Lucrarea nr. 7

Trasarea caracteristicilor logaritmice de frecvență ale sistemului deschis

1. Considerații teoretice

Analiza în domeniul frecvenței a sistemelor de reglare automată liniare se face cu ajutorul caracteristicilor de frecvență.

1.1. Caracteristicile logaritmice de frecvență ale sistemelor în circuit deschis

Pentru a analiza sistemele de reglare automată liniare sunt folosite în mod frecvent caracteristicile amplitudine – pulsație şi fază – pulsație, ale sistemului în circuit deschis, în reprezentare logaritmică. Acestea se mai numesc şi caracteristici sau diagrame Bode. Ele prezintă avantajul că permit analiza unui sistem de reglare într-un domeniu de frecvență mai mare decât scara liniară. În plus, prin logaritmare produsele de mărimi complexe se transformă în sume. Acest lucru uşurează foarte mult construcția caracteristicilor logaritmice.

Pentru definirea acestor caracteristici de frecvență se pleacă de la un sistem în circuit închis prin reacție negativă unitară (prezentat în figura 1).

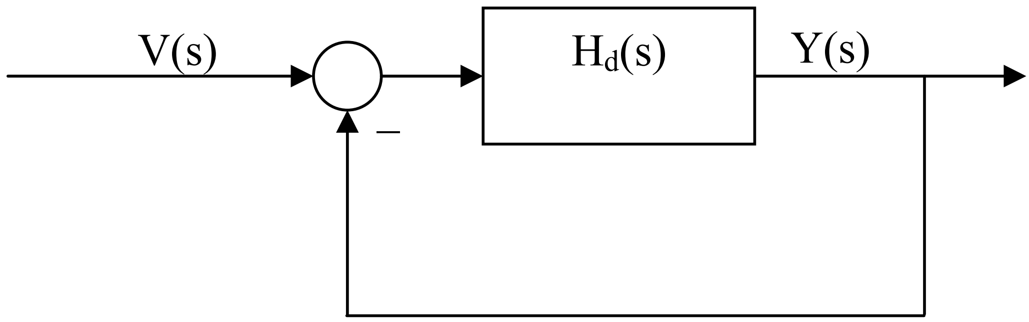

Figura 1

Se ştie că funcţia de transfer $H_d(s)$ poate fi adusă la forma:

$$H_d(s) = \frac{k_d}{s^{\alpha}} \frac{\prod_{i=1}^{m}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s + p_j)}$$

unde: $-z_i$ - reprezintă zerourile funcţiei de transfer $H_d(s)$;

$-p_j$ - reprezintă polii funcţiei de transfer $H_d(s)$;

Caracteristica logaritmică amplitudine–pulsaţie, notată cu $L_d(\omega)$, este:

$$L_d(\omega) = 20\lg\left|H_d(j\omega)\right|$$

Caracteristica logaritmică fază – pulsaţie, notată $\varphi_d(\omega)$, este:

$$\varphi_d(\omega) = \arg(H_d(j\omega))$$

De reţinut că axa pulsaţiilor va fi la scară logaritmică.

Reamintim că legătura între scara logaritmică şi cea liniară este dată de relaţia: $\omega = 10^x$. În plus, o decadă, pe axa logaritmică, este dată de relaţia: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 10$

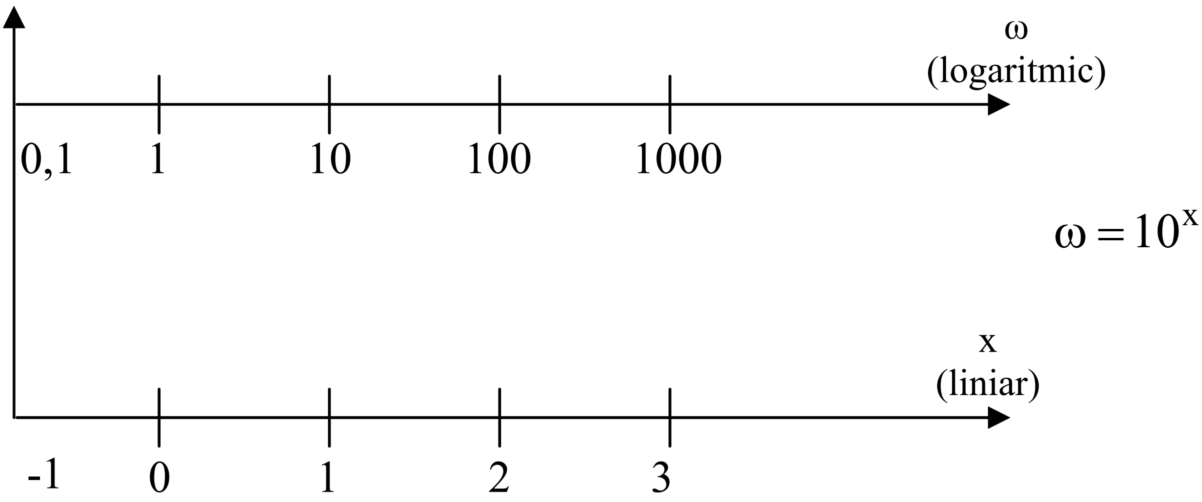

Figura 2

$$x = 0 \Rightarrow \omega = 1$$
$$x = -1 \Rightarrow \omega = 10^{-1} = 0.1$$
$$x = 1 \Rightarrow \omega = 10$$
$$x = 2 \Rightarrow \omega = 100$$

Vom descrie în continuare paşii care trebuie urmați atunci când dorim să trasăm caracteristica logaritmică amplitudine – pulsație:

Pasul 1. Se va aduce $H_d(s)$ la forma standard, cu punerea în evidență a elementelor integratoare, liniare şi pătratice:

$$H_d(s) = \frac{k_d}{s^{\alpha}} \frac{\prod_{i=1}^{m}(1 + sT_i)}{\prod_{j=1}^{n}(1 + sT_j)}$$

unde: $z_i = \frac{-1}{T_i}$ - reprezintă zerourile funcției de transfer $H_d(s)$;

$p_j = \frac{-1}{T_j}$ - reprezintă polii funcției de transfer $H_d(s)$;

k_d - factorul de amplificare;

α - numărul polilor situați în origine.

Pasul 2. Vom calcula K_d în decibeli, care este de fapt egal cu $20\lg K_d$, şi vom figura punctul A(1, $20\lg K_d$).

Pasul 3. Pe axa ω, gradată logaritmic, vom dispune, în ordine crescătoare, pulsațiile de frângere:

$$\omega_i = \left| -\frac{1}{T_i} \right|$$

$$\omega_k = \left| -\frac{1}{T_k} \right|$$

În punctele de coordonate (ω_i,0), (ω_k,0) vom ridica verticale.

Pasul 4. Prin punctul A(1, $20\lg K_d$) se trasează asimtota, la frecvențe joase, de pantă egală cu -20[dB/dec.].

Pasul 5. La intersecția asimptotei de frecvență joasă cu prima verticală se modifică panta asimptotei cu $\pm 20 dB/dec$ sau cu $\pm 40 dB/dec$, în funcție de elementul care corespunde pulsației de frângere.

La intersecția cu următoarele verticale se va proceda similar.

Reamintim că:

- un element de forma $H(s) = \frac{1}{1+sT}$ introduce o pantă de -20 dB/dec.

- un element de forma $H(s) = 1 + sT$ introduce o pantă de +20dB/dec.
- un element de forma $H(s) = \dfrac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$ introduce o pantă de -40dB/dec.
- un element de forma $H(s) = T^2 s^2 + 2\xi T s + 1$ introduce o pantă de +40dB/dec.

Pasul 6. Pentru trasarea caracteristicilor exacte (paşii anteriori ajută la trasarea caracteristicilor asimtotice) se va introduce în punctele de frângere, ale caracteristicilor asimtotice, corecții corespunzătoare factorilor liniari sau pătratici.

Pentru sistemele de ordinul I şi II erorile de aproximare ale caracteristicilor logaritmice amplitudine-pulsație, prin cele asimptotice, au următoarele valori, în punctele de frângere.

- $\varepsilon = \pm 20 \lg \sqrt{2} = \pm 3\text{dB}$ - pentru sistemele de ordinul I;
- $\varepsilon = \pm 20 \lg (2 \cdot \xi)$ - pentru sistemele de ordinul II.

Caracteristica fază – pulsație se obține prin însumarea efectivă a argumentelor corespunzătoare elementelor care apar în $H_d(s)$.

Pentru $\omega \to \infty$ faza finală este determinată de excesul poli – zerouri ai sistemului.

2. Exemplu de calcul

Ex. 1. Fie funcţia de transfer $H_d(s) = \frac{1}{s}\frac{(1+0,2s)(1+8s)}{(1+0,5s)(1+0,1s)}$

Să se traseze caracteristica logaritmică amplitudine – pulsaţie

Rezolvare

Vom identifica constantele T_i :

$$T_1 = 0,2 \Rightarrow \omega_1 = \left|-\frac{1}{0,2}\right| = 5$$

$$T_2 = 8 \Rightarrow \omega_2 = \left|-\frac{1}{8}\right| = 0,125$$

$$T_3 = 0,5 \Rightarrow \omega_3 = \left|-\frac{1}{0,5}\right| = 2$$

$$T_4 = 0,1 \Rightarrow \omega_4 = \left|-\frac{1}{0,1}\right| = 10$$

Vom ordona crescător pulsaţiile de frângere (tăiere).

Deci, ordonând crescător pulsaţiile, vom avea : $\omega_2, \omega_3, \omega_1, \omega_4$.

Pentru o trasare mai simplă, vom renota pulsaţiile astfel:

$$\omega_1' = \omega_2$$

$$\omega_2' = \omega_3$$

$$\omega_3' = \omega_1$$

$$\omega_4' = \omega_4$$

Vom scrie explicit pe $H_d(s)$ în aşa fel încât să punem în evidenţă elementele cărora le corespund pulsaţiile de tăiere (ţinând cont de ordinea crescătoare a acestora).

Vom avea:

$$H_d(s) = \frac{1}{s}(1+8s)\frac{1}{1+0,5s}(1+0,2s)\frac{1}{1+0,1s}$$

$$\Rightarrow H_d(j\omega) = \frac{1}{j\omega}(1+8j\omega)\frac{1}{1+0,5j\omega}(1+0,2j\omega)\frac{1}{1+0,1j\omega}$$

Se observă că, în cazul de față, avem: $\begin{cases} Kd = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Deci $\left(K_d\right)_{dB}$ =20lg Kd = 20lg 1 = 0 $\Rightarrow$ A(1,0)

Întrucât α = 1 , panta pentru $\frac{1}{s^{\alpha}}$ va fi de -20dB/decadă. Pulsația $\omega_1^{'}$ corespunde unui element anticipativ de ordinul 1, şi rezultă că va introduce o pantă de +20dB/decadă. Astfel panta totală pentru asimtota obținută atunci când ω se mişcă în intervalul [$\omega_1^{'}$ $\omega_2^{'}$], va fi egală cu:

m_1= -20dB/decadă + 20dB/decadă = 0dB/decadă

Pulsația $\omega_2^{'}$ corespunde unui element aperiodic de ordinul I şi acesta va introduce o pantă de -20dB/decadă. Panta totală pentru asimtota obținută atunci când ω se mişcă în intervalul [$\omega_2^{'}$ $\omega_3^{'}$] va fi:

m_2= 0dB/decadă - 20dB/decadă = -20dB/decadă

Făcând raționamente similare , vom obține următoarele pante:

m_3= 0dB/decadă , pentru $\omega \in$ [$\omega_3^{'}$ $\omega_4^{'}$]

m_4= -20dB/decadă , pentru $\omega \in$[$\omega_3^{'}$ ∞].

Caracteristica finală este prezentată în figura 3.

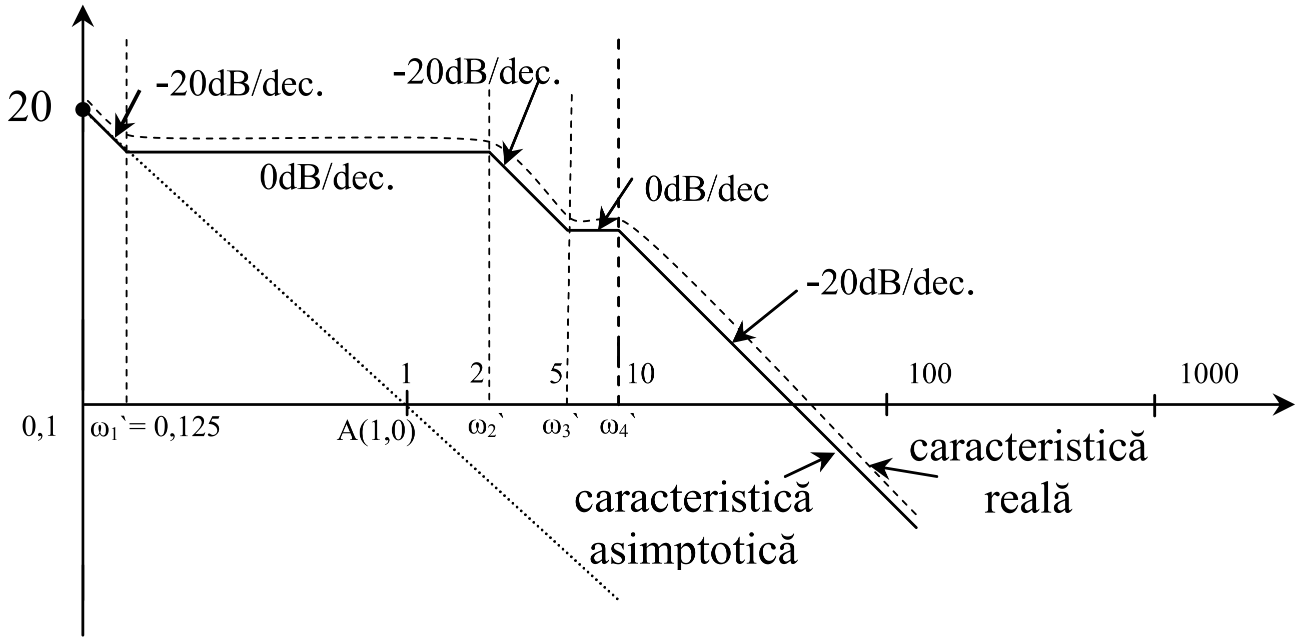

Figura 3

Caracteristicile Bode pot fi uşor obţinute utilizând Matlab-ul. Vom prezenta în continuare programul în Matlab pentru exemplul anterior:

```
num=conv([0.2 1],[8 1])
p1=conv([1 0],[0.5 1])
den=conv(p1,[0.1 1])
bode(num,den)
```

Întrucât în realizarea acestui program am utilizat două comenzi noi, acestea vor fi prezentate în continuare.

- comanda `p=conv(p1,p2)`- realizează produsul polinoamelor p1 şi p2;
- comanda `bode(num,den)` – trasează pe un ecran împărţit în două, diagramele Bode (diagrama de amplitudine în decibeli şi diagrama de fază în grade)

3. Temă pentru laborator

Să se traseze caracteristicile Bode pentru sistemele având funcțiile de transfer:

a) $H_d(s) = \dfrac{1}{(s+0,2)(2s+1)}$

b) $H_d(s) = \dfrac{5(s+8)}{s(s+2)(s+4)}$

c) $H_d(s) = \dfrac{100}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

d) $H_d(s) = \dfrac{10^3(s+10)}{(s+1)(s^2+20s+10^3)}$

Să se conceapă apoi un program utilizând Matlab-ul pentru trasarea caracteristicilor Bode