EV_1_2_CALCULO_DE_MASA_CENTRO_DE_MASA_Y_EL_TENSOR_DE_INERCIA_DE_CUERPOS_RIGIDOS.

Felipe Alvarado Galicia
Dinámica de Robots

14 DE ABRIL DE 2020
UPZMG
Carlos Enrique Moran Garabito

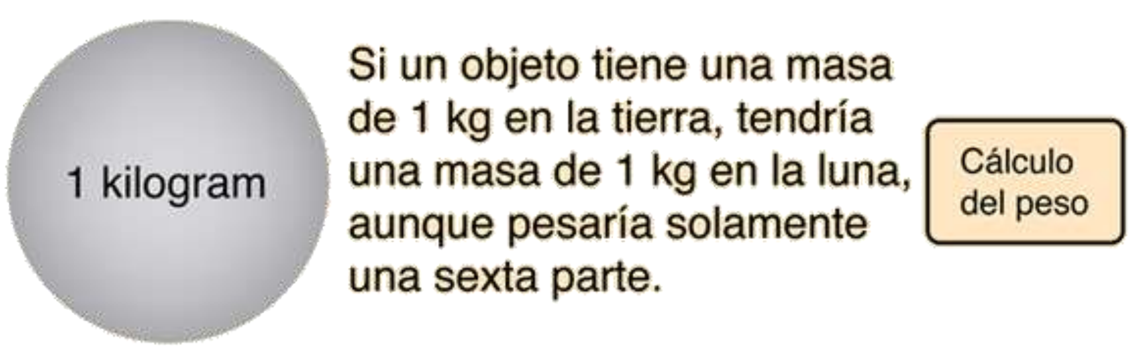
Índice:

Calculo de masa

Masa

La masa de un objeto es una propiedad fundamental del objeto; es una medida numérica de su inercia; una medida fundamental de la cantidad de materia en el objeto. Las definiciones de masa a menudo, se ven redundantes porque es una cantidad tan fundamental que resulta difícil definirla en función de algún otro término. Todas las cantidades mecánicas se pueden definir en términos de masa, longitud y tiempo. El símbolo usual de la masa es m y su unidad en el sistema SI es el kilogramo. Aunque la masa se considera normalmente como una propiedad invariable de un objeto, se debe considerar la masa relativista para velocidades cercanas a la velocidad de la luz.

El peso de un objeto es la fuerza de la gravedad sobre el objeto y se puede definir como el producto de la masa por la aceleración de la gravedad, w = mg. Puesto que el peso es una fuerza, su unidad en el sistema SI es el Newton. La densidad es masa/volumen.



Centro de masas

El centro de masas de un sistema discreto o continuo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema. De manera análoga, se puede decir que el sistema formado por toda la masa concentrada en el centro de masas es un sistema equivalente al original. Normalmente se abrevia como c.m..

Cálculo del centro de masas de un sistema

Distribución discreta de materia

Para un sistema de masas discreto, formado por un conjunto de masas puntuales, el centro de masas se puede calcular como:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

M, masa total del sistema de partículas.

m_i , masa de la partícula *i*-ésima.

$\mathbf{r}_i$, vector de posición de la masa *i*-ésima respecto al sistema de referencia supuesto.

Un poco más explícito si A1,... An son n puntos, y m1,... mn n números (m como masa). Entonces el centro de masa de los (Ai, mi) es el punto G definido como sigue:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum m_i} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + \ldots + m_n \overrightarrow{OA_n}}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad \text{con} \quad \sum m_i \neq 0$$

Esta definición no depende del punto O, que puede ser cualquiera. Si se toma el origen del plano o del espacio, se obtienen las coordenadas del baricentro como promedio ponderado por los mi de las coordenadas de los puntos Ai:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \mathbf{r}_G = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \cdots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

La definición anterior equivale a la fórmula siguiente, más práctica para el cálculo vectorial, pues prescinde de las fracciones (se obtiene tomando O = G):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \quad \text{o bien} \quad m_1 \overrightarrow{GA_1} + \ldots + m_n \overrightarrow{GA_n}$$

Distribución cuasidiscreta de materia

En el caso de un sistema de cuerpos cuasipuntuales, o cuerpos que distan entre sí mucho más que las dimensiones de cada uno de los cuerpos, el cálculo anterior resulta bastante aproximado.

Distribución continua de materia

Para sistemas de masas continuos o distribuciones continuas de materia debemos recurrir al cálculo infinitesimal e integral, de modo que la expresión anterior se escribe en la forma:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r}\, dm$$

Distribución de masa homogénea: si la masa está distribuida homogéneamente, la densidad será constante por lo que se puede sacar fuera de la integral haciendo uso de la relación siguiente: $dm = p\ dV$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{\rho \int_V \mathbf{r}\, dV}{\rho \int\ dV} = \frac{\int_V \mathbf{r}\, dV}{V}$$

siendo **V** el volumen total.

Para cuerpos bidimensionales (superficies) o monodimensionales (líneas) se trabajará con densidades superficiales y longitudinales respectivamente.

Para el caso de cuerpos con densidad uniforme, el centro de masas coincidirá con el centroide del cuerpo.

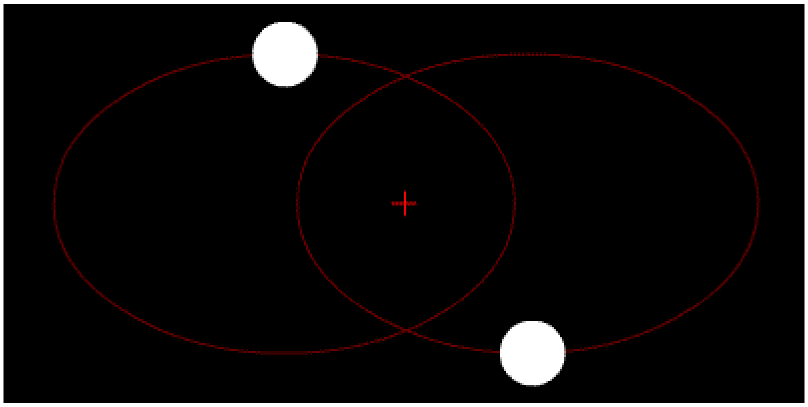
Distribución de masa no homogénea:

los centros de masas en cuerpos de densidad variable pueden calcularse si

se conoce la función de densidad . En este caso se calcula el centro de masas de la siguiente forma.

$$\mathbf{r}_{\rm cm} = \frac{\int_V \mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r})\, dV}{M}$$

Para calcular la integral hay que conocer la función de densidad.



Dos cuerpos orbitando alrededor de su centro de masas en órbitas elípticas

Tensor de inercia de un sólido rígido

Cuando se estudian problemas con sólidos 3D que giran en el espacio, es necesario usar un concepto un poco más general de inercia rotacional, llamado tensor de inercia. El tensor de inercia de un sólido rígido, es un tensor simétrico de segundo orden, que expresado en una base orto normal viene dado por una matriz simétrica, cuyas componentes tensoriales son:

$$I_{ij} = I_{ji} = \int_M \left[\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right]\, dm = \int_V \rho(\mathbf{r})\left[\delta_{ij} r^2 - x_i x_j\right] d^3\mathbf{r}$$

Donde (*x1,x2,x3*), son las coordenadas cartesianas rectangulares.

δ_{ij}, es el símbolo de Kronecker o delta de Kronecker definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Los elementos I_{ii} reciben el nombre de momento de inercia respecto al eje xi y son las componentes diagonales del tensor. Las componentes del tensor de inercia en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares son:

$$I_{xx} = \int_V \rho(y^2 + z^2) d^3\mathbf{r}$$

$$I_{yy} = \int_V \rho(z^2 + x^2) d^3\mathbf{r}$$

$$I_{zz} = \int_V \rho(x^2 + y^2) d^3\mathbf{r}$$

Y los tres productos de inercia según los mismos ejes:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_M -xy\, dm = \int_V -\rho xy\, d^3\mathbf{r}$$
$$I_{yz} = I_{zy} = \int_M -yz\, dm = \int_V -\rho yz\, d^3\mathbf{r}$$
$$I_{zx} = I_{xz} = \int_M -zx\, dm = \int_V -\rho zx\, d^3\mathbf{r}$$

Todas las formas anteriores pueden derivarse de la definición del tensor de momento de inercia haciendo:

$$\delta_{\mathrm{ij}} = 0; i \neq j$$

El momento con respecto a cualquier otro eje puede expresarse como combinación lineal anterior de las anteriores magnitudes:

$$I_{eje} = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{It}) = \begin{pmatrix} t_x & t_y & t_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \sum_j \sum_k I_{jk} t_j t_k$$

Donde la matriz es el tensor de inercia expresado en la base XYZ y $t = (t_{x,} ty, tz)$ es el vector paralelo al eje según el cual se pretende encontrar el momento de inercia.

Bibliografía:

internet

- http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/mass.html
- http://www.heurema.com/TestF19.htm

libros

- Marion, Jerry B. (1996). *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*. Barcelona: Ed. Reverté. ISBN 84-291-4094-8.
- Ortega, Manuel R. (1989-2006). *Lecciones de Física (4 volúmenes)*. Monytex. ISBN 84-404-4290-4, ISBN 84-398-9218-7, ISBN 84-398-9219-5, ISBN 84-604-4445-7.
- Resnick,Robert & Krane, Kenneth S. (2001). *Physics* (en inglés). Nueva York: John Wiley & Sons. ISBN 0-471-32057-9.
- Serway, Raymond A.; Jewett, John W. (2004). *Physics for Scientists and Engineers* (en inglés) (6ª edición). Brooks/Cole. ISBN 0-534-40842-7.
- Tipler, Paul A. (2000). *Física para la ciencia y la tecnología (2 volúmenes)*. Barcelona: Ed. Reverté. ISBN 84-291-4382-3.