



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA INDUSTRIAL

CURSO MODELAGEM MATEMÁTICA NA QUARENTENA

Módulo 2: Modelos Clássicos de Epidemiologia

Nome: Fillipe Rafael Bianek Pierin **GRR:** 20204093

Curso: Matemática Industrial

1 Introdução

Relatório do módulo 2 do curso Modelagem Matemática na Quarentena. Neste módulo resolvem-se algumas atividades sobre os modelos: crescimento exponencial (Malthus, 1798), crescimento logístico (Verhulst, 1838), SI, e SIR (Kermack e McKendrick, 1927).

Para a análise das soluções dos modelos e fazer gráficos utiliza-se a programação Python versão 3.8.3. no Google Colab. Os códigos com as soluções dos modelos usando Python, gráficos e alguns detalhamentos podem ser obtido no GitHub, https://github.com/fillipepierin/Curso_Modelagem_na_Quarentena.

2 Modelos

2.1 Modelo Crescimento Exponencial

A partir do século XVIII, Thomas Robert Malthus (1798) desenvolveu o modelo de crescimento populacional mundial. Pesquisadores da época, afirmavam que a população crescia de forma geométrica, enquanto o meio de sobrevivência na proporção aritmética. Porém, Malthus observou que a ausência de restrições ambientais. Este modelo é usado em intervalo de tempo discreto para medir o crescimento populacional, sendo

que cresce ilimitadamente porque não considera fatores externos [4]. Tal modelo é expresso pela seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (1)$$

onde N é a medida da população em função do tempo e r é a taxa de crescimento ($r > 0$) ou declínio ($r < 0$).

Para resolver a Equação Diferencial Ordinária (EDO) (1), usa-se o método de separação de variáveis. Então,

$$\frac{1}{N}dN = rdt.$$

Integrando em ambos os lados tem-se

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N}dN &= \int rdt \Rightarrow \ln(N) + c_1 = rt + c_2 \\ \Rightarrow \ln(N) &= rt + C, \quad C = c_2 - c_1 \\ \Rightarrow N(t) &= e^{rt+C}. \end{aligned}$$

Usando a condição inicial $N(0) = N_0$, encontra-se

$$N(0) = e^0 e^C = N_0 \Rightarrow C = \ln(N_0).$$

Desta forma,

$$N(t) = e^{rt} e^C = e^{rt} e^{\ln(N_0)}.$$

Portanto, a solução da EDO (1) é a seguinte

$$N(t) = N_0 e^{rt}.$$

2.2 Modelo Crescimento Logístico

Em contrapartida ao modelo de Mathus, o matemático belga Verhulst (1838) propõe que o crescimento da população é limitado por um fator logístico, que é a sustentação do ambiente. Então, a população crescerá até sua estabilidade [4]. A equação diferencial ordinária, apresentada por Verhulst, é dada por

$$\frac{dN}{dt} = h(N)N, \quad (2)$$

em que $h(N)$ é a taxa de crescimento ou declínio.

A função mais simples usada para $h(N)$ é a função linear dada por

$$h(N) = r \left(1 - \frac{N}{K} \right).$$

Desta forma, se obtém a equação diferencial ordinária (EDO)

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N. \quad (3)$$

Para resolver a EDO (2) usa-se o método da separação de variáveis.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{K}\right) N} dN &= r dt \Rightarrow \frac{K}{(K - N)N} dN = r dt \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{K - N} + \frac{1}{N} \right) dN = r dt, \text{ decomposição em frações parciais} \\ &\Rightarrow \frac{1}{K - N} dN + \frac{1}{N} dN = r dt. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados tem-se

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \frac{1}{K - N} dN}_{(\Delta)} + \int \frac{1}{N} dN &= \int r dt \Rightarrow -\ln(K - N) + c_1 + \ln(N) + c_2 = rt + c_3 \\ &\Rightarrow \ln(N) - \ln(K - N) = rt + C, \quad C = c_3 - c_2 - c_1. \end{aligned}$$

Resolvendo a integral (Δ) :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{K - N} dN &= - \int \frac{1}{w} dw, \text{ fazendo a mudança de variável } w = K - N \Rightarrow dw = -dN \\ &= -\ln(w) \\ &= -\ln(K - N). \end{aligned}$$

Usando a condição inicial $N(0) = N_0$, encontra-se

$$\begin{aligned} \ln(N(0)) - \ln(K - N(0)) &= r \cdot 0 + C \Rightarrow C = \ln(N_0) - \ln(K - N_0) \\ &\Rightarrow C = \ln \left(\frac{N_0}{K - N_0} \right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\ln(N) - \ln(K - N) = rt + \ln \left(\frac{N_0}{K - N_0} \right) \Rightarrow \ln \left(\frac{N}{K - N} \right) = rt + \ln \left(\frac{N_0}{K - N_0} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{N}{K-N} &= e^{rt} e^{\ln\left(\frac{N_0}{K-N_0}\right)} \\
\Rightarrow \frac{N}{K-N} &= e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) \\
\Rightarrow N &= K e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) - N e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) \\
\Rightarrow N \left(1 + e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) \right) &= K e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) \\
\Rightarrow N &= \frac{K e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right)}{\left(1 + e^{rt} \left(\frac{N_0}{K-N_0} \right) \right)} \\
\Rightarrow N &= K e^{rt} \left(\frac{N_0}{\cancel{K-N_0}} \right) \left(\frac{\cancel{K-N_0}}{K-N_0 + e^{rt} N_0} \right) \\
\Rightarrow N &= \frac{K e^{rt} N_0}{K - N_0 + e^{rt} N_0}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução da EDO (3) é

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}}. \quad (4)$$

2.3 Modelo SI

O modelo matemático SI é um modelo para a descrição de doenças considerando os conjuntos de suscetíveis (S) e infectados (I) pela doença. Neste modelo as pessoas saem do estado infeccioso e têm infecções ao longo da vida.

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI \quad (5)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI \quad (6)$$

onde $\alpha > 0$ é a taxa de contato e o total da população é dada por $N = S + I$.

Usando o valor constante $N = I(t) + S(t)$ as equações (5) e (6) do modelo SI se reduzem a duas equações de Verhulst:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N - I)I \quad (7)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(N - S)S \quad (8)$$

a equação (7) independe de S para a variável I e a equação (8) independe de I para a variável S .

2.4 Modelo SIR

Modelo matemático, desenvolvido por Kermack e McKendrick (1927), que descreve a propagação de uma doença numa população [3], sendo um dos mais utilizados atualmente. Neste modelo divide-se a população em três conjuntos:

- S : suscetíveis;
- I : infectados;
- R : removidos por estarem recuperados.

O modelo diferencial apresentado a seguir, é o primeiro modelo derivado de Kermack e McKendrick [3]. Neste modelo para cada conjunto considerado, se tem uma EDO.

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI \quad (9)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \nu I \quad (10)$$

$$\frac{dR}{dt} = \nu I \quad (11)$$

onde $\alpha > 0$ é a taxa de contato, $\nu > 0$ é a taxa de remoção e o total da população é dada por $N = S + I + R$.

Para esta modelagem, pode-se considerar uma variação em que para cada um dos conjuntos se considera a taxa dos conjuntos em relação à população. A seguir é apresentado o modelo SIR com essa variação.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\left(\frac{\alpha}{N}\right) SI \\ \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{\alpha}{N}\right) SI - \nu I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I \end{aligned} \quad (12)$$

Como a solução deste PVI não é imediata, recorre-se a aproximações numéricas. Para fazer essas aproximações, utilizou-se a função “odeint” do Python [2], cujo código para a análise numérica mostrada posteriormente nas atividades é baseado em [3].

As resoluções numéricas dos modelos anteriores podem ser vistas no GitHub (link na introdução), a vista de curiosidade, pois já possuímos a solução analítica das soluções dos mesmos.

3 Atividades

Neste capítulo faz-se a resolução das atividades solicitadas. Apresentam-se análises, gráficos e descrições.

Atividade 1 Substitua a expressão (4) na equação de Verhulst para comprovar que realmente se trata da solução dessa EDO. Confira se a condição inicial $N(0) = N_0$ é satisfeita.

Para verificar que a expressão (4) é solução da EDO do modelo de crescimento logístico. Substituindo essa expressão em (3) encontra-se

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \frac{0(N_0 + (K - N_0)e^{-rt}) - N_0K(0 + 0e^{-rt} + (K - N_0)e^{-rt}(-r))}{(N_0 + (K - N_0)e^{-rt})^2} \\
 &= \frac{-N_0K(K - N_0)e^{-rt}(-r)}{(N_0 + (K - N_0)e^{-rt})^2} \\
 &= \frac{N_0K(K - N_0)e^{-rt}r}{(N_0 + (K - N_0)e^{-rt})^2} \\
 &= \left(\frac{rN_0K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \right) \left(\frac{(K - N_0)e^{-rt}}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \right) \\
 &= rN \left(\frac{(K - N_0)e^{-rt}}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \right), \text{ usando (4)} \\
 &= rN \left(\frac{(K - N_0)e^{-rt} + N_0 - N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \right) \\
 &= rN \left(\frac{(K - N_0)e^{-rt} + N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} - \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \right) \\
 &= rN \left(1 - \frac{N_0K}{K(N_0 + (K - N_0)e^{-rt})} \right) \\
 &= r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N.
 \end{aligned}$$

Portanto, expressão (4) é solução da EDO do modelo de crescimento logístico.

Agora, para verificar que a condição inicial $N(0) = N_0$ é satisfeita, basta calcular $N(0)$ na expressão (4).

$$\begin{aligned}
 N(0) &= \frac{N_0K}{N_0 + (K - N_0)e^0} \\
 &= \frac{N_0K}{N_0 + K - N_0} \\
 &= \frac{N_0K}{K} \\
 &= N_0.
 \end{aligned}$$

Assim, a condição inicial $N(0) = N_0$ é satisfeita.

Atividade 2 Obtenha as expressões analíticas das soluções de (7) e (8) adaptando a expressão (4). As soluções obtidas estão definidas para todo $t > 0$?

Justifique. Apresente os gráficos das expressões obtidas para $N = 2$, $\alpha = 3$ e um par de dados iniciais tais que $I(0) + S(0) = N$.

Da equação (7):

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N - I)I = \alpha N \left(1 - \frac{I}{N}\right) I$$

comparando com a EDO (3) obtém-se que $r = \alpha N$ e $K = N$. Logo, adaptando a solução de EDO (3), equação (4), e usando a condição inicial $I(0) = I_0$, encontra-se a solução da EDO (7). Isto é,

$$I(t) = \frac{I_0 K}{I_0 + (N - I_0)e^{-\alpha N t}}. \quad (13)$$

Da equação (8):

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(N - S)S = -\alpha N \left(1 - \frac{S}{N}\right) S$$

comparando com a EDO (3) encontra-se que as seguinte relações $r = -\alpha N$ e $K = N$. Então, adaptando a solução de EDO (3), equação (4), e usando a condição inicial $S(0) = S_0$, chega-se a solução da EDO (7). Ou seja,

$$S(t) = \frac{S_0 K}{S_0 + (N - S_0)e^{\alpha N t}}. \quad (14)$$

Analisando o domínio das soluções $I(t)$ e $S(t)$, equações (13) e (14), verifica-se que estas soluções valem para todo o eixo real ($-\infty \leq t \leq \infty$). Porém, como essas soluções se refere à escala de tempo t e não existe tempo negativo, concluí-se que as soluções valem somente para $t > 0$.

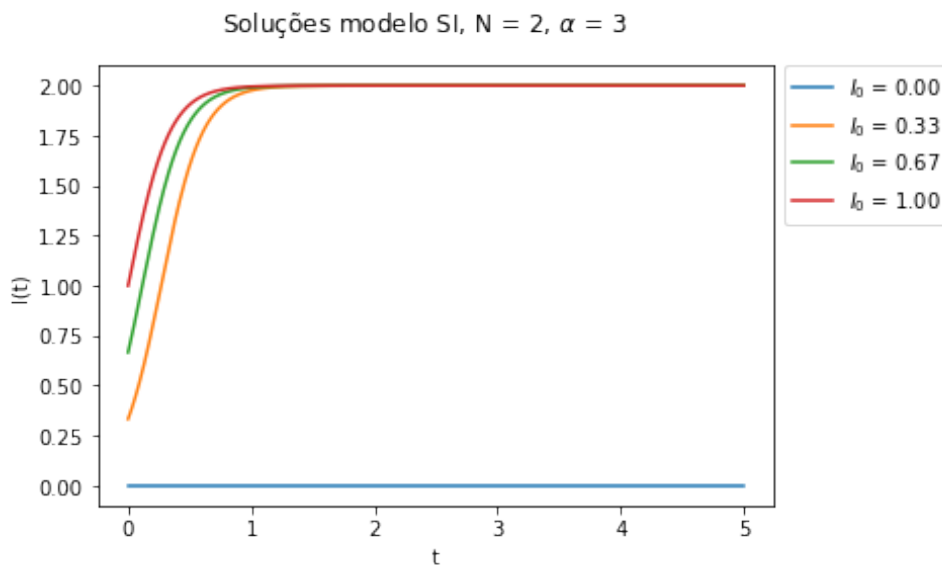


Figura 1: Soluções $I(t)$ do modelo SI.

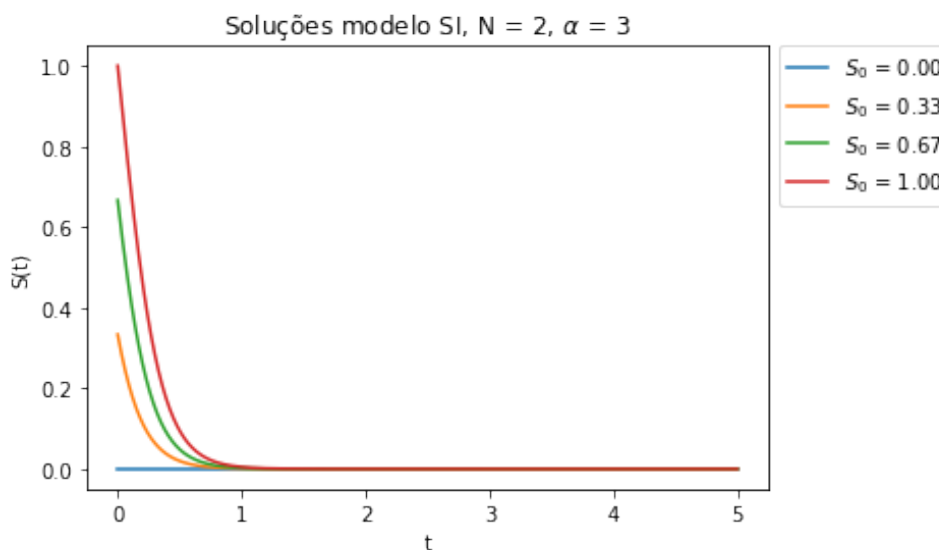


Figura 2: Soluções $S(t)$ do modelo SI.

No figuras (1) e (2) tem-se os gráficos das soluções obtidas, nas equações (13) e (14), para o modelo SI. Para estas soluções mostradas nos gráficos usou-se os parâmetros: $N = 2$, $\alpha = 3$ e um conjunto de valores para o valor inicial de I_0 e S_0 , $\{0.00, 0.33, 0.67, 1.00\}$, para cada uma das quatro soluções, respectivo à cada uma das soluções das EDO's do PVI.

Atividade 3 Utilizando a Regra da Cadeia e substituindo as EDO's do modelo SIR nos valores das derivadas, verifique que a expressão $I(t) + S(t) - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S(t))$ tem derivada nula e portanto permanece constante ao longo do tempo.

Considere $A = I(t) + S(t) - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S(t))$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{dI}{dt} + \frac{dS}{dt} - \frac{\nu}{\alpha} \frac{d \ln(S)}{dt} \\ &= \alpha IS - \nu I - \alpha IS - \frac{\nu}{\alpha} \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} \\ &= -\nu I - \frac{\nu}{\alpha} \frac{1}{S} (-\alpha IS) \\ &= -\nu I + \nu I \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, conclui-se que a expressão A tem derivada nula. Portanto, permanece constante ao longo do tempo.

Atividade 4 A partir de expressão $\frac{dI}{dS}$ no modelo SIR calcule o valor de S onde o gráfico $S \times I$ atinge seu máximo e o valor pico de infectados.

Usando as expressões (9) e (10), obtém-se

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\alpha IS - \nu I}{-\alpha IS} = -1 + \frac{\nu}{\alpha S}. \quad (15)$$

O máximo de S é atingido quando $\frac{dI}{dS} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} = 0 &\Rightarrow -1 + \frac{\nu}{\alpha S} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\nu}{\alpha S} = 1 \\ &\Rightarrow \nu = \alpha S \\ &\Rightarrow S = \frac{\nu}{\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de S , em que o gráfico $S \times I$ atinge seu ponto máximo, é em $\frac{\nu}{\alpha}$.

A EDO (15) é separável, desde que $I > 0$. Então, integrando ambos os lados dessa EDO têm-se

$$\begin{aligned} \int dI &= \int -1 + \frac{\nu}{\alpha S} dS \Rightarrow \int dI = - \int dS + \frac{\nu}{\alpha} \int \frac{1}{S} dS \\ &\Rightarrow I + c_1 = -S + c_2 + \frac{\nu}{\alpha} \ln(S) + c_3 \\ &\Rightarrow I = -S + \frac{\nu}{\alpha} \ln(S) + C, \quad C = c_2 + c_3 - c_1. \end{aligned}$$

Usando os dados iniciais $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ e $R(0) = 0$, encontra-se que a constante C vale

$$\begin{aligned} C &= I(0) + S(0) - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S(0)) \\ &= I_0 + S_0 - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S_0). \end{aligned}$$

Então, $I + S + \frac{\nu}{\alpha} \ln(S) = I_0 + S_0 - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S_0)$.

Como o valor máximo de infectados (I) ocorre quando $\frac{dI}{dS} = 0$, tem-se que $S = \frac{\nu}{\alpha}$ como visto anteriormente. Logo,

$$I_{max} + \frac{\nu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S) = I_0 + S_0 - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S_0).$$

Assim, encontra-se que o valor de pico de infectados ocorre quando

$$I_{max} = I_0 + S_0 - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S_0) - \frac{\nu}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} \ln(S). \quad (16)$$

Na figura 3 apresenta-se a solução numérica do modelo SIR, para os três conjuntos considerados no modelo (S , I e R). Para a obtenção do gráfico apresentado utilizou-se dos seguintes parâmetros: $N = 1.00$, $\alpha = 3$, $\nu = 1$, $S_0 = 0.97$, $I_0 = 0.03$ e $R_0 = 0.00$. Como se observa, neste gráfico, o valor máximo de infectados (I_{max}) foi de 0.31

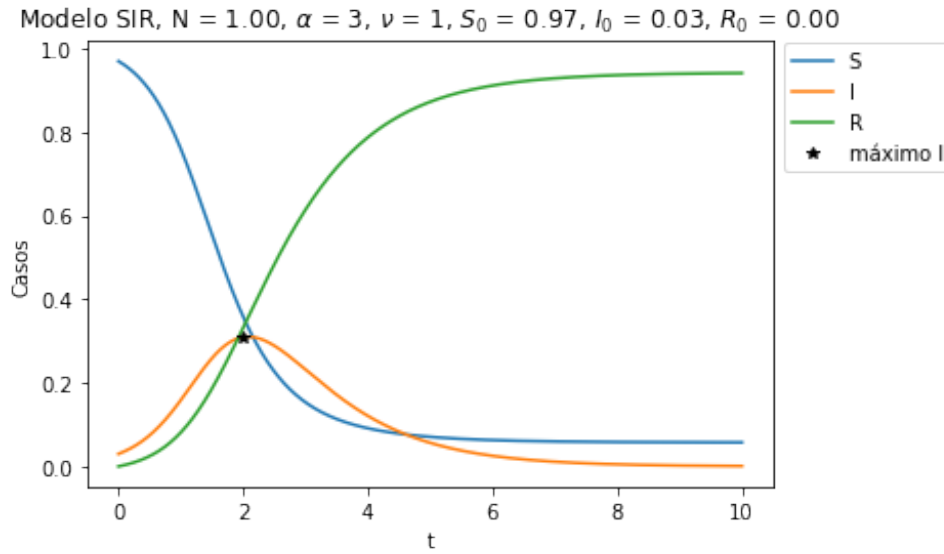


Figura 3: Soluções $I(t)$, $S(t)$ e $R(t)$ do modelo SIR.

concorda com o valor obtido numericamente, pela equação (16).

Já na figura (4) temos o valor máximo de suscetíveis $S = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{1}{3} = 0.33$, e o número de infectados, $I_{max} = I_0 + S_0 - \frac{\nu}{\alpha} \ln(S_0) - \frac{\nu}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha} \ln(S) = 0.03 + 0.97 - \frac{1}{3} \ln(0.97) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln(0.33) = 0.31$, mostrados no gráfico $S \times I$, cujos valores condizem com os resultados obtidos na solução numérica, calculada com a programação Python.

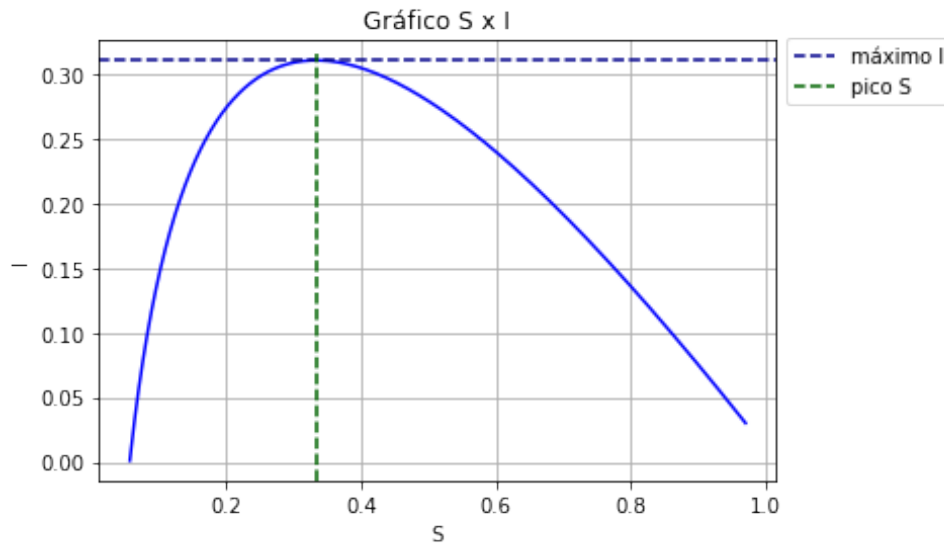


Figura 4: Gráfico $S \times I$ do modelo SIR - máximo de infectados e pico de suscetíveis a doença.

Agora, apresenta-se o resultado da solução numérica do modelo SIR com a variação equação (12). Na figura (5) tem-se a solução do modelo SIR com a variação apresentada anteriormente, para tal usou-se os parâmetros: $N = 1000$, $\alpha = 3$, $\nu = 1$, $S_0 = 700$, $I_0 = 300$ e $R_0 = 0$. E na figura (6), apresenta-se o gráfico $S \times I$ com a representação do máximo de Infectados (I) e do pico de sobreviventes (S). Neste caso, com os

parâmetros considerados os resultados foram: $I_{max} = 419$ e $S_{max} = 333$, desta forma se obtém que $R_{max} = N - I_{max} - S_{max} = 1000 - 419 - 333 = 248$.

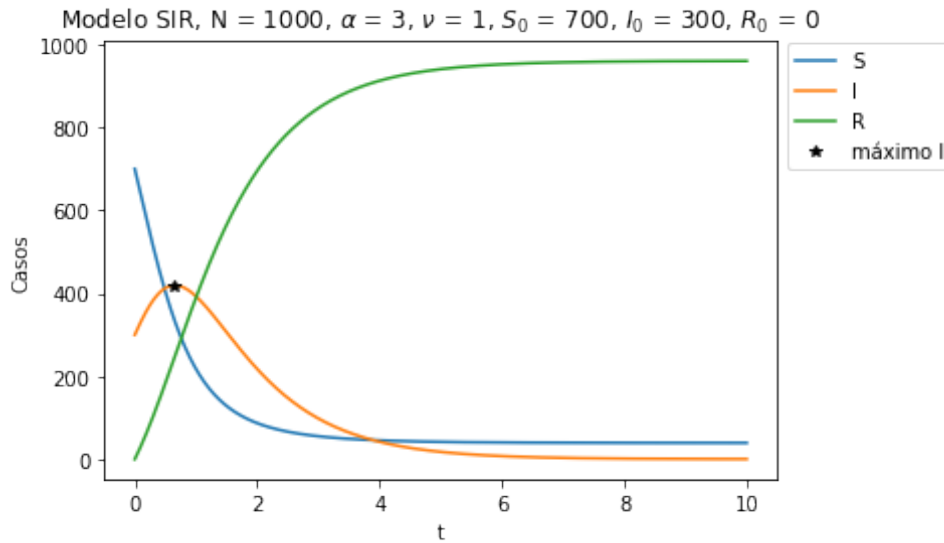


Figura 5: Soluções $I(t)$, $S(t)$ e $R(t)$ do modelo SIR com a variação.

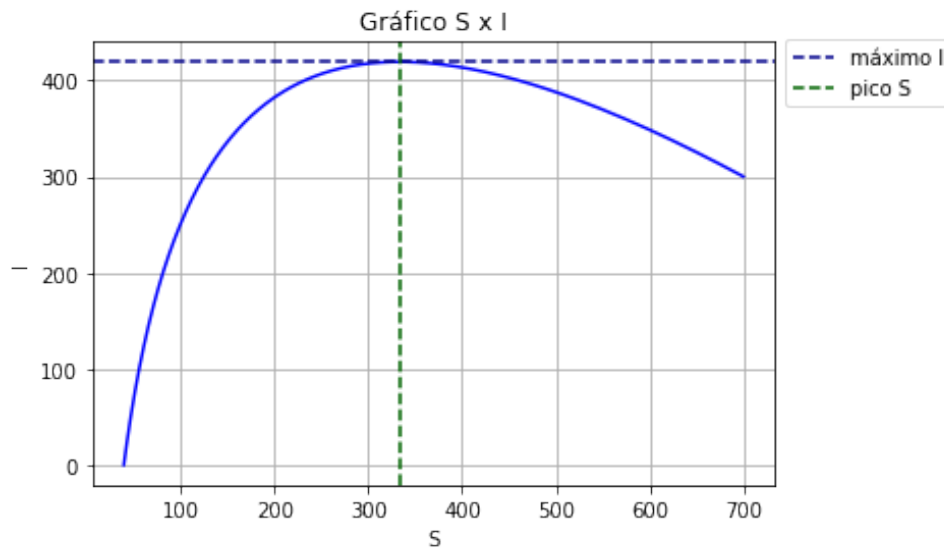


Figura 6: Gráfico $S \times I$ do modelo SIR com a variação - máximo de infectados e pico de suscetíveis a doença.

4 Outros Modelos

Já com a interpretação dos modelos SI e SIR, apresenta-se outros modelos, os modelos SIRS e SEIR. Para estes modelos mostram-se as soluções numéricas usando o Python de forma gráfica.

4.1 Modelo SIRS

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\left(\frac{\alpha}{N}\right)SI + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{\alpha}{N}\right)SI - \nu I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I - \gamma R\end{aligned}\tag{17}$$

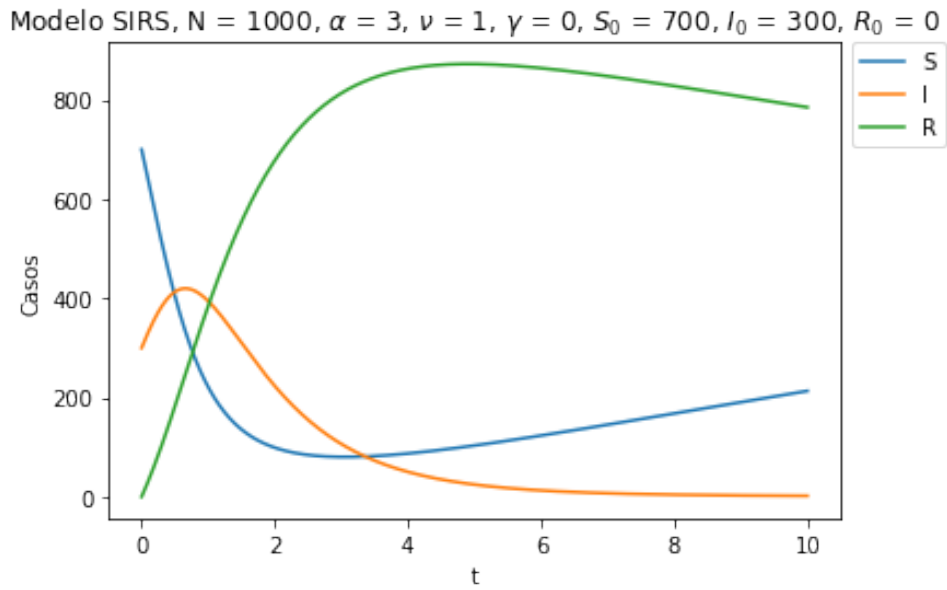


Figura 7: Soluções $I(t)$, $S(t)$ e $R(t)$ do modelo SIRS.

4.2 Modelo SEIR

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\left(\frac{\alpha}{N}\right)SI \\ \frac{dE}{dt} &= \left(\frac{\alpha}{N}\right)SI - \lambda E \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda E - \nu I \\ \frac{dR}{dt} &= \nu I\end{aligned}\tag{18}$$

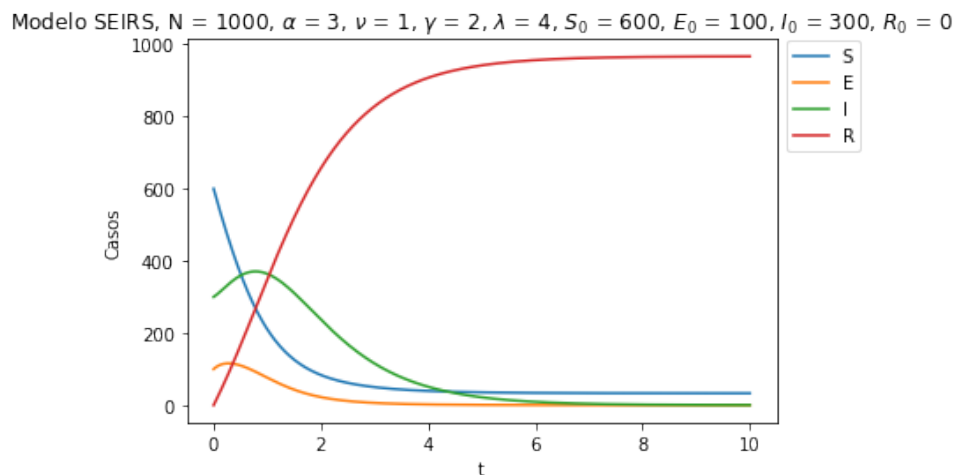


Figura 8: Soluções $I(t)$, $S(t)$ e $R(t)$ do modelo SEIR.

5 Considerações Finais

Conclui-se com o estudo, análises, implementações, e manipulações realizadas nas atividades, que as manipulações algébricas condizem com os resultados gráficos para todos os modelos epidemiológicos apresentados e testados.

Também com as atividades realizadas, no módulo 2 do curso de modelagem na quarentena, pode-se aprender novos modelos relacionados a doenças epidemiológicas que não era de conhecimentos de todos, apesar de ser modelos básicos. Além disso, podem-se colocar em prática conhecimentos novos em programação em Python para análise numérica. Apesar das atividades solicitadas terem inicialmente grande dificuldade para resolução, ao longo de estudo e esforço se conseguiu resolver até de forma mais fácil.

Referências

- [1] Salisbury, A (2011) Mathematical Models in Population Dynamics. <https://core.ac.uk/download/pdf/141995076.pdf>. Acessado em: 20.mai.2020.
- [2] SciPy (2019) `scipy.integrate.odeint`. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>. Acessado em: 26.mai.2020.
- [3] Scipython (2018) The SIR epidemic model. <https://scipython.com/book/chapter-8-scipy/additional-examples/the-sir-epidemic-model/>. Acessado em: 26.mai.2020.
- [4] Wikiwand (2011) Dinâmica populacional. https://www.wikiwand.com/pt/Din%C3%A2mica_populacional. Acessado em: 28.mai.2020.