UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA INDUSTRIAL

CURSO MODELAGEM MATEMÁTICA NA QUARENTENA
Módulo 5: Soluções numéricas dos modelos matemáticos

Nome: Fillipe Rafael Bianek Pierin **GRR:** 20204093
Curso: Matemática Industrial

1 Introdução

Relatório do módulo 5 do curso Modelagem Matemática na Quarentena. Neste módulo se estuda métodos para obter as soluções numéricas para alguns dos modelos apresentados nos módulos anteriores.

Nas análises numéricas e implementações foram realizadas usando a programação Python versão 3.8.3. no Google Colab. Os códigos das implementações e análises podem ser obtidos no GitHub, `https://github.com/fillipepierin/Curso_Modelagem_na_Quarentena`.

1.1 Solução Numérica

Solução numérica é o procedimento empregado para calcular de forma aproximada, uma estimativa para a solução de problema de valores iniciais (PVI) ou problema de valor de contorno (PVC). Este processo acontece de forma iterativa, isto é, em passos [1]. Para isso, precisa-se de um ponto inicial ($u(a) = u_a$) para começar essa iteração. Então, um PVI é dado da seguinte forma

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \;\; t \in (a, b] \\ u(a) = u_a, \end{cases}$$

onde $f : [a, b]$ x $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $u_a \in \mathbb{R}$ conhecidos.

2 Métodos Numéricos

2.1 Método de Euler Explícito

O método de Euler explícito é um método usado para resolver problemas de PVI de primeira ordem. Define-se a aproximação numérica do PVI como

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i), \ \ i = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_a, \end{cases} \tag{1}$$

Este método é explícito, porque as diferenças são tomadas no passo i.

2.2 Método de Euler Implícito

O método de Euler implícito é o mesmo que o método de euler explícito, somente com a diferença que as diferenças são tomadas no tempo $i+1$, [3], por isso é chamado de implícito. Define-se a aproximação numérica do PVI como

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}), \ \ i = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_a, \end{cases} \tag{2}$$

Desta forma, quando busca resolver um problema implícito, precisa-se isolar u_{i+i} para se obter a solução aproximada, diferentemente do método explícito em que encontra-se a solução sem precisar isolar, mas de forma direta.

2.3 Método dos Trapézios

O método dos trapézios é um método mais preciso que o método de Euler, mas também de primeira ordem. Este método é um método implícito, de passo múltiplo, pois precisa de mais de um passo (i e $i+1$). Define-se a aproximação numérica do PVI como

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})), \ \ i = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = u_a, \end{cases} \tag{3}$$

3 Ordem de Convergência

Uma das propriedades básicas para se encontrar soluções numéricas é a precisão. Deste modo, toda vez que se calcula soluções aproximadas, precisa-se saber se o método é capaz de fornecer uma solução mais próxima da exata, que se procura [4]. Por isso, define-se a convergência. Porém, nem sempre se tem a equação da solução exata por isso usa-se a definição de ordem de convergência numérica, que utiliza como solução exata $u(t_i)$ a solução numérica com um h pequeno.

3.1 Erro de aproximação

O erro de aproximação de um PVI é dado por

$$e_h(t_i) = u(t_i) - u_i, \;\; i = 0, \ldots, N,$$

onde $u(t_i)$ representa a solução exata do problema.
Diz-se que o método é convergente, quando

$$\lim_{h \to 0} ||e_h|| = 0.$$

3.2 Teórica

Definição 1 *Um inteiro p é chamado de ordem de convergência do método se existe uma constante $C > 0$, independente de h, tal que*

$$||e_h|| \leq Ch^p,$$

onde p é o maior inteiro que satisfaz a desigualdade.

3.3 Numérica

Usando a definição de ordem de convergência teórica tem-se que $||e_{h_1}|| \leq Ch^p$ e $||e_{h_2}|| \leq Ch^p$. Logo,

$$\frac{||e_{h_1}||}{||e_{h_2}||} \leq \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p.$$

Considerando h_1 e h_2 suficientemente pequenos encontra-se que

$$p \approx \frac{\log(||e_{h_1}||/||e_{h_2}||)}{\log(h_1/h_2)}. \tag{4}$$

4 Atividades

Neste capítulo apresenta a resolução das atividades propostas pelo professor responsável pelo módulo. Nestas soluções, apresenta-se tanto parte teórica como parte de programação.

Supondo que $S(t)+I(t)+D(t)=N$ em $t\in(1,T]$, considere o modelo SID, definido pelo PVI

$$S(t)' = -\frac{\beta}{N}S(t)I(t) \tag{5}$$
$$I(t)' = \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t) \tag{6}$$
$$D(t)' = \gamma I(t) \tag{7}$$

com condições iniciais

$$S(1) = 210147124, \;\; I(1) = 1, \;\; D(1) = 0.$$

Atividades 1 *Utilize o método dos trapézios para aproximar a solução do modelo.*

Aplicando método dos trapézios:
De (6): $f(t,I(t)) = \frac{\beta}{N}\cdot S(t)\cdot I(t) - \gamma\cdot I(t)$.
Então,

$$\begin{aligned}
I_{i+1} &= I_i + \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i\cdot I_{i+1} - \gamma\cdot I_{i+1} + \frac{\beta}{N}\cdot S_i\cdot I_i - \gamma\cdot I_i\right)\\
\Rightarrow I_{i+1} - \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i\cdot I_{i+1} - \gamma\cdot I_{i+1}\right) &= I_i + \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i\cdot I_i - \gamma\cdot I_i\right)\\
\Rightarrow \left(1 - \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i - \gamma\right)\right)\cdot I_{i+1} &= \left(1 + \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i - \gamma\right)\right)\cdot I_i\\
\Rightarrow I_{i+1} &= \frac{\left(1 + \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i - \gamma\right)\right)}{\left(1 - \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{\beta}{N}\cdot S_i - \gamma\right)\right)}\cdot I_i.
\end{aligned}$$

De (7): $f(t,D(t)) = \gamma I(t)$.

$$\begin{aligned}
D_{i+1} &= D_i + \frac{h}{2}\cdot(\gamma\cdot I_{i+1} + \gamma\cdot I_i)\\
\Rightarrow D_{i+1} &= D_i + \gamma\cdot\frac{h}{2}\cdot(I_{i+1} + I_i).
\end{aligned}$$

Logo,

$$S_{i+1} = N - I_{i+1} - D_{i+1}.$$

Portanto, a aproximação a solução numérica para $i = 0, \ldots, N-1$ fica definida como

$$I_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\beta}{N} \cdot S_i - \gamma\right)\right)}{\left(1 - \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\beta}{N} \cdot S_i - \gamma\right)\right)} \cdot I_i \tag{8}$$

$$D_{i+1} = D_i + \gamma \cdot \frac{h}{2} \cdot (I_{i+1} + I_i) \tag{9}$$

$$S_{i+1} = N - I_{i+1} - D_{i+1} \tag{10}$$

com condições iniciais

$$S_0 = 210147124, \;\; I_0 = 1, \;\; D_0 = 0.$$

Atividades 2 *Faça o ajuste dos parâmetros considerando os dados do site do Ministério da Saúde: Dados Covid-19.*

Ajusta-se os parâmetros usando os dados do Covid-19, obtido do site do ministério da saúde. Os dados podem ser visto no Anexo. Para obter os melhores valores para os parâmetros, utilizou-se na programação Python a função "optimize.fmin_bfgs" do pacote "scipy', que realiza a minimização utilizando o método BFGS, para minimizar o funcional de quadrados mínimos

$$\max_{\beta,\, \gamma \,\in\, \mathbb{R}_+} \sum_{i=1}^{T} \left[(I_i(\beta,\gamma) - y_{1,i})^2 + (D_i(\beta,\gamma) - y_{2,i})^2 \right],$$

em que y_1 e y_2 são os vetores dos dados. Os valores obtidos para os parâmetros, para cada valor de h usado, estão na tabela 1.

h	β	γ
0.4140	0.3253	0.0168
0.3330	0.4044	0.0209
0.3440	0.3915	0.0202

Tabela 1: Resultados da minimização do funcional de mínimos quadrados, para cada valor de h.

Nas figuras 1 e 2 apresenta-se os resultados do ajuste do modelo SID, com $h = 0.3330$, com relação aos infectados e mortes a COVID-19 utilizando os parâmetros obtidos na otimização anterior. Destes gráficos, pode-se perceber que o ajuste não foi ruim, mas também não se ajustou perfeitamente. Isso se deve ao fato de que o modelo SID não percebe mudanças, que se refere que no começo da doença não se havia a implementação do isolamento social nos estados, que ocorreu posteriormente.

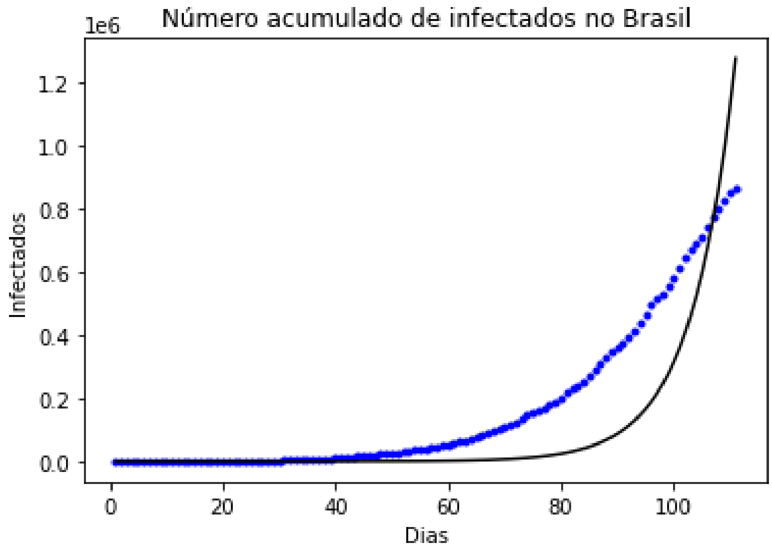

Figura 1: Número de infectados pela COVID-19 no Brasil.

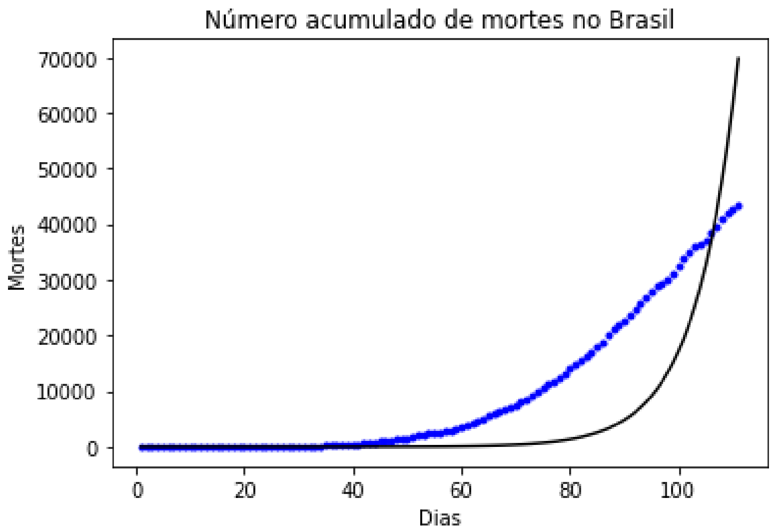

Figura 2: Número de mortes pela COVID-19 no Brasil.

Atividades 3 *Aproxime a ordem de convergência do método utilizado.*

Para se obter a convergência numérica (p), do método, utiliza-se a igualdade (4). Os resultados numéricos obtidos foram usando como solução exata, a solução numérica com $h = 0.4140$, e os valores de $h_1 = 0.3330$ e $h_2 = 0.3440$. Logo,

$$p \approx \frac{\log(||e_{h_1}||/||e_{h_2}||)}{\log(h_1/h_2)} = \frac{\log(0.4490/0.4804)}{\log(0.333/0.344)}.$$

Portanto, a ordem de convergência numérica do método é $p = 2.0829 \approx 2$. Como se esperava, porque usa-se o método dos trapézios.

Atividades 4 *Estime o pico da pandemia para a população de infectados.*

Na figura 2 tem-se a projeção do número de infectados no Brasil, usando o modelo SID (5 - 7). Com este modelo obteve-se que o pico de infectados se dará no 173º dia, que corresponde ao dia 15 de agosto de 2020. O pico de infectados é de 168.384.435 milhões de habitantes.

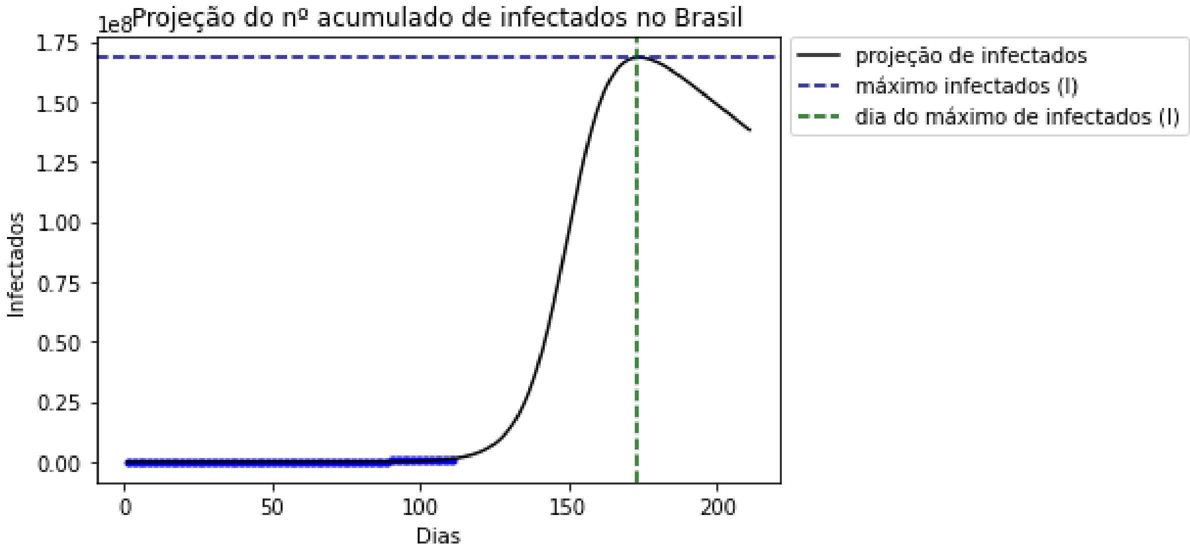

Figura 3: Projeção dos infectados e picos de infectados pela COVID-19 no Brasil.

5 Considerações Finais

Conclui-se que o modelo SID se ajusta bem aos dados, mas com o problema de não ser sensível a mudanças. Desta forma, como visto nos gráficos dos ajustes, há uma parte do ajuste após o 60º dia em que os dados não ficam com ajuste bem, porque a quarentena foi implementada nos estados e o modelo não conseguiu captar essa mudança. Apesar disso, o modelo de apresenta melhor que outros modelos. Também, se verificou que no dia 15 de agosto se dará o pico de infectados no Brasil da pandemia de COVID-19.

Neste 5 módulo, do curso de modelagem na quarentena, pode-se aprender a fazer a análise numérica dos modelos aprendidos em módulos anteriores.Também, pode-se aprender conhecimentos novos de programação com relação a otimização no Python.

Referências

[1] Berlandi, LB and Brandi, AC (2016) Comparação entre métodos numéricos computacionais na solução de um problema de valor inicial. http://twixar.me/X8mm. Acessado em: 19.jun.2020.

[2] Burden, RL and Faires, JD (2008). Análise numérica. Cengage Learning.

[3] de Oliveira, MLB (2010) Solução Numérica de EDOs. http://twixar.me/28mm. Acessado em: 19.jun.2020.

[4] Maioli G (2015) Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias. http://twixar.me/r8mm. Acessado em: 19.jun.2020.

Anexo

Dia	Infec.	Mortes	Dia	Infec.	Mortes	Dia	Infec.	Mortes
25/02	0	0	14/03	121	0	01/04	6834	241
26/02	1	0	15/03	200	0	02/04	7910	299
27/02	1	0	16/03	234	0	03/04	9056	359
28/02	1	0	17/03	291	1	04/04	10278	432
29/02	2	0	18/03	428	4	05/04	11130	486
01/03	2	0	19/03	621	6	06/04	12056	553
02/03	2	0	20/03	904	11	07/04	13717	667
03/03	2	0	21/03	1128	18	08/04	15927	800
04/03	3	0	22/03	1546	25	09/04	17857	941
05/03	7	0	23/03	1891	34	10/04	19638	1056
06/03	13	0	24/03	2201	46	11/04	20727	1124
07/03	19	0	25/03	2433	57	12/04	22169	1223
08/03	25	0	26/03	2915	77	13/04	23430	1328
09/03	25	0	27/03	3417	92	14/04	25262	1532
10/03	34	0	28/03	3903	114	15/04	28320	1736
11/03	52	0	29/03	4256	136	16/04	30425	1924
12/03	77	0	30/03	4579	159	17/04	33682	2141
13/03	98	0	31/03	5717	201	18/04	36599	2347

Dia	Infec.	Mortes	Dia	Infec.	Mortes	Dia	Infec.	Mortes
19/04	38654	2462	08/05	145328	9895	27/05	411821	25598
20/04	40581	2575	09/05	155939	10627	28/05	438238	26754
21/04	43079	2741	10/05	162699	11123	29/05	465166	27878
22/04	45757	2906	11/05	168331	11519	30/05	498440	28834
23/04	49492	3313	12/05	177589	12400	31/05	514200	29314
24/04	52995	3670	13/05	188974	13149	01/06	526447	29937
25/04	58509	4016	14/05	202918	13993	02/06	555383	31199
26/04	61888	4205	15/05	218223	14817	03/06	584016	32548
27/04	66501	4543	16/05	233142	15633	04/06	614941	34021
28/04	71886	5017	17/05	241080	16118	05/06	645771	35026
29/04	78162	5466	18/05	254220	16792	06/06	672846	35930
30/04	85380	5901	19/05	271628	17971	07/06	691758	36455
01/05	91299	6329	20/05	291579	18859	08/06	707412	37134
02/05	96396	6724	21/05	310087	20047	09/06	739503	38406
03/05	101147	7025	22/05	330890	21046	10/06	772416	39680
04/05	107780	7321	23/05	347398	22013	11/06	802828	40919
05/05	114715	7921	24/05	363211	22666	12/06	828810	41828
06/05	125218	8535	25/05	374898	23473	13/06	850514	42720
07/05	135106	9146	26/05	391222	24512	14/06	867624	43332

Tabela 2: Dados do site do ministério da saúde sobre COVID-19 do número de infectados e mortes no Brasil no ano de 2020.