UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA INDUSTRIAL

CURSO MODELAGEM MATEMÁTICA NA QUARENTENA
Módulo 4: O Modelo Gompertz

Nome: Fillipe Rafael Bianek Pierin **GRR:** 20204093
Curso: Matemática Industrial

1 Introdução

Relatório do módulo 4 do curso Modelagem Matemática na Quarentena. Neste módulo estuda-se e analisam o modelo Gompertz, que é usada em mortalidade, e a lei da mortalidade é uma das mais antigas.

Nos análises e implementações do modelo usa-se a programação Python versão 3.8.3. no Google Colab. Os códigos das implementações e análises podem ser obtidos no GitHub, `https://github.com/fillipepierin/Curso_Modelagem_na_Quarentena`.

2 Modelo Gompertz

O modelo de Gompertz foi desenvolvido pelo matemático Bejamin Gompertz, aparece primeira vez numa curta seção da Emil J. Gumbel's Statistics of Extremes em 1958, e depois no contexto demográfico em dois trabalhos de John H. Pollard em 1998 [4]. Este modelo tem aplicações em crescimento populacional, crescimento de animais, tumores cristalino dos olhos humano, crescimento ou decrescimento de variáveis econômicas. Tal modelo tem um comportamento de crescimento mais lento que a função sigmoidal [3]. Este modelo é dado por

$$\frac{dN(t)}{dt} = c \cdot ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \cdot N(t), \tag{1}$$
$$N(0) = N_0$$

onde

- $N(t)$: número de indivíduos da população no instante t;
- N_0: população inicial;
- K: capacidade de suporte da população;
- c: taxa de crescimento.

Para a resolução da Equação Diferencial Ordinária (EDO) (1) utiliza-se o método de separação de variáveis.
Ajustando a equação (1):

$$\frac{1}{ln\left(\frac{K}{N}\right) \cdot N} \cdot \frac{dN}{dt} = c. \tag{2}$$

Integrando em ambos os lados tem-se

$$\int \frac{1}{ln\left(\frac{K}{N}\right) \cdot N} dN = \int c \;\, dt.$$

Fazendo-se a substituição $u(N) = ln(K/N)$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{u \cdot N}(-N du) = \int c \;\, dt \\
&\Rightarrow -\int \frac{1}{u} \;\, du = \int c \;\, dt \\
&\Rightarrow ln(u) + k_1 = ct + k_2 \\
&\Rightarrow ln(u) = ct + k, \;\; k = k_2 - k_1 \\
&\Rightarrow u(N) = e^{ct+k} \\
&\Rightarrow ln(K/N) = e^{ct}c_0, \;\; c_0 = e^k \\
&\Rightarrow \frac{K}{N} = e^{e^{ct}c_0} \\
&\Rightarrow N(t) = Ke^{-e^{ct}c_0}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Usando a condição inicial $N(0) = N_0$, encontra-se

$$N(0) = Ke^{-e^{0}\cdot c_0} = N_0 \Rightarrow e^{c_0} = \frac{K}{N_0}$$
$$\Rightarrow c_0 = ln\left(\frac{K}{N_0}\right).$$

Logo, a solução da EDO (1) é dada por

$$N(t) = Ke^{-ln\left(\frac{K}{N_0}\right)e^{ct}}. \tag{4}$$

3 Exercícios

Neste capítulo resolvem-se os exercícios proposto no módulo. Nestas resoluções utiliza-se de parte teórica e prática, usando programação.

Exercício 1 *Verifique que a função de Gompertz* $N(t) = K \cdot e^{-c_0 \cdot e^{-ct}}$ *satisfaz a equação diferncial* $N'(t) = c\ \ ln\,(K/N)\,N(t)$*.*

Verificando que a função de Gompertz $N(t) = Ke^{-c_0e^{-ct}}$ satisfaz a EDO (1):

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} = \frac{d\left(Ke^{-c_0\cdot e^{-ct}}\right)}{dt} &= 0 \cdot e^{-c_0e^{-ct}} + K\left(e^{-c_0\cdot e^{-ct}}\frac{d\left(-c_0 \cdot e^{-ct}\right)}{dt}\right)\\
&= K \cdot e^{-c_0e^{-ct}}\left(0 \cdot e^{-ct} + c_0e^{-ct}\cdot c\right)\\
&= \left(K \cdot e^{-c_0e^{-ct}}\right) c \cdot c_0 \cdot e^{-ct}\\
&= N \cdot c \cdot c_0 \cdot e^{-ct}\\
&= c\left(c_0 \cdot e^{-ct}\right) N\\
&= c\left(ln\left(e^{c_0\cdot e^{-ct}}\right)\right) N\\
&= c\left(\frac{K}{Ke^{-c_0\cdot e^{-ct}}}\right) N\\
&= c \cdot ln\,(K/N)\,N.
\end{aligned}$$

Portanto, a função de Gompertz satisfaz a EDO (1).

Exercício 2 *Determine o valor de* c_0 *para que* $N(t_0) = N_0$*.*

Aplicando t_0 na função de Gompertz $N(t) = K \cdot e^{-c_0\cdot e^{-ct}}$ obtem-se que

$$N(t_0) = K \cdot e^{-c_0\cdot e^{c\cdot t_0}} = N_0 \Rightarrow e^{c_0\cdot e^{c\cdot t_0}} = \frac{K}{N_0}$$
$$\Rightarrow c_0 = ln\left(\frac{K}{N_0}\right)\cdot e^{-c\cdot t_0}. \tag{5}$$

Logo, a equação (5) é o valor de c_0 para que $N(t_0) = N_0$.

Exercício 3 *Mostre que K é uma assíntota para a função de Gompertz, isto é:* $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$.

Efetuando-se o limite em $N(t)$ encontra-se que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= \lim_{t\to\infty} Ke^{-c_0 \cdot e^{-ct}} \\ &= K \lim_{t\to\infty} e^{-c_0 \cdot e^{-ct}}.\end{aligned}$$

Fazendo-se a subtituição $u = e^{-ct} \Rightarrow -ct = ln(u) \Rightarrow t = -\frac{ln(u)}{c}$ conclui-se que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} N(t) &= K \lim_{u\to 0} e^{-c_0 \cdot e^{ln(u)}} \\ &= K \lim_{u\to 0} e^{-c_0 \cdot u} \\ &= Ke^{-c_0 \cdot 0} \\ &= K.\end{aligned}$$

Desta forma, K é uma assíntota para a função de Gompertz.

Exercício 4 *Verifique que $N(t)$ possui um ponto de inflexão em $(ln(c_0)/c, K/e)$ (o máximo da derivada ocorre quando $N = K/e$).*

Para se encontrar o(s) pontos de inflexão de $N(t)$, calcula-se a segunda derivada de $N(t)$ e iguala-se a zero. Doravante,

$$\begin{aligned}\frac{d^2N(t)}{dt^2} = \frac{dN'}{dt} &= \frac{d\left(c \cdot ln\left(\frac{K}{N}\right) \cdot N\right)}{dt} \\ &= c \cdot \left(N' \cdot ln(K/N) + \frac{N}{K} \underbrace{\left(\frac{K}{N}\right)'}_{\Delta}\right) \\ &= c \cdot \left(N' \cdot ln(K/N) + \frac{N^2}{K}\left(-\frac{KN'}{N^2}\right)\right) \\ &= c \cdot (N' \cdot ln(K/N) - N') \\ &= c \cdot N' \cdot (ln(K/N) - 1)\,.\end{aligned}$$

Resolvendo a derivada (Δ):

$$\left(\frac{K}{N(t)}\right)' = \frac{0 \cdot N(t) - K \cdot N'(t)}{(N(t))^2} - \frac{K \cdot N'(t)}{(N(t))^2}.$$

Desta forma, igualando a segunda derivada de $N(t)$ a zero, encontra-se

$$
\begin{aligned}
N(t)'' = 0 &\Rightarrow c \cdot N' \left(ln(K/N) - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow N' \left(ln(K/N) - 1\right) = 0 \cdot, \;\; c \neq 0 \\
&\Rightarrow \left(c \cdot ln(K/N) \cdot N\right) \left(ln(K/N) - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(c \cdot c_0 \cdot e^{-ct} \cdot N\right) \left(c_0 \cdot e^{-ct} - 1\right) = 0 \\
&\Rightarrow c \cdot c_0^2 \cdot e^{-2ct} = c \cdot c_0 \cdot e^{-ct} \\
&\Rightarrow e^{-ct} = c_0 \cdot e^{-2ct} \\
&\Rightarrow e^{ct} = c_0 \\
&\Rightarrow ct = ln(c_0) \\
&\Rightarrow t = \frac{ln(c_0)}{c}. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (6) na função de Gompertz tem-se

$$
\begin{aligned}
N(t) &= K \cdot e^{-c_0 \cdot e^{-c \cdot \frac{ln(c_0)}{c}}} \\
&= K \cdot e^{-c_0 \cdot e^{-ln(c_0)}} \\
&= K \cdot e^{-c_0 \cdot e^{ln\left(c_0^{-1}\right)}} \\
&= K \cdot e^{-c_0 \cdot c_0^{-1}} \\
&= \frac{K}{e}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $N(t)$ possui apenas um ponto de inflexão $(t, N(t)) = (ln(c_0)/c, K/e)$. Assim, o máximo da derivada ocorre quando $N = K/e$.

Exercício 5 *Use uma ferramenta computacional para graficar a função de Gompertz para diferentes valores (positivos) dos parâmetros. Que observa na curva quando c_0 cresce? e quando c cresce?*

Pelo figura (1), quando c cresce, com $c_0 = 1.50$ e $K = 2.00$ constantes, a função de Gompertz tende para a constante da capacidade de suporte da população (K), de forma lenta, ou melhor, as curvas ficam mais suaves. Quando se considera $c = 1.50$ e $K = 2.00$ constante, pela figura (2), a função de Gompertz tende para a constante K mais rapidamente, ou seja, as curvas são pouco suaves. E quando se varia somente os valores da constante K, percebe-se que a amplitude vertical das curvas aumenta proporcional ao valor de K, como visto na figura (3).

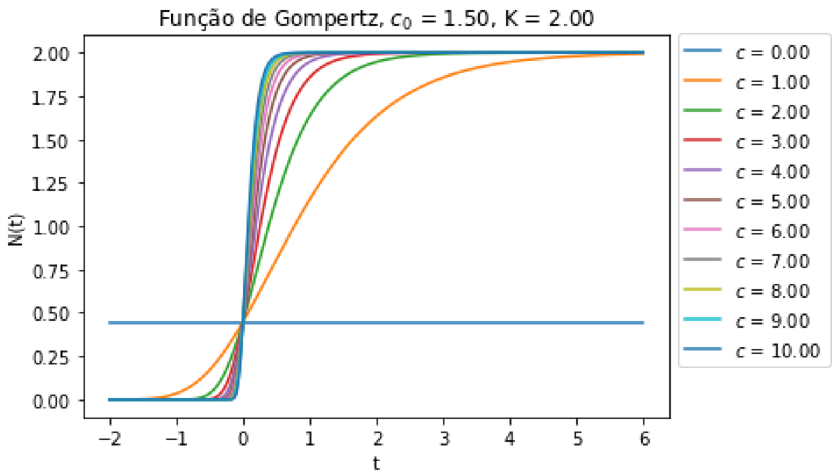

Figura 1: Função de Gompertz com diferentes valores de parâmetros, com c variando.

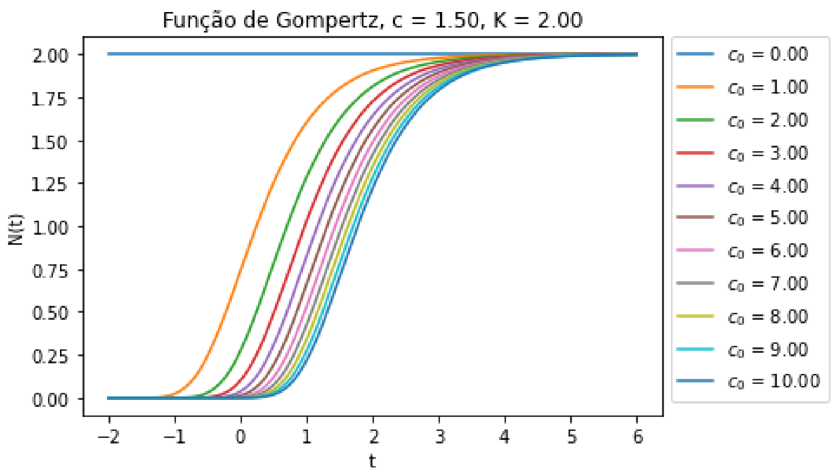

Figura 2: Função de Gompertz com diferentes valores de parâmetros, com c_0 variando.

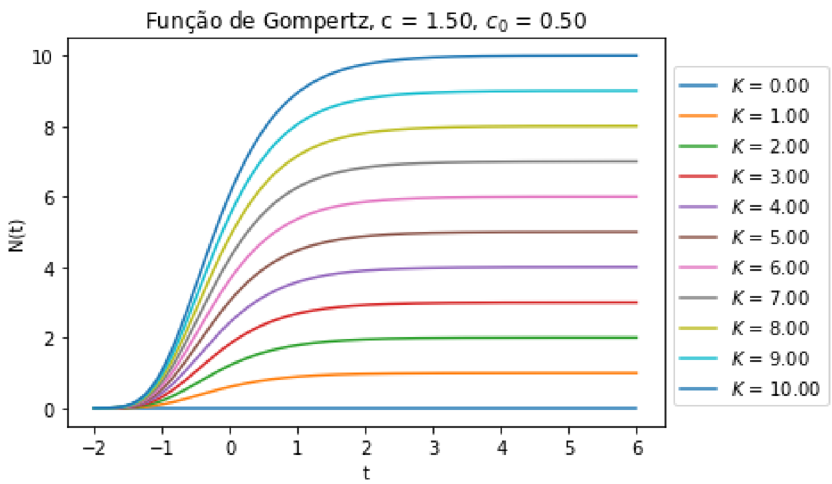

Figura 3: Função de Gompertz com diferentes valores de parâmetros, com K variando.

4 Análise Numérica

Neste capítulo, faz-se uma aplicação do modelo Gompertz usando dados da COVID-19, apresentados na 1. Esta aplicação é uma reprodução do exemplo dos slides do módulo 4.

Para esta simulação, usa-se na programação Python a função "optimize.fmin_bfgs" do pacote "scipy" para obter a minimização dos parâmetros $a = K$, $b = \frac{K}{N_0}$ e $c = -c$ da função de Gompertz $N(t)$ (4), para mais explicação sobre esta função do Python com exemplos ver [2]. Na função "optimize.fmin_bfgs" utiliza-se o método de otimização BFGS.

Espanha		**Brasil**	
Dias	Infectados	Dias	Infectados
10/03	1695	21/03	1178
14/03	6391	24/03	2247
18/03	14769	27/03	3417
22/03	28768	30/03	4630
26/03	57786	01/04	6880
30/03	87956	04/04	10360
3/04	119199	07/04	14034
7/04	141942	10/04	19789
11/04	163027	13/04	23430
15/04	180659	16/04	30683
19/04	198674	19/04	38654
23/04	213024	22/04	45757
27/04	229422	25/04	59196
1/05	242979	28/04	72899
5/05	250561	01/05	92109
9/05	262783	04/05	108266

Tabela 1: Dados de infectados pelo COVID-19 Espanha e Brasil.

Os resultados da otimização são apresentados na tabela 2. Nas figuras 4 e 6 tem-se o ajuste do modelo Gompertz aos dados de infectados pelo COVID-19 na Espanha e no Brasil, respectivamente. E nas figuras 5 e 7 tem-se a projeção dos infectados para os dias e meses subsequentes aos apresentados na tabela 1.

	a	b	c
Espanha	2.7773e+05	4.9375e+00	6.7434e-02
Brasil	2.5941e+06	7.4178e+00	1.8848e-02

Tabela 2: Resultados da otimização da função Gompertz.

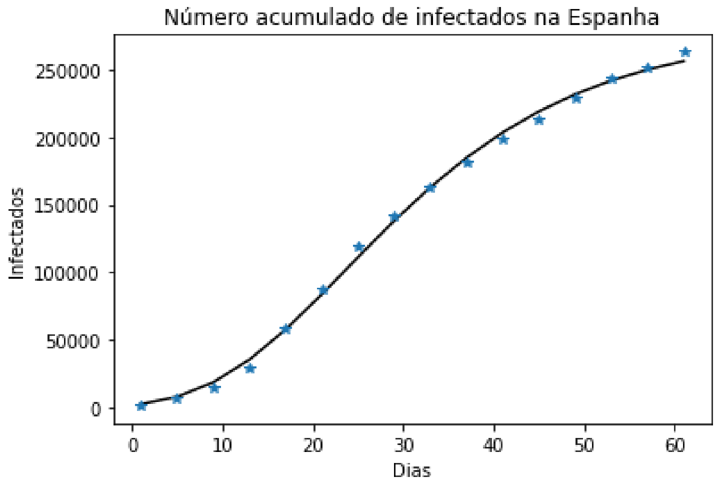

Figura 4: Ajuste dos dados de infectados no Espanha com a função Gompertz.

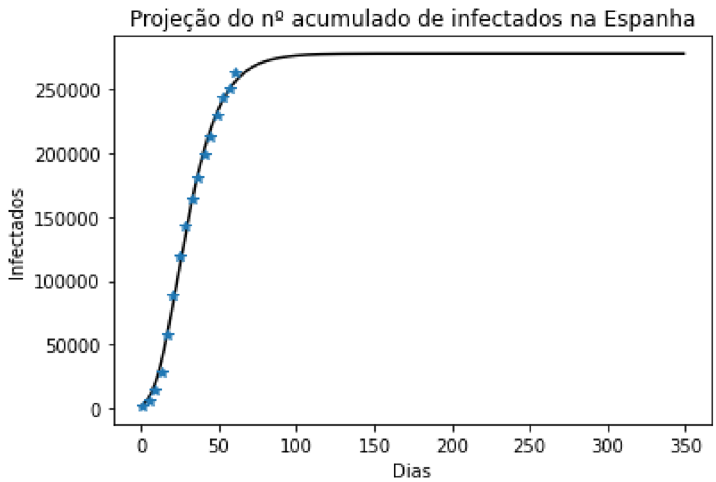

Figura 5: Projeção do número de infectados na Espanha.

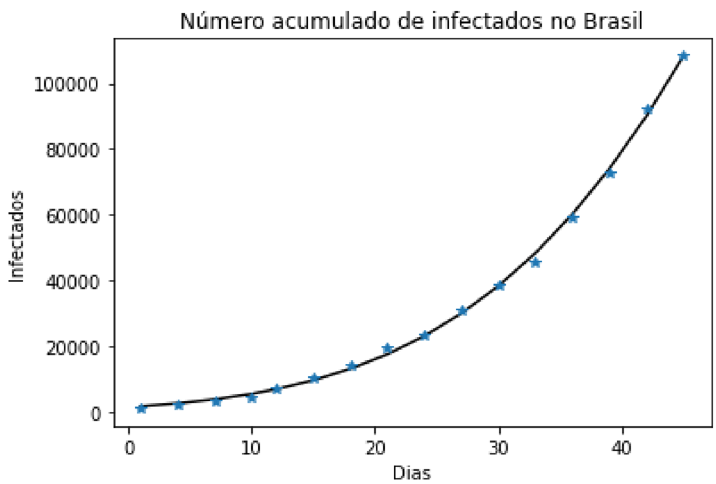

Figura 6: Ajuste dos dados de infectados no Brasil com a função Gompertz.

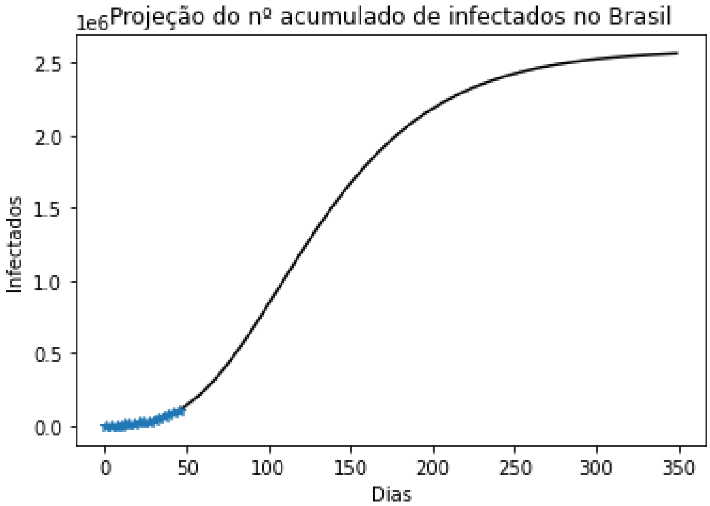

Figura 7: Projeção do número de infectados no Brasil.

5 Considerações Finais

Conclui-se que o modelo Gompertz se apresenta útil para se aplicar em dados reais, principalmente quando relacionados com crescimento populacional ou com relação a doenças, porque se tem um crescimento exponencial. Neste módulo, fizeram-se algumas especulações do modelo, encontrando alguns resultados interessantes, como que a função de Gompertz tem apenas um ponto de inflexão (como se esperava pelo gráfico da função), que a solução da EDO equação (4) tende para a constante da capacidade de suporte da população (K) e que analisando os parâmetros do modelo, quando c cresce as curvas da solução $N(t)$ tende para K mais lentamente, e mais rapidamente quando c_0 cresce e que influencia K na amplitude da curva. Também se verificou o uso do modelo Gompertz em dados reais, do COVID-19 na Espanha e no Brasil, em que o modelo se ajustou muito bem aos dados, sendo um bom modelo para fazer projeções.

No módulo 4 do curso de modelagem na quarentena, aprendeu-se um novo modelo que pode ser aplicado a doenças epidemiológicas, que apresentou-se muito bom aplicado a dados reis. Além disso, podem-se revisar os conhecimentos de cálculo e equações diferenciais, e também de programação, aprendendo funções novas no Python com relação à otimização.

Referências

[1] Boyce, WE and DiPrima, RC (2006). Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. LTC.

[2] Estruturas.UFPR (2020) Otimização e ajustes. `http://twixar.me/PqTm`. Acessado em: 16.jun.2020.

[3] qwe.wiki (2018) função Gompertz. `http://twixar.me/YqTm`. Acessado em: 12.jun.2020.

[4] Triffon IM, Lenart A, Canudas-Romo, LNV and Vaupel, JW (2015) The Gompertz force of mortality in terms of the modal age at death. Demographic Research 32:1031-1048. https://doi.org/10.4054/DemRes.2015.32.36