q(2));
    c12 = cos(q(1)+q(2));

    B = [t1 + 2*t3*c2, t2 + t3*c2;
          t2 + t3*c2,      t4];

    C = [-2*t3*dq(2)*s2, -t3*dq(2)*s2;
          t3*dq(1)*s2,      0];

    g = [t5*c1 + t6*c12;
          t6*c12];

    F = [2*dq(1); 2*dq(2)];
end

```

La funzione `get_kinematics.m` calcola la cinematica diretta e lo jacobiano analitico del robot.

```

function [x, J] = get_kinematics(q)
    global geom
    l1 = geom.l1;
    l2 = geom.l2;
    q1 = q(1);
    q2 = q(2);

    % Funzioni trigonometriche ausiliarie
    s1 = sin(q1); c1 = cos(q1);

```

```

s12 = sin(q1+q2); c12 = cos(q1+q2);

% Cinematica diretta
x_pos = l1*c1 + l2*c12;
y_pos = l1*s1 + l2*s12;
x = [x_pos; y_pos];

% Jacobiano Analitico
J = [-l1*s1 - l2*s12, -l2*s12;
      l1*c1 + l2*c12, l2*c12];
end

```

La funzione `gain_tuning.m` calcola i guadagni K_P e K_D sulla base di ζ e ω_n .

```

function [Kp_tuned, Kd_tuned] = gain_tuning(omega_des, zeta_des, q_des
)
    % Calcolo i guadagni in base all'inerzia nella configurazione
    % target
    [B_des, ~, ~, ~] = get_dynamic_matrices(q_des, [0; 0]);

    % Calcolo i guadagni
    J11 = B_des(1,1);
    J22 = B_des(2,2);
    Kp_tuned = diag([J11 * omega_des^2, J22 * omega_des^2]);
    Kd_tuned = diag([J11 * 2 * zeta_des * omega_des, J22 * 2 *
    zeta_des * omega_des]);

    fprintf('Guadagni calcolati per omega_n=% .1f e zeta=% .1f:\n',
    omega_des, zeta_des);
    disp('Kp:');
    disp(Kp_tuned);
    disp('Kd:');
    disp(Kd_tuned);
end

```

La funzione `get_jacobian_dot.m` calcola la derivata temporale della matrice Jacobiana (\dot{J}).

```

function dJ = get_jacobian_dot(q, dq)
    global geom

```

```

l1 = geom.l1; l2 = geom.l2;

q1 = q(1); q2 = q(2);
dq1 = dq(1); dq2 = dq(2);
s1 = sin(q1); c1 = cos(q1);
s12 = sin(q1+q2); c12 = cos(q1+q2);

% Termine (1,1): d(-l1*s1 - l2*s12)/dt
dJ11 = -l1*c1*dq1 - l2*c12*(dq1+dq2);

% Termine (1,2): d(-l2*s12)/dt
dJ12 = -l2*c12*(dq1+dq2);

% Termine (2,1): d(l1*c1 + l2*c12)/dt
dJ21 = -l1*s1*dq1 - l2*s12*(dq1+dq2);

% Termine (2,2): d(l2*c12)/dt
dJ22 = -l2*s12*(dq1+dq2);

% Assemblo lo jacobiano
dJ = [dJ11, dJ12;
       dJ21, dJ22];

end

```

La funzione `get_regressor.m` calcola la matrice di regressione $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}_r)$.

```

function Y = get_regressor(q, dq, dqr, ddqr)
% Costruisce la matrice Y tale che Y*Theta = B*ddqr + C*dqr + g +
F

q1 = q(1); q2 = q(2);
dq1 = dq(1); dq2 = dq(2);
dqr1 = dqr(1); dqr2 = dqr(2);
ddqr1 = ddqr(1); ddqr2 = ddqr(2);

c1 = cos(q1); c2 = cos(q2); s2 = sin(q2); c12 = cos(q1+q2);

```

```

% t1: coeff di ddqr1
Y11 = ddqr1;
% t2: coeff di ddqr2
Y12 = ddqr2;
% t3: Termini di inerzia accoppiata e Coriolis
Y13 = 2*c2*ddqr1 + c2*ddqr2 - 2*s2*dq2*dqr1 - s2*dq2*dqr2;
% t4: 0
Y14 = 0;
% t5: c1 (Gravit link 1)
Y15 = c1;
% t6: c12 (Gravit link 2)
Y16 = c12;
% f1: dqr1 (Attrito viscoso giunto 1)
Y17 = dqr1;
% f2: 0
Y18 = 0;

Y21 = 0;
Y22 = ddqr1;
Y23 = c2*ddqr1 + s2*dq1*dqr1;
Y24 = ddqr2;
Y25 = 0;
Y26 = c12;
Y27 = 0;
Y28 = dqr2;

Y = [Y11, Y12, Y13, Y14, Y15, Y16, Y17, Y18;
      Y21, Y22, Y23, Y24, Y25, Y26, Y27, Y28];

```

end

Le funzioni `plot_res_joint.m`, `plot_res_joint.m`, `plot_res_op.m`, `plot_res_traj.m`, `plot_res_op_traj.m` e `plot_res_adaptive.m` sono le funzioni che mostrano l'inseguimento delle posizioni nello spazio dei giunti e in quello operativo e l'inseguimento di traiettoria nello spazio dei giunti e in quello operativo.

```

function plot_res_joint(t_j, y_j, q_des, T_sim)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
figure('Name', 'Controllo nello spazio dei giunti');

```

```

plot(t_j, y_j(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t_j, y_j(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
plot([0 T_sim], [q_des(1) q_des(1)], 'b--');
plot([0 T_sim], [q_des(2) q_des(2)], 'r--');
grid on;
ylabel('Angoli [rad]');
legend('q1', 'q2', 'q1_{target}', 'q2_{target}');
title('Regolazione ai giunti (PD + G)');
end

function plot_res_op(mode, y, target_pos, t);
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
% Estrazione coordinate target
x_des = target_pos(1);
y_des = target_pos(2);
T_sim = t(end);

q1 = y(:,1);
q2 = y(:,2);
x_traj = zeros(length(t), 2);

% Ricostruzione traiettoria
for i=1:length(t)
    [pos, ~] = get_kinematics(y(i,1:2)');
    x_traj(i,:) = pos';
end

if mode == 0
    figure('Name', 'Controllo nello spazio operativo');
elseif mode == 1
    figure('Name', 'Controllo nello spazio operativo con guadagni
tuned');
else
    error('Modalita del plot inesistente')
end

```

```

plot(t, x_traj(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, x_traj(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
plot([0 T_sim], [x_des x_des], 'b--');
plot([0 T_sim], [y_des y_des], 'r--');
grid on;
legend('x', 'y', 'x_{target}', 'y_{target}');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Posizione [m]');

if mode == 0
    title('Convergenza alle coordinate cartesiane');
elseif mode == 1
    title('Convergenza alle coordinate cartesiane con guadagni
tuned');
else
    error('Modalita del plot inesistente')
end

function plot_res_traj(t, q, dq, q_des, dq_des)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici
% Calcolo dell'errore
e_q = q_des - q;
e_dq = dq_des - dq;

figure('Name', 'Inseguimento traiettoria giunti');

% Posizioni
subplot(1,2,1);
plot(t, q(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, q_des(:,1), 'k-.', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, q(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
plot(t, q_des(:,2), 'k-.', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
xlabel('Tempo [s]');

```

```

ylabel('Posizione [rad]');
legend('q1', 'q1_{ref}', 'q2', 'q2_{ref}');
title('Inseguimento di posizione');

% Velocit
subplot(1,2,2);
plot(t, dq(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, dq_des(:,1), 'k-.', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, dq(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
plot(t, dq_des(:,2), 'k-.', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Velocit [rad/s]');
legend('dq1', 'dq2');
title('Inseguimento di velocit');

% Errore posizione
figure('Name', 'Errori di inseguimento');
subplot(1,2,1);
plot(t, e_q(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, e_q(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
grid on;
ylabel('Errore [rad]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('e_{q1}', 'e_{q2}');
title('Errore in posizione');

% Errore velocit
subplot(1,2,2);
plot(t, e_dq(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, e_dq(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
grid on;

```

```

ylabel('Errore [rad/s]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('e_{dq1}', 'e_{dq2}');
title('Errore in velocit');

end

function plot_res_op_traj(t, x_real, x_des, e_x)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici

figure('Name', 'Inseguimento traiettoria nello spazio operativo');

% Traiettoria
subplot(1,2,1);
plot(x_real(:,1), x_real(:,2), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x_des(:,1), x_des(:,2), 'k--', 'LineWidth', 2);
axis equal;
grid on;
legend('Reale', 'Riferimento');
xlabel('X [m]'); ylabel('Y [m]');
title('Traiettoria cartesiana (cerchio)');

% Errori
subplot(1,2,2);
plot(t, e_x(:,1), 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, e_x(:,2), 'r', 'LineWidth', 2);
grid on;
ylabel('Errore [m]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('e_x', 'e_y');
title('Errore cartesiano');

end

function plot_res_adaptive(t, q, dq, theta_hist, q_des, theta_real)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici

```

```

% Calcolo errore
e_q = q_des - q;

figure('Name', 'Controllo adattativo');

% Errore di inseguimento
subplot(1,2,1);
plot(t, e_q(:,1), 'b', 'LineWidth', 1.5);
hold on;
plot(t, e_q(:,2), 'r', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
ylabel('Errore [rad]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('e_{q1}', 'e_{q2}');
title('Errore di inseguimento');

% Stima dei parametri
subplot(1,2,2);
colors = lines(8);
labels = {'\theta_1', '\theta_2', '\theta_3', '\theta_4', '\theta_5', '\theta_6', 'F_1', 'F_2'};

% Plot parametri stimati vs reali
hold on;
t_start = t(1);
t_end = t(end);
for i=1:8
    plot(t, theta_hist(:,i), 'Color', colors(i,:), 'LineWidth',
        1.5, 'DisplayName', ['Est. ' labels{i}]);
    plot([t_start t_end], [theta_real(i) theta_real(i)], '--', [
        Color', colors(i,:), 'LineWidth', 1, 'HandleVisibility',
        off');
end
grid on; ylabel('Valore parametro');

```

```
xlabel('Tempo [s]');
title('Convergenza parametri (\theta)');
legend('show', 'Location', 'eastoutside');
end
```

8 Robot uniciclo

Inseguimento di traiettoria in posizione per un robot uniciclo.

8.1 Modello cinematico

Il moto del robot uniciclo è un sistema non lineare descritto dalle seguenti equazioni cinematiche:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (90)$$

Dove:

- (x, y) è la posizione cartesiana nel piano.
- θ è l'orientamento rispetto all'asse x .
- v è la velocità lineare (ingresso di controllo).
- ω è la velocità angolare (ingresso di controllo).

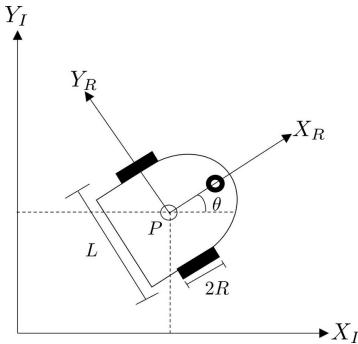


Figura 22: Robot uniciclo

8.2 Definizione dell'errore di inseguimento

8.2.1 Errore

Vogliamo che il robot segua un riferimento descritto da (x_d, y_d, θ_d) con ingressi di riferimento (v_d, ω_d) .

Prendo una traiettoria tipica di questi esempi: l'otto:

$$\begin{cases} x_d = A \sin(ft) \\ y_d = A \frac{\sin(2ft)}{2} \end{cases} \quad (91)$$

A differenza dei sistemi lineari, l'errore non è semplicemente $x_d - x$. Per i veicoli non olonomi, è necessario definire l'errore nel sistema di riferimento solidale al robot (robot). Usiamo la matrice di rotazione:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (92)$$

Dove:

- e_1 : errore lungo x .
- e_2 : errore lungo y .
- e_3 : errore di orientamento rispetto a θ .

8.2.2 Dinamica dell'errore

Derivando le equazioni sopra e sostituendo il modello cinematico, otteniamo il sistema non lineare dell'errore:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = v_d \cos e_3 - v + e_2 \omega \\ \dot{e}_2 = v_d \sin e_3 - e_1 \omega \\ \dot{e}_3 = \omega_d - \omega \end{cases} \quad (93)$$

Questo è il sistema che dobbiamo stabilizzare all'origine $(0, 0, 0)$ usando gli ingressi (v, ω) .

8.3 Progetto del controllore via Lyapunov

Il secondo criterio di Lyapunov afferma che sia 0 un punto di equilibrio per il sistema e $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio contenente l'origine. Sia $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ con derivata continua su D . Assumendo che:

$$\begin{cases} V(0) = 0 \wedge V(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \\ \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D \end{cases} \quad (94)$$

allora $x=0$ è un punto di **equilibrio stabile**. Se $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D$ allora $x = 0$ è un punto di **equilibrio asintoticamente stabile**. Cerco, quindi, una funzione scalare $V(e)$ definita positiva e con derivata definita negativa. Una delle soluzioni più accreditate per esercizi simili è:

$$V = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{k_2}(1 - \cos e_3) \quad (95)$$

con $k_2 > 0$. Questa funzione è definita positiva (nulla solo nell'origine e positiva altrove per $e_3 \in (-\pi, \pi)$).

8.3.1 Derivata \dot{V}

Calcoliamo la derivata temporale lungo le traiettorie del sistema e scegliamo gli ingressi per renderla negativa.

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{k_2} \sin e_3 \dot{e}_3 \quad (96)$$

Sostituendo le equazioni della dinamica dell'errore e semplificando i termini incrociati ($e_1 e_2 \omega$), otteniamo l'espressione di \dot{V} :

$$\dot{V} = e_1(v_d \cos e_3 - v + e_2 \omega) + e_2(v_d \sin e_3 - e_1 \omega) + \frac{\sin e_3}{k_2} (\omega_d - \omega) \quad (97)$$

Semplificando i termini opposti ($e_1 e_2 \omega$ si annullano):

$$\dot{V} = e_1(v_d \cos e_3 - v) + v_d e_2 \sin e_3 + \frac{\sin e_3}{k_2} (\omega_d - \omega) \quad (98)$$

8.3.2 Scelta della legge di controllo

Per rendere $\dot{V} \leq 0$, scegliamo v e ω in modo da annullare i termini più ostici e iniettare smorzamento.

Per il primo termine, poniamo:

$$v_d \cos e_3 - v = -k_1 e_1 \implies v = v_d \cos e_3 + k_1 e_1 \quad (99)$$

Questo rende il primo termine pari a $-k_1 e_1^2$ (definito negativo). Per i restanti termini, raccogliamo $\sin e_3$:

$$\sin e_3 \left(v_d e_2 + \frac{\omega_d - \omega}{k_2} \right) \quad (100)$$

Imponiamo che la parentesi sia uguale a un termine dissipativo, ad esempio $-\frac{k_3}{k_2} \sin e_3$:

$$v_d e_2 + \frac{\omega_d - \omega}{k_2} = -\frac{k_3}{k_2} \sin e_3 \quad (101)$$

Risolvendo per $\omega = \omega_d + k_2 v_d e_2 + k_3 \sin e_3$. Ora posso scrivere il controllo come:

$$\begin{cases} v = v_d \cos e_3 + k_1 e_1 \\ \omega = \omega_d + k_2 v_d e_2 + k_3 \sin e_3 \end{cases} \quad (102)$$

Il guadagno k_1 agisce principalmente sulla convergenza dell'errore lungo la direzione di moto x mentre k_2 e k_3 influenzano la dinamica laterale y e di orientamento θ . Un valore elevato di k_2 permette di correggere rapidamente l'errore laterale e_2 , ma può indurre oscillazioni se eccessivo.

8.3.3 Verifica della stabilità

Sostituendo questi ingressi nella derivata di Lyapunov, si ottiene:

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - \frac{k_3}{k_2} \sin^2 e_3 \leq 0 \quad (103)$$

La derivata è semidefinita negativa ad eccezione dell'origine per cui si verifica $V(0)=0$. Utilizzando il Lemma di Barbalat (e verificando l'uniforme continuità dei segnali), si può dimostrare la convergenza asintotica dell'errore a zero, a patto che la velocità di riferimento v_d non sia costantemente nulla (condizione di eccitazione).

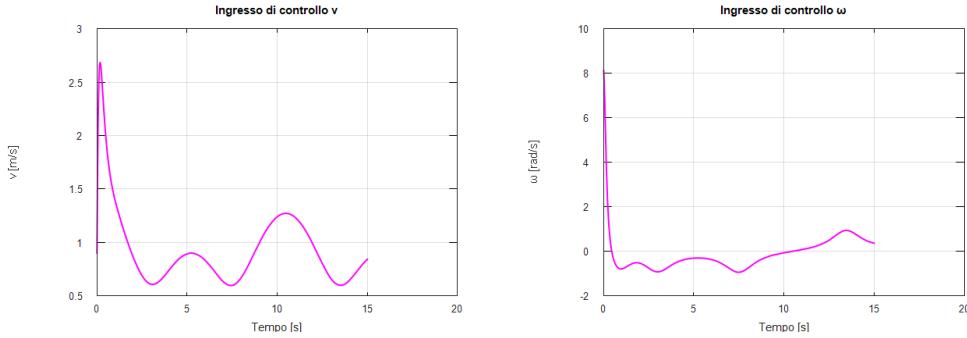


Figura 23: Segnali di controllo v (sinistra) e ω (destra)

Gli ingressi v e ω rimangono limitati e continui come si vede in Figura 23. Questo è fondamentale per la realizzabilità fisica del controllo su attuatori reali (motori). La velocità angolare ω presenta delle variazioni più marcate nelle curve strette dell'otto, come previsto dal termine di feedforward ω_d .

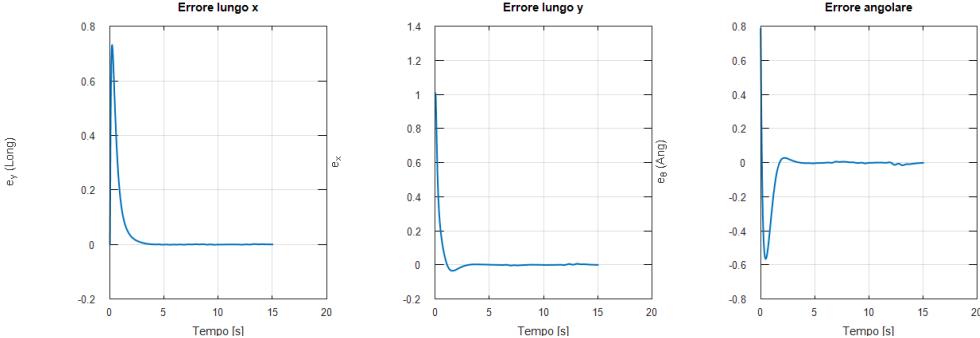


Figura 24: Andamento degli errori di inseguimento

Gli errori e_x , e_y ed e_θ tendono asintoticamente a zero come si nota in Figura 24. Si osservano delle piccole oscillazioni durante i cambi di curvatura della traiettoria, che vengono prontamente compensate dai termini di feedback.

Il robot converge rapidamente sulla traiettoria di riferimento a forma di otto in Figura 25. L'errore iniziale di posizione ($y = -1$) viene corretto nei primi secondi di simulazione grazie all'azione combinata di v e ω .

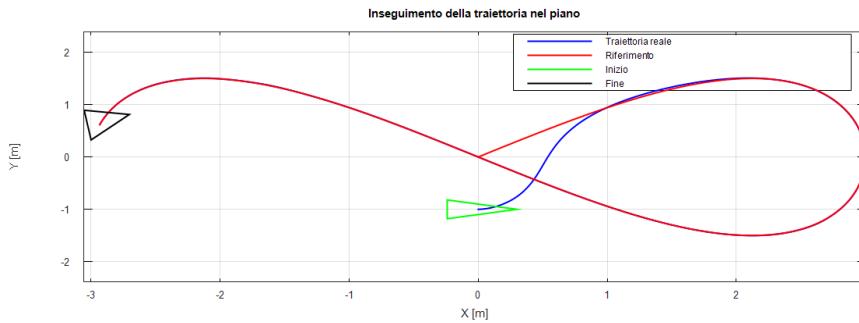


Figura 25: Traiettoria desiderata e reale del robot uniciclo

8.4 Codice

Lo script principale `unicycle_robot.m` si occupa della configurazione dei parametri, dell'inizializzazione e del loop di simulazione.

```

clear all;
close all;
clc;

addpath('8')

% Parametri del controllore
k1 = 2.0;
k2 = 5.0;
k3 = 2.5;

global gains
gains = [k1, k2, k3];

% Configurazione della simulazione
T_sim = 15;           % Durata [s]
dt = 0.01;             % Passo
t_span = 0:dt:T_sim;

% Condizioni iniziali del robot (x, y, theta)
q0 = [0; -1; 0];

```

```

% Simulazione
disp('Avvio simulazione del robot uniciclo');
[t, q] = ode45(@(t,q) unicycle_dynamics(t, q), t_span, q0);

% Ricostruiamo i segnali di riferimento e di errore per i grafici
x = q(:,1);
y = q(:,2);
theta = q(:,3);
N = length(t);
xd = zeros(N,1);
yd = zeros(N,1);
thetad = zeros(N,1);
e1 = zeros(N,1);
e2 = zeros(N,1);
e3 = zeros(N,1);
v_cmd = zeros(N,1);
w_cmd = zeros(N,1);

for i=1:N
    [dqdt, ref, err, ctrl] = unicycle_dynamics(t(i), q(i,:));
    xd(i) = ref(1);
    yd(i) = ref(2);
    thetad(i) = ref(3);
    e1(i) = err(1);
    e2(i) = err(2);
    e3(i) = err(3);
    v_cmd(i) = ctrl(1);
    w_cmd(i) = ctrl(2);
end

% Plot delle traiettorie degli errori e dei riferimenti
plot_res(x, y, xd, yd, e1, e2, e3, v_cmd, w_cmd, t, theta)

```

La funzione `unicycle_dynamics.m` implementa le equazioni cinematiche, genera il riferimento e calcola la legge di controllo.

```
function [dqdt, ref, err, ctrl] = unicycle_dynamics(t, q)
```

```

global gains
k1 = gains(1); k2 = gains(2); k3 = gains(3);

x = q(1); y = q(2); theta = q(3);

% Traiettoria a 8
A = 3;
w0 = 0.3; % frequenza base
xd = A * sin(w0*t);
yd = A * sin(2*w0*t) / 2;

% Derivate prime (velocit cartesiane riferimento)
dxd = A * w0 * cos(w0*t);
dyd = A * 2 * w0 * cos(2*w0*t) / 2;

% Derivate seconde (accelerazioni cartesiane riferimento)
ddxd = -A * w0^2 * sin(w0*t);
ddyd = -A * 4 * w0^2 * sin(2*w0*t) / 2;

% Calcolo riferimenti non-olonomi (vd, wd, thetad)
vd = sqrt(dxd^2 + dyd^2);
thetad = atan2(dyd, dxd);
wd = (dxd*ddyd - dyd*ddxd) / (vd^2 + 1e-6);

% Calcolo errori nel body frame
ex_world = xd - x;
ey_world = yd - y;
e_theta = thetad - theta;

% Normalizzazione angolo tra -pi e pi
e_theta = atan2(sin(e_theta), cos(e_theta));
e1 = cos(theta)*ex_world + sin(theta)*ey_world;
e2 = -sin(theta)*ex_world + cos(theta)*ey_world;
e3 = e_theta;

```

```

% Legge di controllo
v = vd * cos(e3) + k1 * e1;
w = wd + k2 * vd * e2 + k3 * sin(e3);

% 4. Dinamica del robot reale
dxdt = v * cos(theta);
dydt = v * sin(theta);
dthetadt = w;
dqdt = [dxdt; dydt; dthetadt];

% Output extra per post-processing
ref = [xd; yd; thetad];
err = [e1; e2; e3];
ctrl = [v; w];

```

end

La funzione `plot_res.m` permette di visualizzare l'azione di controllo, l'evoluzione degli errori rispetto ai riferimenti e la traiettoria del robot rispetto a quella desiderata.

```

function plot_res(x, y, xd, yd, e1, e2, e3, v_cmd, w_cmd, t, theta)
graphics_toolkit("gnuplot"); % fix per i grafici

% Traiettoria nel piano XY
figure(1);
plot(x, y, 'b', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(xd, yd, 'r', 'LineWidth', 2);

% Disegna il robot all'inizio e alla fine
draw_robot(x(1), y(1), theta(1), 'g');
draw_robot(x(end), y(end), theta(end), 'k');
grid on;
axis equal;
title('Inseguimento della traiettoria nel piano');
legend('Traiettoria reale', 'Riferimento', 'Inizio', 'Fine');
xlabel('X [m]');
ylabel('Y [m]');

```

```

% Errori nel tempo

figure(2);
subplot(1,3,1);
plot(t, e1, 'LineWidth', 2);
grid on;
ylabel('e_y (Long)');
xlabel('Tempo [s]');
title('Errore lungo x');

subplot(1,3,2);
plot(t, e2, 'LineWidth', 2);
grid on;
ylabel('e_x');
xlabel('Tempo [s]');
title('Errore lungo y');

subplot(1,3,3);
plot(t, e3, 'LineWidth', 2);
grid on;
ylabel('e_theta (Ang)');
xlabel('Tempo [s]');
title('Errore angolare');

% Ingressi di controllo

figure(3);
subplot(1,2,1);
plot(t, v_cmd, 'm', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('v [m/s]');
title('Ingresso di controllo v');

subplot(1,2,2);
plot(t, w_cmd, 'm', 'LineWidth', 2);

```

```

grid on;
ylabel('omega [rad/s]');
xlabel('Tempo [s]');
title('Ingresso di controllo omega');
end

```

Ho scritto la funzione `draw_robot.m` per identificare l'orientamento del robot nella raffigurazione della traiettoria.

```

function draw_robot(x, y, th, col)
    % Disegna un semplice triangolo per rappresentare il robot
    R = 0.3; % Dimensione robot
    p1 = [x + R*cos(th); y + R*sin(th)];
    p2 = [x + R*cos(th + 2.5); y + R*sin(th + 2.5)];
    p3 = [x + R*cos(th - 2.5); y + R*sin(th - 2.5)];
    plot([p1(1) p2(1) p3(1) p1(1)], [p1(2) p2(2) p3(2) p1(2)], col, '
        LineWidth', 2);
end

```

9 Funzioni ausiliarie

La funzione `is_pos_definite` verifica se una matrice è definita positiva controllando che tutti i suoi autovalori siano strettamente maggiori di una tolleranza positiva.

```
function controllable = is_controllable(A, B)

    % Costruisco manualmente la matrice di controllabilità: R_AB = [B
    % , AB, A^2B, ..., A^(n-1)B]

    R_AB = B;
    A_power = A;
    [n, ~] = size(A);

    % Aggiungo iterativamente le colonne AB, A^2B, ..., A^(n-1)B
    for i = 1:(n-1)
        R_AB = [R_AB, A_power * B];
        A_power = A_power * A;
    end

    % Controllo del rango pieno
    rank_R_AB = rank(R_AB);
    if rank_R_AB < n
        controllable = false;
    else
        controllable = true;
    end
end
```

La funzione `is_pos_semidefinite` verifica se una matrice è semidefinita positiva controllando che tutti i suoi autovalori siano maggiori o uguali a una tolleranza.

```
function detectable = is_detectable(A, C)

    % Utilizzo la dualità con la stabilizzabilità (PBH test)
    detectable = is_stabilizable(A', C');

end
```

La funzione `is_controllable` verifica la controllabilità della coppia (A, B) costruendo la matrice di controllabilità \mathcal{R}_{AB} e controllando che abbia rango pieno (n).

```
function observable = is_observable(A, C)
```

```

[n, ~] = size(A);

% Costruisco manualmente la matrice di osservabilità
O_AC = C;
A_power = A;

% Aggiungo iterativamente le righe C*A, C*A^2, ...
for i = 1:(n-1)
    O_AC = [O_AC; C * A_power];
    A_power = A_power * A;
end

% Controllo del rango pieno
rank_O_AC = rank(O_AC);
if rank_O_AC < n
    observable = false;
else
    observable = true;
end
end

```

La funzione `is_observable` verifica l'osservabilità della coppia (A, C) costruendo la matrice di osservabilità \mathcal{O}_{AC} e controllando che abbia rango pieno (n).

```

function pos_def = is_pos_definite(A)
    % Controlla se la matrice      definita positiva
    tol = 1e-6
    eigenvalues = eig(A);
    pos_def = all(eigenvalues > tol);
end

```

La funzione `is_stabilizable` verifica se il sistema a ciclo chiuso con guadagno K è stabile, controllando che gli autovalori della matrice dinamica $(A - BK)$ abbiano parte reale negativa.

```

function pos_semidef = is_pos_semidefinite(A)
    % Controlla se la matrice      semidefinita positiva
    tol = -1e-6
    eigenvalues = eig(A);
    pos_semidef = all(eigenvalues >= tol);

```

```
end
```

La funzione `is_detectable` verifica se l'osservatore con guadagno L è stabile, controllando che gli autovalori della matrice dell'errore $(A - LC)$ abbiano parte reale negativa.

```
function stabilizable = is_stabilizable(A, B)

% Utilizzo il PBH test
n = size(A, 1);
all_eigs = eig(A);

% Tolleranza per confronti numerici
tol = 1e-6;

% Filtra solo autovalori con parte reale >= 0 (instabili)
unstable_mask = real(all_eigs) >= -tol;
unstable_eigs = all_eigs(unstable_mask);
stabilizable = true;

if isempty(unstable_eigs)
    return;
end

% Test PBH sugli autovalori instabili
for i = 1:length(unstable_eigs)
    lam = unstable_eigs(i);
    pbh_mat = [A - lam * eye(n), B];

    if rank(pbh_mat, tol) < n
        stabilizable = false;
    end
end
end
```