02 - Cardinalità transfinite

Filippo Visconti

Contents

1 Cardinalità transfinite **1**
1.1 Pidgeonole Principle 1

2 Numerabilità **2**
2.1 $\aleph_0 + k = \aleph_0$ 2
2.2 Numerabilità degli interi relativi 2
2.3 Insiemi non numerabili 2
2.4 Notazione $\aleph$ 4

3 Conseguenze della teoria **4**

1 Cardinalità transfinite

Si tratta della cardinalità di un insieme infinito. Vogliamo vedere se 2 insieme infiniti sono uno più grande dell'altro (nonostante l'infinità). > Spoiler: sono tutti uguali

1.1 Pidgeonole Principle

Dati due insiemi A e B tali che

$$0 < |B| < |A| < \infty$$

non esiste una funzione $f : A \to B$ che sia **totale** e **iniettiva**.

La dimostrazione è basata sulla cardinalità di B e per induzione.

1.1.1 Passo base: $|B| = 1$

$B = \{b\}, |A| > 1$.

Se f è totale, allora $f(a_1) = b$ e $f(a_2) = b$, ma allora f non è iniettiva perché $|f^{-1}(B)| > 1$

1.1.2 Passo induttivo: $|B| > 1$

Supponiamo sia vero per $|B| = n$ e $|A| \geq n + 1$. Dimostriamo che è vero per $|B| = n + 1$ e $|A| \geq n + 2$. Ipotizziamo per assurdo che esista una funzione totale iniettiva f e scegliamo un qualunque elemento b di B. Se $|f^{-1}(B)| > 1 \Rightarrow$ contraddizione, dunque teorema dimostrato. Se $|f^{-1}(B)| \leq 1$ consideriamo $A' = A - \{f^{-1}(b)\}$ e $B' = B - \{b\}$

$$|A'| \geq n + 1 > |B'| = n$$

Applicando l'ipotesi induttiva si giunge a una contraddizione.

> *Non esiste una funzione induttiva che possa legarli.*

1.1.3 Considerazioni

Il pidgeonhole principle mette in relazione la numerosità degli insiemi con le proprietà delle funzioni, i cui domini e codomini sono insiemi. In particolare, se esiste una funzione biettiva $f : A \to B$; Il pidgeonhole principle mette in relazione la numerosità degli insiemi con le proprietà delle funzioni, i cui domini e codomini sono insiemi. In particolare, se esiste una funzione biettiva $f : A \to B$;

- esiste una funzione totale e iniettiva $f : A \to B$;
- esiste una funzione totale e iniettiva $f^{-1} : B \to A$;
- per il pidgeonhole principle, se A e B sono insiemi finiti, non può essere $|B| > |A|$ né $|A| > |B|$.

Dunque, devono avere la stessa cardinalità.

Due insiemi sono *equinumerosi* se esiste una biiezione tra essi (ossia una funzione biettiva che li lega). La relazione di equinumerosità è una **relazione di equivalenza** – riflessiva, simmetrica e transivita.

2 Numerabilità

Un insieme è **numerabile** se è equinumeroso a N (l'insieme dei numeri naturali). Un insieme ha cardinalità *aleph zero* ($\aleph_0$) se è equinumeroso a N, cioè se è numerabile.

Un insieme è **contabile** se è finito o numerabile. I sottoinsiemi di insiemi contabili sono contabilil.

2.1 $\aleph_0 + k = \aleph_0$

Per ogni intero k, l'insieme N_k degli interi maggiori o uguali a k è numerabile.

Figure 1: aleph.png

2.2 Numerabilità degli interi relativi

L'insieme Z degli interi relativi è numerabile.

2.3 Insiemi non numerabili

Per dimostrare la non numerabilità di un insieme si usa la tecnica di diagonalizzazione di Cantor. Dimostriamo che R è equinumeroso a $(0, 1)$ e che $(0, 1)$ non è equinumeroso.

Supponiamo per assurdo che una enumerazione di $(0, 1)$ esista, denotiamo con ϕ_i l'i-esimo elemento di $(0, 1)$. Consideriamo $r \in (0, 1)$ che ha come i-esima cifra della mantissa ($i = 1, 2, \dots$) un valore diverso da 0 a 9 e dal valore della i-esima cifra di ϕ_i.0

Le cifre dell'elemento diagonale r sono scelte in modo da essere diverse da 0 e da 9:

- non si può generare la mantissa 0000 ... che non appartiene all'insieme;

Figure 2: aleph2.png

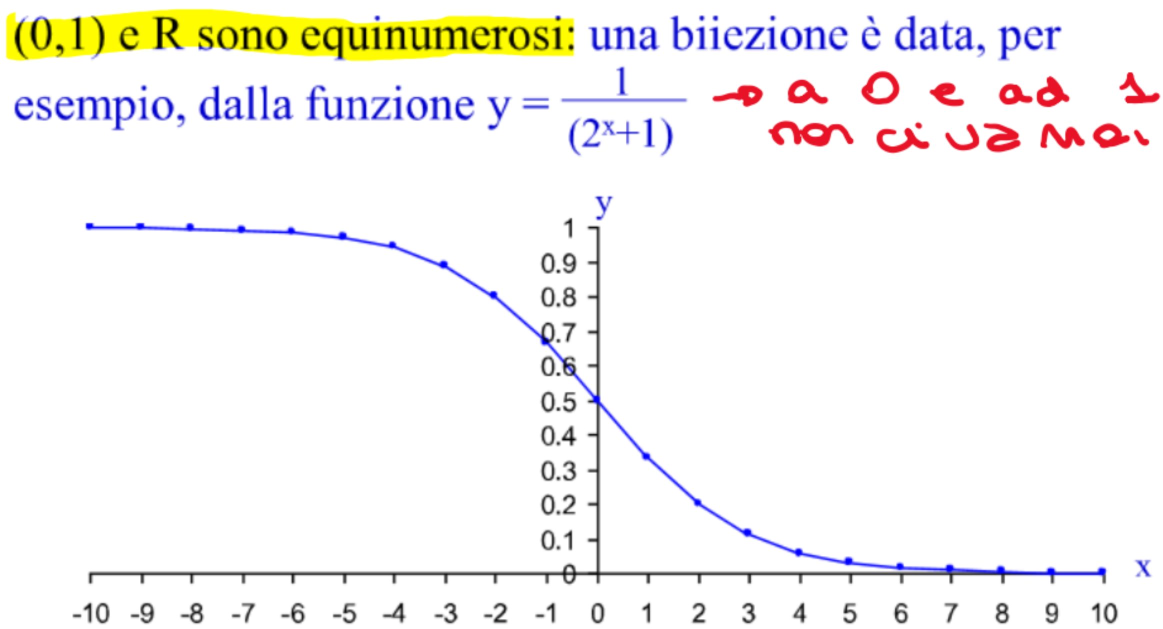

Figure 3: 08-card.png

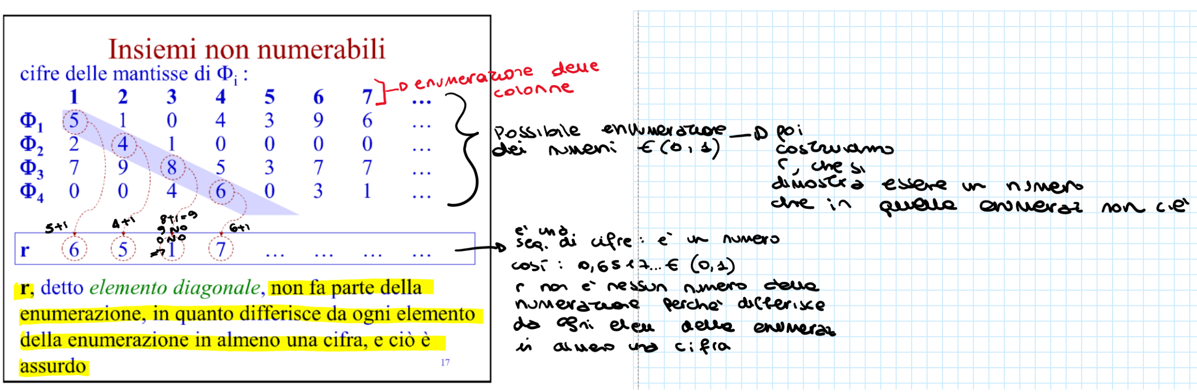

Figure 4: 08-mant.png

- non si possono generare numeri terminanti con 9 periodico che corrispondono ad una seconda rappresentazione di un numero non periodico (0.999 che coincide con 1)

2.3.1 $P(N)$ non è numerabile

L'insieme delle parti di N non è numerabile.

Supponiamo per assurdo che lo sia, e sia $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$ una sua enumerazione. A ciascun P_i associamo la sequenza $b_{i0}, b_{i1}, b_{i2}, \dots$ dove

$$b_{ij} = 0 \text{ se } j \notin P_i$$
$$b_{ij} = 1 \text{ se } j \in P_i$$

Costruiamo ora l'insieme P (diagonale) con sequenza $p_0, p_1, \dots, p_k, \dots$ dove $p_k = 1 - b_{kk}$. P differisce da ogni P_i in quanto $i \in P \Leftrightarrow i \in P_i$.

> Osservazione. La non numerabilità di $P(N)$ vale anche per l'insieme delle parti di ogni insieme di cardinalità $\aleph_0$.

2.3.2 R è equinumeroso a $P(N)$

R e $P(N)$ non sono numerabili. Se sono equinumerosi esiste una biiezione tra essi. Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che la proprioetà vale per i reali in $(0, 1)$, vista la biiezione tra R e $(0, 1)$.

2.4 Notazione $\aleph$

Se un insieme finito ha cardinalità n, il suo insieme delle parti ha cardinalità 2^n. Analogamente, se un insieme delle parti ha cardinalità $\aleph_0$, denotiamo con $2^{\aleph_0}$ la cardinalità del suo insieme delle parti.

Gli insiemi con cardinalità $2^{\aleph_0}$ sono detti continui. Cantor ha dimostrato che esistono infiniti cardinali transfiniti ($\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \dots$)

3 Conseguenze della teoria

Le considerazioni sulla cardinalità degli insiemi infiniti danno spunti interessanti sulla effettiva possibilità di risolvere problemi utilizzando calcolatori.

Un linguaggio è un sottoinsieme di $\Sigma^\star$.

Qual è la cardinalità di $\Sigma^\star$? $\Sigma^\star$ è un insieme infinito. Però le stringhe sono di lunghezza finita. La sua cardinalità è $\aleph_0$ dato cvhe sono infinite stringhe di lunghezza finita e posso scandirle in un tempo finito. Mettere tutte le stringhe in ordine alfabeticio e contarle, però, non si può fare. 1. Come la costruisco la corrispondenza biunivoca? Si fa con: {epsilon, a, b. aa, ab, ba, bb...}–> ordinamento lessicografico. Questo fa si che se ho una stringa di 150 caratteri tu sai quale è il numero che gli corrisponde. Non devo aspettare infinte stringhe per sapere a quale numero corrisponde

Qual è la cardinalità di $P(\Sigma^\star)$? $2^{\aleph_0}$, qualunque insieme equinumeroso a N

Quanti linguaggi esistono? I sottoinsiemi di sigma asteriscato sono $2^{\aleph_0}$, quindi sono $2^{\aleph_0}$ linguaggi esistenti.

Un programma in un linguaggio di programmazione qualsiasi può essere considerato come una sequenza finita di caratteri. **Quanti sono i possibili programmi che si possono scrivere?** I programmi che li possono risolvere sono $\aleph_0$, ci sono più problemi che programmi–> esistono problemi che non posso risolvere.