



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**

**Análise das infrações de trânsito de excesso de velocidade  
através da Teoria de Valores Extremos**

**Filipe Mateus de Sousa Costa**

**TERESINA - 2022**

**Filipe Mateus de Sousa Costa**

**Monografia:**

**Análise das infrações de trânsito de excesso de velocidade através da Teoria  
de Valores Extremos**

Monografia submetida à Coordenação do curso de graduação em Estatística, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Orientador:

Profa. Dra. Valmária Rocha da Silva Ferraz

Co-orientador:

Prof. Dr. Fernando Ferraz do Nascimento

**TERESINA - 2022**

# Contents

<b>List of Figures</b>	<b>5</b>
<b>List of Tables</b>	<b>6</b>
<b>1 Agradecimentos</b>	<b>7</b>
<b>2 Resumo</b>	<b>8</b>
<b>3 Abstract</b>	<b>9</b>
<b>4 Introdução</b>	<b>10</b>
<b>5 Apresentando os dados</b>	<b>11</b>
5.0.1 Pontos de medição de excesso de velocidade . . . . .	13
5.0.2 Detalhando os dados . . . . .	14
5.0.3 Análise descritiva e da distribuição dos excessos. . . . .	15
5.1 Alguns testes . . . . .	17
5.1.1 Teste de Corridas . . . . .	17
5.1.2 Teste de Kruskal White . . . . .	19
5.1.3 Pós-Teste . . . . .	20
5.1.4 Arrecadação possível . . . . .	21
<b>6 Distribuição Pareto Generalizada (GPD)</b>	<b>22</b>
6.1 Domínio da atração . . . . .	23
6.2 Determinação do Limiar . . . . .	24
6.3 Estimação da GPD . . . . .	25
<b>7 Inferência Bayesiana</b>	<b>26</b>
<b>8 Modelos dinâmicos para Valores Extremos</b>	<b>27</b>
8.1 Alameda Parnaíba . . . . .	27
8.2 Av. Maranhão . . . . .	27
8.3 Av. Raul Lopes - Shopping . . . . .	29
8.4 Av. dos Ipês . . . . .	30
8.5 Av. Av. Jose Francisco de Almeida Neto . . . . .	31
8.6 Av. Barão de Castelo Branco . . . . .	32

<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>34</b>
<b>10</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>35</b>

## List of Figures

1	Tabela com relação Velocidade Medida (VM) e Velocidade Considerada (VC) . . . . .	12
2	Distribuição de excesso na Alameda Parnaíba . . . . .	15
3	Distribuição de excesso na Av. Raul Lopes . . . . .	16
4	Distribuição de excesso na Av. Maranhão . . . . .	16
5	Distribuição de excesso na Av. B. Castelo Branco . . . . .	17
6	Boxplot comparativo das distribuições dos excessos . . . . .	20
7	Alameda Parnaíba - Função fggpd . . . . .	27
8	Alameda Parnaíba - Função fmgpd . . . . .	27
9	Av. Maranhão - Função fggpd . . . . .	28
10	Av. Maranhão - Função fmgpd . . . . .	28
11	Av. Raul Lopes - Função fggpd . . . . .	29
12	Av. Raul Lopes - Função fmgpd . . . . .	29
13	Av. dos Ipês - Função fggpd . . . . .	30
14	Av. dos Ipês - Função fmgpd . . . . .	30
15	Av. Jose - Função fggpd . . . . .	31
16	Av. Jose - Função fmgpd . . . . .	31
17	Av. Barão - Função fggpd . . . . .	32
18	Av. Barão - Função fmgpd . . . . .	32

## **List of Tables**

# 1 Agradecimentos

Primeiramente, eu preciso agradecer a Deus por ter permitido a possibilidade de realizar uma segunda graduação e ter me sustentado durante todo o curso, foram vários os desafios, mas Ele permitiu que eu conseguisse superar tudo. Soli Deo Glória.

Preciso agradecer a minha esposa que ficou do meu lado durante este período, sacrificando-se para permitir que eu estudasse, motivando-me. Superando o ciúme por ter sido trocada, muitas vezes, por um livro cheio de fórmulas esquisitas. Incluo meu filho Mateus, que chegou no durante o curso para dar mais emoção à vida. Mesmo pequeno, me ensinou a ser mais produtivo. E claro, meu pai, minha mãe e minha irmã, mesmo a distância, me apoiavam.

Agradeço a Professora Valmaria por ter aceitado o desafio de me orientar nesse TCC, juntamente com o professor Fernando que ofereceu o apoio teórico para a realização desse projeto. Incluo a STRANS, na pessoa do superintendente Claudio Pessoa, que gentilmente, disponibilizaram os dados para este trabalho.

Finalizo os agradecimentos aos amigos que foram criados durante o curso. Edvaldo que, como eu, chefe de família. Compartilhamos muito do desafio de trabalhar, cuidar do lar e estudar. Eva, cheia de energia, se esforçava para tirar as melhores notas nas disciplinas. Envelheceu alguns anos durante as madrugadas acordadas, mas ok. Obrigado a todos, de coração.

*É Cristo, e somente Cristo, que torna o encarar a morte suportável. Cristo infunde aos aspectos mais dolorosos e desconcertantes do fim desta vida esperança e paz. - Nancy Guthrie*

## **2 Resumo**

### **3 Abstract**

## 4 Introdução

Eventos extremos são situações ou comportamentos que não ocorrem com tanta frequência. No desenho da distribuição normal, são aqueles que ficam próximos as caudas, distantes do pico onde está localizado a média, a situação de normalidade. Entretanto, é possível que estes eventos ocorram, na verdade, é esperado que eles ocorram. Diante dessa situação, é importante que possamos prever seus acontecimentos, pois quando ocorrem, as consequências podem ser trágicas.

Exemplos que demonstram com facilidade os efeitos de eventos extremos estão na área da climatologia. Para os portais de notícias, o aquecimento global tem trazido mais manchetes de catástrofes climáticas que causaram prejuízos substanciais e, infelizmente, mortes. Além da área citada, podemos encontrar estudos que envolvem valores extremos em áreas de pesquisa como engenharia de materiais, controle de tráfego e economia.

O surgimento da teoria de valores extremos surge da necessidade de pesquisas sobre eventos extremos de forma mais eficiente. As distribuições mais comuns trabalham melhor na análise dos eventos centrais, mais frequentes. Dessa forma, os acontecimentos mais raros possuem ficam mais difíceis de prever. Em (**PINHEIRO?**), podemos encontrar um resumo da teoria de valores extremos

**O objetivo da teoria estatística do valor extremo é analisar valores extremos observados e prever possíveis valores ainda mais extremos, é fazer inferência para eventos cujas probabilidades são menores do que qualquer evento observado anteriormente. Fenômenos em que a probabilidade de um valor extremo é relativamente alta são caracterizados por distribuições com caudas pesadas**

## 5 Apresentando os dados

Os dados que iremos trabalhar neste projeto têm como origem as medições de excesso de velocidade registradas por radares no município de Teresina. Baseado no Código de Trânsito Brasileiro, ruas, avenidas e estradas no Brasil, possuem limites de velocidade especificados, no entanto, para a realização do registro infração, é preciso que a via esteja sinalizada informando a velocidade máxima.

Um ponto importante sobre as infrações de velocidade é a existência de uma margem de erro para medição da velocidade registrada. Para fim de registro de infração, não se utiliza a velocidade obtida pelo instrumento de medição, mas subtrai-se um valor na velocidade medida (para medições até 100km/h, o valor reduzido é de 7 km/h). A velocidade final obtida após a subtração será a considerada para o registro ou não da infração.

Por exemplo, para vias com velocidade máxima de 60 km/h, as infrações serão registradas somente a velocidade calculada no ponto de medição for, pelo menos, de 68 km/h, registrando um excesso de 1km/h, mas para uma velocidade registrada de 67 km/h, o valor considerado é de 60km/h, não caracterizando uma infração. O resultado dessa distinção é o uso de dois termos: **Velocidade medida**, que consiste na velocidade Registrada e **Velocidade Considerada**, referente a velocidade medida menos o fator de correção. Na tabela abaixo, temos a relação entre velocidade medida e velocidade considerada. A infração é feita quando a considerada é maior que permitida na via.

<u>VM</u> (Km/h)	<u>VC</u> (Km/h)	<u>VM</u> (Km/h)	<u>VC</u> (Km/h)	<u>VM</u> (Km/h)	<u>VC</u> (Km/h)	<u>VM</u> (Km/h)	<u>VC</u> (Km/h)
27	20	69	62	111	103	153	142
28	21	70	63	112	104	154	143
29	22	71	64	113	105	155	144
30	23	72	65	114	106	156	145
31	24	73	66	115	107	157	146
32	25	74	67	116	108	158	147
33	26	75	68	117	109	159	148
34	27	76	69	118	110	160	149
35	28	77	70	119	111	161	150
36	29	78	71	120	112	162	151
37	30	79	72	121	113	163	152
38	31	80	73	122	113	164	153
39	32	81	74	123	114	165	153
40	33	82	75	124	115	166	154
41	34	83	76	125	116	167	155
42	35	84	77	126	117	168	156
43	36	85	78	127	118	169	157
44	37	86	79	128	119	170	158
45	38	87	80	129	120	171	159
46	39	88	81	130	121	172	160
47	40	89	82	131	122	173	161
48	41	90	83	132	123	174	162
49	42	91	84	133	124	175	163
50	43	92	85	134	125	176	164
51	44	93	86	135	126	177	165
52	45	94	87	136	126	178	166
53	46	95	88	137	127	179	166
54	47	96	89	138	128	180	167
55	48	97	90	139	129	181	168
56	49	98	91	140	130	182	169
57	50	99	92	141	131	183	170
58	51	100	93	142	132	184	171
59	52	101	94	143	133	185	172
60	53	102	95	144	134	186	173
61	54	103	96	145	135	187	174
62	55	104	97	146	136	188	175
63	56	105	98	147	137	189	176
64	57	106	99	148	138	190	177
65	58	107	100	149	139	191	178
66	59	108	100	150	140	192	179
67	60	109	101	151	140	193	179
68	61	110	102	152	141	194	180

Figure 1: Tabela com relação Velocidade Medida (VM) e Velocidade Considerada (VC)

Na tabela acima, temos os valores entre as velocidades medidas e consideradas, note-se que na medida 107 e 108 km/h, a considerada se repete, neste ponto se inicia um aumento da margem de erro. Para este trabalho, iremos utilizar a medição calculada com a velocidade considerada, pois o cálculo da infração é realizado com ela.

Em relação as infrações, o CTB normatiza três tipos de infrações para o excesso de velocidade baseado no percentual registrado acima. Para medições até 20% acima da permitida, a infração é média, entre 20% e 50% é considerada grave e, superior a 50%, é gravíssima. O aumento da gravidade resulta no aumento do valor pago da multa. Nas tabelas abaixo, temos um resumo da divisão de tipificação, o intervalo de excesso e o valor pago. A primeira tabela refere-se para vias com velocidade máxima até 60 km/h e a segunda tabela considera a máxima 40km/h

- **Radares de 60 km/h**

Tipo	Faixa percentual	Faixa de Excesso	Valor da Multa
Média	até 20%	$1 \leq v \leq 12$	R\$ 130,16
Grave	entre 20% e 50%	$13 \leq v \leq 30$	R\$ 195,23
Gravíssima	superior a 50%	$\geq 31$	R\$ 880,41

- **Radares de 40 km/h**

Tipo	Faixa percentual	Faixa de Excesso	Valor da Multa
Média	até 20%	$1 \leq v \leq 8$	R\$ 130,16
Grave	entre 20% e 50%	$9 \leq v \leq 20$	R\$ 195,23
Gravíssima	superior a 50%	$\geq 21$	R\$ 880,41

### 5.0.1 Pontos de medição de excesso de velocidade

Para a realização deste trabalho, escolhemos 4 endereços, são eles:

- Alameda Parnaíba, próximo Ponte Estaiada João Isidoro França – Zona Norte;
- Av. Raul Lopes, em frente ao Teresina Shopping – Zona Leste;
- Av. Maranhão, trecho entre o centro Administrativo e ponte da Amizade – Zona Sul;
- Av. Barão de Castelo Branco, próximo Igreja Católica do Cristo Rei. – Zona Sul.

Estes radares são considerados famosos com velocidade máxima de 60 km/h, exceção do radar da Av. Barão de Castelo Branco, onde o excesso é de 40 km/h. Seus bancos de dados são extensos e iremos apresentar algumas medidas descritivas para termos uma noção melhor da distribuição dos excessos.

É importante destacar que não iremos realizar uma distinção do sentido que o veículo está indo, para análises futuras, pode-se aprofundar nesta análise. Destaco, também, que utilizaremos todas os registros realizados, independente se o auto não foi expedido por motivos técnicos ou administrativos.

### 5.0.2 Detalhando os dados

Os dados utilizados apresentam algumas diferenças de período de registro por via, entretanto, todos os dados têm a data limite de 31/12/2021, sendo seus inícios variados. Isto ocorre devido a fatores administrativos e técnicos. Um fator que não podemos mensurar facilmente são os dias zerados para autuações, pois não podemos identificar se foi problema técnico ou se realmente não houve nenhum registro naquele específico.

Abaixo, apresentamos uma tabela especificando a data de início e fim dos registros, a quantidade de dias entre as datas e a quantidade de dias zerados.

Endereço	Data de Inicio	Data Final	Dias	Dias Zerados
Alameda Parnaíba	05/05/2016	31/12/2021	2089	282
Av. Raul Lopes	12/05/2017	19/10/2020	1696	595
Av. Maranhão	05/05/2017	31/12/2021	1702	292
Av. B. C. Branco	26/09/2016	31/12/2020	1830	334

A próxima tabela apresenta a quantidade de dias com registros de autuação, a quantidade de autos registrados em todo o período analisando e a divisão percentual por tipo de infração apresentada anteriormente, média, grave e gravíssima.

Endereço	Nº de Dias	Nº de Autos	Percentual até 20%	Percentual entre 20% e 50%	Percentual acima 50%
Alameda Parnaiba	1807	48647	90.23	9.30	0.45
Av. Raul Lopes	1101	51605	92.75	7.03	0.22
Av. Maranhão	1410	27273	88.34	10.94	0.72

Endereço	Dias	Nº de Autos	Percentual até 20%	Percentual entre 20% e 50%	Percentual acima 50%
Av. B. de Castelo Branco	1496	30954	79.18	17.66	3.16

### 5.0.3 Análise descritiva e da distribuição dos excessos.

O objetivo deste tópico é apresentar algumas medidas básicas dos radares que estamos analisando. Primeiramente, temos um tabela com as informações descritivas dos radares. Num segundo momento, construímos algumas imagens com `ggplot` com as distribuições dos excessos dos radares.

Endereço	Média	Desvio Padrão	Mediana	Mínimo	Máximo
Alameda Parnaíba	5.61	5.39	4	1	67
Av. Raul Lopes	5.02	5.02	4	1	92
Av. Maranhão	6.05	5.94	4	1	70
Av. B. de Castelo Branco	5.74	5.89	4	1	109

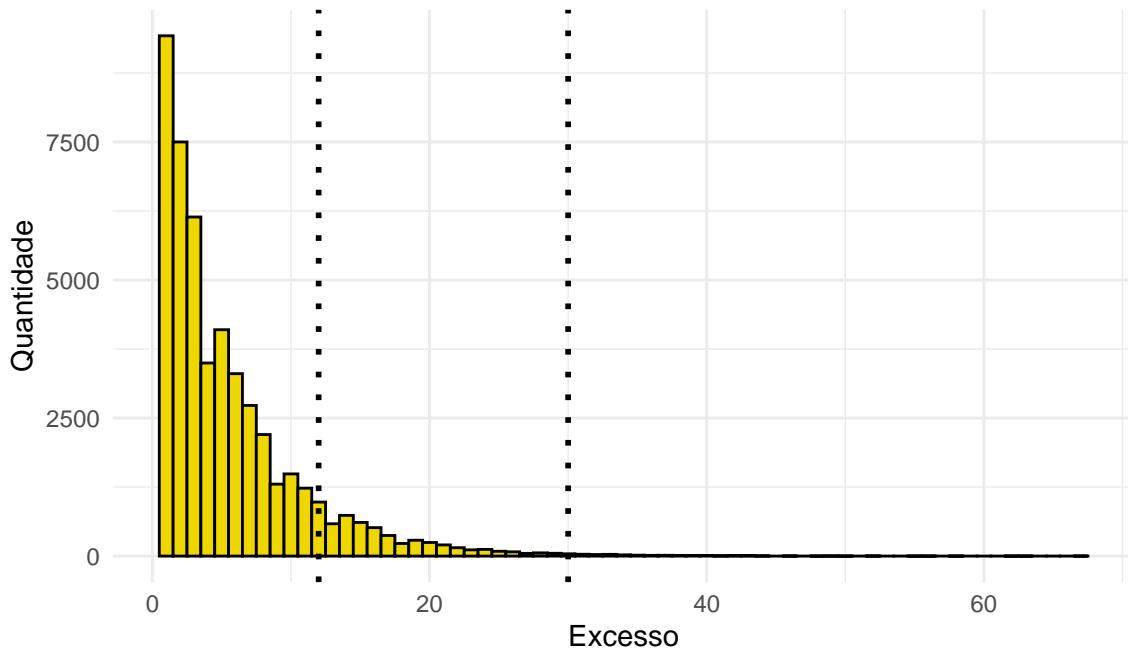


Figure 2: Distribuição de excesso na Alameda Parnaíba

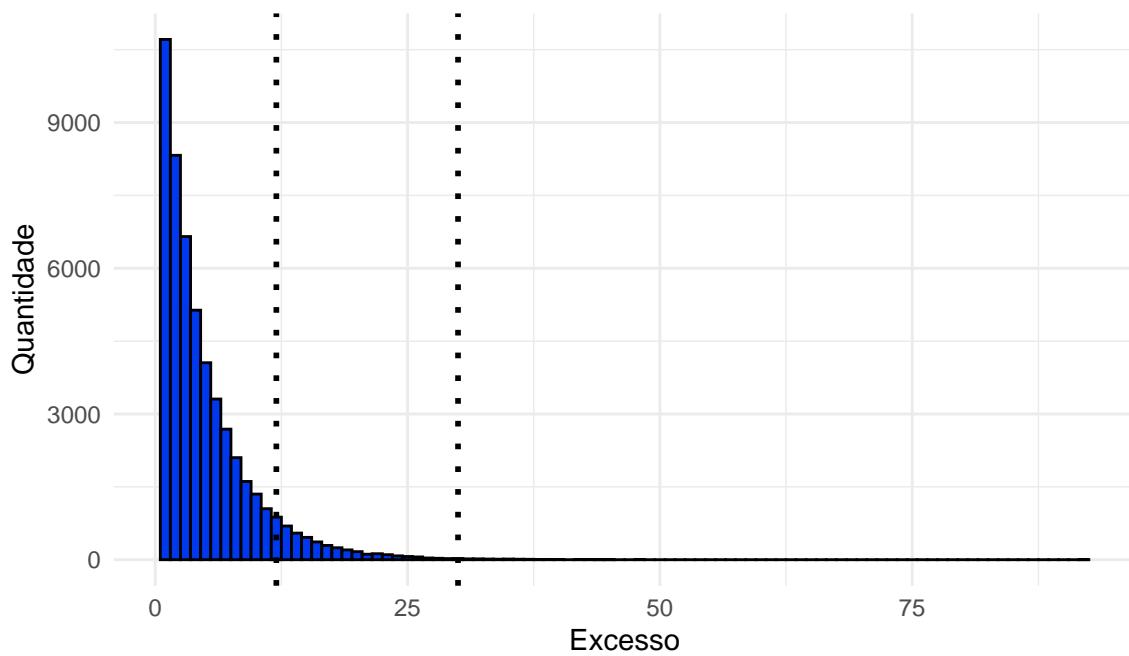


Figure 3: Distribuição de excesso na Av. Raul Lopes

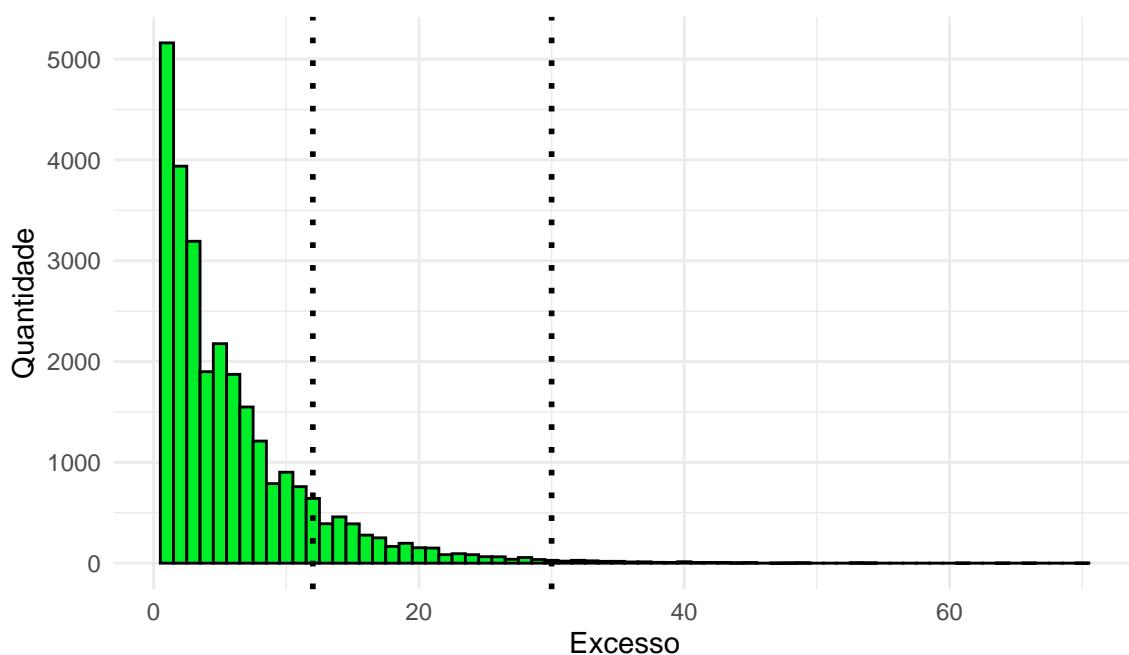


Figure 4: Distribuição de excesso na Av. Maranhão

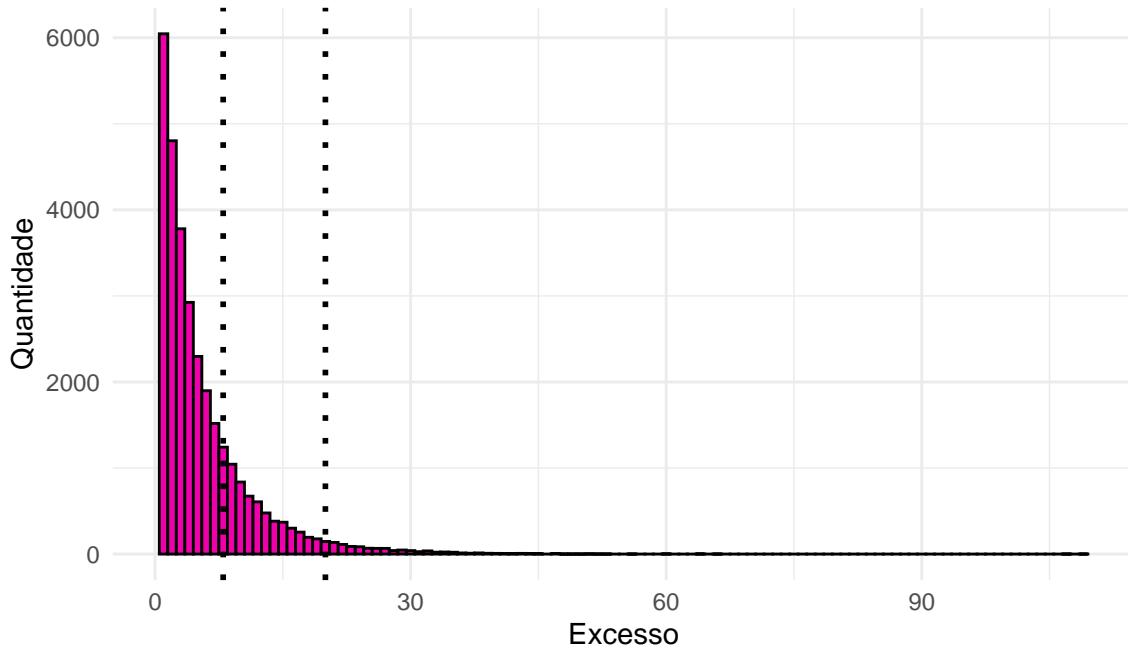


Figure 5: Distribuição de excesso na Av. B. Castelo Branco

## 5.1 Alguns testes

Através das dos gráficos da distribuição dos excessos de velocidade, podemos afirmar que não ocorrem distribuições do tipo normal. Nota-se que quanto maior for a velocidade de excesso, menor é sua probabilidade de ocorrer, sendo a de 1km/h a mais frequente.

Iremos realizar alguns testes que buscam identificar se a ocorrência de multas dos excessos ocorre de uma forma aleatória ou não. Para isso, utilizaremos o teste de corridas, que se baseia no aumento ou diminuição da medição comparada a anterior.

### 5.1.1 Teste de Corridas

O primeiro teste que iremos realizar tem como objetivo analisar se a distribuição em análise possui um comportamento aleatório ou não. De acordo com a resposta obtida por radar, podemos ter uma noção do funcionamento dos radares na registro do excessos.

O teste de corridas faz uma comparação do valor medido numa posição no vetor em análise, comparando com a medição anterior analisando se o valor aumentou ou diminuiu e, a partir da sequencia de aumentos ou diminuições, será obtido o número de corridas, sendo este o valor utilizado para determinar a aleatoriedade ou não do processo.

As respostas possíveis do teste aplicado são,

$$H_0 = \text{A sequência de dados é aleatória} \\ H_0 = \text{A sequência de dados não é aleatória}$$

Para a realização do teste, utilizando a função `DescTools::RunsTest` no R e os resultados são apresentados a seguir:

- **Alameda Parnaíba**

```
## 
## Runs Test for Randomness
## 
## data: Alameda$Excesso
## z = -2.8499, runs = 23806, m = 26564, n = 22083, p-value = 0.004373
## alternative hypothesis: true number of runs is not equal the expected number
## sample estimates:
## median(x)
##                 4
```

- **Av. Raul Lopes**

```
## 
## Runs Test for Randomness
## 
## data: Shopping$Excesso
## z = -2.6169, runs = 24539, m = 30826, n = 20779, p-value = 0.008872
## alternative hypothesis: true number of runs is not equal the expected number
## sample estimates:
## median(x)
##                 4
```

- **Av. Maranhão**

```
## 
## Runs Test for Randomness
## 
## data: Maranhao$Excesso
## z = -3.1474, runs = 13355, m = 14191, n = 13082, p-value = 0.001647
## alternative hypothesis: true number of runs is not equal the expected number
```

```

## sample estimates:
## median(x)
##          4

• Av. B. de Castelo Branco

##
## Runs Test for Randomness
##
## data: Barao$Excesso
## z = -2.1968, runs = 15009, m = 17554, n = 13400, p-value = 0.02803
## alternative hypothesis: true number of runs is not equal the expected number
## sample estimates:
## median(x)
##          4

```

Com os testes realizados, podemos afirmar que o registro dos radares não é aleatório para todos os radares. Dessa forma, podemos construir uma análise que possa descrever o funcionamento dos radares.

### 5.1.2 Teste de Kruskal White

Outro teste que podemos realizar é o de Kruskal White, com ele iremos analisar a distribuição dos quatro radares buscando definir se o comportamento é parecido ou não. Dessa forma, avalia-se de  $H_0$  que determina o comportamento semelhante para todos as distribuições em análise ou a  $H_1$ , que determina que ao menos dois objetos de análise possui diferença.

Se o resultado indicar que existe diferença, utilizaremos um pós-teste (Teste de Dunn) para identificar entre quais ocorrem a diferença.

```

## # A tibble: 1 x 4
##   statistic  p.value parameter method
##       <dbl>     <dbl>    <int> <chr>
## 1        435. 5.45e-94      3 Kruskal-Wallis rank sum test

```

O resultado do teste indica que existe diferença entre as distribuições entre os radares. Assim, o próximo o passo é realizar o pós teste para identificar onde estão as diferenças.

### 5.1.3 Pós-Teste

Utilizamos os teste de Dunn

.y.	group1	group2	n1	n2	statistic	p	p.adj	p.adj.signif
excessos	1	2	48647	51605	-13.916882	0.0000000	0	****
excessos	1	3	48647	27273	7.843274	0.0000000	0	****
excessos	1	4	48647	30954	-0.867789	0.3855098	1	ns
excessos	2	3	51605	27273	19.672889	0.0000000	0	****
excessos	2	4	51605	30954	11.355477	0.0000000	0	****
excessos	3	4	27273	30954	-7.903749	0.0000000	0	****

O pós teste indica que somente Alameda Parnaíba e Av. Maranhão possuem um comportamento de distribuição parecidos. Em seguida, fazemos um gráfico Boxplot comparado as distribuições dos excessos.

- **Gráfico comparativo**

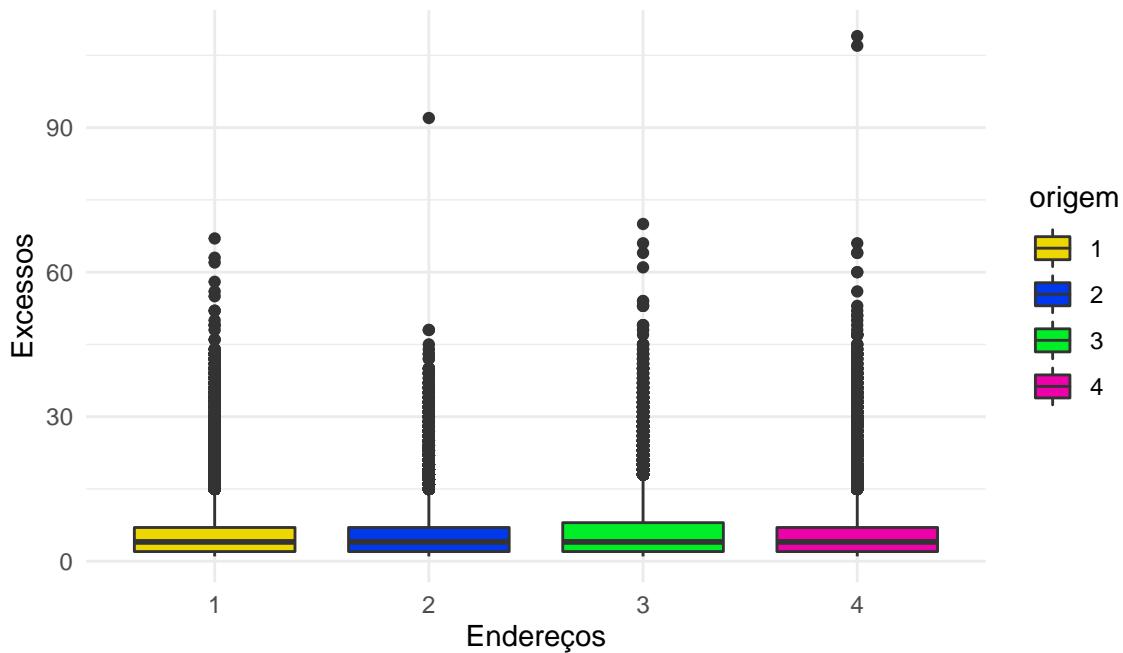


Figure 6: Boxplot comparativo das distribuições dos excessos

#### **5.1.4 Arrecadação possível**

Finalizando esta análise no ponto que consiste o objetivo final do trabalho, a arrecadação. A idéia do trabalho é utilizar as informações detalhadas acima para que seja possível realizar uma previsão de arrecadação e, desta forma, aperfeiçoar a forma de administração das receitas e despesas públicas. Abaixo, temos a arredação possível se todas as multas fossem pagas com o valor integral.

Local	Arrecadação Possível
Alameda Parnaiba	R\$ 6.794.927
Av. Raul Lopes	R\$ 7.036.259
Av. Maranhão	R\$ 3.891.757
Av. B. de Castelo Branco	R\$ 5.119.140

## 6 Distribuição Pareto Generalizada (GPD)

A distribuição Pareto Generalizada (GPD) analisa a distribuição dos excessos de acordo com um limiar determinado. Esse formato de análise é mais eficaz pois evita a perda de informações que uma análise em períodos (ou blocos) pode gerar, afetando, principalmente, pesquisas com um grande volume de dados.

A distribuição Pareto Generalizada foi desenvolvida por Pickands [1975] é baseada no seguinte teorema:

*Teorema 1: Se  $x$  for uma variável aleatória (v.a.) com função distribuição (f.d.)  $F_x$ , que pertence ao domínio da atração de uma distribuição GEV, então, quando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $F(x|u) = PrX > u + x|X > u$ , possui distribuição GPD, com a seguinte função de distribuição:*

$$P(x|\xi, \sigma, \mu) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)}{\sigma} \right\}, & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

onde  $\mu > 0$ ,  $x - \mu \geq 0$ , se  $\xi > 0$ , e  $0 \leq x - \mu \leq -\frac{\sigma}{\xi}$ , se  $\xi < 0$ . O caso  $\xi = 0$  é interpretado como sendo o limite quando  $\xi \rightarrow 0$ , e tem como caso particular a distribuição exponencial de parâmetro  $\frac{1}{\sigma}$ . Os parâmetros são  $\xi$ ,  $\sigma$  e  $\mu$ , que representam, respectivamente, a forma, a escala e o limiar da distribuição.

A função de densidade da distribuição GPD é dada por:

$$p(x|\xi, \sigma, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \text{se } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)}{\sigma} \right\}, & \text{se } \xi = 0 \end{cases}$$

onde  $x - \mu > 0$  para  $\xi \geq 0$  e  $0 \leq x - \mu < -\frac{\mu}{\xi}$  para  $\xi > 0$ .

A distribuição GPD possui as seguintes características em relação aos parâmetros:

$$E(X) = \frac{\sigma}{1-\xi}; \quad \xi < 1; \quad Md(x) = \frac{\sigma(2\xi-1)}{\xi}; \quad V(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}$$

Justificando o uso da GPD Pickands (1975) e Davidson e Smith (1990) demostram as propriedades e provam que GPD é única que satisfaz estas propriedades. “Por exemplo, estabilidade do limiar, ou seja, se  $Y$  possui distribuição GPD, e se  $\mu > 0$ , então a distribuição de  $P(Y - \mu|Y > \mu)$  também possui distribuição GPD.” prof fernando

Em valores extremos, além de encontrar a estimativa dos parâmetros do modelo, também é

muito importante encontrar uma forma para determinar os quantis altos, acima do limiar, de tal forma que se  $X$  possui distribuição GPD, é importante saber com qual probabilidade ocorre um evento maior ou igual a  $q$ , ou seja,  $P(X > q) = 1 - q$ .

Com os cálculos destes quantis, podemos realizar previsões com os dados de autos de excesso velocidade de trânsito de Teresina nos próximos anos, considerando uma manutenção da estrutura dos radares e, incluindo novos endereços de medição, uma previsão de quantos autos poderão ser registrados. Outra variável que pode ser analisada consiste no excessos de velocidade, determinando possíveis valores máximos e a previsão da quantidade de infrações.

Na distribuição GPD, pode-se encontrar um quantil  $q$  com probabilidade  $P(X < q)$  em função dos parâmetros. Invertendo a função acumulada, obtém-se a seguinte função dos quantis da cauda:

$$q_{xp} = \frac{((1-p*)^{-\xi} - 1)}{\xi},$$

onde  $p* = 1 - (1-p)N/N_u$ .

## 6.1 Domínio da atração

As distribuições de valores extremos são obtidas como distribuição limite ( $n \rightarrow \infty$ ) do máximo de um conjunto de variáveis aleatórias (v.a.s) independente e identicamente distribuídas (i.i.d) e são unicamente determinadas, a menos de transformações afins. O teorema de Fisher-Tippet implica que se  $F_x^n(C_n x + d_n)$  é não degenerada quando ( $n \rightarrow \infty$ ), para certas constantes  $C_n > 0$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$ , então

$$|F_x^n(x) - H\left(\frac{x-d_n}{c_n}\right)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

para alguma distribuição  $H$ . A coleção das distribuições  $F_x$  tais que os respectivos máximos possuem a mesma distribuição limite é chamada de domínio de atração.

*Definição 2.1.2 Se (função) se verifica dizemos que  $F_x$  pertence ao domínio de atração do máximo da distribuição de valores extremos  $H$ . Notação:  $F_x \in MDA(H)$*

Existem 3 casos possíveis para as distribuições limites das excedências de um limiar. Para domínio do tipo I ( $\gamma = 0$ ), a distribuição se torna

$$H(y) = 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}, y > 0$$

sendo assim, o domínio, uma distribuição Exponencial com parâmetro  $\frac{1}{\sigma}$ . Para o domínio tipo II ( $\gamma > 0$ ), a distribuição limite será a distribuição de Pareto. Já para o domínio tipo III ( $\gamma < 0$ ), quando  $\sigma = -\frac{1}{\gamma}$ , a distribuição limite será uma Beta e quando  $\sigma \neq -\frac{1}{\gamma}$ , a distribuição limite será uma Beta reescalada com suporte em  $(0, \frac{\sigma}{\gamma})$ .

## 6.2 Determinação do Limiar

A análise via GPD exige um cuidado inicial pois é preciso determinar um limiar para os dados. O valor escolhido pode ser determinado pelo pesquisador, entretanto, correm-se riscos que podem influenciar os cálculos, resultando em análises incorretas.

A escolha de um limiar " $\mu$ " muito alto implica em um número muito pequeno de observações resultando em estimadores com grande variabilidade. Um limiar muito pequeno resulta na violação do Teorema de Pickands (1945), modelando de forma errada os valores com limiar baixo, dessa forma, não se garante a convergência dos excessos Y para a família da GPD, levando a um vício alto.

Métodos mais convencionais de determinação do limiar utilizam-se de análises gráficas da linearidade de  $N_u$ . Um método muito utilizado é o gráfico de médias de excessos (MRL $<$  Mena Residual Life Plot), baseado na espera da GPD (Nascimento [2012]). Sua construção segue o seguinte formato:

$$\left\{ \left( \mu, \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} \right) : \mu < x_{max} \right\}$$

onde  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  consistem nas  $N_u$  observações que excedem  $\mu$ , e  $x_{max}$  é o valor mais elevado das observações.

Considerando a distribuição GPD válida para os excessos, esta também é válida para os excessos acima de todos os limiares  $\mu > \mu_0 > 0$ , sujeito a mudanças no parâmetro de escala  $\sigma_\mu = \sigma_{\mu_0} + \xi_\mu$ . Então, para  $\mu > \mu_0$

$$E(X - \mu | X > \mu) = \frac{\sigma_\mu}{1 - \xi} = \frac{\sigma_{\mu_0} + \xi_\mu}{1 - \xi}$$

Se o modelo é adequado a partir de  $\mu_0$  o gráfico apresentará um comportamento linear a partir de  $\mu_0$ . Um problema recorrente com a utilização desse gráfico é que o limiar pode limitar o número de excessos devido a escolha de limiar muito alto.

Outra técnica gráfica utilizada é Dipersion Index Plot (DIP), baseado em Cunnane [1979] (Citado por Nascimento [2012]), que diz que, o número de excessos sobre um limiar alto em um determinado

período (geralmente meses ou anos), pode ser distribuído através de um processo de Poisson. Assim, a razão entre a variância e a média é igual a 1. Assim, pode-se fazer um gráfico

$$\left\{ \left( \mu, \frac{Var(Y)}{E(Y)} \right) : \mu < x_{max} \right\}$$

### 6.3 Estimação da GPD

Após determinar o limiar, a estimação dos parâmetros da distribuição GPD podem ser estimados por vários métodos, entre eles, tem-se o da máxima verossimilhança, que iremos trabalhar. Existem outros métodos como de momentos proposto por Smith [1987] (citado por Mendes [2004]) e o métodos dos momentos ponderados (Singh e Guo [1995], (citado por Mendes [2004])), em que a eficiência de cada método depende da situação estudada.

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) que maximizam a função de log-verossimilhança, quando  $\xi \neq 0$ , é dado por

$$l(\mu, \xi) = -n_u \log(\sigma) - \left( 1 + \frac{1}{\xi} \sum_{i=1}^{n_u} \log(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma}) \right)$$

definida em  $(1 + \xi \frac{y_i}{\sigma}) > 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, N_u$ . No caso particular onde  $\xi = 0$ , a a log-verossimilhança é dada por

$$l(\sigma) = -n_u \log(\sigma) - \sum_{i=1}^{n_u} \left( \frac{y_i}{\sigma} \right)$$

No caso de  $\xi = 0$ , a maximização dos parâmetros não pode ser obtida analiticamente, sendo necessárias técnicas numéricas de maximização.

## 7 Inferência Bayesiana

## 8 Modelos dinâmicos para Valores Extremos

### 8.1 Alameda Parnaíba

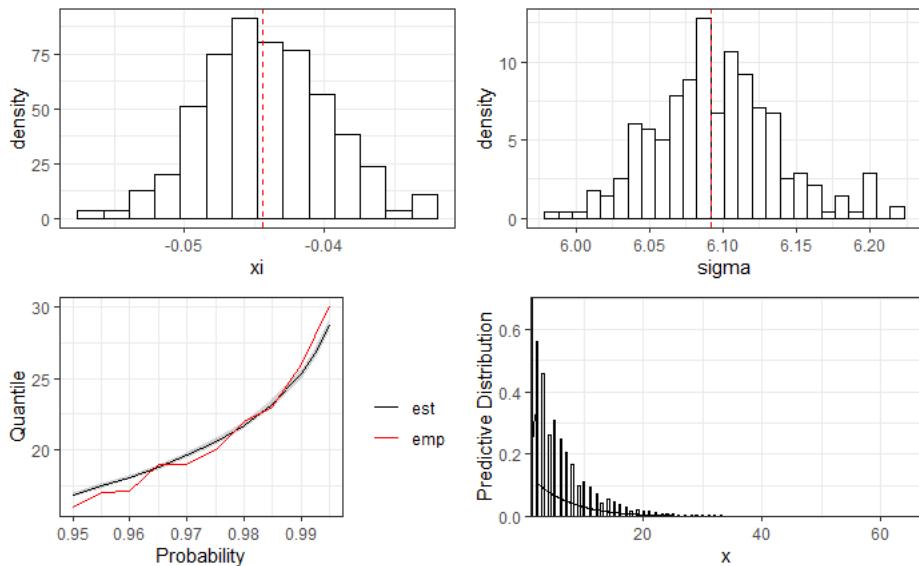


Figure 7: Alameda Parnaíba - Função fggpd

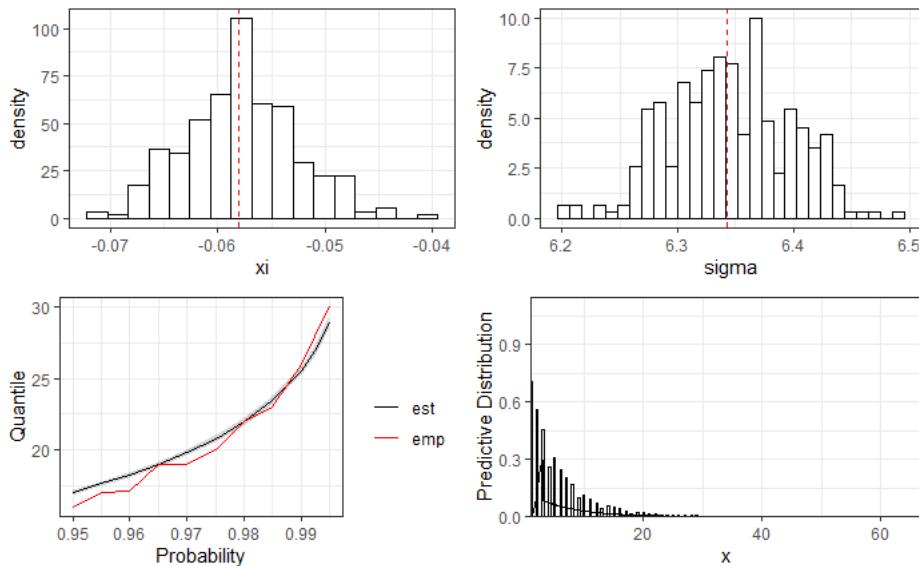


Figure 8: Alameda Parnaíba - Função fmogpd

Ajuste	DIC	BIC
Alameda com fggpd	247310.8	247351.3
Alameda com fmogpd	215577.4	215641.7

### 8.2 Av. Maranhão

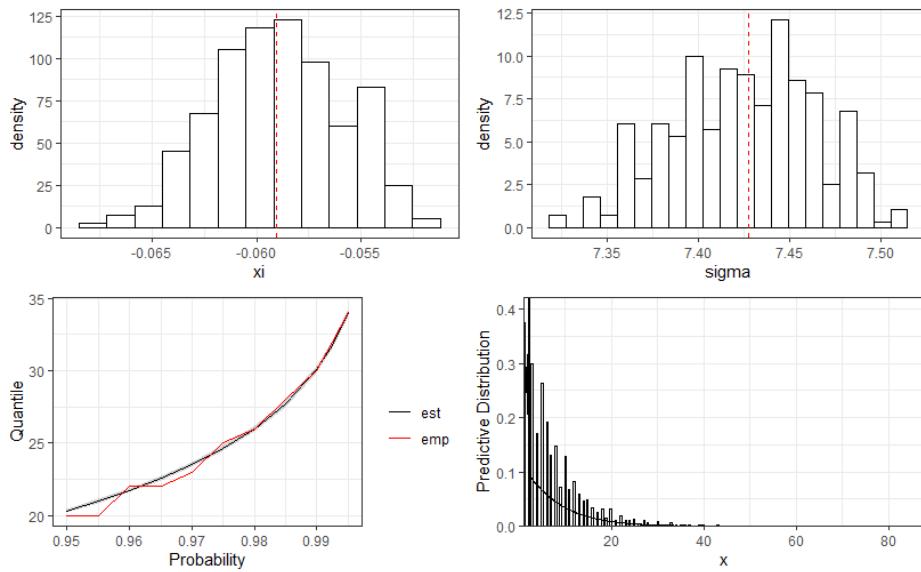


Figure 9: Av. Maranhão - Função fggpd

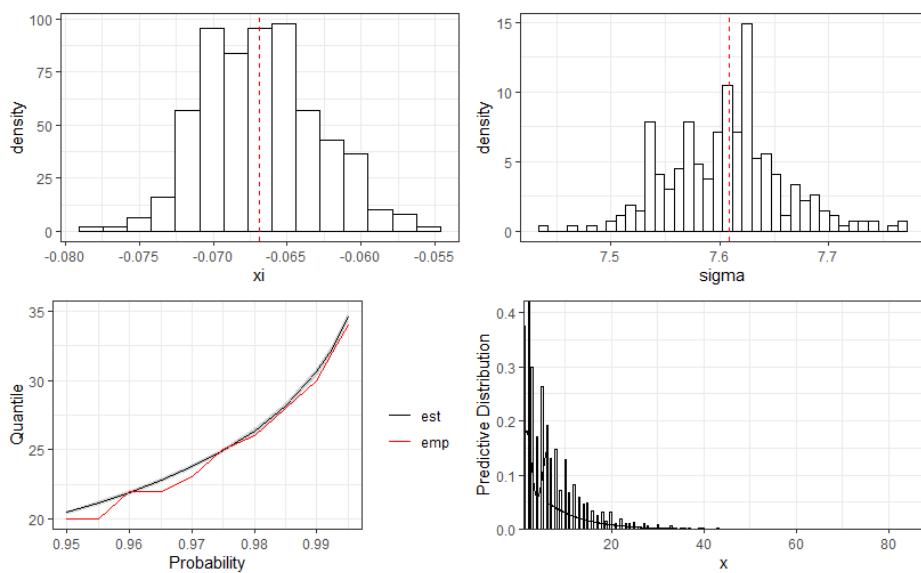


Figure 10: Av. Maranhão - Função fmnpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Maranhao com fggpd	480153.4	480201.7
Av. Maranhão com fmfpd	485451.3	485518.7

### 8.3 Av. Raul Lopes - Shopping

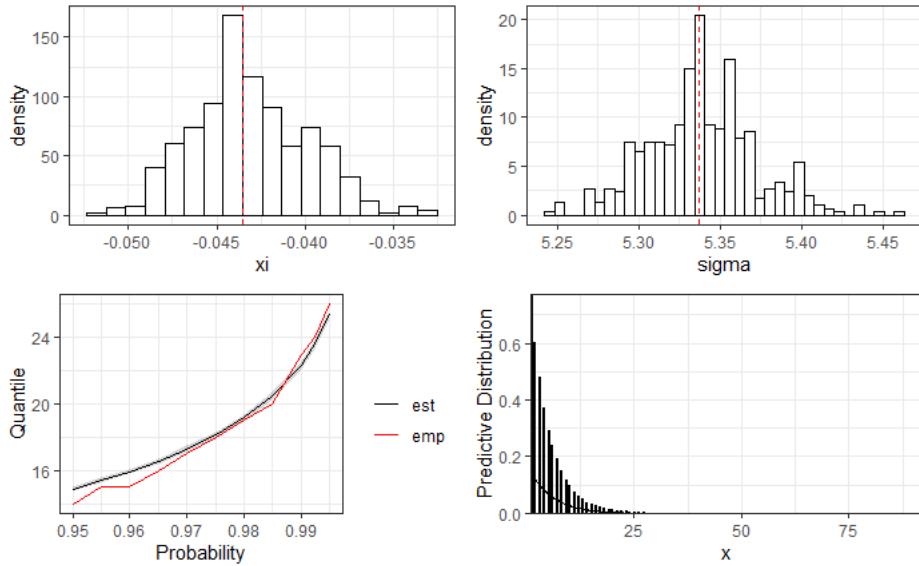


Figure 11: Av. Raul Lopes - Função fggpd

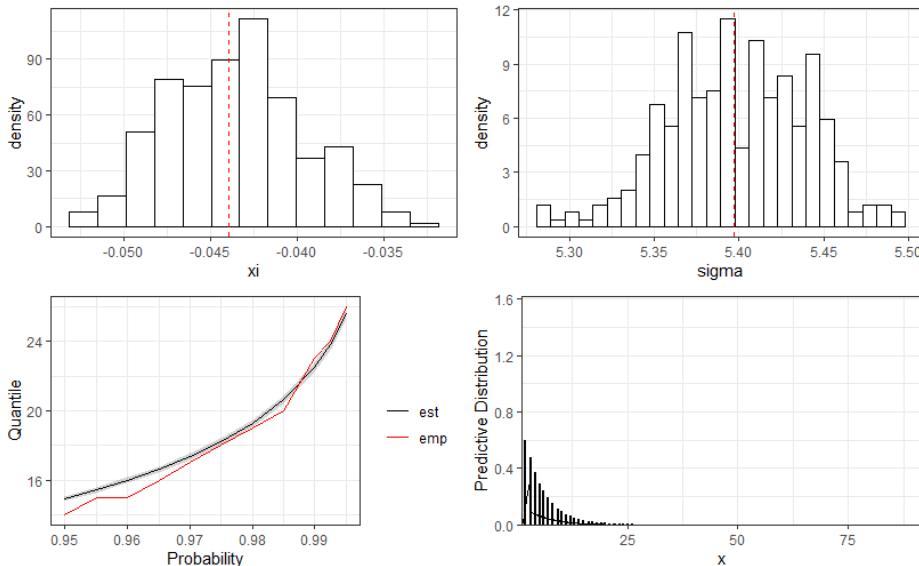


Figure 12: Av. Raul Lopes - Função fmfpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Raul Lopes com fggpd	253692.7	253754.8
Av. Rul Lopes com fmfpd	211497.7	211567.5

## 8.4 Av. dos Ipês

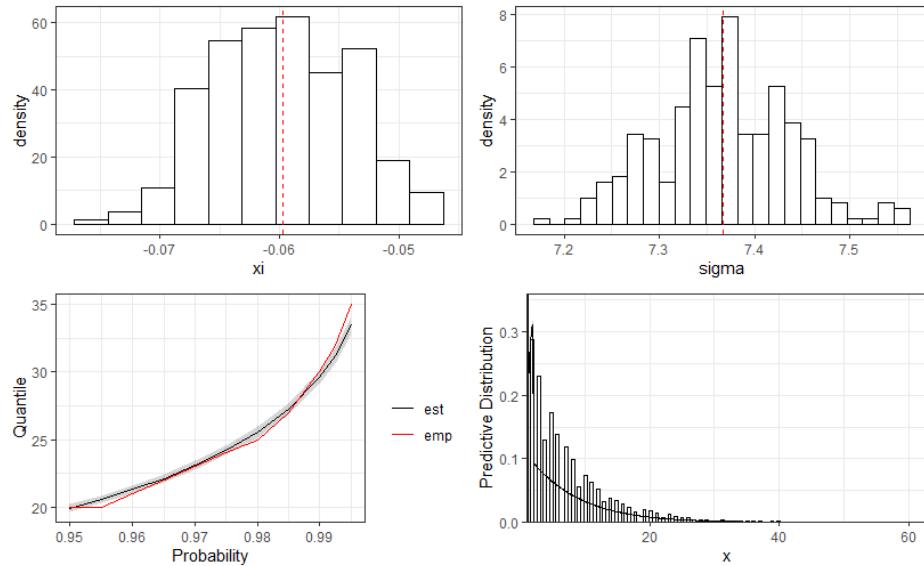


Figure 13: Av. dos Ipês - Função fggpd

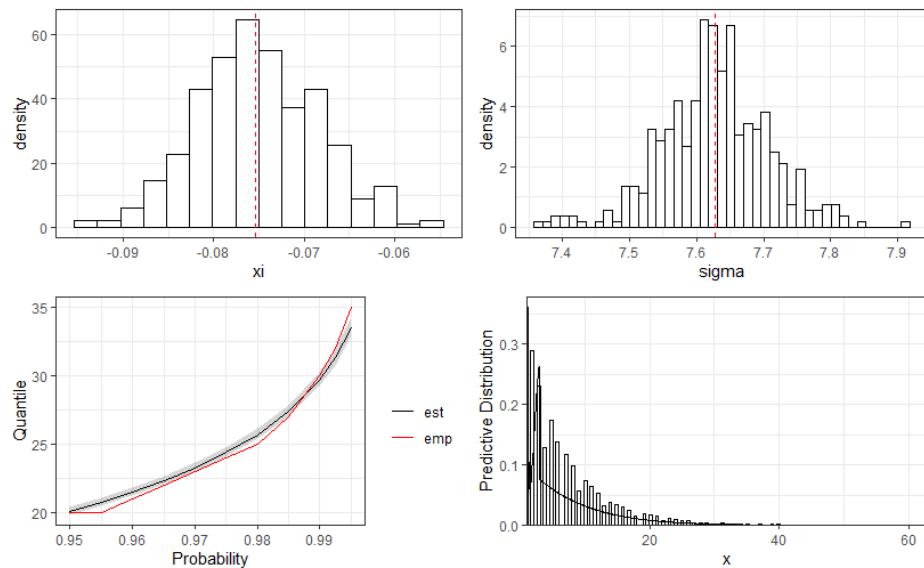


Figure 14: Av. dos Ipês - Função fmfpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Av. dos Ipês com fggpd	136611.9	136654.4
Av. dos Ipês com fmfpd	131887.8	131672.3

## 8.5 Av. Av. Jose Francisco de Almeida Neto

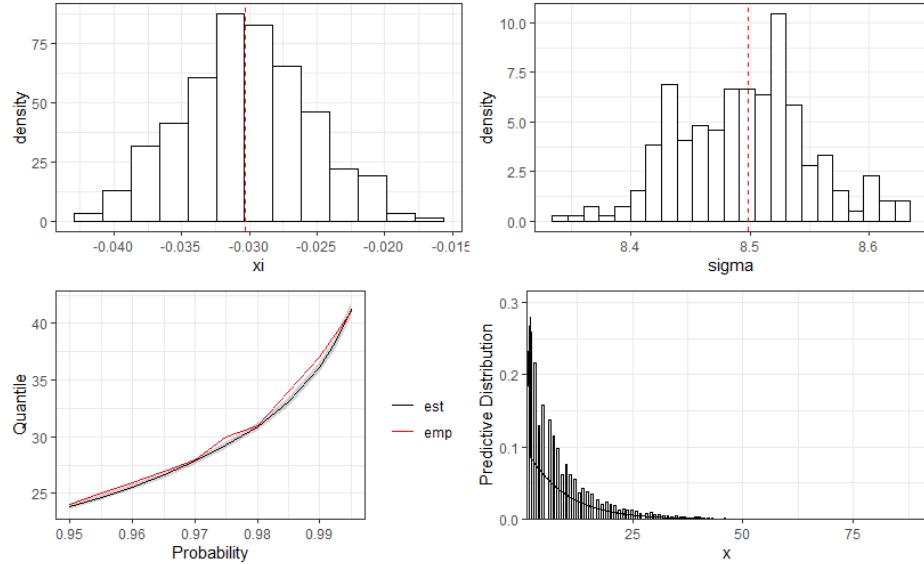


Figure 15: Av. Jose - Função fggpd

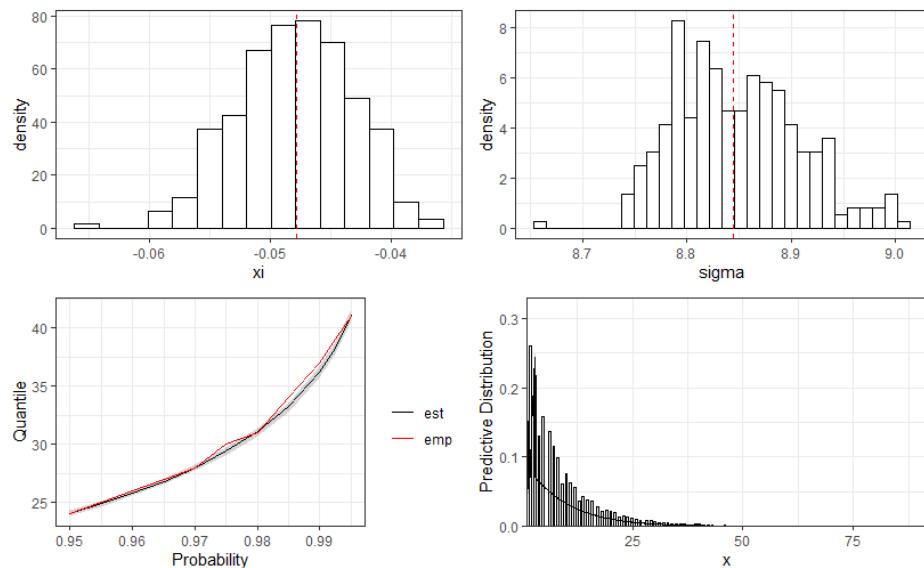


Figure 16: Av. Jose - Função fmfpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Av. Jose com fggpd	313760.1	303626.5
Av. Jose com fmfpd	313806.8	303289.6

## 8.6 Av. Barão de Castelo Branco

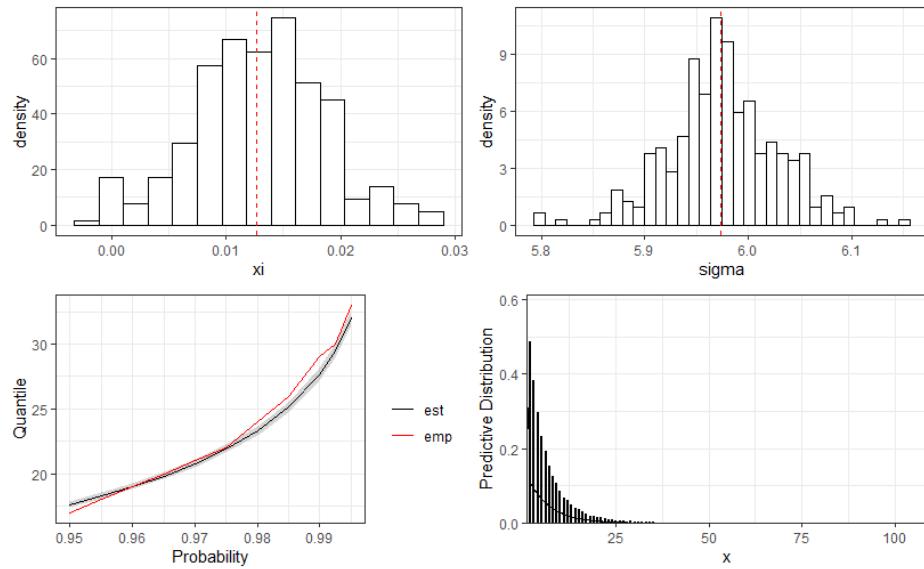


Figure 17: Av. Barão - Função fggpd

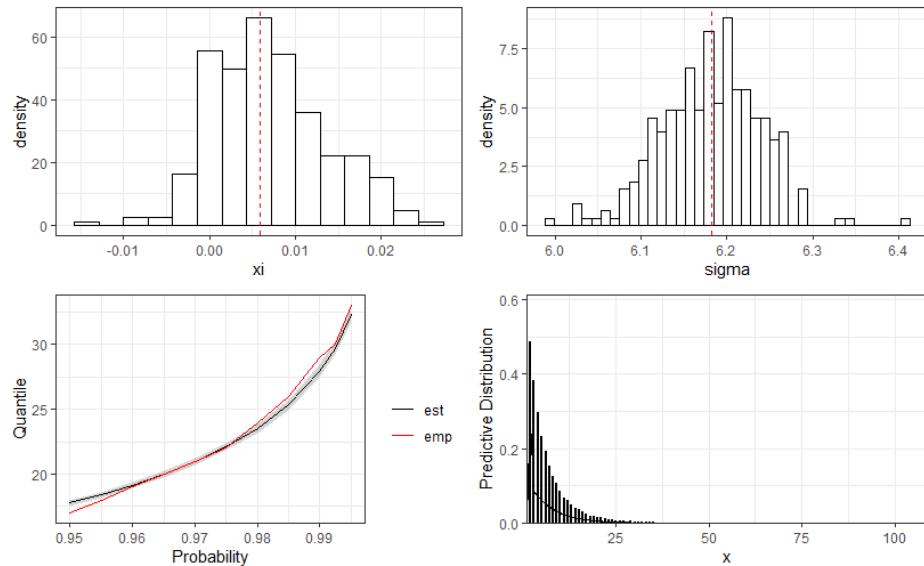


Figure 18: Av. Barão - Função fmfpd

Ajuste	DIC	BIC
Av. Barão com fggpd	160774.3	160813.9
Av. Barão com fmgpd	153049.2	152921.9

## **9 Conclusão**

## 10 Referências Bibliográficas

(article?){{BRAGA?}}, title = {Aplicação da Teoria de Valores Extremos para índice pluviométrico da cidade de Juiz de Fora - MG}, author = {BRAGA, D. O. M.,}, adress = {Juiz de Fora, MG}, year ={2015} }

(article?){{LIMA?}}, title = {Modelos Dinâmicos para valores extremos de dados ambientais do Piauí usando a Distribuição de Pareto Generalizada (GPD)} author = {Stênio Rodrigues Lima}, adress = {Teresina, PI}, year = {2014} }

(article?){{NASCIMENTO?}}, title = {MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA DADOS EXTREMOS:TEORIA E APLICAÇÕES}, author = {NASCIMENTO, F, F.}, adress = {Teresina, PI}, year = {2012} }

(article?){{PINHEIRO?}}, title = {Contribuições em inferência e modelagem de valores extremos}, author = {PINHEIRO, E, C.}, address = {São Paulo, SP}, year = {2014} }