UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA

Fillipe Rafael Bianek Pierin
Marla Rodrigues de Oliveira

SISTEMAS DINÂMICOS EM SUPERFÍCIES

CURITIBA

2015

Resumo

Resumo à fazer.

Palavras-chaves: sistema dinâmico, limite, topologia, análise.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A teoria de sistemas dinâmicos moderno, que tem como criador o matemático francês Heri Poincaré, tem estudo em muitas áreas como biológica, física, e matemática. Parte dos estudos de sistema dinâmico se destina a analisar o comportamento de uma dinâmica (função) a certos comportamentos, como por exemplo, verificar o que acontece ao iterar uma dinâmica n vezes, isto é analisar a órbita de certo número que está compreendido nessa dinâmica.

Esse estudo tem por objetivo o estudo sistemas dinâmicos discretos em superfícies, $f : X \to X$, desde conceitos básico à conceitos mais avançados, com o intuito de aplicar sistemas dinâmicos em superfícies. Sendo inicialmente feito de forma teórica e posteriormente com o uso de programação.

Cada número compreendido numa dinâmica produz uma órbita com certas qualidades. Uma órbita pode ser periódica, quando ela se repete por um tempo indeterminado, por exemplo, $f(x) = x$; densa se ela passa por todos os naturais, ou seja, $O(x)$ passa por todos os números naturais, como por exemplo, na dinâmica $f(x) = x + 1$; e têm -se o caso em que uma órbita não é nem densa nem periódica. Uma órbita pode pertencer a um conjunto atrator ou repulsor, isto é, quando a órbita é atraída ou não a certo conjunto A, porém se todos os pontos de partida convergem para um conjunto atrator A dize-se que esse conjunto é a bacia de atração (nos sistemas dinâmicos discretos). Caso se necessite fazer uma mudança de coordenadas, usa-se a conjugação de duas dinâmicas por meio de uma transformação, isso desde que as dinâmicas possuam as mesmas propriedades. Para cada uma das órbitas periódicas pode-se associar uma probabilidade invariante a elas.

Também nesse trabalho faz o estudo de espaços topológicos, que é uma extensão da geometria, com a finalidade de estudar como se comporta uma dinâmica sobre uma superfície topológica, como por exemplo, uma dinâmica sobre um toro. Com o uso de programação, para de forma simples verificar e comprovar a teoria na prática. Será elaborado um programa simplório tipo um jogo da vida, que verifica se uma dinâmica sobrevive ou não em cima de uma superfície topológica, por meio de matriz usando o conceito de sistema dinâmico em superfícies topológicas, respeitando certas regras impostas pelo jogo da vida.

Os conceitos e o programa serão elaborados para que futuros usuários possam usar e auxiliar nos seus estudos topologia e principalmente em sistemas dinâmicos.

2 CONCEITOS BÁSICOS

2.1 Conjunto

Usaremos sempre a seguinte notação: o conjunto dos números naturais inclui o zero.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

E, quando precisar excluir o zero escreveremos:

$$\mathbb{N}_* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

2.2 Sistema Dinâmico

Conjunto de componentes, por exemplo funções, que variam ao longo do tempo após realizado algumas iteradas[1].

2.3 Órbita

É um conjunto de todos os valores que uma função assume em um determinado período de tempo. Por definição:

$$O(x) = \left\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f^n(x)\}$$

[1]Função iterada é uma função que é composta consigo mesma, em forma repetida, em um processo chamado iteração.

2.4 Ponto Periódico

Dado um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$, um ponto x é periódico de período p se p é o menor inteiro positivo tal que $f^p(x) =$ x para $p \in \mathbb{N}$. Quando o ponto x é periódico dizemos que sua órbita é uma órbita periódica.

2.5 Pré-Imagem

Dada uma função $f : X \rightarrow X$, quando f não for bijetora, definimos sua pré-imagem ou imagem inversa. A pré-imagem $f^{-1} : X \rightarrow$ X de um conjunto Y denotamos por $f^{-1}(Y)$:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\}$$

Notação: $y \in f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$.

2.6 Métrica

Uma métrica num conjunto, conforme (LIMA, 1983), é uma função $d : X$ x X $\rightarrow$ R, que associa a cada par ordenado de elementos x, y $\in$ M um número real d(x,y) chamado distância entre x e y de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer x, y, z $\in$ M:

- $d(x, x) = 0$
- Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Exemplos:

- Distância entre pontos (x e y): $d(x, y) = |x - y|$
- Distância entre conjuntos (A e B): $d(A, B) = inf\ \{d(x, y)/x \in A\ e\ y \in B\}$
- Distância entre um ponto (x) e um conjunto (A): $d(x, A) = inf\ \{|x - a|/x \in X\}$

2.7 Limite

L é um limite da sequência (x^n) (n $\in \mathbb{N}$) quando assume valores muito próximos de zero com índice n suficientemente grande.

2.8 ω - Limite

É os conjuntos em que y $\in \omega(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} g^{t_n}(x) = y$, onde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita e crescente.

2.9 α - Limite

É os conjuntos em que y $\in \alpha(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} g^{s_n}(x) = y$, onde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência infinita e decrescente.

2.10 Atrator

É um conjunto A de valores invariante para f e que sua órbita $O(x)$ intersecta o conjunto A.

$$f(A) = A$$

$$O(x) \cap A \neq \emptyset$$

Ou seja, é quando o sistema tende a um conjunto por iteração (se função discreta), ou com relação ao tempo (se função contínua).

Um atrator é global se todos os pontos têm sua órbita futura atraída para o conjunto A.

2.11 Repulsor

Se a órbita de x se aproxima de R no passado dizemos que o conjunto R é repulsor, com $R \subset X$, e $f^{-1}(R) = R$, ou seja

$$\lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), R) = 0$$

Observação 1: para existir a inversa da função, precisamos que a função $f : X \to X$ seja uma bijeção. Porém, em sistemas dinâmicos podemos encontrar o conjunto repulsor de funções que não sejam bijeções. Nesses casos usamos a pré imagem da função para definir o conjunto.
Observação 2: só podemos encontrar o conjunto repulsor de funções que não sejam bijeção se a função for discreta.

2.12 Sela

Quando um conjuntos ou ponto, é atrator e repulsor ao mesmo tempo dizemos que é uma sela. Isso ocorre geralmente em espaços tridimensionais, por exemplo em topologia.

2.13 Bacia de Atração

A bacia de atração é o conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de A:

$$B(A) = \left\{ x \in X / \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), A) = 0 \right\}$$

Ou ainda, a bacia de atração é num sistema dinâmico discreto, o conjunto de todos os pontos de partida (valores iniciais) que convergem para o atrator.

2.14 Conjugação

É a mudança de coordenada em sistemas dinâmicos, o que é encontrar uma transformação que relaciona duas dinâmicas diferentes. Definida como

$$h^{-1}gh = f$$

As duas dinâmicas precisam terem as mesmas propriedades para serem relacionadas por uma transformação. E uma transformação h leva g em uma órbita densa ou periódica, sendo f densa ou periódica também.

2.15 Variáveis Aleatórias

Segundo (ANDRADE; OGLIARI, 2007), variável aleatória é uma função que associa, a cada ponto pertencente a um espaço amostral (ω), um único número real. Elas podem ser discretas, por exemplo contagem, ou contínuas, resultado de mensurações.

2.16 Distribuição de Probabilidade Discreta (Função Discreta)

São funções que tem como resultado variáveis aleatórias discretas.

2.17 Distribuição de Probabilidade Contínua (Função Contínua)

Os resultados da aplicação dessa função são variáveis contínuas.

3 DINÂMICA ENUMERÁVEL

Teorema 3.1 *Considere X um conjunto finito e a dinâmica $f : X \to X$ então $X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_j$ (onde a união é disjunta) sendo cada* $\mathrm{B_i}$ *a bacia de atração de uma órbita periódica.*

Demonstração Primeiramente suponha que existe somente B_1, então pode ocorrer que $X = B_1$ ou $X \neq B_1$, com $B_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-m}(f^k(x))$ e X um conjunto finito, X=$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Desta forma todos os pontos de X são atraídos pela bacia ou existe um ponto do futuro y que não pertence a bacia (i.e., $y \in X$ e não pertencente a $\mathrm{B_1}$). Pela definição de B_1 temos,

$$\begin{aligned}
f^m(y) \in B_1 \Rightarrow f^m(y) &\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-m}(f^k(x)) \\
&\Rightarrow f^m(y) \in f^{-l}(f^k(x)) \quad \text{para qualquer l} \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow f^l(f^m(y)) = f^k(x) \quad \text{por definição de pré-imagem} \\
&\Rightarrow f^{l+m}(y) = f^k(x) \quad (*) \\
&\Rightarrow y \in f^{-l+m}(f^k(x)) \quad \text{por definição de pré-ima gem} \\
&\Rightarrow y \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-m}(f^k(x)) \\
&\Rightarrow y \in B_1.
\end{aligned}$$

(*) $f^{l+m}(y) = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{l \text{ vezes}} . \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ vezes}} = f^k(x)$

Consequentemente, a órbita de y está contida em $\mathrm{B_1}$. Agora de forma similar encontramos que $\mathrm{B_1 \cup B_2}$ inclui ou atrai y. Caso atraia terminamos o procedimento, mas caso isso não ocorra repetimos o procedimento até que a união disjunta de bacias atraia o ponto futuro y, ou seja, $\mathrm{X = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_j}$. Portanto, tomando como ponto inicial $\mathrm{b \in X}$ teremos que os iterados estarão numa das bacias e futuramente nessa órbita periódica. ∎

3.1 Exemplos com Conjuntos Finitos

Para os próximos exemplos considere as dinâmicas $f : \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$.

Exemplo 3.1.1 *Considere f definida como segue:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & sex \not| 3 \\ x/3 & sex|3 \end{cases}$$

Todo ponto x dessa dinâmica pode ser escrito como decomposição em primos

$$x = 2^{p_1} 3^{p_2} 5^{p_3} 7^{p_4} 11^{p_5} ...$$

As órbitas serão periódicas desde o início se

$$\begin{cases} p_2 = 0, \ x = 2^{p_1} 5^{p_3} 7^{p_4} 11^{p_5} ... \\ p_2 = 1, \ x = 2^{p_1} 3 5^{p_3} 7^{p_4} 11^{p_5} ... \end{cases}$$

Exemplo 3.1.2 *Seja f uma função tal que:*

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & se \ x \ é \ par \\ 2^x & se \ x \ não \ é \ par \end{cases}$$

Se ponto x for par, então sua imagem será par. Decompondo x em primos verificamos que somente a órbita $O(1)$ é periódica deste o início.

Exemplo 3.1.3 *Considere a função f dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & sex = 1 \\ x+1 & se \ x \ é \ primo \\ maior \ fator \ comum \ na \ decomposição \ de \ x & caso \ contrário \end{cases}$$

As únicas órbitas princialmente periódicas são $O(1)$ e $O(2)$, ou seja, $\{1, 1, 1, 1, ...\}$ e $\{2, 3, 4, 2, 3, 4, ...\}$, pois quando fazemos a decomposição do número x dessa dinâmica em primos temos p_1 for igual a 1 .

Exemplo 3.1.4 *Seja a função dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & se \ x \ é \ primo \ ou \ sex = 1 \\ menor \ fator \ comum \ na \ decomposição \ de \ x & caso \ contrário \end{cases}$$

Para os valores de x igual a 2, 3, 4, 5, 7, 9 teremos que sua respectiva órbita será periódica desde o começo, pois quando decompomos x dessa dinâmica em primos, como no exemplo 3.1.1, verificamos que se $p_2 = 1$ (para x par) e $p_3 = 1$ (para x ímpar).

3.2 Órbita Densa

Dizemos que uma órbita é densa quando passa arbitrariamente próximo de qualquer ponto de $\mathbb{N}$, tal que fica a uma distância menor 1 de $y \in \mathbb{N}$ e o ponto pode ser igual a y. Ou ainda quando a órbita passa por todos os números naturais, sendo um elemento do conjunto igual a $n = f^k(n), \ \ k \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2 *Uma transformação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem órbita densa se e somente se não tem nenhuma órbita periódica.*

Demonstração Primeiro vamos provar a ida usando a contra positiva do teorema: se há uma órbita periódica então não haverá nenhuma órbita densa. Suponha que existe uma órbita periódica ($S \subseteq \mathbb{N}$) que é invariante em relação a f, ou seja, S é invariante $\Leftrightarrow f(S) \subseteq S$, e f não é denso, pois o conjunto formado pela órbita periódica é finito. Tomando uma órbita $O(y)$ com $y \notin S$, teremos dois casos: quando a órbita esta contida numa bacia de atração composta por todos os naturais, $B(S) = \mathbb{N}$, ou quando está bacia não possui todos os naturais, $B(S) \neq \mathbb{N}$. Então,

- caso 1) quando a $B(S) = \mathbb{N}$. Seja $y \notin B(S)$ qualquer, então $n \in S$ tal que $n \neq f^n(y)$, implica que a órbita $O(y)$ não possui todos os naturais, ou seja, $O(y) \neq \mathbb{N}$. Consequentemente, teremos que qualquer órbita não será densa.

- caso 2) em que a $B(S) \neq \mathbb{N}$. Considere $O(y) \subset B(S)$, $y \in B(S)$, então teremos que $O(y) \neq \mathbb{N}$, pois $B(S) \neq \mathbb{N}$. Logo, nenhuma órbita da bacia de atração será densa.

Concluímos que nenhuma órbita inicialmente fora da bacia de atração irá visitá-la. Portanto, a existência de pelo menos uma órbita periódica impede a existência de órbitas densas.

Reciprocamente,

- Suponha que $O(x)$ é uma o bita densa qualquer e vamos provar que não existe nenhuma órbita periódica;

- Considere dois casos:

  1. quando as iteradas $f^n(x)$ são distintas;

     De fato, tomando $y \in \mathbb{N}$ temos que $y = f^m(x)$, pois a órbita de x é densa e sabendo que nesse caso as iteradas são distintas, obtemos $f^{n+l}(x) \neq f^n(x)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ e $l > 0$, implicando em $f^n(f^l(x)) \neq f^n(x)$ (*). Dados k, m, temos por (*) que $f^{k+m}(f^l(x)) \neq f^{k+m}(x)$, logo $f^{k+l}(f^m(x)) \neq f^k(f^m(x))$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ e $\forall\ l > 0$. Portanto, $f^{k+l}(y) \neq f^k(y)$.

     Assim nenhuma órbita será periódica.

  2. quando as iteradas $f^n(x)$ não são distintas;

     Como as iteradas não são distintas teremos que $f^{k+l}(x) = f^k(x)$, ou seja, que a órbita $O(x)$ converge para uma órbita periódica. Consequentemente, $O(x)$ é um conjunto finito e não denso. O que é absurdo, pois $O(x)$ é uma órbita densa por hipótese.

     Desta forma não teremos nenhuma órbita periódica.

Assim, a existência de órbita densa impede a existência de uma órbita periódica. ∎

Teorema 3.3 *Uma transformação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tem órbita densa se e somente se é conjugada a $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Demonstração Suponha que f tem órbita densa, ou seja, os pontos $f^k(x)$ da órbita são destintos. Queremos construir uma conjugação entre f e t, sabendo que os pontos são distintos e este conjunto é o $\mathbb{N}$. Então, construiremos uma bijeção $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\beta(n) = f^n(x)$$

β é uma bijeção, pois é injetora e sobrejetora. Injetora, pois a órbita $O(x)$ é densa e todos os $f^k(x)$ são distintos e sobrejetora, porque sabendo que a órbita $O(x)$ é densa, então o contra-domínio conterá todos os números naturais.

Logo,

$$\beta^{-1} f \beta(k) = \beta^{-1} f f^n(x) = \beta^{-1} f^{(k+1)}(x) = k + 1 = t(k)$$

.

Desta forma, $\beta^{-1} f \beta = t$. Portanto, β conjuga f e t.

Agora, temos por hipótese que a transformação f é conjugada a t, ou seja, $\beta^{-1} f \beta = t$.

Suponhamos, por absurdo que, $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ não são distintos, ou seja, a órbita $O(x)$ é periódica. Então,

$$\begin{aligned} t^{n+k} &= (\beta^{-1} f \beta)^{n+k} = \beta^{-1} f^{n+k} \beta \\ t^{n+k}(\beta^{-1}(x)) &= (\beta^{-1} f^{n+k} \beta)(\beta^{-1}(x)), \quad y = \beta^{-1}(x) \\ &= \beta^{-1} f^{n+k}(x) \\ &= \beta^{-1} f^n(x), \quad \text{hipótese} \\ &= \beta^{-1} f^n(\beta(\beta^{-1}(x))) \\ &= (\beta^{-1} f^n \beta)(\beta^{-1}(x)) \\ &= t^n(\beta^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Logo, $t^{n+k}(y) = t^n(y)$. O que é um absurdo, pois a órbita futura é periódica e não densa como queríamos. ∎

Corolário 1 *Se as transformações $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são conjugadas. Então, f tem órbita densa se, e somente se, g tem órbita densa.*

Corolário 2 *Sejam $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ transformações conjugadas. Logo, f tem órbita periódica $\Leftrightarrow$ g tem órbita periódica.*

3.3 Topologicamente Mixing

Uma transformação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é topologicamente mixing se dado dois conjuntos U e V existe um inteiros $N = N(U, V)$ tal que $f^n(U) \cap V \neq 0$ para todo $n \geq N(U, V)$.

Teorema 3.4 *Não existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ topologicamente mixing.*

Demonstração Suponha que existe f nestas condições, por absurdo. Então para todo conjunto U e V temos a existência de um N tal que $f^n(U) \cap V \neq 0$ para $n \geq N$. Logo, fixando dois conjuntos disjuntos e unitários $U = \{u\}$ e $V = \{v\}$, obtemos que $f^n(u) = v$ para todo $n \geq N$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} f^k(f^n(u)) &= f^k(v) \\ f^{k+n}(u) &= f^k(v) \end{aligned}$$

Como $k + n > n \geq N(U, V)$, $f^{k+n}(u) = v$. Logo, $f^k(v) = v$, para todo $n \geq N(U, V)$. Portanto, v é fixo. Porém, caso invertemos os U e V, verificamos que U e V não podem se intersectar, ou seja, $f^n(v) \neq u$. Isso contradiz a hipótese de que f é topologicamente mixing. ∎

3.4 Probabilidade e Medidas Invariantes

Uma probabilidade sobre o conjunto $\mathbb{N}$ é uma função que, associa para cada conjunto $A \subset \mathbb{N}$ um número ou probabilidade, $\mu(A) \in [0, 1]$.

$$\mu(0) = 0$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

$$\mu(\mathbb{N}) = 1$$

Exemplo 3.4.1 *Um exemplo de probabilidade é a delta de Dirac:*

$$\delta_x = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \notin A \end{cases}$$

$1 = \delta_x(A) + \delta_x(B) - \delta_x(A \cap B) = 1 + 0 - 0$

Definição 1 (Combinação Convexa) *Dados os números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$, dizemos que $\sum_{i=1}^{n} p_i r_i$ é uma combinação convexa de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.*

Exemplo 3.4.2 *$\mu(A) = p_1\mu_1(A) + p_2\mu_2(A)$, seja $A = \mathbb{N}$ então $\mu(\mathbb{N}) = p_1 + p_2 = 1$.*

Definição 2 (Probabilidade Invariante) *Seja a dinâmica $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e uma probabilidade μ sobre $\mathbb{N}$ dizemos que μ é uma probabilidade invariante sobre f para todo subconjunto $Y \subset \mathbb{N}$ se*

$$\mu(Y) = \mu(f^{-1}(Y))$$

.

Teorema 3.5 *Uma transformação $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ admite probabilidade invariante se, e somente se, f tem alguma órbita periódica.*

Demonstração Se p é um ponto periódico, então $\mu = \frac{1}{p}\left(\delta_x + \delta_{f(x)} + \cdots + \delta_{f^{p-1}(x)}\right)$ é uma medida invariante sobre f, pois

$$\begin{aligned}\mu(f^{-1}(A)) &= \frac{1}{p}\left(\delta_x + \delta_{f(x)} + \cdots + \delta_{f^{p-1}(x)}\right)(f^{-1}(A)) \\ &= \frac{1}{p}\left(\delta_{f(x)} + \delta_{f^2(x)} + \cdots + \delta_{f^p(x)}\right)(A) \\ &= \mu(A)\end{aligned}$$

Reciprocamente, agora suponha que a transformação f admite uma probabilidade invariante, ou seja, $\mu = \sum p_i r_i = 1$. Então,

$$\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_i = \mu(f^{-1}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_i\delta_{f(i)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} p_{f^{-1}(i)}\delta_i$$

Logo, temos a seguinte relação entre coeficientes: $p_i = p_{f^{-1}(x)} \forall iin\mathbb{N}$. Portanto, p_i é constante ao longo de sua pré-órbita.
Como μ é uma probabilidade ao menos um p_i não é nulo, vamos admitir que p_j. Se a pré-órbita é um com unto finito, então

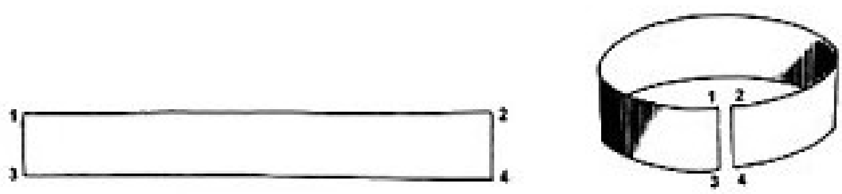
$$1 = \mu(\mathbb{N}) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} p_{f^k(j)}\delta_{f^k(j)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} p_j\delta_{f^k(j)} = p_j \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_{f^k(j)} = \infty$$

o que é uma contradição. Assim, a pré-o bita é um conjunto finito e será uma órbita periódica. ∎

4 JOGO DA VIDA DE JOHN CONWAY EM DUAS DIMENSÕES

Neste trabalho se fez o uso de uma espécie de jogo da vida, em duas dimensões, baseado no jogo da vida de John Conway, de 1970. O jogo da Vida é composto de um grande tabuleiro infinito, inteiramente quadriculado onde cada um dos quadradinhos (casas ou caselas) representa uma célula que poderá estar viva ou morta.

Analisa-se o comportamento das casas, conforme influência da topologia da superfície no comportamento do sistema dinâmico, em dois casos: uma em faixa retangular e outra em faixa circular (círculo). A configuração inicial, que é o vetor que analisamos, também é chamada de fase 0 ou fase inicial. E as regras estabelecidas para as configurações nas faixas retangular e circular são morte por superpopulação, morte por isolamento e nascimento a direita de par vivo, que serão definidas de forma matemática.



(a) Faixa Retangular (b) Faixa Circular

Figura 1: Os dois casos considerados no Jogo da Vida

Definição 4.1 *Uma configuração é definida como uma função $\sigma : [n] \to \{0, 1\}$, que representa a configuração dada por um vetor de tamanho $n \in \mathbb{N}$.*

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n)$$

Quando for conveniente, também denotaremos essa configuração como uma órbita.

Definição 4.2 *De forma matemática as regras estabelecidas (na configuração retangular) são as seguintes:*

- *Morte por superpopulação: se* $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1} = 1$*, então na próxima fase* $\sigma_i = 0$*;*
- *Morte por isolamento: se* $\sigma_{i-1} = \sigma_{i+1} = 0$*, então na próxima fase* $\sigma_i = 0$*;*
- *Nascimento a direita de par vivo: se* $\sigma_{i-1} = \sigma_i = 1$*, então na próxima fase* $\sigma_{i+1} = 1$

Exemplo 4.0.3 *Considere a configuração inicial (1,1,1,0) de tamanho quatro, quando a configuração é retangular.*

1. *na segunda fase: o vetor converge para (1,0,1,1) - a casa dois morre por superpopulação;*
2. *também na segunda fase: (1,0,1,1) - a casa quatro nasce por ter dois vivos antes na fase zero;*
3. *na fase três: (0,0,1,1) - a primeira casa morre por isolamento.*

Teorema 4.1 *Para qualquer configuração* $\sigma : [n] \to \{0, 1\}$ *dada por* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$*, na configuração retangular, sua órbita converge para uma órbita estável de período (p=1),* $p \in \mathbb{N}^*$*.*

Demonstração Provaremos usando indução finita sobre o tamanho do vetor.

(i) Para n=3:

(1) (1,1,0) $\to$ (1,1,1) $\to$ (1,0,1) $\to$ (0,0,0)

(2) (1,0,1) $\to$ (0,0,0)

(3) (0,1,1) $\to$ (0,1,1)

Vemos que nos três casos convergem a órbita converge para uma órbita estável de período 1. Portanto, no caso $n = 3$ está provado.

Como curiosidade observamos que a casa um (casa do início da configuração) após a órbita ficar estável é sempre 0.

(ii) Analisaremos a princípio as primeiras casas de três configurações de retângulo e as demais seguem de imediato a partir dessas.

1. se $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\sigma_3 = 0$;
   (1, 1, 0, ..., 0) $\to$ (1, 1, 1, ..., 0) $\to$ (1, 0, 1, ..., 0) $\to$ (0, 0, 1, ..., 0)
2. se $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ e $\sigma_2 = 0$;
   (1, 0, 1, ..., 0) $\to$ (0, 0, 1, ..., 0)

3. se $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ e $\sigma_1 = 0$;
   (0, 1, 1, ..., 0) $\rightarrow$ (0, 1, 1, ..., 0)

Em todos os casos teremos uma iteração com $\sigma_1 = 0$. Com isso vemos que nos três casos a órbita de cada configuração converge para uma órbita estável.

Agora suponha usando indução no comprimento da configuração, que a configuração de tamanho $n-1$ sempre converge para uma órbita estável.

Se adicionarmos uma casa ($\sigma_1 = 1$) no início da configuração teremos por (1) e (2) que depois de algumas iterações as primeiras casas zeram; e sabemos pela hipótese de indução que as $n-1$ casas convergem. Temos que a junção dessas configurações convergem para uma órbita estável. Portanto, a configuração de tamanho n converge para uma órbita estável. ∎

Uma configuração circular é uma configuração σ em que as bordas também se correlacionam, diferentemente da configuração retangular onde a última casa não possui correlação com a primeira. E as regras estabelecidas, mudam um pouco.

Definição 4.3 *Na configuração circular, as seguintes regras são adicionadas:*

- *Morte por superpopulação: se $\sigma_{n-1} = \sigma_1 = 1$, então na próxima fase $\sigma_n = 0$;*
- *Morte por isolamento: se $\sigma_{n-1} = \sigma_1 = 0$, então na próxima fase $\sigma_n = 0$;*
- *Nascimento a direita de par vivo: se $\sigma_{n-2} = \sigma_{n-1} = 1$, então na próxima fase $\sigma_n = 1$*

Ou ainda, podemos relacionar essas regras com a seguinte fórmula:

$$\sigma_i^{'} = \sigma_i * (2 * \sigma_i - \sigma_{i+1} - \sigma_{i-1}) + (1 - \sigma_i) * (\sigma_{i-2} * \sigma_{i-1})$$

sendo $\sigma_i^{'}$ a mesma casa de σ_i na próxima fase.
Observação: quando σ_{i+1} for maior que σ_n considere $\sigma_{i+1} = \sigma_1$, e quando σ_{i-1} ou σ_{i-2} for menor que σ_1 considere $\sigma_{i-2} = \sigma_n$ ou $\sigma_{i-1} = \sigma_n$.

Exemplo 4.0.4 *Considere a configuração inicial (0,1,1,0) de tamanho quatro, quando a configuração é circular.*

1. *na segunda fase: o vetor converge para (0,1,1,1) - a casa quatro nasce por ter dois vivos antes na fase zero;*

2. *na fase três: (1,1,0,1) - a terceira casa morre por superpopulação e a primeira casa nasce por dois vivos nas casas anteriores;*
3. *na fase quatro: (0,1,1,1) - a primeira casa morre por superpopulação e a terceira casa nasce por dois vivos nas casas anteriores;*
4. *e assim por diante.*

Proposição 1 *Dado um vetor de configuração inicial e fixando sua configuração com* $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 1$, *e* $\sigma_4 = \sigma_5 = \cdots = \sigma_n = 0$, *na configuração circular. Temos que,*

1. *se o vetor de configuração inicial tiver tamanho* $n = 2k$ *(par), essa configuração convergirá para uma órbita estável de período* n*;*
2. *e caso o vetor de configuração inicial tenha tamanho* $n = 2k + 1$ *(ímpar), a configuração convergirá para uma órbita estável de período* $2n$*.*

Demonstração (1) Considere a configuração inicial $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n) = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$, com $n = 2k$, sendo a configuração circular. Nesse caso temos que a configuração se repete na fase (ficando estável de período n). Nesse processo nota-se que, as casas ou caselas dos vetores, $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 1$, andam em dois passos (ou duas fases), morrendo uma casa da configuração e outra se isolando como podemos verificar na tabela 1.

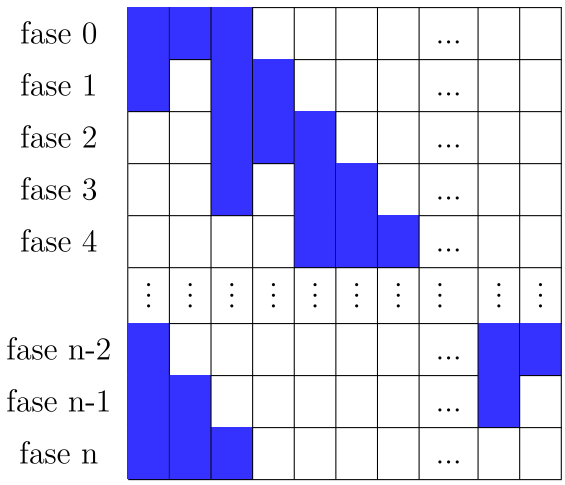


Tabela 1: Caso par - configuração estável de período n.

O andar de cada configuração é de duas casas por vez.

Conclusão: a cada duas fases a configuração anda duas casas (perdendo e nascendo casas).

Observação Para essa configuração com $n = 2k$, temos porém duas exceção quando $n = 2$ e $n = 4$. Em $n = 2$, a configuração (órbita) fica estável desde a fase 0 sem mover-se. E na $n = 4$, a configuração se repete ao andar apenas uma vez, pois a casa 1 que iria morrer na fase 2, renasce ao mesmo tempo e como estamos no círculo a casa 2 nasce pelo caso de ter duas casas vivas antes.

(2) Agora consideremos a mesma configuração inicial do caso (1), porém com tamanho $n = 2k + 1$ e usado a configuração circular. Nesse caso temos que a configuração se repetirá na fase $2n$.

Desta forma, essa configuração anda duas casas em duas fases, sendo que na fase ímpar a segunda casa morre e a primeira casa fica isolada, isto na parte da configuração de casas "1 1 1". E na fase par a configuração termina de andar duas casas para frente. Vejamos na tabela 2.

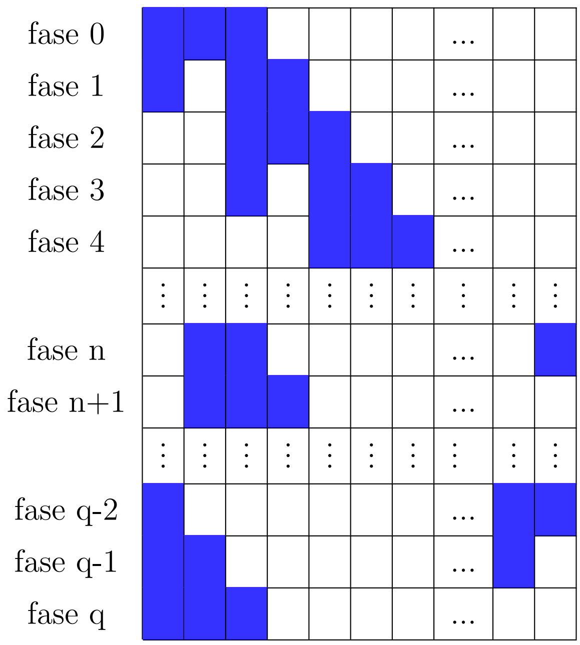


Tabela 2: Caso ímpar - configuração estável de período $2n$.

Note que a configuração se repetem na fase q, $q = 2n$, pois na fase n, a casa 1 morre por sufocamento por falta de uma casa de apoio à esquerda (diferente do caso (1) em que tínhamos a casa de apoio). Logo, só na fase q, teremos a casa de apoio para a casa 1. E assim voltando a se repetir, ou seja, obtendo um período de tamanho q. ∎

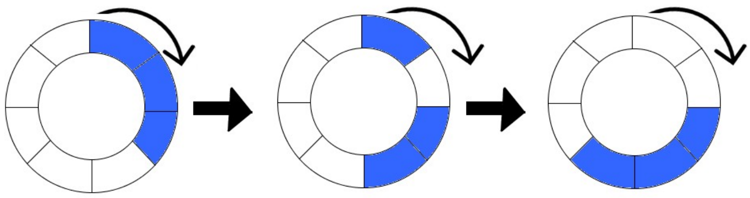


Figura 2: Configuração circular

Proposição 2 *Em toda configuração* $\sigma : [n] \rightarrow \{0, 1\}$ *dada por* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$*, independente da forma da configuração retangular ou circular e do tamanho do vetor ímpar ou par, com dois ou mais blocos de casas vivas entre casas mortas ocorrerá que:*

1. *caso tenhamos somente uma casa morta entre os blocos de casas vivas, os blocos se juntaram formando um só;*

2. *mas se tiverem mais de uma casa morta entre os blocos de casas vivas, os blocos andarão sem se juntarem.*

Demonstração (1) Nesse caso em que só temos uma casa morta entre os blocos, os blocos se desestruturam. Morrem as casas intermediárias dos blocos na fase 1 e a partir da casa 2 começam a se juntar até que na fase 3 os dois blocos formam um só. Veja na tabela 3.

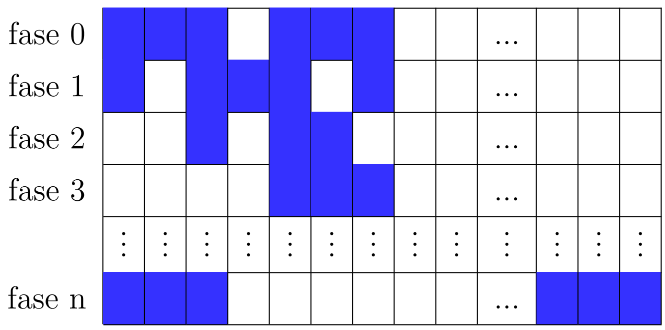


Tabela 3: Caso com uma casa morta entre os blocos de casas vivas.

(2) Quando temos duas casas mortas ou mais entre os blocos, mesmo os blocos se desestruturando como no caso (1), estes não se juntam por haver uma casa morta intermediária antes de os blocos se arrumarem, na fase 1. Desta forma na fase 2 os blocos se arrumam e andam duas casa, sem juntarem. Verifique na tabela 4.

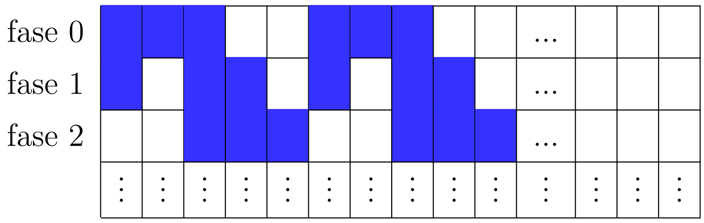


Tabela 4: Caso com duas casa morta entre os blocos de casas vivas.

∎

Conclusão

O período da configuração será no máximo:

- n, se o tamanho da configuração for par;
- 2n, se o tamanho da configuração for ímpar.

Referências

ANDRADE, D. F. de; OGLIARI, P. J. **Estatística para as ciências agrárias e biológicas: com noções de experimentação**. [S.l.]: Editora da UFSC, 2007.

BARAVIERA, A.; BRANCO, F. M. **Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão**.

CAMARA, P. **Glossário de dinâmica não-linear**. 2005.

LIMA, E. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983. (Projeto Euclides).

LIMA, E. L. **Curso de Análise, vol. 1**. [S.l.: s.n.], 1976. 337 p.

ROCHA, F. B. Análise funcial e aplicações. 2010.