Misura esterna e insiemi misurabili

Definizione .1 (Misura esterna di Lebesgue su R) *Per $E \subseteq R$, la misura esterna è*

—$I_k|$ è la lunghezza dell'intervallo I_k.

Definizione .2 (Criterio di Carathéodory) *Un insieme $E \subseteq R$ è* Lebesgue-misurabile *se, per ogni $A \subseteq R$,*

σ-algebra $\mathcal{L}$; la restrizione di m a $\mathcal{L}$ è la misura di Lebesgue m.

Osservazione .3 (Boreliani e completezza) *La σ-algebra di Borel $\mathcal{B}(R) = \sigma(aperti)$ è contenuta in $\mathcal{L}$. La misura di*

Funzioni misurabili

Definizione .4 *Data una misura $(X, \mathcal{F}, \mu)$, una funzione $f : X \to \overline{R}$ è* misurabile *se $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$ per ogni a*

Osservazione .5 (Stabilità) *Indicatori $\mathbf{1}_E$ con $E \in \mathcal{F}$ sono misurabili; limiti puntuali di successioni di misurabili, non*

Costruzione dell'integrale di Lebesgue Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura.

*Step 0: indicatori Per $E \in \mathcal{F}$, si pone $\displaystyle\int \mathbf{1}_E \, d\mu = \mu(E)$.

*Step 1: funzioni semplici non negative Una funzione *semplice* è $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mathbf{1}_{E_i}$ con $a_i \geq 0$, $E_i \in \mathcal{F}$ disgiunti. Defi

*Step 2: funzioni misurabili non negative Per $f \geq 0$ misurabile,

Equivalentemente: esiste $s_n \uparrow f$ con s_n semplici e $\int f = \lim_n \int s_n$.

*Step 3: funzioni a valori reali Scrivi $f = f^+ - f^-$ con $f^\pm = \max\{\pm f, 0\}$. Diciamo $f \in L^1(\mu)$ se $\int |f| \, d\mu < \infty$, e

Proposizione .6 (Proprietà di base) *Valgono: (i) monotonia, (ii) linearità quando definita, (iii) semi-continuità dal*

Teoremi di convergenza

Teorema .7 (Beppo Levi / Convergenza Monotona) *Se $0 \leq f_n \uparrow f$ a.e., allora $\displaystyle\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu$.*

Teorema .8 (Lemma di Fatou) *Se $f_n \geq 0$, allora $\displaystyle\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$.*

Teorema .9 (Convergenza Dominata di Lebesgue) *Se $f_n \to f$ a.e. e $f_n \leq g \in L^1$, allora $f \in L^1$ e $\displaystyle\int f_n \to \int f$.*

Teorema .10 (Tonelli e Fubini) *Sia $f : X \times Y \to [0, \infty]$ misurabile. Allora*

Se invece $f \in L^1(\mu \otimes \nu)$, valgono le stesse uguaglianze (Fubini) e le sezioni sono L^1.

Strumenti utili

Proposizione .11 (Layer-cake / Cavalieri) *Se $f \geq 0$,*

Proposizione .12 (Disuguaglianze fondamentali) *Per $1 \leq p \leq \infty$: Hölder, Minkowski; Jensen su spazi di probabilit*

Proposizione .13 (Spazi L^p) *$\|f\|_p = (\int |f|^p)^{1/p}$. Se $\mu(X) < \infty$ e $p > q$, allora $L^p \subset L^q$ e $\|f\|_q \leq \mu(X)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_p$.*

Riemann vs Lebesgue

Teorema .14 (Criterio di Lebesgue per Riemann) *$f : [a, b] \to R$ è Riemann-integrabile se e solo se l'insieme dei p*

Esempio .15 (Dirichlet e Thomae) *$\mathbf{1}_{Q \cap [0,1]}$ non è Riemann-integrabile ma è Lebesgue-integrabile con integrale* 0. *La*

Esercizi svolti

Esercizio .16 (Approssimazione dal basso) *Sia $f \geq 0$ misurabile su $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Definisci*

Mostra che $s_n \uparrow f$ e che $\displaystyle\int f = \lim_n \int s_n$.

Per definizione degli s_n, si ha $0 \leq s_n \leq f$ e $s_n(x) \uparrow f(x)$ per ogni x (raffinamento della griglia a passi 2^{-n}). Per Beppo I

Esercizio .17 (DCT classico: x^n) *Su $([0, 1], \mathcal{B}, m)$, $f_n(x) = x^n$. Calcola $\int_0^1 f_n \, dx$ e il limite.*

$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$. Inoltre $f_n \to 0$ a.e. su $[0, 1)$ e $|f_n| \leq 1 \in L^1$, dunque per DCT $\int f_n \to 0$ coerentemente col calcolo

Esercizio .18 (Indicatori dei razionali) *Mostra che $\int_0^1 \mathbf{1}_Q \, dx = 0$.*

$Q \cap [0, 1]$ è numerabile, quindi di misura nulla. Per definizione dell'integrale su indicatori, $\int \mathbf{1}_E = \mu(E) = 0$.

Esercizio .19 (Tonelli su integrale doppio semplice) *Calcola $I = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{\{x<y\}} \, dx \, dy$.*

La funzione è non negativa: Tonelli permette lo scambio. Per y fissato, $\int_0^1 \mathbf{1}_{\{x<y\}} dx = y$. Quindi $I = \int_0^1 y \, dy = 1/2$.

Esercizio .20 (Layer-cake per stima di integrabilità) *Su R, per $\alpha > 0$ considera $f_\alpha(x) = \min\{1, |x|^{-\alpha}\}$. Determin*

Basta controllare integrabilità vicino a 0 e a ∞. Per $|x| \leq 1$, $f_\alpha = |x|^{-\alpha}$: integrabile su $(-1, 1)$ se e solo se $\alpha < 1$. Per $|x$

Esercizio .21 (Confronto Riemann/Lebesgue) *Sia $f = \mathbf{1}_{Q \cap [0,1]}$. Spiega perché non è Riemann-integrabile ma è Leb*