



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

**Análise das infrações de trânsito de excesso de velocidade  
através da Teoria de Valores Extremos**

**Filipe Mateus de Sousa Costa**

**TERESINA - 2022**

**Filipe Mateus de Sousa Costa**

**Monografia:**

**Análise das infrações de trânsito de excesso de velocidade através da Teoria  
de Valores Extremos**

Monografia submetida à Coordenação do  
curso de graduação em Estatística, da Uni-  
versidade Federal do Piauí, como requisito  
parcial para obtenção do grau de Bacharel  
em Estatística.

**Orientador:**

Profa. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz

**Co-orientador:**

Prof. Dr. Fernando Ferraz do Nascimento

**TERESINA - 2022**

# Contents

<b>List of Figures</b>	<b>4</b>
<b>List of Tables</b>	<b>5</b>
<b>1 Agradecimentos</b>	<b>6</b>
<b>2 Resumo</b>	<b>7</b>
<b>3 Abstract</b>	<b>8</b>
<b>4 Introdução</b>	<b>9</b>
4.1 Apresentando os dados . . . . .	9
4.1.1 Pontos de medição de excesso de velocidade . . . . .	11
<b>5 Distribuição Pareto Generalizada (GPD)</b>	<b>13</b>
5.1 Domínio da atração . . . . .	14
5.2 Determinação do Limiar . . . . .	15
5.3 Estimação da GPD . . . . .	16
<b>6 Inferência Bayesiana</b>	<b>17</b>
<b>7 Modelos dinâmicos para Valores Extremos</b>	<b>18</b>
7.1 Alameda Parnaíba . . . . .	18
7.2 Av. Maranhão . . . . .	18
7.3 Av. Raul Lopes - Shopping . . . . .	20
7.4 Av. dos Ipês . . . . .	21
7.5 Av. Av. Jose Francisco de Almeida Neto . . . . .	22
7.6 Av. Barão de Castelo Branco . . . . .	23
<b>8 Conclusão</b>	<b>25</b>
<b>9 Referências Bibliográficas</b>	<b>26</b>

## List of Figures

1	Tabela com relação Velocidade Medida (VM) e Velocidade Considerada (VC) . . . . .	10
2	Alameda Parnaíba - Função fggpd . . . . .	18
3	Alameda Parnaíba - Função fmgpd . . . . .	18
4	Av. Maranhão - Função fggpd . . . . .	19
5	Av. Maranhão - Função fmgpd . . . . .	19
6	Av. Raul Lopes - Função fggpd . . . . .	20
7	Av. Raul Lopes - Função fmgpd . . . . .	20
8	Av. dos Ipês - Função fggpd . . . . .	21
9	Av. dos Ipês - Função fmgpd . . . . .	21
10	Av. Jose - Função fggpd . . . . .	22
11	Av. Jose - Função fmgpd . . . . .	22
12	Av. Barão - Função fggpd . . . . .	23
13	Av. Barão - Função fmgpd . . . . .	23

## List of Tables

# 1 Agradecimentos

Primeiramente, eu preciso agradecer a Deus por ter permitido a possibilidade de realizar uma segunda graduação e ter me sustentado durante todo o curso, foram vários os desafios, mas Ele permitiu que eu conseguisse superar tudo. Soli Deo Glória.

Preciso agradecer a minha esposa que ficou do meu lado durante este período, sacrificando-se para permitir que eu estudasse, motivando-me. Superando o ciúme por ter sido trocada, muitas vezes, por um livro cheio de fórmulas esquisitas. Incluo meu filho Mateus, que chegou no durante o curso para dar mais emoção à vida. Mesmo pequeno, me ensinou a ser mais produtivo. E claro, meu pai, minha mãe e minha irmã, mesmo a distância, me apoiavam.

Agradeço a Professora Valmaria por ter aceitado o desafio de me orientar nesse TCC, juntamente com o professor Fernando que ofereceu o apoio teórico para a realização desse projeto. Incluo a STRANS, na pessoa do superintendente Claudio Pessoa, que gentilmente, disponibilizaram os dados para este trabalho.

Finalizo os agradecimentos aos amigos que foram criados durante o curso. Edvaldo que, como eu, chefe de família. Compartilhamos muito do desafio de trabalhar, cuidar do lar e estudar. Eva, cheia de energia, se esforçava para tirar as melhores notas nas disciplinas. Envelheceu alguns anos durante as madrugadas acordadas, mas ok. Obrigado a todos, de coração.

## 2 Resumo

### 3 Abstract



## 4 Introdução

Eventos extremos são situações ou comportamentos que não ocorrem com tanta frequência. No desenho da distribuição normal, são aqueles que ficam próximos as caudas, distantes do pico onde está localizado a média, a situação de normalidade. Entretanto, é possível que estes eventos ocorram, na verdade, é esperado que eles ocorram. Diante dessa situação, é importante que possamos prever seus acontecimentos, pois quando ocorrem, as consequências podem ser trágicas.

Exemplos que demonstram com facilidade os efeitos de eventos extremos estão na área da climatologia. Para os portais de notícias, o aquecimento global tem trazido mais manchetes de catástrofes climáticas que causaram prejuízos substanciais e, infelizmente, mortes. Uma busca rápida em sites de pesquisa nos direciona facilmente para estes eventos.

O surgimento da teoria de valores extremos surge da necessidade de pesquisas sobre eventos extremos de forma mais eficiente. As distribuições mais comuns trabalham melhor na análise dos eventos centrais, mais frequentes. Dessa forma, os acontecimentos mais raros possuem ficar mais difíceis de prever.

### 4.1 Apresentando os dados

Os dados que iremos trabalhar neste projeto têm como origem as medições de excesso de velocidade registradas por radares no município de Teresina. Baseado no Código de Trânsito Brasileiros, ruas, avenidas e estradas no Brasil, possuem limites de velocidade especificados, entretanto, para a realização do registro infração, é preciso que a via esteja sinalizada informando a velocidade máxima.

Um ponto importante sobre as infrações de velocidade é que existe uma margem de erro para medição da velocidade registrada. Para fim de registro de infração, não se registra a velocidade obtida por instrumentos de medição, mas subtrai-se um valor na velocidade medida (para vias de velocidade máxima até 100km/h, o valor é 7), o que passar deste valor acima da velocidade permitida, será considerado para infração.

Por exemplo, para vias de com velocidade máxima de 60 km/h, as infrações serão registradas somente quando o veículo passar pelo ponto de medição quando a velocidade calculada for de 68 km/h, registrando um excesso de 1km/h. O resultado dessa distinção é o uso de dois termos: Velocidade medida, que consiste na velocidade registrada e Velocidade Considerada, que é a velocidade medida menos o fator de correção. Na tabela abaixo, temos a relação entre velocidade medida e velocidade considerada. A infração é feita quando a considerada é maior que permitida na via.

VM (Km/h)	VC (Km/h)	VM (Km/h)	VC (Km/h)	VM (Km/h)	VC (Km/h)	VM (Km/h)	VC (Km/h)
27	20	69	62	111	103	153	142
28	21	70	63	112	104	154	143
29	22	71	64	113	105	155	144
30	23	72	65	114	106	156	145
31	24	73	66	115	107	157	146
32	25	74	67	116	108	158	147
33	26	75	68	117	109	159	148
34	27	76	69	118	110	160	149
35	28	77	70	119	111	161	150
36	29	78	71	120	112	162	151
37	30	79	72	121	113	163	152
38	31	80	73	122	113	164	153
39	32	81	74	123	114	165	153
40	33	82	75	124	115	166	154
41	34	83	76	125	116	167	155
42	35	84	77	126	117	168	156
43	36	85	78	127	118	169	157
44	37	86	79	128	119	170	158
45	38	87	80	129	120	171	159
46	39	88	81	130	121	172	160
47	40	89	82	131	122	173	161
48	41	90	83	132	123	174	162
49	42	91	84	133	124	175	163
50	43	92	85	134	125	176	164
51	44	93	86	135	126	177	165
52	45	94	87	136	126	178	166
53	46	95	88	137	127	179	166
54	47	96	89	138	128	180	167
55	48	97	90	139	129	181	168
56	49	98	91	140	130	182	169
57	50	99	92	141	131	183	170
58	51	100	93	142	132	184	171
59	52	101	94	143	133	185	172
60	53	102	95	144	134	186	173
61	54	103	96	145	135	187	174
62	55	104	97	146	136	188	175
63	56	105	98	147	137	189	176
64	57	106	99	148	138	190	177
65	58	107	100	149	139	191	178
66	59	108	100	150	140	192	179
67	60	109	101	151	140	193	179
68	61	110	102	152	141	194	180

Figure 1: Tabela com relação Velocidade Medida (VM) e Velocidade Considerada (VC)

Na tabela acima, temos os valores entre as velocidades medidas e consideradas, note-se que na medida 107 e 108 km/h, a considerada se repete, neste ponto se inicia um aumento da margem de erro. Para este trabalho, iremos utilizar a medição calculada com a Velocidade considerada, pois o cálculo da infração é realizado com ela.

Em relação as infrações, o CTB normatiza três tipos de infrações para o excesso de velocidade baseado no percentual registado acima. Para medições até 20% acima da permitida, a infração é média, entre 20% e 50% é considerada grave e, superior a 50%, é gravíssima. O aumento da gravidade resulta no aumento do valor pago da multa. Nas tabelas abaixo, temos um resumo da divisão de tipificação, o intervalo de excesso e o valor pago. A primeira tabela refere-se para vias com velocidade máxima até 60 km/h e a segunda tabela considera a máxima 40km/h

- **Radares de 60 km/h**

Tipo	Faixa percentual	Faixa de Excesso	Valor da Multa
Média	até 20%	$1 \leq v \leq 12$	R\$ 130,16
Grave	entre 20% e 50%	$13 \leq v \leq 30$	R\$ 195,23
Gravíssima	superior a 50%	$\geq 31$	R\$ 880,41

- **Radares de 40 km/h**

Tipo	Faixa percentual	Faixa de Excesso	Valor da Multa
Média	até 20%	$1 \leq v \leq 8$	R\$ 130,16
Grave	entre 20% e 50%	$9 \leq v \leq 20$	R\$ 195,23
Gravíssima	superior a 50%	$\geq 21$	R\$ 880,41

#### 4.1.1 Pontos de medição de excesso de velocidade

Para a realização deste trabalho, escolhemos 4 endereços, são eles:

- Alameda Parnaíba, próximo Ponte Estaiada João Isidoro França – Zona Norte;
- Av. Raul Lopes, em frente ao Teresina Shopping – Zona Leste;
- Av. Maranhão, trecho entre o centro Administrativo e ponte da Amizade – Zona Sul;
- Av. Barão de Castelo Branco, próximo Igreja Católica do Cristo Rei. – Zona Sul.

Estes radares são considerados famosos com velocidade máxima de 60 km/h, exceção do radar da Av. Barão de Castelo Branco, onde o excesso é de 40 km/h. Seus bancos de dados são extensos e iremos apresentar algumas medidas descritivas para termos uma noção melhor da distribuição dos excessos.

É importante destacar que não iremos realizar uma distinção do sentido que o veículo está indo, para análises futuras, pode-se aprofundar nesta análise. Destaco, também, que utilizaremos todas os registros realizados, independente se auto não foi expedido por motivos técnicos ou administrativos.

## 5 Distribuição Pareto Generalizada (GPD)

A distribuição Pareto Generalizada (GPD) analisa a distribuição dos excessos de acordo com um limiar determinado. Esse formato de análise é mais eficaz pois evita a perda de informações que uma análise em períodos (ou blocos) pode gerar, afetando, principalmente, pesquisas com um grande volume de dados.

A distribuição Pareto Generalizada foi desenvolvida por Pickands [1975] é baseada no seguinte teorema:

*Teorema 1: Se  $x$  for uma variável aleatória (v.a.) com função distribuição (f.d.)  $F_x$ , que pertence ao domínio da de atração de uma distribuição GEV, então, quando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $F(x|u) = Pr X > u + x | X > u$ , possui distribuição GPD, com a seguinte função de distribuição:*

$$P(x|\xi, \sigma, \mu) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}, & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

onde  $\mu > 0$ ,  $x - \mu \geq 0$ , se  $\xi > 0$ , e  $0 \leq x - \mu \leq -\frac{\sigma}{\xi}$ , se  $\xi < 0$ . O caso  $\xi = 0$  é interpretado como sendo o limite quando  $\xi \rightarrow 0$ , e tem como caso particular a distribuição exponencial de parâmetro  $\frac{1}{\sigma}$ . Os parâmetros são  $\xi$ ,  $\sigma$  e  $\mu$ , que representam, respectivamente, a forma, a escala e o limiar da distribuição.

A função de densidade da distribuição GPD é dada por:

$$p(x|\xi, \sigma, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\}, & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

onde  $x - \mu > 0$  para  $\xi \geq 0$  e  $0 \leq x - \mu < -\frac{\mu}{\xi}$  para  $\xi > 0$ .

A distribuição GPD possui as seguintes características em relação aos parâmetros:

$$E(X) = \frac{\sigma}{1-\xi}; \xi < 1; Md(x) = \frac{\sigma(2\xi - 1)}{\xi}; V(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}$$

Justificando o uso da GPD Pickands (1975) e Davidson e Smith (1990) demonstram as propriedades e provam que GPD é única que satisfaz estas propriedades. “Por exemplo, estabilidade do limiar, ou seja, se  $Y$  possui distribuição GPD, e se  $\mu > 0$ , então a distribuição de  $P(Y - \mu | Y > \mu)$  também possui distribuição GPD”. *prof fernando*

Em valores extremos, além de encontrar a estimativa dos parâmetros do modelo, também é

muito importante encontrar uma forma para determinar os quantis altos, acima do limiar, de tal forma que se  $X$  possui distribuição GPD, é importante saber com qual probabilidade ocorre um evento maior ou igual a  $q$ , ou seja,  $P(X > q) = 1 - q$ .

Com os cálculos destes quantis, podemos realizar previsões com os dados de autos de excesso velocidade de trânsito de Teresina nos próximos anos, considerando uma manutenção da estrutura dos radares e, incluindo novos endereços de medição, uma previsão de quantos autos poderão ser registrados. Outra variável que pode ser analisada consiste no excessos de velocidade, determinando possíveis valores máximos e a previsão da quantidade de infrações.

Na distribuição GPD, pode-se encontrar um quantil  $q$  com probabilidade  $P(X < q)$  em função dos parâmetros. Invertendo a função acumulada, obtém-se a seguinte função dos quantis da cauda:

$$q_x p = \frac{((1 - p^*)^{-\xi} - 1)}{\xi},$$

onde  $p^* = 1 - (1 - p)N/N_u$ .

## 5.1 Domínio da atração

As distribuições de valores extremos são obtidas como distribuição limite ( $n \rightarrow \infty$ ) do máximo de um conjunto de variáveis aleatórias (v.a.s) independente e identicamente distribuídas (i.i.d) e são unicamente determinadas, a menos de transformações afins. O teorema de Fisher-Tippett implica que se  $F_x^n(C_n x + d_n)$  converge para uma distribuição degenerada quando ( $n \rightarrow \infty$ ), para certas constantes  $C_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$ , então

$$|F_x^n(x) - H(\frac{x - d_n}{c_n})| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

para alguma distribuição  $H$ . A coleção das distribuições  $F_x$  tais que os respectivos máximos possuem a mesma distribuição limite é chamada de domínio de atração.

*Definição 2.1.2* Se (função) se verifica dizemos que  $F_x$  pertence ao domínio de atração do máximo da distribuição de valores extremos  $H$ . Notação:  $F_x \in MDA(H)$

Existem 3 casos possíveis para as distribuições limites das excedências de um limiar. Para domínio do tipo I ( $\gamma = 0$ ), a distribuição se torna

$$H(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}, y > 0$$

sendo assim, o domínio, uma distribuição Exponencial com parâmetro  $\frac{1}{\sigma}$ . Para o domínio tipo II ( $\gamma > 0$ ), a distribuição limite será a distribuição de Pareto. Já para o domínio tipo III ( $\gamma < 0$ ), quando  $\sigma = -\frac{1}{\gamma}$ , a distribuição limite será uma Beta e quando  $\sigma \neq -\frac{1}{\gamma}$ , a distribuição limite será uma Beta reescalada com suporte em  $(0, \frac{\sigma}{\gamma})$ .

## 5.2 Determinação do Limiar

A análise via GPD exige um cuidado inicial pois é preciso determinar um limiar para os dados. O valor escolhido pode ser determinado pelo pesquisador, entretanto, correm-se riscos que podem influenciar os cálculos, resultando em análises incorretas.

A escolha de um limiar " $\mu$ " muito alto implica em um número muito pequeno de observações resultando em estimadores com grande variabilidade. Um limiar muito pequeno resulta na violação do Teorema de Pickands (1945), modelando de forma errada os valores com limiar baixo, dessa forma, não se garante a convergência dos excessos  $Y$  para a família da GPD, levando a um vício alto.

Métodos mais convencionais de determinação do limiar utilizam-se de análises gráficas da linearidade de  $N_u$ . Um método muito utilizado é o gráfico de médias de excessos (MRL < *Mena Residual Life Plot*), baseado na espera da GPD (Nascimento [2012]). Sua construção segue o seguinte formato:

$$\left\{ \left( \mu, \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} \right) : \mu < x_{max} \right\}$$

onde  $x_1 \leq x_2 \leq \dots x_n$  consistem nas  $N_u$  observações que excedem  $\mu$ , e  $x_{max}$  é o valor mais elevado das observações.

Considerando a distribuição GPD válida para os excessos, esta também é válida para os excessos acima de todos os limiares  $\mu > \mu_0$ , sujeito a mudanças no parâmetro de escala  $\sigma_\mu = \sigma_{\mu_0} + \xi_\mu$ . Então, para  $\mu > \mu_0$

$$E(X - \mu | X > \mu) = \frac{\sigma_\mu}{1 - \xi} = \frac{\sigma_{\mu_0} + \xi_\mu}{1 - \xi}$$

Se o modelo é adequado a partir de  $\mu_0$  o gráfico apresentará um comportamento linear a partir de  $u$ . Um problema recorrente com a utilização desse gráfico é que o limiar pode limitar o número de excessos devido a escolha de limiar muito alto.

Outra técnica gráfica utilizada é Dipersion Index Plot (DIP), baseado em Cunnane [1979] (Citado por Nascimento [2012]), que diz que, o número de excessos sobre um limiar alto em um determinado

período (geralmente meses ou anos), pode ser distribuído através de um processo de Poisson. Assim, a razão entre a variância e a média é igual a 1. Assim, pode-se fazer um gráfico

$$\left\{ \left( \mu, \frac{Var(Y)}{E(Y)} \right) : \mu < x_{max} \right\}$$

### 5.3 Estimação da GPD

Após determinar o limiar, a estimação dos parâmetros da distribuição GPD podem ser estimados por vários métodos, entre eles, tem-se o da máxima verossimilhança, que iremos trabalhar. Existem outros métodos como de momentos proposto por Smith [1987] (citado por Mendes [2004]) e o métodos dos momentos ponderados (Singh e Guo [1995], (citado por Mendes [2004])), em que a eficiência de cada método depende da situação estudada.

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) que maximizam a função de log-verossimilhança, quando  $\xi \neq 0$ , é dado por

$$l(\mu, \xi) = -n_u \log(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n_u} \log\left(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma}\right)\right)$$

definida em  $(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma}) > 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, N_u$ . No caso particular onde  $\xi = 0$ , a a log-verossimilhança é dada por

$$l(\sigma) = -n_u \log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n_u} \left(\frac{y_i}{\sigma}\right)$$

No caso de  $\xi = 0$ , a maximização dos parâmetros não pode ser obtida analiticamente, sendo necessárias técnicas numéricas de maximização.



## 6 Inferência Bayesiana

## 7 Modelos dinâmicos para Valores Extremos

### 7.1 Alameda Parnaíba

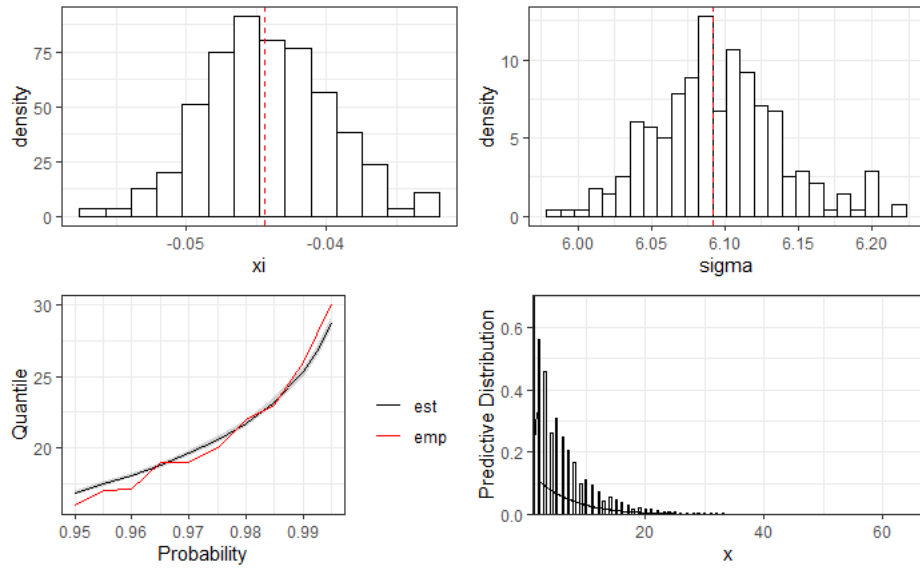


Figure 2: Alameda Parnaíba - Função fgcpd

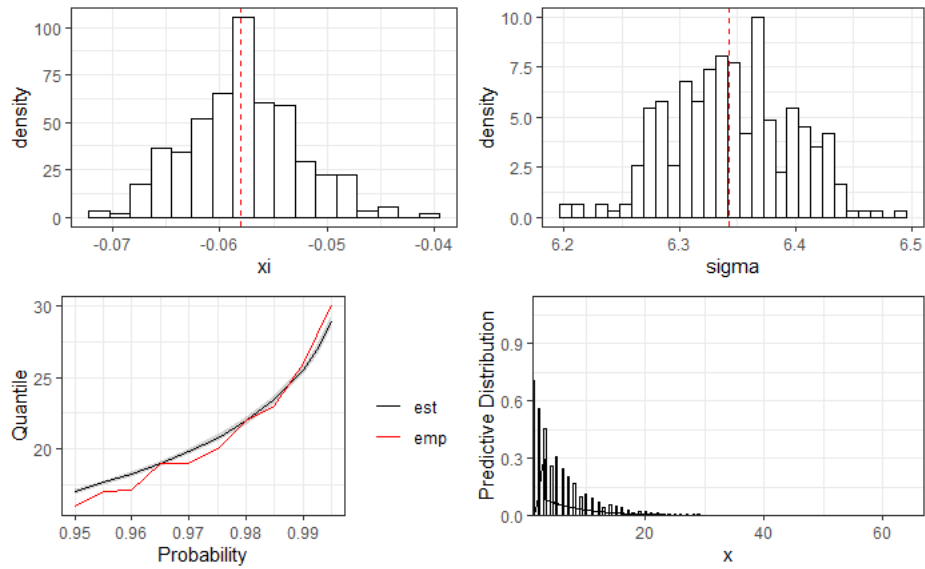


Figure 3: Alameda Parnaíba - Função fmcpd

Ajuste	DIC	BIC
Alameda com fgcpd	247310.8	247351.3
Alameda com fmcpd	215577.4	215641.7

### 7.2 Av. Maranhão

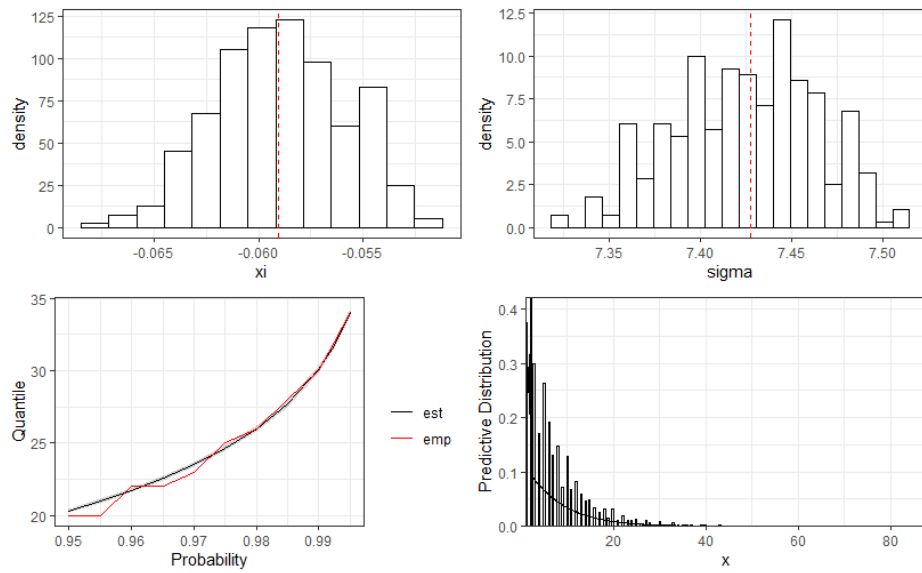


Figure 4: Av. Maranhão - Função fggpd

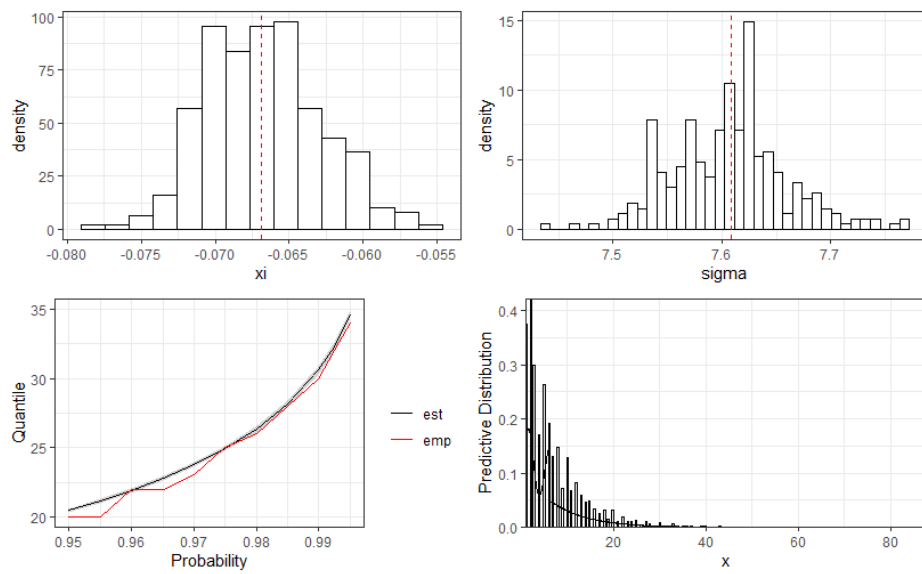


Figure 5: Av. Maranhão - Função fmgpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Maranhao com fgdpd	480153.4	480201.7
Av. Maranhão com fmgpd	485451.3	485518.7

### 7.3 Av. Raul Lopes - Shopping

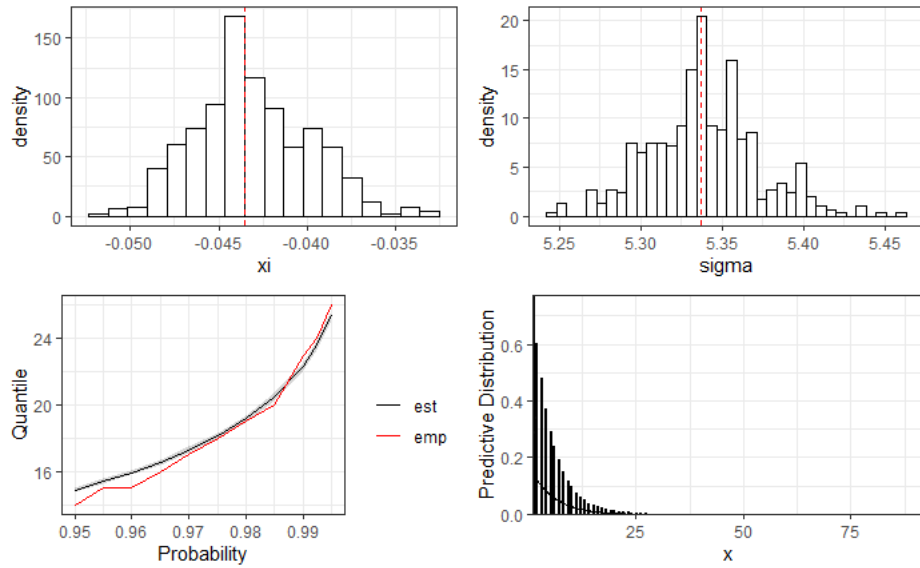


Figure 6: Av. Raul Lopes - Função fgdpd

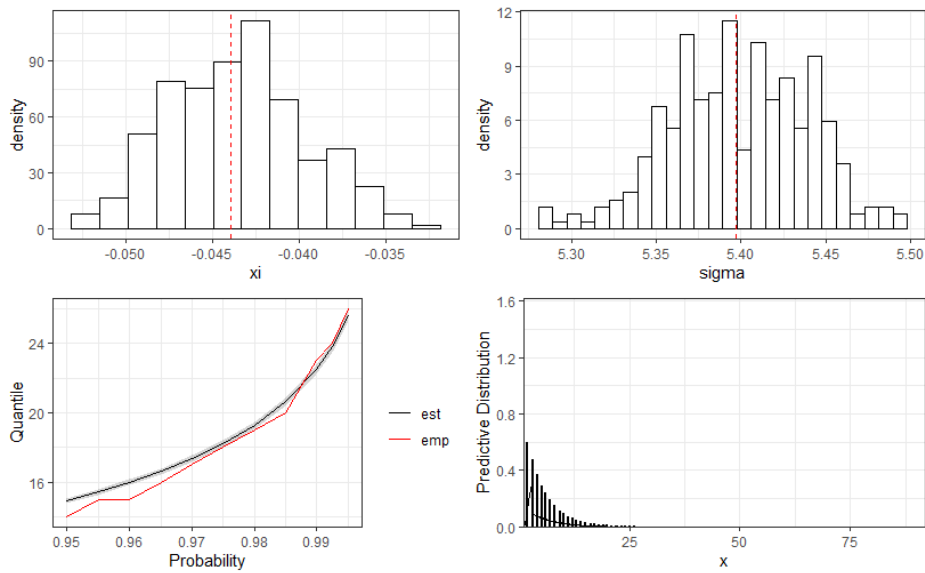


Figure 7: Av. Raul Lopes - Função fmgpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Raul Lopes com fggpd	253692.7	253754.8
Av. Rul Lopes com fmgpd	211497.7	211567.5

## 7.4 Av. dos Ipês

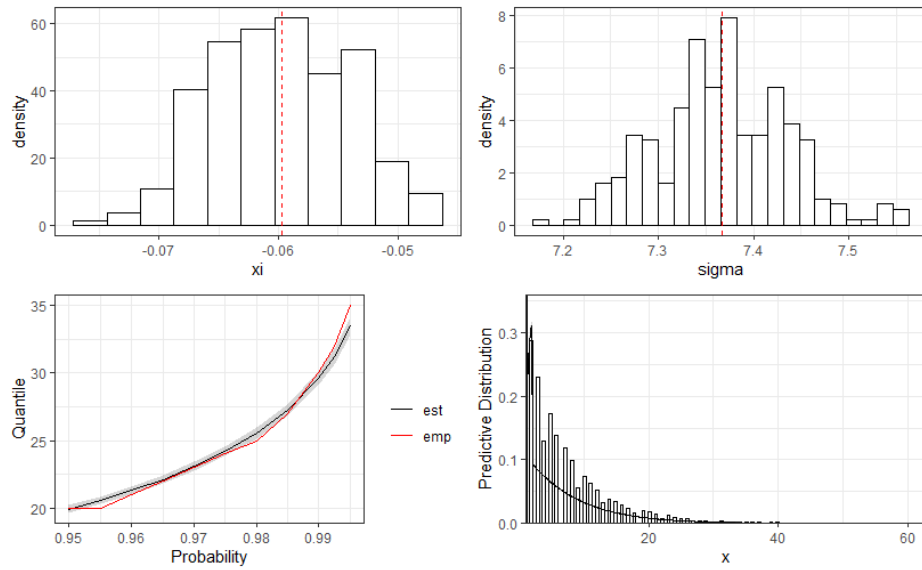


Figure 8: Av. dos Ipês - Função fggpd

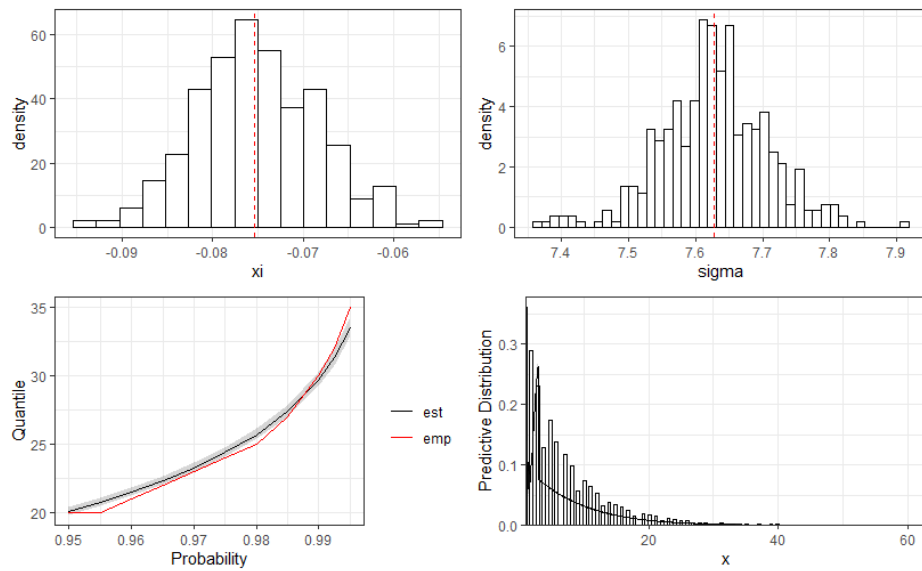


Figure 9: Av. dos Ipês - Função fmgpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Av. dos Ipês com fggpdp	136611.9	136654.4
Av. dos Ipês com fmgpdp	131887.8	131672.3

## 7.5 Av. Av. Jose Francisco de Almeida Neto

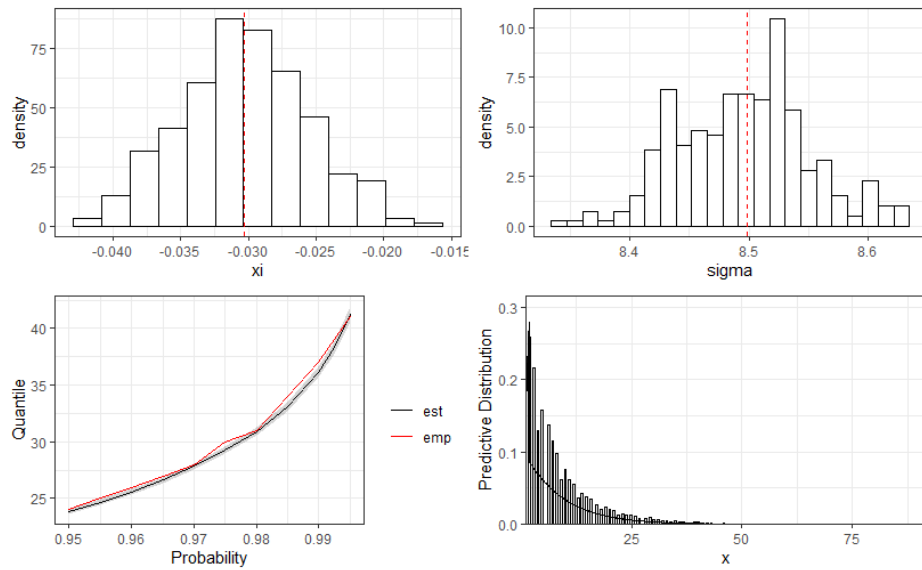


Figure 10: Av. Jose - Função fggpdp

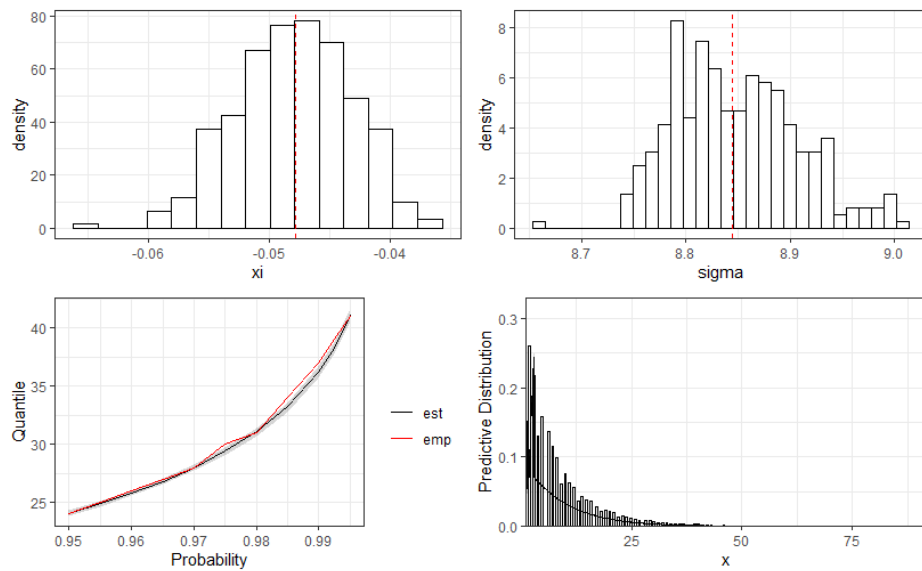


Figure 11: Av. Jose - Função fmgpdp

Ajuste	DIC	BIC
Av. Av. Jose com fgcpd	313760.1	303626.5
Av. Jose com fmgcpd	313806.8	303289.6

## 7.6 Av. Barão de Castelo Branco

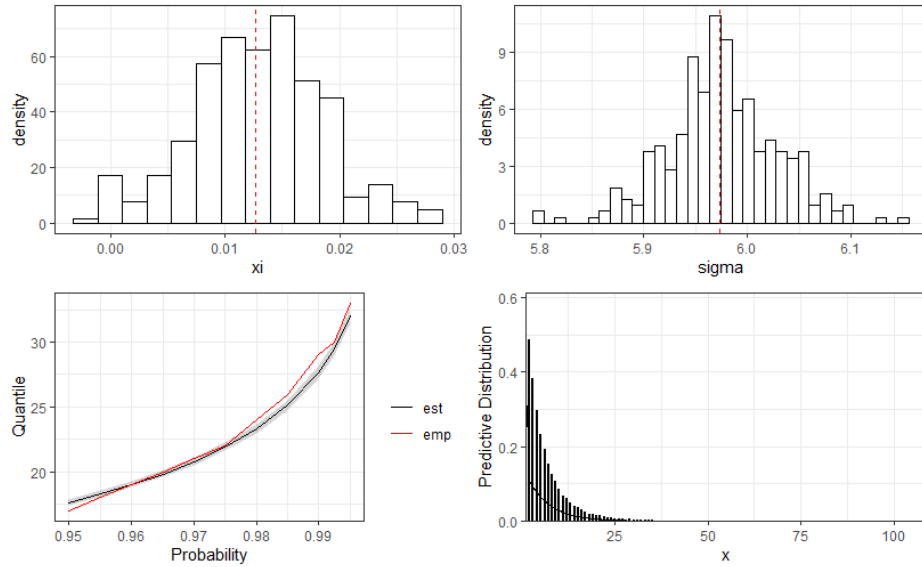


Figure 12: Av. Barão - Função fgcpd

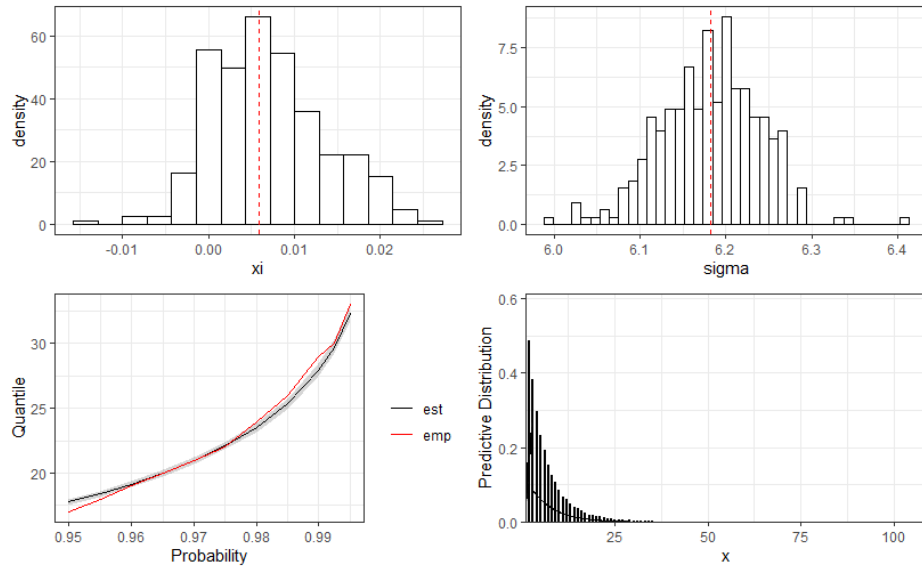


Figure 13: Av. Barão - Função fmgcpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Barão com fgdpd	160774.3	160813.9
Av. Barão com fmgpd	153049.2	152921.9



## 8 Conclusão

## 9 Referências Bibliográficas

@book{AREL:03, author={Nascimento, F. F.}, title={Modelos probabilísticos para dados extremos: teoria e aplicações}, publisher={EDUFPI}, year={2012.} }