10 Teorema di Rice

lunedì 2 dicembre 2024 14:02

1

Teorema di Rice

- sia C un insieme di linguaggi
- considera il linguaggio L_C delle MT M tale che

$$L_C = \{<M> \mid L(M) \in C\}$$

teorema: il linguaggio L_C :
- o è vuoto
- o contiene le descrizioni di tutte le MT
- o è indecidibile

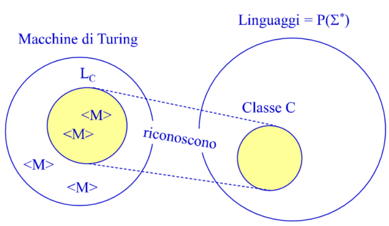
2

M è una mt quando L(M) (linguaggio riconosciuto dalla mt) appartiene a C.
-> C è un insieme di Linguaggi.
Voglio stabilire se M riconosce un linguaggio di quell'insieme oppure no

Vuoti-> nessuna mt rispetta tali proprietà

2

Graficamente



3

Un linguaggio è un sottoinsieme di sigma asteriscato e li trovo tutti all'interno del cerchio grande a destra.
Classe C-> gruppo di linguaggi che prendiamo in considerazione

Poi a sx: ci sono tutte le mt, e voglio trovare tra esse quelle che riconoscono un linguaggio dell'insieme della classe C.

Tutti i problemi interessanti sulla mt sono indecidibili praticamente.

Significato del teorema di Rice

- consideriamo una qualunque proprietà che ci piacerebbe verificare per un linguaggio
  - es: vogliamo verificare se un linguaggio è regolare
- definiamo l'insieme C dei linguaggi che hanno quella proprietà
  - es: C è l'insieme dei linguaggi regolari

Lc è il L delle mt (ovvero delle stringhe che rappresentano le mt) che riconoscono linguaggi con quella proprietà.

4

2

Significato del teorema di Rice

- L_C è il linguaggio delle (rappresentazioni delle) MT che riconoscono linguaggi con quella proprietà
  - es: L_C è il linguaggio delle MT che riconoscono linguaggi regolari

5

5

Significato del teorema di Rice

- o tutte le MT riconoscono linguaggi con quella proprietà
  - es: per i linguaggi regolari non è vero
- o nessuna MT riconosce linguaggi con quella proprietà
  - es: per i linguaggi regolari non è vero
- oppure L_C è indecidibile
  - es: è indecidibile stabilire se il linguaggio riconosciuto da una certa MT è regolare

6

È vero che tutte le mt riconoscono linguaggi regolari?
No, ci sono mt che non riconoscono i linguaggi regolari

Non è vero nemmeno questo

È indecidibile se un L riconosciuto da una determinata mt è regolare

6

3

Conseguenze del teorema di Rice

- alcune proprietà sono banalmente soddisfatte da tutte le MT
  - es: tutte le MT riconoscono sottoinsiemi di Σ^*
- altre proprietà non sono soddisfatte da nessuna MT
  - es: nessuna MT riconosce $\underline{A}_{TM}$

Perché il complemento di atm non è riconoscibile

- per tutte le altre proprietà è indecidibile stabilire quali siano le MT che le soddisfano
  - es: è indecidibile stabilire quali MT riconoscono un linguaggio
    - finito o infinito
    - che contiene solo numeri primi
    - che contiene la stringa "a"
    - ….

7

7

Esempio "didattico"

- un esercizio d'esame richiede di produrre una MT che riconosca un linguaggio con delle specifiche proprietà
  - es: produrre una MT che riconosca $(aa)^*$

- vogliamo una procedura per correggere le risposte
  - opzione 1: tutte le MT proposte sono necessariamente giuste
    - la proprietà richiesta è banale
  - opzione 2: tutte le MT proposte sono necessariamente errate
    - la proprietà richiesta è impossibile da soddisfare con una MT
  - opzione 3: è impossibile decidere il linguaggio
    - cioè accettare le soluzioni giuste e rifiutare le soluzioni sbagliate
    - N.B.: potrebbe ancora essere possibile *riconoscere* il linguaggio, cioè accettare le soluzioni giuste, ma non è possibile *decidere* il linguaggio, cioè rifiutare anche le soluzioni sbagliate

8

8

Oss: potrebbe ancora essere possibile riconoscere il linguaggio ma NON deciderlo (ovvero rifiutare le soluzioni sbagliate).

"Data una mt, essa ha 5 stati?" -> questo problema è decidibile oppure no?
Si è decidibile perché posso contarli guardando la macchina stessa.
Rice fa riferimento alla semantica, non alla sintassi della macchina.

Dimostrazione

- possiamo assumere che $\varnothing$ non appartenga a C
  - altrimenti applichiamo quanto segue a $\overline{C}$
    - infatti se L_C non è vuoto, non contiene tutte le MT ed è decidibile, anche $L_{\overline{C}}$ lo è

9

9

C-> insieme dei linguaggi presi in considerazione, e assumo che il linguaggio vuoto non gli appartiene.
Altrimenti se lo contiene, applichi il tutto al complemento di C.

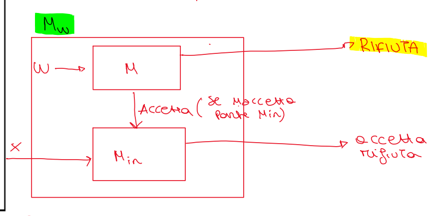
Riduzione da A_{TM} ad L_C

- costruiamo una riduzione da A_{TM} ad L_C
- osservazione: essendo L_C non vuoto esiste almeno una MT M_{in} tale che $L(M_{in}) \in C$
- data un'istanza $<M,w>$ di A_{TM} costruiamo un'istanza M_w di L_C tale che, per ogni input x, M_w prima simula M su w
  - se M su w cicla, allora anche M_w cicla
  - se M su w rifiuta, allora anche M_w rifiuta
  - se M su w accetta, allora M_w continua simulando M_{in} con input x (accetta x, rifiuta x o cicla come M_{in})

10

10

Riduzione da atm a Lc-> per dimostrare l'indecidibilità di Lc.
- Min è una mt che riconosce linguaggi che fanno parte di C.
- Mw -> macchina che costruisco per fare la riduzione



Mw-> Si comporta come Min oppure come una mt che riconosce il linguaggio vuoto.
Min è positiva o negativa per pil problema in funzione se M accetta o meno w.

- Se M accetta w → Mw si comporta come Min
- Se M NON " → Mw rifiuta tutto o cicla → non riconosce nessuna stringa → È una macchina da scartare per risolvere il problema iniziale
  - ↓ riconosce il lng vuoto = $\varnothing$ che $\notin$ C. → Ma a noi non va bene

Mw → è la macchina da ottenere Per la riduzione

Riduzione da A_{TM} ad L_C

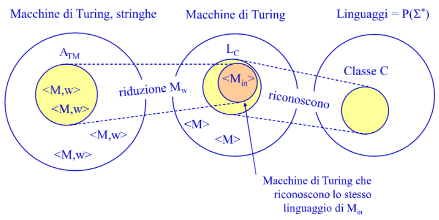
- quindi se M accetta w, allora M_w si comporta come M_{in} e accetta x se e solo se M_{in} accetta x
  - in altri termini se $<M,w> \in A_{TM}$, allora $L(M_w) = L(M_{in}) \in C$, cioè $M_w \in L_C$
- se M non accetta w, allora M_w non accetta nessun input e $L(M_w)=\varnothing \notin C$
  - cioè se $<M,w> \notin A_{TM}$, allora $M_w \notin L_C$

11

11

Discriminare se la mt si comporta come Min (ovvero sta dentro o fuori) mi fa capire il problema.

Graficamente



12