[전공교육학 유형별 기출문제]

[수학교육의 필요성과 목적]

1. 다음 중 수학의 특성과 거리가 먼 것은? [1993-21]
① 계통성 ② 보편성 ③ 형식성 ④ 추상성

2. 수학을 지도하는 목적으로서 거리가 가장 먼 것은? [1994-4]
① 실제적인 문제 해결에 수학을 활용할 수 있게 한다.
② 창조적 사고와 합리적 추론을 할 수 있게 한다.
③ 수학의 아름다움을 인식하게 하고, 지적인 만족감과 즐거움을 가지게 한다.
④ 계산 알고리즘의 실행 기능을 숙달하게 한다.

3. 정의(definition)로서 갖추어야 할 요건이 아닌 것은? [1995-2]
① 정의된 언어로 서술되어야 한다.
② 최소한의 언어로 서술되어야 한다.
③ 그 정의에 해당하는 실제 보기가 적어도 하나는 존재해야 한다.
④ 어떤 대상이라도 그 정의에 해당하는지 않는지 가릴 수 있는 기준이 되어야 한다.

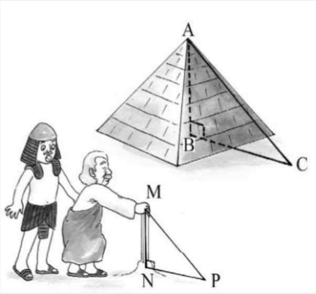
4. 수학교육이 추구하는 방향이나 교육과정구성의 기본 입장이 아닌 것은? [1995-6]
① 수학의 응용이 강조되어야 한다.
② 학생의 자기 활동이 폭 넓게 주어져야 한다.
③ 수학은 합리적인 논증의 표본으로 지도되어야 한다.
④ 사고 활동으로서의 수학은 구조주의적 입장에서 지도되어야 한다.

5. 최근 수학교육의 새로운 목표로 부각되고 있는 의사소통 능력을 강화시킬 수 있는 수업방안에 대하여 약술하시오. [1997 모의-2]

6. 학교에서 수학을 가르쳐야 하는 데에는 여러 가지 이유가 있으나, 대체적으로 수학 교육의 세 가지 목적이 무엇인지 쓰고(2점), 이들 각각에 대하여 간략히 설명하시오(3점). [1998-1]

[7～8] 다음은 닮음의 응용과 관련된 수업 상황이다. 물음에 답하시오.

김 교사: 탈레스는 맑은 날 지면에 막대기를 수직으로 세우고 막대기의 길이, 막대기 그림자의 길이, 피라미드 그림자의 길이를 동시에 측정한 뒤, 닮은 삼각형의 성질을 이용하여 피라미드의 높이를 계산했다고 합니다. 탈레스는 위의 세 값을 가지고 어떻게 피라미드의 높이를 구했을까요?



우선, 높이는 지면과 수직이니까 $\angle ABC = \angle MNP = 90^\circ$이고 같은 시간대에 측정했으니까 $\angle ACB = \angle MPN$이에요. 따라서 ΔABC와 ΔMNP는 닮음이에요. 닮은 도형에서는 대응변의 길이 사이의 비가 같으니까, $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{MN}:\overline{NP}$이지요? 이 비례식을 풀면, 피라미드의 높이는 $\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{MN}}{\overline{NP}}$ 입니다.

소　　현: 만일 피라미드 그림자 BC의 길이는 오후 2시에 측정하고 막대기 그림자 NP의 길이는 오후 5시에 측정해도 피라미드의 높이 $\overline{AB}$에 대한 위의 식이 성립하나요?

김 교사 : ＿＿(가)＿＿

7. 교사의 중요한 역할 중 하나는 학생들의 인지발달과 경험을 고려하여 창의적으로 사고할 수 있도록 지도하는 것이다. 이 사실을 고려할 때, 다음 중 (가)에 들어갈 김 교사의 말로 가장 적절한 것은? [2009 모의-10] [2점]

① 두 그림자의 길이를 재는 시각이 달라도 ΔABC와 ΔMNP는 닮은 도형이므로 피라미드의 높이를 구하는 식은 항상 위와 같이 성립해요.

② 두 그림자의 길이를 재는 시각이 다르면 $\overline{AB}:\overline{BC}$가 $\overline{MN}:\overline{NP}$와 같지 않으므로 피라미드의 높이를 구할 수 없어요.

③ 낮 동안 그림자의 길이는 그렇게 많이 변하지 않으니까 측정 시각은 피라미드의 높이 계산에 영향을 주지 않아요.

④ 태양의 고도가 다른 상황이 2시의 ΔABC와 5시의 ΔMNP를 비교하면서 두 삼각형 사이의 유사점과 차이점을 찾아보세요.

⑤ 태양의 고도가 다른 상황인 2시의 $\overline{AB}:\overline{MN}$과 5시의 $\overline{AB}:\overline{MN}$을 비교하면서 생각해 보세요.

8. 다음 중 위의 수업 상황에 드러난 수학의 특성 가운데 가장 거리가 <u>먼</u> 것은? [2009 모의-11] [2점]

① 계통성　② 실용성　③ 일반성
④ 이상성　⑤ 논리성

[수학교육의 발달]

1. 20세기 초 영국의 J. Perry, 미국의 E. H. Moore, 독일의 F. Klein등에 의해 주도된 <수학교육 근대화 운동>은 Euclid<원론>의 교육방식에 대한 비판이 주된 관심사였다. Euclid<원론>의 교육방식에 대한 이들 세 학자의 공통적인 비판을 세 가지로 요약하여 제시하시오. [5점] [2002-3]

2. 수학교육의 발달 과정에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [2009 모의-1] [2점]

① 심리학은 수학교육학에 연구 방법론을 제공해 주어 학문적 정체성 확보에 도움을 주었다.

② 20세기 초의 페리(J.Perry), 무어(E. Moore), 클라인(F. Klein)이 중심이 된 수학교육 운동에서는 논리적 엄밀성에 기반을 둔 수학교육을 강조하였다.

③ 수학 및 과학 기술의 급격한 진보에 따른 변화에 대응하고자 제2차 세계 대전 후 수학교육 개혁 운동이 일어났다.

④ 수학교육 현대화 운동의 결과로 나타난 학생들의 수학 학력 저하는 '기본으로 돌아가기 운동(Back-to-Basics Movement)'을 야기시켰다.

⑤ 폴리아(G. Polya)는 수학적 발견술 지도가 문제해결 교육의 핵심이라고 하였으며, 1980년대 이후 학교수학에서는 문제해결을 강조하고 있다.

3. 19세기 말에 일어난 수학교육 근대화 운동에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [1.5점] [2012-1]

<보기>

ㄱ. 독일에서는 과학이 장려되면서 학교교육에서 사회생활에 필요한 응용수학을 더 많이 다루어야 한다는 주장이 설득력을 얻어 수학교육을 개선하려는 시도가 이루어졌다. 이런 관점에서 클라인(F. Klein)은 교사들과 함께 메란(Meran) 교육과정이라는 김나지움(Gymnasium)의 수학교수요목을 작성하였다.

ㄴ. 영국에서는 산업혁명으로 등장한 노동자 계급에 대한 교육이 요구되면서 학교수학에서 순수수학을 강조해야 할 필요성이 높아졌다. 이런 관점에서 페리(J. Perry)는 대수 공식을 이용하는 지식과 능력을 길러야 한다고 주장하였다.

ㄷ. 미국에서는 산업이 급격히 발전하면서 상공업적 실리, 실익을 추구하는 데 직접적인 도움이 되는 교육이 중시되었다. 이런 사회 분위기에서 무어(E. Moore)는 학교수학의 내용과 방법이 보다 풍부해져야 한다고 주장하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

4. 제 2차 세계대전 후 일어난 '수학교육 현대화 운동'에 대한 설명으로 옳은 것은? [1.5점] [2013-1]

① 논리적 엄밀성을 강조하지는 않았으나, 대수적 구조는 강조하였다.

② 무어(E. Moore)는 학교수학에서 순수수학과 응용수학을 극명하게 구분하려는 잘못된 경향이 만연해 있음을 비판하였다.

③ 톰(R. Thom)은 학교수학에서 엄밀한 공리적 취급은 타당하지 않으며, 집합과 논리와의 결합은 잘못된 것이라고 비판하였다.

④ 듀돈네(J. Dieudonné)는 현대수학의 조기 도입을 주장하였으나, 응용적 가치가 높은 유클리드 기하의 내용은 강조하였다.

⑤ 클라인(F. Klein)은 미적분과 해석기하를 조기에 도입하되, 그 기초적인 내용을 자연 현상과 관련지어 지도하자는 입장을 취하였다.

5. 다음은 19세기말부터 100여 년 동안 이루어진 수학교육의 변천에 관한 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 수학교육의 역사적 흐름에 따라 순서대로 배열하시오. [2점, 기입형A-1] [2021]

(가)	‘기본으로 돌아가기 운동(The Back-to-Basics Movement)’의 영향으로 학교수학에서는 기본 기능을 강조하는 방향으로 교재를 재구성하였다. 그러나 우수한 학생들의 학력이 저하되고 응용력과 문제 해결 능력이 감소되기도 하였다.
(나)	전통적인 방식으로 유클리드 기하를 가르치는 것에서 벗어나 실험기하를 가르치고, 수학의 실용성, 유용성 등을 강조하였다. 학교수학의 내용을 체계적으로 다듬으려는 노력이 시작되었으며, 학교수학에 함수 개념을 도입한 교과서가 출판되었다.
(다)	지식의 획득에서 지식의 구성으로, 문제 해결에서 문제 제기로 수학교육의 강조점을 변화시키자는 흐름이 본격적으로 일어났다. 그리고 ‘수학 학습 수준 이론’, ‘현실주의적 수학교육(Realistic Mathematics Education)’ 등 여러 이론과 모델이 발전하였다.
(라)	과학기술의 급격한 발달에 따라 수학의 응용 범위가 확대되었으나 학교수학의 내용이 시대에 뒤떨어진다는 반성으로 집합, 함수, 대수적 개념, 확률 등을 조기에 도입하고자 하였다. 이 시기에 일어난 변화는 우리나라 제3차 교육과정에 영향을 미쳤다.
(마)	근대화된 사회의 모습을 반영하여 수학교육을 개선하여야 한다는 주장이 제기되었다. 엄밀하고 논리적 체계를 갖춘 유클리드 원론 중심의 수학교육, 형식 도야라는 명분으로 과도한 훈련을 하는 수학교육, 소수 특권층을 위한 수학교육 등 당시의 수학교육 실태를 개선하여야 한다는 비판이 있었으나 실제로 크게 개선되지는 못했다.

6. 다음은 대표적인 수학교육 개혁운동 2가지를 설명한 것이다. (가)와 (나)에 해당하는 수학교육 개혁운동의 명칭을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2023]

(가) 19세기 말과 20세기 초부터 유럽과 미국을 중심으로 수학의 실용성을 강조하고 학생의 심리적 측면을 고려하는 방향으로 수학교육을 개혁하려는 운동이 일어났다. 영국의 페리(J.Perry), 독일의 클라인(F.Klein), 미국의 무어(E. Moore) 등이 이 운동에서 주도적인 역할을 하였는데, 여러 국가 사이의 협력을 통해 개혁을 추구하는 방향으로 전개되었다. 하지만 제1차와 제2차 세계대전이 일어나면서 더 진전되지 못했다.

(나) 제2차 세계대전의 종전 이후에 세계적으로 수학교육을 개혁하려는 운동이 다시금 전개되었다. 듀돈네(J.Diedonné)는 ‘현대수학의 내용과 방법을 학교수학에 조기에 도입하는 것’, ‘대수적 구조와 논리적 엄밀성을 강조하는 것’과 같은 개혁방향을 제안하였다. 이 같은 방향으로 이 운동을 구체화하는 시도가 여러 국가에서 이루어졌다. 하지만 급진적 개혁을 성급하게 추구한 나머지, 교육적으로 많은 부작용을 초래하였다.

[수학과 교육과정]

1. 우리나라 수학과 교육과정의 변천 과정 중에서 다음과 같은 특성을 보인 시기는? [1994-5]

집합의 도입 및 강화, 기호의 엄밀한 사용, 형식화의 추상화의 강화, 연역적 추론의 강조

① 제1차 교육과정기 (생활단원 학습기, 1955 ~ 1963)
② 제2차 교육과정기 (계통 학습기, 1963 ~ 1973)
③ 제3차 교육과정기 (현대화 운동기, 1973 ~ 1981)
④ 제4차 교육과정기 (반성기, 1981 ~ 1987)

2. 현행(제5차) 중학교 수학과 교육과정의 지도 및 평가 상의 유의점에 대한 설명이다. 바른 것을 모두 고르면? [1994-7]

(가) 지도 내용의 배열은 지도 순서를 의미하는 것은 아니므로 필요에 따라서 지도 내용을 재조직할 수 있다. (나) 지도 내용은 학생들이 성취하여야 할 최고 기준을 나타낸 것이다. 따라서, 능력이 낮은 학생들에게는 어려운 내용을 생략하여 지도할 수 있다. (다) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 해결 과정과 그 방법도 중요시하여야 한다. (라) 평가의 방법으로는 지필 검사를 사용하며, 관찰법은 객관성이 결여되므로 사용하지 않는다.

① (가), (나)　　② (다), (라)
③ (나), (다)　　④ (가), (다)

3. 〈보기〉는 현행 고등학교 수학과 교육과정의 지도 및 평가 상의 유의점 대한 설명이다. 옳은 것만 고른 것은? [1995-4]

〈보기〉
㉠ 수학은 계통성을 중시하므로 지도 내용이 배열은 재구성하지 않도록 하여 연계적 사고를 할 수 있도록 지도한다. ㉡ 실업계, 기타계 고등학교와 일반계 고등학교 직업 과정에서는 수학Ⅱ를 선택하여 지도할 수 있다. ㉢ 단원마다 진단 평가 및 형성 평가를 실시하고 필요에 따라서 보충학습과 심화학습을 실시하도록 한다. ㉣ 평가의 결과는 학생들에게 알려 줄 필요는 없으나, 교사는 수업에 대한 반성과 지도 방법이 개선에 활용하도록 한다.

① ㉠, ㉢　　② ㉠, ㉣
③ ㉡, ㉢　　④ ㉢, ㉣

4. 제6차 초・중등 수학과 교육과정의 중요특성이 <u>아닌</u> 것은? [1996-1]
① 학습 분량의 적정화
② 문제 해결력의 신장
③ 평가 방법의 개선
④ 수학의 구조와 학문의 계통성 중시

5. NCTM(1989년)에서는 학교수학 교육과정 및 평가규준(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)을 통하여 학생들을 위한 새로운 수학 교육의 목표를 제시하고 있다. 다음 중에서 이 목표에 제시되어 있지 <u>않은</u> 것은? [1996-25]
① 수학의 가치를 이해하는 것
② 자신의 능력에 자신을 가지는 것
③ 수학적 문제 해결자가 되는 것
④ 수학적 기초 기능을 훈련하는 것

6. 미국 수학교사회(NCTM)의 「학교수학 교육과정 및 평가의 규준」(약칭 Standards)은 유치원부터 제12학년까지(K-12)를 3단계로 나누어 각 단계마다 교과과정 규준을 제시하고 있다. 각 단계의 규준 1부터 규준 4까지는 공통이다.

이 중 규준 2, 규준 3, 규준 4가 무엇인지 쓰고(2점), 이들 각 규준을 간략히 설명하시오. (2점) (총 4점) [1997-1]

7. 현행(제6차) 수학과 교육과정에 따르면, 중학교 3학년에서는 삼각비를 직각삼각형의 닮음의 성질을 바탕으로 직각이 아닌 한 예각에 대한 두 변의 길이의 비로 정의하여 다루도록 되어 있다. 고등학교 공통수학에서는 삼각비를 일반화시킨 삼각함수를 어떻게 정의하고 있는지 설명하시오. [5점] [1998-11]

8. 제7차 수학교육과정에서는 국민공통기본교육 기간과 수준별 교육과정을 적용한다. [총 4점] [1999-1]

(1) 국민공통기본교육 기간을 간단하게 설명하고 이 기간 동안 수학과에서 운영하게 될 6개 내용영역을 쓰시오. [2점]

(2) 수준별 교육과정의 운영 형태를, 국민공통기본교육 기간과 그 기간 외로 나누어 설명하시오. [2점]

9. 제 7차 수학과 교육과정의 목표는 다음과 같다.

가.	여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.
나.	수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.
다.	수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

제 7차 수학과 교육과정의 목표를 미국 수학 교사회(NCTM)의 『학교 수학 교육과정 및 평가의 규준』(약칭 Standards)의 초·중·고 과정에서 일관되게 제시하는 4가지 규준과 비교해 보았을 때, 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [1999 추시-1]

(1) 이 4가지 규준 중 제 7차 교육과정과 공통점이 가장 많은 규준은 무엇인가? [2점]

(2) 공통점이 가장 적은 규준은 무엇인가? [3점]

10. 제 7차 교육과정이 제시하고 있는 단계형 수준별 교육과정에 따른 수업 운영방법과 1996년부터 학교 현장에서 실시되고 있는 중등학교 수준별 이동수업의 운영방법을 다음 각 관점에서 비교 설명하시오. [총 4점] [2001-1]

(1) 학습 진도(進度)의 관점. [2점]

(2) 교과내용 심도(深度)의 관점. [2점]

11. 다음은 수행평가의 한 유형인 <프로젝트>에서 사용할 수 있는 가상적인 소재이다. A교사는 학생들에게 학교의 부지, 건물, 등이 배치되어 있는 설계도를 가져와서 학생들을 소집단으로 구성하고 각 소집단별로 다음 과제를 해결하게 한다.

다음 주에는 건물이 배치되어 있는 장소를 제외하고 나머지 땅에 잔디를 깔려고 한다. 가능한 한 최소 비용으로 이 작업을 마치려면 어느 정도의 예산이 필요한가?

제7차 수학과 교육과정의 세 가지 일반 목표 중에서 A교사가 위와 같은 수행평가를 실시했을 때 달성하고자 하는 목표와 가장 가까운 것 한 가지를 쓰시오. [4점] [2002-2]

12. 제 7차 수학과 교육과정 중, 국민 공통 기본 교육과정의 '4. 교수·학습 방법'에서는 보충 과정과 심화 과정의 학습을 효율화하기 위하여 유의 사항을 제시하고 있다. 다음의 기본 과정을 지도한 후에 보충·심화 과정을 지도하려고 한다. 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [2003-1]

> [7-가 단계]
> - 대영역: 수와 연산
> - 중영역: 자연수의 성질
> - 소영역: 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다.

(1) 보충 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, '최소공배수 구하기' 보충 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. [3점]

(2) 심화 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, '최소공배수 구하기' 심화 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. [3점]

13. 다음은 제 7차 수학과 교육과정에 속하는 내용의 일부를 제시한 것이다. 물음에 답하시오. [총 6점] [2004-2]

> (가) 도수의 합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 방법에 대하여 알아본다. (7-나 단계)
> (나) 실생활 문제에서 합동인 도형과 닮은 도형을 찾아본다. (8-나 단계)
> (다) 식의 일부를 치환하여 전개하는 다항식의 곱셈을 할 수 있다. (9-가 단계)
> (라) 자연 현상에서 주기적 상황을 조사하여 삼각함수와 관련시킬 수 있다. (10-나 단계)

(1) 위의 (가)~(라)에는 공통적인 특징이 있다. 이러한 특징을 가지는 내용을 교육과정에서 1가지만 쓰시오. (단, 7-가 단계에서 10-나 단계까지의 내용 중, 실생활의 문제를 해결하는 것에 관한 내용 이외의 것으로 제시하시오.) [1점]

(2) 현재 7-나 단계에서 상대도수에 관한 내용이 다뤄지고 있다. 상대도수의 개념을 처음 지도할 때와 (가)의 내용을 지도할 때 적합한 문제 상황의 구체적인 예를 각각 하나씩 제시하시오. [2점]

- 상대도수의 개념을 처음 지도할 때 :
- (가)의 내용을 지도할 때 :

(3) 위의 (가), (다)와 같은 내용은 학생들의 학습 부담을 줄이려는 의도를 보여주는 예이다. 이처럼 학습 내용을 줄이려는 경향은 우리나라의 제4차 수학과 교육과정부터 나타나고 있다. 20세기 중반 이후의 수학 교육의 발달사에 비추어 볼 때, 이러한 경향을 초래한 요인을 3가지만 제시하시오. [3점]

14. 다음은 제7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 Ⅱ의 공간도형 영역에 대한 '학습 지도상의 유의점'이다.

> <학습 지도상의 유의점>
> ① 공간도형의 성질을 관찰과 직관에 의해 이해하도록 한다.
> ② 공간도형은 공리계를 사용하지 않고 간단히 다룬다.

'공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계'의 구체적인 학습 내용을 쓰고, 이 내용을 ①에 입각하여 도입하는 방법을 예를 들어 설명하시오. 또한 ②의 이유를 수학적 추론교육과 관련지어 쓰시오.[4점] [2007-4]

- 학습 내용:
- 도입 방법:
- 이유:

15. 2006년 8월에 수학과 국민 공통 기본 교육과정이 개정 고시되었다. 제7차 수학과 교육과정과 비교할 때, 다음 중 2006년 개정 수학과 교육과정에서 변화된 내용으로 옳지 않은 것은? [2점] [2009 모의-2]

① 수학과 교육과정에서 초등학교와 중, 고등학교의 내용 영역의 구분이 다르게 설정되었다.
② 단계형 수준별 교육과정을 개정하여, 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞게 수준별 수업을 운영할 수 있게 하였다.
③ 학생의 미래 생활과 학습의 필요성을 고려하여 중학교 3학년의 교육 내용에 중앙값과 최빈값의 개념을 도입하였다.
④ 학생들의 수학적 능력 신장을 위하여 수학적 추론 및 문제해결력뿐만 아니라 수학적 의사소통 능력의 신장을 강조하였다.
⑤ 중학교 3학년 수학 수업 시수를 주당 4시간으로 늘려 보충, 심화 수업을 할 수 있게 하였다.

16. 중학교 2학년의 ‘삼각형의 성질’ 단원에 있는 ‘삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다’라는 명제를 증명하려고 한다. 2006년 개정 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 학생이 알아야 하는 선수지식과 관련이 있는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의-12]

<보기>

ㄱ. 삼각형에서 두 변과 그 끼인각이 같으면 그 삼각형은 합동이다.
ㄴ. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하고 빗변의 길이를 c 라 할 때, $a^2+b^2=c^2$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

17. 2007년 개정 수학과 교육과정의 내용에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [2점] [2009-1]

① 고등학교 1학년의 학습 내용이었던 ‘두 원의 위치관계’를 중학교 1학년으로 이동하였다.
② 중학교 3학년에 있던 ‘무리수의 도입은 무한소수를 소재로 한다’라는 학습-지도상의 유의점을 삭제하였다.
③ 고등학교 1학년의 수와 연산 영역에 ‘조건’, ‘진리집합’, ‘모든’, ‘어떤’이라는 용어를 도입하였다.
④ ‘적분과 통계’ 과목에 ‘중복조합’ 및 ‘표본비율과 모비율의 관계’에 대한 내용을 도입하였다.
⑤ ‘기하와 벡터’ 과목에 ‘일차변환과 행렬’ 및 ‘복소수의 극형식’에 대한 내용을 도입하였다.

18. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 기하 영역과 관련된 교육 내용 및 교수・학습 상의 유의점으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2010-1]

<보기>

ㄱ. 중학교 1학년에서 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질은 직관적으로 탐구한다.
ㄴ. 중학교 2학년에서 삼각형과 사각형의 성질은 증명 없이 직관적으로 이해하는 정도로 다룬다.
ㄷ. 중학교 3학년에서 피타고라스 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다.
ㄹ. 고등학교의 ‘기하와 벡터’에서 공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해한 후 증명을 하도록 한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ ,ㄹ

19. 2007년 개정 수학과 교육과정에 제시된 교수・학습 방법과 관련된 내용 중, 다음의 수업 계획에서 알 수 있는 것과 가장 거리가 <u>먼</u> 것은? [1.5점] [2010-10]

〈역동적 기하 소프트웨어를 활용한 수업 계획〉

〈1단계〉 삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 삼각형을 만들고 두 삼각형의 넓이의 비를 알아본다.
〈2단계〉 넓이의 비가 항상 4:1이 되는 이유를 각자 생각해 보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.
〈3단계〉 사각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 사각형을 만들고 두 사각형 넓이의 비를 알아본다.
〈4단계〉 넓이의 비가 항상 2:1이 되는 이유를 생각해 보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.
〈5단계〉 다른 다각형에 대해서도, 각 변의 중점을 연결하여 새로운 다각형을 만들고 두 다각형 넓이의 비에 대해 탐구한다.

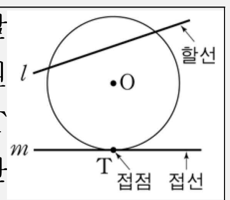
① 탐구학습, 협동학습 등 다양한 교수・학습 방법을 사용한다.
② 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 원리와 법칙을 발견하게 한다.
③ 귀납, 유추 등을 통해서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보도록 한다.
④ 수학적 의사소통 능력을 신장하도록 한다.
⑤ 학생 개인의 학습 능력과 수준을 고려한다.

20. 제 3차 수학과 교육과정부터 현재까지 우리나라 수학과 교육과정 변천 과정에서 나타난 주요 특징으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [1.5점] [2011-1]

① 수학적 구조를 강조하고 집합 개념을 토대로 수학을 전개하며 수학의 논리적 엄밀성을 강조하였다.
② 학생의 생활 경험을 중시함으로써 생기는 단점을 해소하기 위하여 수학의 체계를 근간으로 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 선회하였다.
③ 단계형 수준별 교육과정으로 개인의 능력과 적성 등을 고려한 수학교육을 도모하였다.
④ 계산력 향상을 목표로 하지 않는 복잡한 계산과 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극적으로 활용할 수 있게 하였다.
⑤ 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선하고 문제 해결력과 정의적 측면을 강조하였다.

21. 접선에 대한 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2012-3]

오른쪽 그림과 같이 한 직선 l이 원 O와 두 점에서 만날 때, 직선 l을 원 O의 할선이라고 한다. 또한 직선 m이 원 O와 한 점 T에서 만날 때, 직선 m을 원 O의 접선, 점 T를 접점이라고 한다. 이때 직선 m이 원 O에 접한다고 한다.



① 2007년 개정 교육과정에 따르면 위의 설명은 중학교 1학년 〈수학〉에서 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 접선을 정의하는 방식이다.
② 위의 설명은 이차함수의 그래프의 접선을 정의하는 데 적용할 수 있다.
③ $y=|x|$의 그래프는 위에 제시된 접선의 정의를 개선하기 위한 반례로 활용할 수 있다.
④ 2007년 개정 교육과정에 따르면 고등학교 1학년 〈수학〉에서는 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구할 때 판별식을 활용한다.
⑤ 2007년 개정 교육과정에 따르면 〈미적분과 통계 기본〉에서 접선은 미분가능성 및 미분계수의 기하학적 의미를 설명하면서 할선의 극한으로 다룬다.

22. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교육 내용 및 교수・학습상의 유의점에 대한 설명으로 옳은 것은? [2점] [2013-2]

① 지수와 로그는 '수학 Ⅱ' 과목에서 다루고, 지수함수와 로그함수는 '미적분 Ⅱ' 과목에서 다룬다.
② 중학교에서 다루었던 집합은 '수학 Ⅱ' 과목으로 이동하였으나, 함수를 다루는 데 필요한 정의역, 공역, 치역 용어는 중학교에서 다룬다.
③ 중학교에서 이진법은 삭제하였으나, 실생활에서 유용하게 활용되는 근삿값과 오차의 한계는 중학교에서 다룬다.
④ 중학교에서 작도는 삼각형을 작도하는 정도로만 다루고, 이를 이용하여 삼각형의 결정조건을 이해하도록 한다.
⑤ 등식의 성질, 정비례, 반비례, 줄기와 잎 그림, 회전체는 초등학교 학습량 경감을 위하여 중학교로 이동하여 다룬다.

23. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 수와 연산 영역 <교수・학습상의 유의점>에 '유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.'고 명시되어 있다. 이 유의점이 명시되어 있는 이유를 구체적인 사례와 함께 쓰시오. 또, <보기>와 같이 순환소수를 분수로 고치는 학습 내용을 지도할 때, 유의해야 할 점을 교육과정에 근거하여 서술하시오. [5점, 서술형B-1] [2015]

<보기>

순환소수 $0.\dot{7}$을 분수로 나타내어 보자.

$0.\dot{7}$을 x라고 하면

$$x = 0.7777\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

이고, ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x = 7.7777\cdots \qquad \cdots\cdots②$$

이다. 이때 ①과 ②의 소수 부분이 같으므로

②에서 ①을 변끼리 빼면 $9x = 7$이다.

따라서 $x = \dfrac{7}{9}$이다.

$$\begin{array}{rr} & 10x = 7.7777\cdots \\ -) & x = 0.7777\cdots \\ \hline & 9x = 7 \end{array}$$

즉, $0.\dot{7} = \dfrac{7}{9}$임을 알 수 있다.

24. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 제시된 내용 체계의 일부와 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 가상 대화이다.

[내용 체계]

영역	핵심 개념	내용 요소		
문자와 식	다항식	• 문자의 사용과 식의 계산	• 식의 계산	• 다항식의 곱셈과 인수분해
	방정식과 부등식	• 일차방정식	• 일차부등식과 연립일차방정식	• 이차방정식
확률과 통계	확률		• 확률과 그 기본 성질	
	통계	• 자료의 정리와 해석		• 대푯값과 산포도 • (㉠)

[가상 대화]

교사 A: 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육 과정의 내용 영역은 수와 연산, 문자와 식, 함수, 기하, 확률과 통계입니다.
교사 B: 맞아요. 그런데, 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정과 어떤 차이가 있나요?
교사 A: 네, 내용 체계에서 확률과 통계 영역의 제시 순서가 바뀌었어요. 그리고 내용 요소에 새롭게 추가된 것이 있어요.
교사 B: 그렇군요. 그러면 문자와 식 영역에도 변화가 있나요?
교사 A: 문자와 식 영역의 내용 중 일부가 바뀌었어요. 다항식의 곱셈과 인수분해를 통합하여 학습하도록 하였고, ㉡<u>2009 개정 교육과정에 따른 중학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '용어와 기호'에 있던 내용 중, 2015 개정 교육과정에 따른 고등학교 '수학' 과목 교육과정의 문자와 식 영역 '학습 요소'로 이동한 것이 있어요.</u>

위 [내용 체계]에서 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용 요소와 [가상 대화]의 ㉡에 해당하는 학습 요소를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2018]

25. 박 교사는 고등학교 '수학1' 삼각함수 단원에서 <수업 방향>에 따라 <온라인 활동 과제>를 활용한 실시간 온라인 수업을 하려고 한다. 이에 대하여 <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점, 서술형A-9] [2021]

<보기>

◦ 학생이 수업에 대하여 가능한 한 많은 권리와 책무성을 갖도록 한다.
◦ 학생과 학생 사이에 충실한 상호작용이 일어나도록 한다.
◦ 학생이 다양한 표상을 사용하는 능력을 함양하도록 한다.

<온라인 활동 과제>

(가) 컴퓨터 기하 프로그램으로 삼각함수 그래프를 그리는 방법을 복습하시오.
(나) 함수 $y=a\sin x$의 그래프를 a의 값을 다르게 하여 여러 개 그려보고, 함수 $y=\sin(bx)$의 그래프는 b의 값을 다르게 하여 여러 개 그려본 후 나타난 결과를 분석하여 정리하시오.
(다) 함수 $y=a\sin(bx)$ (a, b는 상수)의 그래프의 성질에 대하여 정리한 내용을 발표하시오.

<작성 방법>

◦ 박 교사의 <수업 방향>에 적합한 교수·학습 방법을 2015개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020-255호) '교수·학습 및 평가의 방향'의 '교수·학습 방법'에 제시된 것 중에서 선택하여 쓰고, 그 이유를 설명할 것
◦ 선택한 '교수·학습 방법'을 적용할 때, <온라인 활동 과제>의 (다)에서 학생이 할 발표의 준비 과정과 내용을 서술할 것

26. 다음은 학기 초에 평가 계획을 세우는 수학 교사들의 대화이다. 괄호 안의 ㉠에 공통으로 해당하는 수학 교과 역량과 괄호 안의 ㉡에 공통으로 해당하는 평가 방법을 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020－236호)에 제시된 용어로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2022]

김 교사: 2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능뿐만 아니라 수학 교과 역량을 균형 있게 평가한다는 평가 원칙을 제시하고 있습니다. 수학 교과 역량을 포함하여 평가 계획을 세워 봅시다.

이 교사: 수학 교과 역량에 따라 평가 방법을 달리 해야 할 것 같습니다.

김 교사: 그렇죠. 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 내용의 일부를 참고해 봅시다.

(㉠): 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습 태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력

(㉡): 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제 해결과 추론 과정의 반성이나 자신의 생각 표현 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

이 교사: (㉠)을/를 평가할 때 (㉡)을/를 활용하면 좋겠습니다.

27. 다음은 대푯값을 다루는 중학교 수업의 일부이다.

교 사: 선생님이 칠판에 적은 ㉠5개의 수는 cm단위를 빼고서 우리 학교 농구팀 주전 선수 5명의 신장을 적은 것입니다. 이 자료의 대푯값으로 평균이 적합할까요?

학 생 1: 여기서는 평균이 대푯값으로 적합하지 않은 것 같은데요.

학 생 2: 우리 농구팀 주전 선수들의 구성이 좀 특이해서, 평균 신장이 5명의 신장 자료를 대표하는 것 같지 않아요.

교 사: 그렇다면, 평균 말고 우리 농구팀 주전 선수들의 신장 자료를 대표하는 새로운 값을 생각해 볼까요?

[이후에 농구팀의 신장 자료의 대푯값으로 중앙값 개념을 도입하는 교수・학습을 한다. 그리고 어떤 신발 가게에서 하루동안 팔렸던 신발 치수의 자료를 다루는데, 중앙값 개념을 도입할 때와 비슷한 방식으로 이 자료를 대표하는 새로운 값을 찾으면서 최빈값 개념을 도입하는 교수・학습을 한다.]

교 사: 지금까지 자료의 대푯값으로 평균, 중앙값, 최빈값 개념을 배웠습니다. 이제 선생님이 나누어 준 학습지를 가지고 모둠 활동을 할 것인데요.

학생들: 무슨 활동을 하는데요?

교 사: 생활 주변, 사회 및 자연 현상에서 나온 자료의 특징을 잘 살펴보면서, 어느 대푯값이 어떤 상황 속의 어떤 자료에 대해 유용하게 사용될 수 있는지 토론할 거예요. 그리고 상황과 자료에 따라 대푯값을 구하는 활동도 할 거예요.

밑줄 친 ㉠의 자료는 평균이 대푯값으로 사용되기에 적절하지 않은 사례로서 수업에서 중앙값을 도입하기 위하여 제시된 것이다. 밑줄 친 ㉠의 자료로 적합한 '5명 신장의 예'를 제시하고, 예시한 자료의 특성을 설명하시오. 또한 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제2020－236호)의 '교수・학습 방법'에서 수학적 문제 해결 능력으로서의 수학적 모델링 능력의 신장을 위해 강조한 사항을 쓰고, 이 강조 사항이 이 수업에서 어떻게 반영되고 있는지를 기술하시오, [4점, 서술형A-5] [2023]

28. 다음은 2022 개정 중학교 수학과 교육과정의 변화에 대한 두 교사의 대화이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B-1] [2024]

정 교사: 2022개정 중학교 수학과 교육과정에서 영역 명칭의 변화가 있네요.

송 교사: 맞아요. 초등학교와 중학교의 연계성을 강화하기 위해서 초등학교와 통일하여 제시한 것으로 알고 있습니다.

정 교사: 네. 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 ‘문자와 식’ 영역과 ‘함수’ 영역을 통합하여 (㉠) 영역으로 제시한 거군요.

송 교사: 그렇습니다. ‘확률과 통계’ 영역도 ‘자료와 가능성’ 영역으로 명칭이 바뀌었어요.

정 교사: 그럼 자료와 가능성 영역의 ‘내용 체계(표)의 지식·이해 범주의 내용 요소’ 중에서, 2015 개정 중학교 수학과 교육과정의 확률과 통계 영역의 ‘내용 체계(표)의 내용 요소’와 비교해서 변화된 내용이 있을까요?

송 교사: 네. 다음은 자료와 가능성 영역의 내용 체계(표)의 일부인데요. ‘상자그림’이 새롭게 추가된 것을 확인할 수 있습니다.

범주 \ 구분	내용 요소		
	중학교		
	1～3학년		
지식·이해	• (㉡) • 도수분포표와 상대도수	• 경우의 수와 확률	• 산포도 • 상자그림과 산점도

정 교사: 그렇군요. 내용 요소에 제시된 (㉡), 도수분포표, 상대도수, 확률, 산포도, 상자그림, 산점도는 자료와 가능성 영역의 ‘성취기준 적용 시 고려 사항’에 자료와 가능성 영역에서 다루는 용어로 제시되어 있습니다.

[수학교육(수리)철학]

<절대주의>

1. 『기하학기초론』이라는 저서에서 Hilbert가 제시한 공리계의 특성과 이를 바탕으로 발전된 수리철학적 관점에 관하여 설명하시오.[3점] 그리고, 이 관점에 의하여 발전된 현대수학의 특징을 쓰시오.[2점] [총 5점] [1999-5]

2. 다음은 증명에 대한 두 절대주의 수리철학의 관점 (가)와 (나)를 제시한 것이다. (가)와 (나)에 해당하는 수리철학을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형 B-1] [2022]

(가)	어떤 수학적 대상이 존재함을 보장하기 위해서는 그 대상이 존재하지 않는다고 가정한 후 모순을 이끌어 내는 것만으로는 충분하지 않으며, 유한 번으로 구성될 수 있음을 밝혀야 한다. 배중률을 사용한 존재성 증명은 받아들일 수 없다.
(나)	수학은 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리 체계로 구성되어야 한다. 기호가 의미하는 것은 중요하지 않기 때문에 점, 선, 면 대신 연필, 의자, 책상이라는 용어를 사용하여도 무방하다. 증명은 정해진 규칙에 따라 의미 없는 기호를 다루는 일종의 기호 조작이다.

<구성주의>

1. 수학적 지식 형성의 특성을 von Glasersfeld가 주장한 구성주의(constructivism) 학습관에 입각하여 설명하시오. [6점] [2001-2]

2. 다음은 8−가 단계 수학에 있는 '유리수와 소수' 단원의 수업 계획을 교사의 관점에서 제시한 것이다.

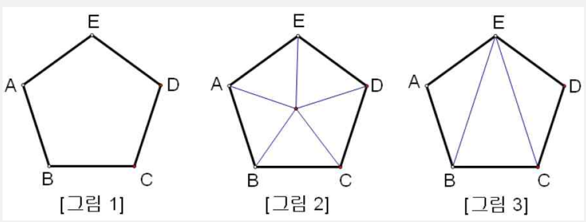
학습 목표 : 유한소수로 나타내어지는 분수의 특징을 알 수 있다.
수업 계획 :
① 칠판에 학습 목표를 쓴다.
② 여러 가지 분수를 제시하고 그것을 소수로 나타내 보게 한 후, 유한소수와 무한소수의 뜻을 설명한다.
③ 위의 분수 중에서 유한소수로 나타내어지는 분수와 무한소수로 나타내어지는 분수를 각각 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 어떤 특징을 가지는지 알아보도록 한다.

위의 수업 계획 중에서 ③을 사회적 구성주의의 지식관을 반영하여 진행하고자 한다. 이때, 학생들이 객관화된 수학적 지식을 얻기까지 거쳐야 할 활동 과정을 쓰고, 그 결과 얻어져야 할 지식을 학습 목표와 관련하여 쓰시오. [5점] [2006-2]

- 활동 과정:
- 그 결과 얻어져야 할 지식(학습 목표와 관련):

3. 김 교사는 사회적 구성주의를 적용한 수학 수업을 실천해 왔다. 사회적 구성주의에서는 개인의 주관적 지식이 공표를 통해 사회에 알려지고 공적인 비판과 합의를 통해 객관적 지식으로 변환해 간다고 본다. 다음은 7-나 단계 '다각형의 내각의 크기의 합'에 관한 수업에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다.

김 교사 : 이런 오각형에서 내각의 크기의 합이 얼마일지 생각해 봅시다. [그림 1]
(학생들의 소집단 토론이 진행된다.)
김 교사 : 자, 이제 발견한 사실을 발표해 볼까요?
학생 A : 오각형의 내각의 크기의 합은 $5\times180°$ 가 됩니다.
김 교사 : 학생 A가 오각형의 내각의 크기의 합이 $5\times180°$ 라는 의견을 제시하였습니다. 이 의견에 대한 질문이 있습니까?
학생 B : 왜 $5\times180°$ 가 된다고 생각하는지 설명해주세요.
학생 A : 이렇게 잘라서 각의 크기를 모두 합하면 $5\times180°$ 가 됩니다. [그림 2]
학생 B : 오각형을 이렇게 자르면 내각의 크기의 합이 $3\times180°$ 가 되는데요? [그림 3]



이 대화 속에서 학생 A와 학생 B는 각기 구별되는 주관적 지식을 제안하였다. 김 교사는 두 학생의 주관적 지식이 합의된 객관적 지식으로 변환해 가도록 안내하려고 한다. 안내 과정을 두 단계로 나누어, 김 교사가 각 단계별로 할 수 있는 주요한 질문과 그 질문의 의도를 사회적 구성주의의 관점에서 각각 제시하시오. [4점] [2008-2]

- 1단계 질문:
- 1단계 질문의 의도:
- 2단계 질문:
- 2단계 질문의 의도:

4. 차 교사는 확률변수의 평균에 대한 성질 $\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X)$의 증명을 다음과 같은 방법으로 지도하였다.

> 모둠 활동 자료로 학급 학생들의 키를 미터(m) 단위와 센티미터(cm) 단위로 각각 기록한 두 개의 표를 만들었다. 모둠별로 이 두 개의 표를 모두 나누어 준 뒤 하나의 표를 선택하여 평균을 구하도록 하였다. 이어지는 학급 토론에서 모둠별로 구한 평균을 비교해보니 165와 1.65로 나뉘었다. 다음은 학급 토론 내용이다.
>
> 차 교사: 같은 자료를 가지고 평균을 구했는데 두 개의 다른 값이 나왔어요. 그럼 두 값 가운데 하나가 틀렸다고 주장해도 될까요?
>
> (학생들이 각자의 모둠에서 두 표를 비교한다.)
>
> 선 아: 두 표에서 사용한 단위가 달라요. $1\mathrm{m}=100\mathrm{cm}$이니까, 아마도 단위가 센티미터인 자료를 사용한 모둠에서는 평균이 165가 나온 것 같고, 미터 단위를 사용한 모둠에서는 1.65가 나온 것 같아요. 즉, 센티미터 단위로 정리한 자료가 미터 단위로 정리한 자료의 100배가 되니까 그 평균도 100배가 된 것 같아요.
>
> 차 교사: 선아의 추측을 식으로 표현하면 $\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$인데, 선아의 추측이 맞나요?
>
> 정 덕: 네. 우리 반 학생 30명의 키를 x_1, x_2, $\cdots$, x_{30}이라고 하면 평균은
> $$\frac{100x_1+\cdots+100x_{30}}{30}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_{30}}{30}\right)$$
> 이 됩니다. 그러니까 $\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$가 성립해요.
>
> 지 현: 30개의 자료에 대해 성립한다고 해서 모든 경우에 성립한다고 할 수는 없어요.
>
> 차 교사: 정덕이는 지현이의 주장이 타당하다고 생각해요?
>
> 정 덕: 아니요, 30을 N으로 바꾸면
> $$\frac{100x_1+\cdots+100x_N}{N}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_N}{N}\right)$$
> 자료의 크기가 N인 경우로 일반화할 수 있어요.
>
> 차 교사: 정덕이는 각 자료에 곱해지는 수가 100인 특수한 경우에 대해 증명을 했는데 100이 아닌 임의의 상수의 곱으로 일반화할 수 있을까요?
>
> 경 이: 정덕이가 쓴 등식에서 100을 일반적인 상수 k로 바꾸어 쓰면
> $$\mathrm{E}(kX)=k\mathrm{E}(X)$$
> 가 성립할 것 같아요.

위의 지도 과정에서 드러난 차 교사의 증명 지도에 대한 수리철학적 관점으로 가장 알맞은 것을 <보기>에서 두 개만 고른 것은? [2점] [2009 모의-8]

<보기>

ㄱ. 증명은 의미를 고려하지 않고 특별한 규칙에 따라 행해지는 일련의 기호 조작이다.
ㄴ. 증명은 수업 상황에서 제기된 수학적 추측에 대한 설명과 확신의 수단이다.
ㄷ. 증명은 제기된 추측을 반박하고 재구성하는 계속적인 발견의 과정이다.
ㄹ. 증명은 가정에서 결론에 도달하는 단계적 절차로서 종합적 방식이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

5. 〈자료 1〉은 절대부등식을 증명하는 수업 과정에서 학생이 새로운 추측을 제기하는 상황이고, 〈자료 2〉는 김 교사가 〈자료 1〉의 수업 과정에서 제기된 추측의 증명을 지도하기 위해 작성한 교수·학습 계획서의 일부이다. 〈자료 2〉를 토대로 〈자료 1〉에서 추측한 명제의 증명을 지도하기 위한 교수·학습 방안을 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B-8] [2019]

〈자료 1〉

김 교사: 지금까지 두 실수 x, y에 대하여 절대부등식

$$x^2+y^2 \geq xy$$

가 성립함을 증명해 보았습니다.

학생 1: 선생님, 오늘 배운 절대부등식을 보면 세 실수 x, y, z에 대하여 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xyz$$

도 성립할 것 같습니다.

학생 2: 저는 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

가 성립할 것 같습니다.

김 교사: 모두 좋은 추측입니다. 두 추측은 모두 참일까요? 여러분은 어떻게 생각합니까?

학생들: (서로 다른 반응을 보이며 호기심을 가진다.)

김 교사: 그럼 다음 시간에 확인해 봅시다.

〈자료 2〉

(가) 증명 지도 계획

- 수학에 대한 다음 2가지 관점을 활용한다.

관점	수학관
A	수학은 준경험적이고 오류 가능하며 인간의 창조적 활동의 산물이다. 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 확실성도 갖지 않으며 끊임없는 개선의 여지가 있다.
B	수학의 형성 과정에서 사회의 역할을 강조한다. 수학적 지식은 절대적인 진리로서 객관적인 것이 아니라 사회적으로 객관적인 것이다.

- 명제는 다음과 같이 증명한다.

[명제]

세 실수 x, y, z에 대하여 부등식

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

가 성립한다.

[증명]

세 실수 x, y, z에 대하여

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$
$$y^2+z^2 \geq 2yz$$
$$z^2+x^2 \geq 2zx$$

이므로, $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$이다.

…(중략)…

(나) 평가 계획

- 교수·학습 과정에서 학생의 의사소통 능력과 태도 및 실천 능력을 평가한다.
- 관찰 평가 도구

관찰 항목		이름 S1	S2	…	S21
의사소통	㉠				
	다양한 관점을 존중하며 다른 사람의 아이디어를 이해한다.				

- 자기 평가 도구

점검 항목		그렇다	보통이다	그렇지 않다
태도 및 실천	㉡			
	다른 사람의 의견을 존중하며 협력하였다.			

〈작성 방법〉

- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 〈자료 1〉에서 학생이 사용한 추론 유형과 이 추론에 근거하여 보완해야 할 점을 제시할 것.
- 본론 부분에는 다음 요소를 포함할 것.
  - 〈자료 2〉의 관점 A에서 본 증명의 의미와 그 의미를 근거로 한 교사의 활동 1가지
  - 〈자료 2〉의 관점 B에서 본 증명의 의미와 그 의미를 근거로 한 교사의 활동 1가지
  - 2015 개정 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법'에서 의사소통 능력, 태도 및 실천 능력 함양을 위해 강조한 사항을 근거로 하여 〈자료 2〉의 ㉠과 ㉡에 들어가는 항목 각각 1가지

6. 다음 <자료 1>은 중학교 3학년 학생 A의 수학일기의 일부이고, <자료 2>는 <자료 1>에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

<자료 1>

오늘은 친구 B와 함께 시네마 영화관을 갔다. 보고 싶은 영화를 선택해야 하는데 B와 의견이 달랐다. 나는 액션 영화를 선택했고, B는 액션 영화도 좋지만 다른 영화를 함께 골라보자고 하였다. 시네마 영화관에서는 현재 여러 개의 영화를 동시에 상영하고
있어 영화를 고르기가 힘들었다. 그때 마침 내게 좋은 아이디어가 떠올랐다. 영화 관람을 마치고 나오는 많은 사람들에게 그들이 본 영화가 무엇이었는지 조사해 보자는 것이었다. 그런 다음 사람들이 가장 많이 본 영화를 관람하기로 결정하면 어떨까 생각하고 B의 의견을 물었다. B도 나의 의견에 동의하였다.

나는 먼저, 영화 관람을 마치고 나오는 사람들에게 관람한 영화가 무엇이었는지 조사하였다. 그리고 별생각 없이 조사한 자료로 수학 시간에 배운 평균을 구하자고 B에게 말하였다. 그런데 ㉠B가 "자료를 대표하는 값은 여러 가지가 있고, 주어진 자료에 따라 적절한 값을 사용해야 그 자료의 특성을 대표할 수 있다."라고 하면서 우리가 함께 관람하기로 한 영화 선택의 조건이 무엇이었는지 나에게 상기시켜 주었다. "맞아, 그거야! 여기서는 최빈값이 대푯값으로 적절하겠구나."라는 것을 깨달았다.

…(중략)…

친구의 도움으로 최빈값의 의미와 그것을 언제 사용해야 하는지 확실히 알게 되었다. 그러고 보니 빅 데이터 기술을 이용하여 많은 사람들이 주로 사용하는 단어를 최빈값으로 구해 낼 수 있고, 그 단어가 갖는 여러 의미를 해석해 볼 수 있어 최빈값이 매우 유용하지 않을까 하는 생각도 들었다. 그래도 오늘 가장 좋았던 것은 ㉡교과서의 정리된 수학이 아닌 내 주변에 살아있는 수학을 경험한 것이었다

<자료 2>

김 교사: 수학이 우리 삶 가운데 유용하게 사용되고 있음을 알도록 학생들에게 수학일기를 써 보게 했습니다.
박 교사: 좋은 생각입니다. 학생들이 수학을 왜 배워야 하는지 모르겠다고 하는데 수학일기를 통해 수학의 실용적 가치를 깨닫는 좋은 기회가 될 것 같습니다.
김 교사: 네, 그리고 동시에 ㉢수학이 객관적 진실이라기보다는 우리의 삶의 경험을 조직하는 데 도움이 됨을 학생들이 인식하면 좋겠습니다.

비교츠키(L. Vygotsky) 학파의 관점에서 <자료 1>의 ㉠을 설명할 수 있는 개념 용어를 쓰고, A가 알게 된 최빈값의 의미를 쓰시오. 그리고 <자료 1>의 ㉡, <자료 2>의 ㉢에 근거하여 사회적 구성주의와 차별화되는 급진적 구성주의의 원리를 설명하시오 [4점, 서술형A-8] [2021]

<준경험주의>

1. 다음은 라카토스(Lakatos)의 준경험주의 입장과 수학적 지식의 성장 과정을 요약한 것이다.

(가) 수학은 '추측-증명-반박'의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장하는 준경험 과학이다.
(나) 라카토스가 제시한 수학적 지식의 성장 과정은 다음과 같다.

- 1단계 : 수학적 추측을 제기하는 단계
- 2단계 : 추측을 부분추측으로 분해하는 단계(사고실험)
- 3단계 : 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계
- 4단계 : 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

<보기>는 어떤 학생의 추측과 증명을 나타낸 것이다. 위 (나)의 3, 4단계를 근거로 잠정적으로 참으로 받아들일 수 있는 개선된 추측과 그 과정을 제시하시오. [4점] [2005-6]

<보기>

<소박한 추측>

미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는다.

<증명(사고실험)>

1단계 : 미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
2단계 : $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 이 함수는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

2. 라카토스(I. Lakatos)의 수리철학에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-3]

<보기>

ㄱ. 수학은 증명과 반박을 통해 확증된다.
ㄴ. 증명 분석은 이론적 개념을 생성하는 도구이다.
ㄷ. 연역적 추측은 수학적 발견의 수단이 될 수 있다.
ㄹ. 수학적 발견에 있어서 직관과 귀납의 역할을 강조하였다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ ,ㄹ

3. 라카토스(I. Lakatos)는 반례의 출현과 오류를 수정해 가는 과정이 수학의 발달에서 중요하다고 하였다. 반례를 찾는 활동이 수학교육 측면에서 지니는 긍정적 효과로 적절하지 않은 것은? [2점] [2011-2]

① 반례를 찾는 과정에서 기존에 학습한 수학적 지식을 통합하거나 견고하게 만들 수 있다.
② 반례를 찾는 과정을 통해 비판적 사고력을 신장시킬 수 있다.
③ 예외적인 경우를 찾는 활동을 통해 이전의 추측에서 고려하지 못한 부분을 생각해 보게 함으로써 사고의 엄밀성을 강화시킬 수 있다.
④ 결과에 이르게 된 과정이나 관련된 지식을 재음미시켜 수학적 힘을 신장시킬 수 있다.
⑤ 반례를 찾아 명제가 거짓임을 밝힘으로써 수학에서 거짓 명제가 의미없다는 인식을 강화시킬 수 있다.

4. 다음은 다면체에 대한 오일러(L. Euler)의 추측, 이에 대한 개략적 증명, 그와 관련된 세 가지 사례를 제시한 것이다. 라카토스(I. Lakatos)의 오류주의 수리철학의 입장에서 옳은 설명인 것은? [2.5점] [2013-5]

[오일러의 추측]

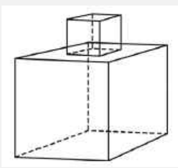
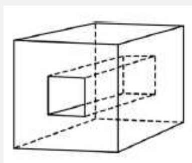
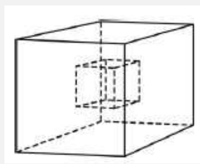
다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 V, E, F라 할 때, $V-E+F=2$이다.

[개략적 증명]

[1단계] 탄력이 좋고 속이 비어 있는 다면체를 상상하고서 그 다면체의 어떤 한 면을 제거한 후, 제거된 면에 다른 면들이 평면 그물처럼 펼쳐지도록 만든다. 이때, 면이 1개 줄게 되므로, 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$ 임을 보이는 것을 평평한 그물에 대해 $V-E+F=1$ 임을 보이는 것과 같다.

[2단계] 모든 면이 삼각형이 될 때까지 각 면에 대각선을 긋는다. 대각선을 1개 그을 때마다, E, F는 각각 1개씩 늘어나므로 $V-E+F$의 값은 변하지 않는다.

[3단계] 삼각형으로 분할된 그물에서, 모서리와 면을 1개씩 없애거나 모서리 2개, 꼭짓점 1개, 면 1개를 없애는 방식으로, 삼각형을 하나씩 제거하여 단 하나의 삼각형만 남도록 한다. 삼각형을 제거하는 과정에서 $V-E+F$의 값은 변하지 않고 마지막에 남은 삼각형에 대해 $V-E+F$의 값은 1이 되므로, 원래의 추측을 증명한 것이다.

사례 ㉠	사례 ㉡	사례 ㉢
		
정육면체에 작은 정육면체 볏이 달린 입체	정육면체에 네모 구멍이 뚫린 입체	정육면체 속에 작은 정육면체가 비어 있는 입체

① 사례 ㉠은 [1단계]와 [2단계]를 통과하지만 [3단계]는 통과하지 못한다.

② 사례 ㉢은 [1단계]를 통과하지 못하는 국소적 반례인 동시에 추측을 반박하는 전면적 반례이다.

③ 괴물배제법은 사례 ㉠, ㉢과 같은 전면적 반례를 수용해서 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법이다.

④ 사례 ㉠은 [1단계]에 대한 국소적 반례인데, 그 반례를 가지고 [1단계]를 분석하는 과정을 통해 '단순 연결된 면을 가진 다면체'라는 개념을 생성해 낼 수 있다.

⑤ 예외배제법은 사례 ㉠, ㉡과 같은 전면적 반례를 다면체의 예외적인 경우로 인정하고 원래의 추측에 그 예외를 언급한 조건절을 첨가하는 것이기 때문에, 다면체의 정의를 정교화하는 데 기여한다.

5. 0 이상의 정수 n에 대하여 $n+1$차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{n+1}$에서 원점 O로부터 거리가 1인 위치에 있는 점들의 모임을 n차원 구라고 하고

$$S^n = \left\{ \zeta = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \|\zeta\|^2 = 1 \right\}$$

로 나타낸다. 예를 들어, S^1은 원, S^2는 구면이다.
(단, $\|\zeta\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$이고, S^n의 위상은 $\mathbb{R}^{n+1}$ 위의 보통위상(usual topology)의 상대위상(relative topology)이다.) [30점] [2013 2차, 2교시-3-1

학생 갑과 을이 제시된 n차원 구의 정의를 보고 다음과 같은 대화를 나누었다.

> 갑: S^1, S^2는 모두 연결 공간(connected space)이네. 아마도 '모든 S^n이 연결 공간이다.' 라는 명제는 참인 것 같아. 그래서 다음과 같이 증명해 보았어.
>
> - 1단계: 사상 $g : (\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}) \to S^n$을 $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{\|\zeta\|}$로 정의하면 이 사상은 연속(continuous)이고 전사(surjective)이다.
> - 2단계: 연결 공간의 연속사상에 대한 상(image)은 연결 공간이다.
> - 3단계: $\mathbb{R}^{n+1} - \{O\}$은 연결 공간이다.
> - 4단계: 2단계와 3단계로부터 S^n도 연결 공간이다.
>
> 을: 음, 의심스러운데? $S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$이잖아.
> 즉, S^0은 연결 공간이 아니지.
>
> 갑: 아, 그럼 그 반례에 대해 이렇게 대응해야겠구나!
>
> | 개선된 추측(명제) |
> |---|

라카토스(I. Lakatos)는 수학적 지식이 증명과 반박의 논리에 의해 추측이 개선되는 과정을 통해 성장한다고 주장하였다. 추측에 대한 반례가 출현할 때 라카토스가 제시한 대응 방법 중 다음에 제시된 (가), (나), (다)에 대해 기술하시오. 그리고 위의 상황에서 나타난 반례에 대한 대응을 보조정리합체법을 이용하여 개선된 추측(명제)과 함께 구체적으로 설명하시오. [10점]

(가) 괴물배제법(monster-barring method)
(나) 예외배제법(exception-barring method)
(다) 보조정리합체법(lemma-incorporation method)

6. 다음은 박 교수가 수학 교육론 강의 시간에 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의를 주제로 진행한 강의의 일부이다.

박 교수: 하나의 추측을 제기하고, 그 추측을 부분추측으로 분해하는 1가지 사례를 말해 봅시다.

민 태: 교수님, 제가 말해 보겠습니다. 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 두 실근을 가진다는 추측을 제기하고, 다음과 같이 세 단계로 분해하여 보았습니다.

> 1단계: 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 포물선이고, 실근의 개수는 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같습니다.
> 2단계: 그래프의 꼭짓점 (p, q)는 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$인데, a의 부호를 기준으로 생각하면, $a>0$일 때 $p<0$, $q<0$이고, $a<0$일 때 $p>0$, $q>0$입니다.
> 3단계: 포물선의 모양을 생각하면, $a>0$일 때 꼭짓점이 제3사분면, $a<0$일 때 꼭짓점이 제1사분면에 있으므로 그래프가 x축과 만나는 점은 2개입니다.

박 교수: 민태가 제기한 추측을 통해 라카토스의 준경험주의 관점에서 수업을 진행해 봅시다.

혜 수: 교수님, ㉠ 방정식 $x^2-4x+4=0$은 근이 $x=2$이고, 하나의 실근만을 가집니다.

학 생 들: 맞아요. 민태의 처음 추측이 틀렸어요.

현 덕: 저는 다르게 생각합니다. ㉡ 어떤 추측이 항상 참이 된다고는 생각하지 않습니다. 그러나 지금 이 경우에는 혜수가 말한 것을 예외로 인정하면 민태의 추측을 옹호할 수 있습니다.

박 교수: 어디 한번 봅시다. 만약 혜수의 말이 옳다면, 민태의 부분추측은 어디가 잘못되었을까요?

혜 수: 2단계가 잘못된 것 같습니다. $a>0$일 때 b의 값을 함께 고려해 보겠습니다. 만약 $b=0$이면 $p<0$이 아니라 $p=-\frac{b}{2a}=0$이 됩니다.

박 교수: 그렇군요. 그러면 부분추측을 수정해야겠군요. 2단계와 3단계를 합쳐서 수정해 봅시다. 그리고 처음의 추측도 수정해야겠군요.

은 영: 교수님, 1단계도 이상한데요? 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프는 항상 포물선인가요?

혜 수: 아닌 것 같습니다. …(중략)…

민 태: 교수님, 지금까지의 논의를 통해 볼 때 다음과 같이 정리할 수 있습니다. $a\neq0$인 방정식 $ax^2+bx+c=0$은 $b^2-4ac>0$일 때, 두 실근을 갖습니다.

위 상황에서 ㉡의 관점에서 ㉠과 같은 반례가 출현할 때, 이 반례에 대한 라카토스의 대응 방법을 무엇이라고 부르는지 적고, 이러한 대응 방법으로 인해 발생할 수 있는 현상에 대해 쓰시오. 또, 위 강의 내용을 참고하여 라카토스의 준경험주의 관점에서 수학적 지식의 성장 과정을 설명하시오. [5점, 서술형A-1] [2015]

7. 다음은 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화이다.

> 김 교사: 라카토스에 따르면 수학적 지식은 반증되기 전까지 잠정적으로 참이며, 증명은 원래의 추측을 부분 추측으로 분해하는 사고 실험이에요.
>
> 김 교사: 수학적 추측이 증명되었을 때 그 추측을 반박하는 전면적 반례가 등장하면 어떻게 하나요?
>
> 김 교사: 대응하는 방식이 여러 가지가 있는데요. 한 방식은 ㉠이미 증명된 추측은 그대로 두고 오히려 반례가 잘못되었다고 보아 원래의 추측을 존속시키는 거에요. 이 방식은 반례와 관련된 개념을 추측이 성립하는 영역 밖으로 몰아내는 것에 주로 관심을 두어 개념을 재정의하지요.
>
> 김 교사: 또 다른 방식은 어떤 것이 있나요?
>
> 이 교사: ㉡전면적 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 원래의 추측에 합체시키고 증명과 추측을 개선하는 방식이 있어요. 이 방식에서 전면적 반례는 동시에 국소적 반례도 되지요. 이 방식을 통해 발견과 정당화의 논리가 분리되지 않고 하나로 통합될 수 있어요.

전면적 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식 ㉠과 ㉡을 라카토스가 제시한 용어로 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B-1] [2020]

8. 다음은 라카토스(I.Lakatos)의 오류주의 수리철학에 대한 두 교사의 대화의 일부이다. 괄호 안의 ㉠, ㉡에 해당하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B-1] [2023]

> 최 교사: 라카토스는 수학의 중요한 개념들이 보조정리합체법을 사용하면서 나온 경우가 있다고 하였습니다.
>
> 이 교사: 그렇습니다. 라카토스는 그러한 개념을 (㉠) 개념이라 불렀는데요. 어떤 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 감추어진 보조정리를 드러내어 원래의 추측에 합체하는 과정 속에서 나오는 개념이라 그렇게 명명한 것으로 알고 있습니다.
>
> 최 교사: 수학의 역사에서 볼 때, 평등수렴(균등수렴, uniform convergence) 개념이 그러한 (㉠) 개념의 대표적인 사례라 할 수 있을 것 같습니다. “각 항이 연속함수인 함수항 급수가 수렴하면 그 극한함수도 연속이다.”라는 추측에 대한 반례가 나왔을 때, 증명을 분석하는 활동을 통해 평등수렴 개념을 도출한 것이지요.
>
> 이 교사: 이러한 수학 지식의 발달 과정을 토대로 하여, 라카토스는 증명에 독특한 성격을 부여했습니다. 그는 증명에 대해 ‘비판을 용이하게 하는 일종의 사고실험’이라 하였는데, 이것은 수학과 과학 사이의 유사성을 드러내기 위한 것이라 할 수 있습니다.
>
> 최 교사: 맞습니다. 라카토스 본인도 두 학문이 발달하는 과정 사이의 유사성에 대해 강조한 적이 있습니다. 과학적 지식이 생성되는 과정과 유사한 방식으로, 수학적 지식은 추측-증명-반례의 등장-증명분석-추측의 개선과 새로운 개념의 출현이 끊임없이 반복되면서 발전하기에, 라카토스는 수학을 (㉡) 과학이라 부른 적이 있습니다.
>
> 이 교사: 그러고 보니, 라카토스의 오류주의 수리철학을 흔히 (㉡)주의 수리철학이라 부르는 것도 일리가 있네요.

[수학문제해결교육론]

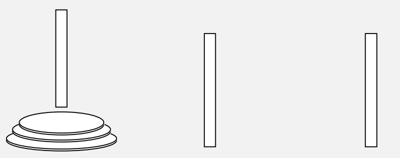
1. 문제해결의 지도과정에 대하여 폴리아(G. Polya)는 문제의 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성의 4단계를 제시하였다. 다음 중 문제의 이해 단계에 해당되지 않는 것은? [1993-26]
① 그림을 그려라.
② 조건은 충분한가.
③ 적당한 기호를 사용하여라.
④ 비슷한 문제를 알고 있는가.

2. 수학을 전개하는 공리론적 방법의 특성에 대하여 바르게 설명한 것은? [1994-1]
① 추상적인 기호를 사용하여 수학적 사실을 확신시킨다.
② 자명하다고 간주하는 사실에서 출발하여 추론규칙에 의해 새로운 사실을 밝혀낸다.
③ 직관 또는 귀납적 방법에 의해 특별한 사실을 유도한다.
④ 경험이나 관찰을 바탕으로 일반적인 법칙을 유도한다.

3. 수학적 문제 해결 지도를 위한 좋은 문제의 성격으로서 거리가 먼 것은? [1994-6]
① 도전감을 주는 어려운 문제이지만 적절한 전략을 사용하면 해결될 수 있다.
② 복잡한 처리 과정을 거쳐 해결될 수 있다.
③ 일반화될 수 있거나 다양한 문제 장면으로 확장될 수 있다.
④ 다양한 방법으로 해결될 수 있다.

4. 몇 개의 유사점을 기초로 하여 어떤 특수한 사실의 성질에서 그와 유사한 다른 특수한 성질을 추론하는 방법은? [1995-1]
① 연역 추리 ② 귀납 추리
③ 유비 추리 ④ 공리론적 추리

5. 현행(제6차) 수학과 교육과정은 문제해결전략으로 '그림그리기', '예상과 확인', '표 만들기', '규칙성 찾기', '반례 들기' 등을 들고 있다. 다음 문제를 통하여 가장 효과적으로 지도할 수 있는 문제해결전략을 아래의 예에서 한 가지 지적하시오(2점).
또 문제를 풀고, 그 전략을 어떻게 사용하였는지 풀이과정에 밝히시오(4점). (총 6점) [1997-2]

> 그림과 같이 세 개의 기둥과 크기가 서로 다른 4개의 구멍 뚫린 원판이 있다. 다음 규칙에 따라 기둥 1에 있는 4개의 원판을 다른 한 기둥으로 모두 옮기려고 한다. 이때 기둥 3개를 모두 이용할 수 있다. 최소 몇 번의 이동으로 가능하겠는가?
> • 규칙 1 : 한 번에 한 원판만 다른 기둥으로 옮길 수 있다.
> • 규칙 2 : 작은 원판 위에 큰 원판을 놓을 수 없다.
>
> 
> 기둥 1 기둥 2 기둥 3

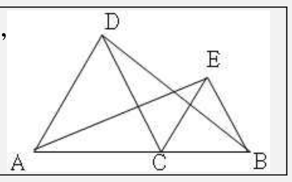
6. Polya는 수학적 문제해결 과정을, Piaget는 수학적 사고 과정을 각각 연구하였다. [총 4점] [1999-3]
(1) Polya의 이론에 따를 때, 문제해결 과정의 네 번째 단계에서 하는 활동은 구체적으로 어떤 것인지 세 가지 예를 제시하시오. [2점]
(2) Piaget의 이론에 따를 때, (1)의 활동은 반영적 추상화(reflective abstraction)와 어떻게 관련되는지 설명하시오. [2점]

7. 다음 제안을 읽고 문제에 답하시오. [총 5점] [1999-2]

> 【증명의 교수-학습에 관한 제안】
> 증명방법을 찾으려면 먼저 명제를 잘 이해한 다음, 분석법과 종합법으로 양쪽 방향에서 가정과 결론의 간격을 매우는 시도를 해보아야 한다.

(1) 위의 제안에 따라 다음의 명제의 증명 방법을 찾고자 한다. 분석법에 의한 추론 과정을 쓰시오. [3점]

> 오른쪽 그림과 같이, 선분 AB위에 점 C를 잡고, 두 정삼각형 ACD와 BCE를 만들면, $\overline{AE}=\overline{DB}$ 이다.



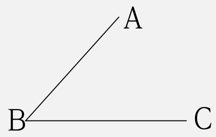
(2) 분석법을 고려하지 않고 종합법으로만 증명을 지도할 때 생길 수 있는 문제점을 쓰시오. [2점]

8. 주어진 각에 내접하는 단위원의 작도법을 폴리야(Polya)의 문제해결과정에 따라서 지도하려고 한다. [총 5점] [2000-3]

(1) 문제를 다음의 (가), (나) 중 하나로 제시하려고 한다. 문제해결의 각 단계에서 폴리야(Polya)가 제시하는 유용한 발문이나 권고를 근거로 할 때, 문제 (가)와 (나) 사이에 난이도 차이를 가정할 수 있는가? 판단 근거가 되는 폴리야의 단계와 발문을 구체적으로 언급하여 기술하시오. [3점]

(가) 임의로 크기가 주어진 예각 ∠ABC에 내접하는 단위원 O를 작도하시오.

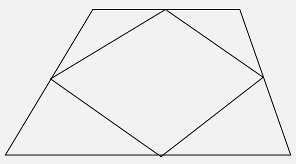
(나) 주어진 각 ∠ABC에 내접하는 단위원 O를 작도하시오.



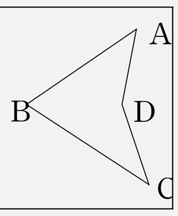
(2) 문제해결의 두 번째 단계에서 이 문제를 해결하는데 유용한 질문이나 권고를 구체적으로 3가지 이상 기술하시오. [2점]

9. 다음의 가상 상황을 읽고 아래 물음에 답하시오. [총 6점] [2002-1]

미현이는 학교에서 평면 위에 있는 사각형의 네 변의 중점을 이으면 평행사변형이 된다는 정리를 공부하였다. 미현이는 이 정리를 바탕으로 다음과 같은 문제를 제기하였다.



> 오른쪽 그림과 같이 한 평면위에 있지 않은 공간에서의 네 점 A, B, C, D를 차례로 연결하여 만든 도형에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$의 중점을 각각 E, F, G, H라 할 때, 사각형 EFGH는 평행사변형일까?



(1) 미현이가 제기한 문제의 내용이 옳은지의 여부를 판단하고 그 이유를 설명하시오. [1점]
(2) 이러한 문제제기(problem posing)활동의 수학교육적 의미를 세 가지만 진술하시오. [2점]
(3) 이러한 문제제기 활동의 수리철학적 의미를 Lakatos의 준경험주의(quasi-compiricism)입장에서 설명하시오. [3점]

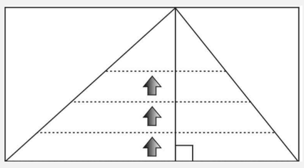
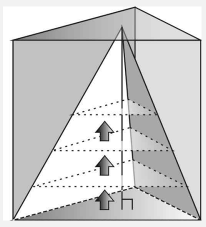
10. 다음에 제시된 수업 상황을 읽고 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-3]

> 다은이는 다음 문제를 해결하려고 애쓰고 있다.
> 「학교에서 집까지의 거리는 200m이고, 집에서 경찰서까지의 거리는 250m이다. 집에서 학교와 경찰서를 바라본 각의 크기가 60° 일 때, 학교에서 경찰서까지의 거리를 구하여라.」
> 잠시 후 교사가 다가와 다음과 같이 말하였다.
> "다은아, 제2코사인 법칙을 적용하면 되지 않을까?"
> 다은이는 교사의 이러한 발문에 힘입어 문제를 쉽게 해결하였다.

(1) 폴리아(G. Polya)의 수학 문제해결 교육론의 관점에서 볼 때, 교사가 다은이에게 한 발문이 바람직한 것인지 아닌지를 판단하고, 판단의 구체적인 이유를 교사의 발문과 관련하여 두 가지 서술하시오. [3점]

(2) 교수학적 변환(didactic transposition)의 관점에서 위에 제시된 수업 상황을 20자 내외로 평가하시오. [2점]

11. A 학생이 B 학생에게 삼각뿔의 부피를 구하는 공식이 (밑면의 넓이)×(높이)×$\frac{1}{3}$ 임을 아래와 같이 설명하였다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2004-1]

> [그림 1]과 같이 삼각형이 직사각형에 내접해 있고, [그림 2]와 같이 삼각뿔이 삼각기둥에 내접해 있는 경우를 생각해 보자.
>
> 
>
> [그림 1]
>
> 
>
> [그림 2]
>
> 삼각형의 넓이를 구하는 공식이 (밑변의 길이)×(높이)×$\frac{1}{2}$인 것은 잘 알고 있지?
> [그림 1]의 삼각형을 보면, 화살표를 따라 위로 올라갈수록 그 폭이 점점 줄어드니까 삼각형의 넓이는 외접하는 직사각형의 넓이보다 당연히 작지? 마찬가지로 [그림 2]의 삼각뿔을 보면 위로 올라갈수록 단면의 넓이가 줄어드니까 삼각뿔의 부피도 외접하는 삼각기둥의 부피보다 작은 것이 당연해.
> [그림 1]과 [그림 2]는 모두 삼각형과 관련이 있어. 그리고 [그림 1]의 삼각형에는 밑변과 높이가 있는데, [그림 2]의 삼각뿔에는 밑면과 높이가 있어. 삼각뿔의 부피는 외접하는 삼각기둥의 부피의 절반보다 더 작아 보이니까 $\frac{1}{3}$쯤 될 것 같아.
> 그래서 삼각뿔의 부피를 구하는 공식은 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 비슷하게 될 것 같지 않니? 즉 삼각형의 넓이를 구하는 공식에서 '밑변의 길이' 대신에 '밑면의 넓이'로 바꾸고 $\frac{1}{2}$을 $\frac{1}{3}$로 바꾸어서 (밑면의 넓이)×(높이)×$\frac{1}{3}$이 된다고 생각할 수 있겠지.

(1) 앞의 설명은 A 학생이 유추(유비추리)적 사고를 통하여 삼각뿔의 부피를 구하는 공식을 이해하고 있음을 보여 준다. A 학생이 유추적 사고를 했다고 말할 수 있는 근거를 A 학생의 말을 인용하여 설명하시오. [3점]

(2) 만일 어떤 교사가 A 학생처럼 유추적 사고를 통하여 특정 수학 내용을 직관적으로 이해하도록 지도했다면, 이를 보완하기 위하여 취할 수 있는 지도 방법을 쓰고, 그 방법이 유추적 사고의 어떤 측면을 보완할 수 있는지 설명하시오. [2점]

- 지도 방법 :
- 보완할 수 있는 측면 :

12. 다음은 수학 문제해결 교육과 관련하여 교사들이 주고받은 대화의 일부이다.

(1) 문제해결 지도를 위한 문제들은 실생활로부터 만들어진 문장제이어야 합니다.
(2) 수학 교과서에 나오는 전형적인 문제들도 적절히 변형시키면 문제해결 지도에 적합한 문제로 활용할 수 있다고 생각합니다.
(3) 문제해결 교육과 학생들의 수학적 사고의 훈련은 별로 상관이 없다고 생각합니다.
(4) 해법이 다양한 문제일수록 그 문제는 문제해결 지도에 적합한 문제가 된다고 생각합니다.
(5) 문제해결 지도는 일반적인 수학 수업과는 관련시키지 않는 것이 좋습니다.
(6) 문제해결을 잘 하기 위해서 수학 교과서에서 흔히 보는 연습 문제는 풀 필요가 없다고 생각합니다.

대화 내용 중 문제해결 교육과 관련하여 옳지 않게 말한 대화의 번호를 3개만 쓰고, 각각에 대하여 옳지 않다고 생각하는 이유를 설명하시오. [총 5점] [2004-3]

13. 다음은 문제설정(problem posing)에 관한 설명이다.

브라운(Brown)과 월터(Walter)는 '만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?(what-if-not)'라는 문제설정 전략을 제시하였다. 이들이 제시하는 문제설정 전략은 출발점 선택, 속성 나열하기, '만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?'를 이용한 문제설정, 문제해결의 단계로 이루어진다.

김 교사는 피타고라스 정리를 일반화한 것이 제이코사인 법칙이라는 것을 보이기 위한 수업을 진행하고자 한다. 이 때, 위의 문제설정 전략에 따라 설정할 수 있는 문제를 하나 제시하고, 설정된 문제를 해결하시오. (단, 문제해결 과정을 식으로 제시할 것) [5점] [2005-4]

14. 다음은 폴리아(G. Polya)가 문제해결과 관련하여 말한 '보조문제'에 대한 설명이다.

제시된 문제에 대한 풀이의 발견은 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있는 적절한 보조문제에 좌우되는 경우가 많다. 보조문제를 생각함으로써 여러 가지 이득을 얻을 수 있다. 보조문제의 결과가 현재의 문제해결의 실마리가 될 수도 있고, 보조문제를 해결한 방법이 현재의 문제해결에 이용될 수도 있다.

<보기>에서 ①이 ②의 보조문제가 될 수 있는지 판단하고, 그 이유를 구체적으로 쓰시오. [4점] [2006-1]

<보기>

① 1부터 100까지의 자연수의 합 구하기
② 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 구하기

15. 다음은 박 교사가 학생들의 수학적 추론 능력을 알아보기 위해 제시한 문제이다.

카드의 앞면과 뒷면에 각각 1과 2, 3과 4, 5와 6, 7과 8, 9와 10이 적힌 다섯 장의 카드가 있다.

앞	1	3	5	7	9
뒷	2	4	6	8	10

다섯 장의 카드를 책상 위에 배열하였을 때, 보이는 다섯 개의 수 중 짝수가 2개인 경우 그 다섯 개의 수의 합이 얼마인지 구하시오.

이 문제에 대하여 철수가 다음과 같은 풀이를 제시하였다.

보이는 다섯 개의 수가 1, 4, 6, 7, 9일 경우, 2, 3, 5, 8, 9 일 경우, 그리고 1, 3, 6, 7, 10일 경우를 살펴보면, 그 합이 모두 27이 됨을 알 수 있습니다. 다른 경우도 마찬가지일 것이므로 답은 27일 것입니다.

철수가 제시한 풀이에 나타난 수학적 추론의 유형을 쓰고, 이러한 유형의 추론이 철수의 문제해결 과정에서 어떤 역할을 하였는지 설명하시오. 그리고 철수의 풀이에서 보완되어야 할 점을 기술하시오. [5점] [2008-6]

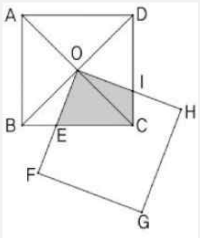
- 수학적 추론의 유형 :
- 역할 :
- 보완점 :

16. 문제와 문제해결 방법이 <보기>에 제시되어 있다. 각 방법 속에 나타난 전략을 올바르게 짝지은 것은? [1.5점] [2009 모의-3]

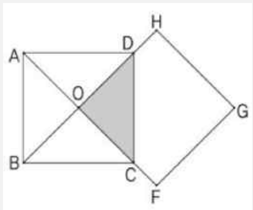
ㄱ. [문제] 방정식 $2x+1=7$을 풀어라
(문제해결 방법) x에 1을 대입하여 등식이 성립하는지 살펴본 후 성립하지 않으면 버리고, 성립하는 값이 나올 때까지 다른 수를 시도해 본다.

ㄴ. [문제] 방정식 $2^x-2^{3-x}=2$를 풀어라.
(문제해결 방법) 2^x을 y로 치환하여 y의 방정식으로 변형한 후, y의 값을 구하고 그 결과를 이용하여 x의 값을 구한다.

ㄷ. [문제] 한 변의 길이가 4cm인 두 정사각형이 있다.
[그림 1]과 같이 한 정사각형의 한 꼭짓점이 다른 정사각형의 대각선의 교점에 있을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.
(문제해결 방법) [그림 2]를 이용하여 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이를 구한다.



[그림 1]



[그림 2]

	ㄱ	ㄴ	ㄷ
①	예상과 확인	단순화 하기	특수화 하기
②	거꾸로 풀기	식 세우기	그림 그리기
③	예상과 확인	일반화 하기	단순화 하기
④	거꾸로 풀기	특수화 하기	단순화 하기
⑤	단순화 하기	거꾸로 풀기	그림 그리기

17. 다음은 문제해결에 어려움을 겪는 학생들의 이야기이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? [2점] [2009-9]

(가) 나는 개념과 원리를 제대로 이해하고 있는 것 같은데, 막상 문제를 풀 때는 아무 생각도 안 나고 내가 아는 어떤 내용을 적용해야 할지 모르겠어.
(나) 나는 문제를 풀 때, 전에 풀었던 비슷한 문제가 생각나지 않으면 어떻게 그 문제에 접근해야 할지 모르겠어.
(다) 나는 3분가량 지나도 문제가 풀리지 않으면 그 문제를 포기하게 돼.
(라) 나는 수업 시간에 풀어보았던 문제인데도 약간만 수가 변형되어 나오면 못 풀겠다니까.
(마) 나는 계산하는 데 시간이 너무 많이 걸려서 문제를 끝까지 못 푸는 경우가 많다는 게 문제야.

① 숀펠트(A. H. Shoenfeld)에 따르면 (가)와 같은 학생은 문제 해결과 관련된 요인 중 '통제력(control)'이 부족하다고 할 수 있다.
② (나)와 같은 학생은 문제해결에 필요한 알고리즘이나 법칙에 대한 지식이 부족하다.
③ (다)의 사례는 수학이나 문제해결에 대한 가치관이나 선입견이 문제해결에 영향을 미친다는 것을 보여 준다.
④ (라)와 같은 학생에게는 문제 제기(problem posing) 활동이 유용할 수 있다.
⑤ (마)와 같은 학생에게 문제해결의 경험을 제공하기 위해서 계산기를 보조 수단으로 활용할 수 있다.

18. 다음 수업 상황에 포함되어 있는 사고 방법을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-10]

교 사 : 오늘은 수학자들이 오랫동안 도전하고 있는 문제를 소개하려 합니다. 다음을 보고, 추측할 수 있는 사실을 말해 봅시다.

$6=3+3$	$8=3+5$	$10=3+7$	$20=3+17$
$36=5+31$	$48=11+37$	$66=19+47$	$72=31+41$

학생A : 좌변에 있는 수는 모두 짝수입니다.
교 사 : 좋아요. 그럼 우변에 있는 수들은요?
학생B : 짝수는 모두 홀수 두 개의 합으로 나타낼 수 있다는 건가요?
학생C : 그건 너무 당연하지 않아요? 그 정도가 아닌 것 같은데요.
학생A : 아하, 우변에 있는 수들은 모두 소수이군요!
학생B : 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 겁니까?
학생A : 그런데 2의 경우는 짝수이지만 두 소수의 합으로 나타낼 수는 없어요.
학생C : 그렇다면 2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다……?
교 사 : 그래요. 학생C가 말한 것을 '골드바흐(Goldbach)의 추측'이라고 하는데, 아직까지 아무도 증명하지는 못했어요.

〈보기〉

ㄱ. 유비추론 ㄴ. 귀납 추론 ㄷ. 분석법 ㄹ. 일반화 ㅁ. 반례 들기

① ㄱ, ㄴ, ㄷ ② ㄱ, ㄴ, ㅁ ③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ ⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

19. 다음은 곱셈순환군의 생성원(generator)과 소체(prime field) 위의 다항식의 근 사이의 관계에 대한 명제와 한 학생의 증명이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 2교시-3-2]

〈명 제〉

소수 p와 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여, F를 소체 $\mathbb{Z}_p=\{0, 1, 2, \cdots, p-1\}$을 포함하고 위수가 p^n인 체라 하고, 곱셈순환군 $F^*=F-\{0\}$의 생성원을 α라고 하자. 소체 $\mathbb{Z}_p$ 위의 n차 다항식 $f(x)$가 α를 근으로 가지면, $f(x)$는 F^*의 생성원 중에서 서로 다른 n개를 근으로 갖는다.

〈민주의 증명〉

F^*는 α에 의하여 생성된 곱셈순환군이므로

$$F^*=\langle\alpha\rangle=\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^{p^n-2}\}, \ \alpha^{p^n-1}=1$$

로 나타낼 수 있다.

한편, $\sigma_p : F \to F$, $\sigma_p(x)=x^p$은 환동형사상이고……………………………㉠

모든 $x\in\mathbb{Z}_p$에 대하여 $\sigma_p(x)=x^p=x$이므로 모든 $x\in F$에 대하여 $\sigma_p(x)=x$이다.……………………………………………………………………㉡

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}_p[x]$$

로 놓으면, $f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha^p)=0$이다.……………………………………㉢

따라서 F^*의 생성원 중에서 서로 다른 n개의 생성원 $\alpha, \alpha^p, \alpha^{p^2}, \cdots, \alpha^{p^{n-1}}$이 $f(x)$의 근이 된다.………………………………㉣

윤 교수는 민주와 면담을 하여 〈민주의 증명〉에서 나타난 오류가 다른 영역의 문제를 풀거나 증명을 할 때에도 반복적으로 나타남을 확인하였다. 그 오류의 원인을 〈민주의 증명〉 과정과 관련하여 설명하시오. 그리고 같은 원인을 가지는 오류의 사례를 중·고등학교 수학 학습 수준에서 제시하고, 그 오류를 교정할 수 있는 교수·학습 방법을 설명하시오. [10점]

20. 다음의 학습 원리를 명시적으로 제시한 수학교육자에 대한 설명 중 적절하지 않은 것은? [2점] [2010-2]

- 활동적(능동적) 학습의 원리 : 학습자는 주어진 상황에서 배워야 할 내용을 스스로 발견해야 한다.
- 최선의 동기유발의 원리 : 학습자는 배울 내용에 대해서 흥미를 가져야 하며 학습 활동에서 즐거움을 찾을 수 있어야 한다.
- 비약 없는 단계의 원리 : 효과적인 학습은 탐구단계를 지나 언어화와 개념 형성 단계로 나아가야 하며 학습자의 정신적 태도의 통합과 형성에 기여해야 한다.

① 수학교육을 통한 인성교육에도 관심을 기울였다.
② 데카르트의 사고 규칙을 참조하여 자신의 이론을 체계화하려 하였다.
③ 교사는 소크라테스 대화법의 산파로서의 역할을 해야 한다고 하였다.
④ 귀납보다는 전형적인 예에 의한 예제적 접근을 대표적인 개념 학습 방식으로 제시하였다.
⑤ 새수학(New Math) 운동에 반대하며 그 대안으로 수학 지도에 있어서 역사 발생적 방법에 주목할 것을 주장하였다.

21. 다음 문제에 대한 학생 A와 학생 B의 풀이 사례와 관련하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-11]

<문제>

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=2a_n+1$, $a_1=1$을 만족하면,
수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2^n-1$임을 보이시오.

<학생 A의 풀이>

$n=1$인 경우, $a_n=2^n-1$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1$이므로 성립한다.
$n=k$일 때, $a_k=2^k-1$이 성립한다고 가정하자.
$n=k+1$일 때, $a_{k+1}=2^{k+1}-1$이므로, 이를 이용하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1}-1 \\ &= 2(2^k-1)+1 \\ &= 2a_k+1 \end{aligned}$$

이 되어 주어진 점화식이 만족된다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

<학생 B의 풀이>

주어진 점화식을 만족하는 수열의 항을 몇 개 구해 보면
$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=15$, $a_5=31$, $\cdots$이다.
이때, $b_1=a_2-a_1=2$, $b_2=a_3-a_2=4$, $b_3=a_4-a_3=8$, $b_4=a_5-a_4=16$이므로
수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다.
계차수열을 이용하여 a_n을 구하면 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n-1$이다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

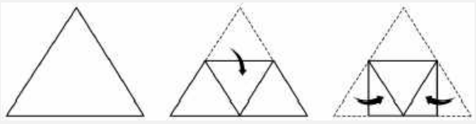
<보기>

ㄱ. 학생 A는 연역적 증명을 시도하였다.
ㄴ. 학생 A는 전제조건과 증명해야 할 것을 혼동하고 있다.
ㄷ. 학생 B의 풀이는 확실성을 보장할 수 있는 방식이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

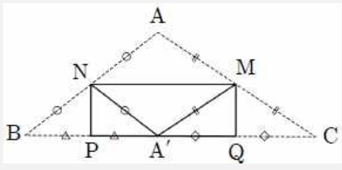
22. 가을, 봄비, 설빈이가 각이 겹치지 않게 하면서 삼각형의 세 꼭짓점이 한 변에서 만나도록 접는 방법에 대해 이야기하고 있다. 학생들의 대화에 대한 설명 중 옳은 것은? [2점] [2010-12]

가을 : 정삼각형의 각이 겹치지 않으면서 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 접는 방법을 보여 줄게. 이렇게 접으면 돼.



봄이 : 그런데 어떤 삼각형이라도 그렇게 접을 수 있는 일반적인 방법이 있어?

설빈 : 접는 방법을 찾아보는 것이 어때? 삼각형 ABC를 그려서 접은 상태를 생각해 보자. 그러니까 세 꼭짓점이 한 변에서 만났다고 해 보자. 점 N, P, Q, M은 접히는 지점을 나타내고, 점 A′은 세 꼭짓점이 모이는 지점이라고 하자. 그러면, $\overline{AN}=\overline{A'N}=\overline{BN}$이고 $\overline{AM}=\overline{A'M}=\overline{CM}$이 되잖아.



그러면, 점 N은 변 AB의 중점이 되고, 점 M은 변 AC의 중점이네.

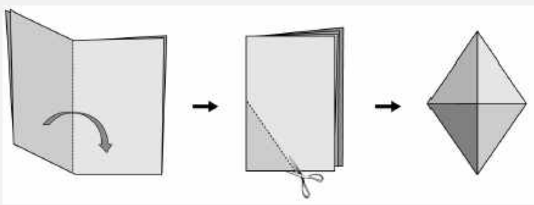
가을 : 방금, 삼각형의 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 되는 것을 증명했네.

봄이 : 아직 증명이 마무리된 건 아니냐.

① 가을이는 증명의 필요성을 제기하고 있다.
② 가을이는 분석법의 한계를 지적하고 있다.
③ 가을이는 연역적으로 증명하였다.
④ 봄이는 증명의 일반성에 대해 잘못 이해하고 있다.
⑤ 설빈이는 필요조건을 찾아가는 분석법을 구사하였다.

23. 다음은 중학교 도형 단원에서 선분의 수직이등분선 작도 방법의 도입을 위해 고안된 활동이다. 이 활동에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011-3]

[활동] 그림과 같이 직사각형 모양의 색종이를 네 꼭짓점이 한 점에서 만나도록 가로와 세로로 한 번씩 접은 후, 점선을 따라 가위로 잘라 펼쳐 봅시다.



<보기>

ㄱ. 파푸스(Pappus)의 '분석법적 아이디어'를 교수학적으로 구현한 것이다.
ㄴ. 주어진 선분의 양 끝점에서 거리가 같은 두 점을 찾기 위하여 컴퍼스를 이용할 수 있음을 알게 해 준다.
ㄷ. 이 활동을 통해 찾아낸 작도 방법이 논리적으로 옳음을 정당화하기 위해서는 후속적인 절차가 필요하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 다음은 문제와 이에 대한 학생 (가)와 학생 (나)의 풀이 방법이다. 문제 풀이 방법에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2011-5]

[문제] 수직선 위의 두 점 A(-3), B(5)를 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하고 그 이유를 쓰시오.
[풀이] 학생 (가) : 두 점 사이의 거리는 $5-(-3)=8$이고, $3:1$로 내분하므로 선분 AB는 네 등분되고 한 등분 길이는 $8\div4=2$이다. 선분 AP의 길이는 한 등분 길이의 3배이므로 $2\times3=6$이고, 이것을 A(-3)에 더하면 내분점 P는 $-3+6=3$이다. 따라서 내분점 P의 좌표는 P(3)이다. 학생 (나) : 수직선 위의 두 점에 대해 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구하는 공식은 $\mathrm{P}\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$이다. 이 공식에서 분모는 주어진 비의 두 수를 더하는 것이고, 분자는 비의 앞 수와 수직선의 오른쪽 좌표를 곱하고, 비의 뒤 수와 수직선의 왼쪽 좌표를 곱하여 더한 것이다. 분모는 $3+1=4$이고 분자는 $3\times5+1\times(-3)=15-3=12$이므로, 구하는 내분점 P의 좌표는 P$(3)$이다.

① (가)의 풀이에서 내분점의 공식이 구조적 대상으로 다루어지고 있다.
② (가)의 풀이에서 수직선 위에서의 조작 활동을 통해 내분점의 공식이 유도되고 있다.
③ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차적 지식이 사용되고 있다.
④ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차에 대한 반성 활동이 이루어지고 있다.
⑤ (가)와 (나)의 풀이에서 내분점의 공식에 대한 형식화된 개념 정의가 사용되고 있다.

25. 유추한 결과가 <u>거짓</u>인 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011-7]

<보기>

ㄱ. ‘두 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}$가 성립한다.’에서 “세 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt[3]{xyz}\le\frac{x+y+z}{3}$가 성립한다.”로 유추

ㄴ. ‘사다리꼴의 넓이는

$$\{(\text{아랫변의 길이})+(\text{윗변의 길이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{2}$$

이다.’에서 “각뿔대의 부피는

$$\{(\text{아랫면의 넓이})+(\text{윗면의 넓이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{3}$$

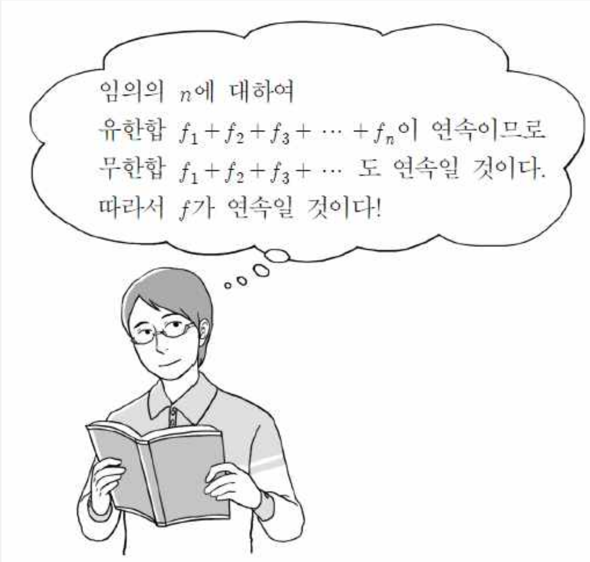
이다.”로 유추

ㄷ. ‘삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.’에서 사면체 각 면의 무게중심과 그 면에 마주보는 꼭짓점을 연결한 선을 사면체의 중선이라고 하면, “사면체의 네 중선은 한 점에서 만난다.”로 유추

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

26. 구간 $I=(-1,1)$에서 정의되고 함숫값이 실수인 연속함수열 $\{f_n\}$이 있다. 함수열 $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}$가 I에서 함수 f로 점별수렴(pointwise converge)할 때, 물음에 답하시오. [30점] [2011 2차, 2교시-3-1]

'함수 f는 연속함수인가' 에 대하여 경규는 다음과 같이 생각하였다.



경규의 생각이 속하는 추론 유형을 폴리아(G. Polya)의 문제해결 4단계 이론에 따른 문제해결 지도에 활용하는 방안을 기술하시오. 그리고 적절한 중등학교 수학 문제를 사례로 들어 이 활용 방안을 구체화하시오. [10점]

27. A 학생이 연립방정식의 활용 문제를 다음과 같이 해결하였다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-4]

[문제]
두 자연수의 합이 65이고 큰 수는 작은 수의 3배보다 5가 크다고 할 때, 두 자연수를 구하여라.

[A 학생의 풀이 과정]
1단계) 큰 수를 x, 작은 수를 y로 놓는다.
2단계) x, y를 사용하여 문제의 뜻에 따라 연립방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} x+y=65 \\ x=3y+5 \end{cases}$$

3단계) 이 연립방정식을 풀면 $x=50$, $y=15$이다.
4단계) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인해 보면

$$50+15=65,\ 50=3\times15+5$$

이므로 문제의 뜻에 맞는다.

<보기>

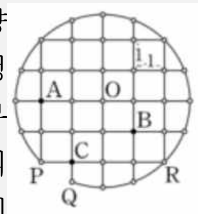
ㄱ. 1단계는 문제에 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 폴리아(G. Polya)가 말한 문제해결 계획을 수립하는 단계에 해당한다.
ㄴ. 숀펠드(A. Schoenfeld)가 언급한 문제해결 성공요인중 통제(control)는 위의 모든 단계에 적용될 수 있다.
ㄷ. 4단계는 찾은 답이 문제의 조건에 합당한지 확인하는 단계로 폴리아가 말한 반성 단계에 해당한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 최 교사는 기하 영역에서 실생활과 관련된 문제를 학생들에게 제시하고 학생들이 문제를 해결하는 동안 아래와 같은 발문을 하였다.

[문제]

그림은 어느 도시의 도로망을 나타낸 것으로, 정사각형 모양을 이루는 간선 도로는 교차로 간의 거리가 모두 1로 일정하고, 도시의 순환 도로는 O를 중심으로 하는 원의 일부로 되어 있다. A, B, C 대리점을 소유하고 있는 한 유통 회사에서 순환 도로 위의 P, Q, R 중 한 곳에 물품 창고를 세우려고 한다. 이때 물품 창고에서 도로를 따라 A, B, C 대리점에 이르는 거리의 합이 최소인 곳이 가장 적당하다고 하면, 어디에 세우는 것이 가장 좋겠는가?



[교사 발문]

(가) 그림의 O가 원점이 되도록 도로망을 좌표평면 위에서 생각해 보아라.
(나) A, B, C는 각각 좌표평면의 어느 점과 대응되는가?
(다) P에서부터 A, B, C까지의 거리의 합을 구해 보아라.
(라) 위의 (다) 과정을 Q, R에 대해서도 적용해 보아라.

최 교사의 발문과 관련하여 다음 중 옳은 것은? [2.5점] [2012-9]

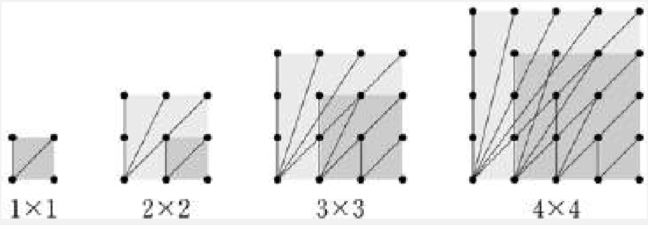
① (가)와 (나)는 원리나 공식 등의 내용을 이해하는 데 도움을 주는 반면, (다)와 (라)는 그 내용과 관련된 문제를 익숙하게 연습시키는 데 적절하다.
② (가)와 (나)는 이 문제의 풀이 방법이 떠오르지 않을 때 관련된 유사한 문제를 먼저 풀어 보게 하는 것으로, 이는 문제를 수월하게 해결하는 수단이 된다.
③ (가), (나), (다)는 문제해결을 위한 계획 단계에, (라)는 검토 단계에 제시하는 것이 적절하다.
④ (다), (라)와 같은 발문은 자칫하면 학생들이 스스로 탐구하거나 시행착오를 거쳐 학습할 수 있는 환경을 방해할 수 있다.
⑤ 위와 같은 발문은 전반적으로 학생들의 개인화와 배경화를 강조하기보다는 형식화된 수학 지식을 전달하기 위함이다.

29. 김 교사는 수업 시간에 학생들에게 한 변의 길이가 5인 기하판, 즉 5×5 기하판에 못을 연결하여 서로 다른 길이의 선분을 최대한 몇 개나 만들 수 있는지 찾아보게 하였다. 그 결과, A 학생은 풀이 과정을 다음과 같이 제시하고 20으로 답하였으나, 실제로 정답은 19이다.

[A 학생의 풀이 과정]

5×5 기하판 위에 1×1 정사각형부터 시작하여 4×4 정사각형에 이르기까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 모두 구해 보았다. 그 결과, 다음과 같은 규칙을 얻었다.

(서로 다른 길이의 선분의 수)=(이전 정사각형에서 구한 선분의 수)+(새로 만든 선분의 수)



정사각형의 크기	서로 다른 길이의 선분의 수
1×1	$2=2$
2×2	$(2)+3=5$
3×3	$(2+3)+4=9$
4×4	$(2+3+4)+5=14$

이 규칙을 5×5 정사각형에 적용한 결과, 서로 다른 길이의 선분의 수는 $(2+3+4+5)+6=20$(개)이다.

A 학생이 해결한 방법과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-10]

<보기>

ㄱ. A 학생이 5×5 정사각형에 자신이 발견한 규칙을 적용한 것은 선입견이나 부주의 등으로 인하여 관찰해야 할 사례를 간과하고 조급하게 일반화한 것이다.

ㄴ. A 학생은 일부 사례로부터 일반적 결론을 이끌어내기 위하여 수학적 귀납법을 사용하였다.

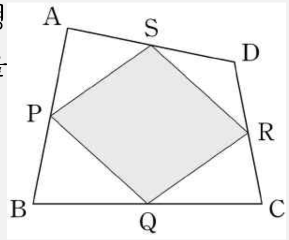
ㄷ. A 학생은 1×1 정사각형부터 4×4 정사각형까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 구한 방식을 형식불역의 원리에 의해 5×5 정사각형에 적용하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

30. 다음 〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉를 보고 물음에 답하시오. [2012 2차, 1교시-1-2]

〈수업상황 A〉

학생들이 기하 탐구형 소프트웨어를 이용하여, 사각형 ABCD의 변의 길이를 변화시키면서 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS의 성질을 탐구하고 있다.



김 교사: 사각형 PQRS는 어떤 사각형인 것 같아요?
학　 생: 평행사변형인 것 같은데요.
김 교사: 그러면, 사각형 PQRS가 평행사변형이라는 것을 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 두 변 PQ와 SR, 그리고 PS와 QR가 각각 평행인 것을 보이면 됩니다.
김 교사: 서로 평행인 것은 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 잘 모르겠는데요.
김 교사: 이 문제에서 사용할 수 있는 성질이나 조건에는 어떤 것이 있을까요?
학　 생: 중점이요.
학　 생: 평행이요.
김 교사: 중점, 평행하면 생각나는 정리 없어요?
학　 생: 삼각형의 중점 연결 정리요.
김 교사: 좋아요. 그 정리를 이 문제에 이용하려면 어떻게 하면 될까요?
학　 생: 삼각형을 만들면 돼요. 점 A와 C를 연결하면 삼각형 ACD를 만들 수 있어요
김 교사: 그러면 무엇을 알 수 있지요?
학　 생: 중점 연결 정리 때문에 AC와 SR가 평행이에요.
김 교사: ㉠<u>중점 연결 정리를 적용할 수 있는 삼각형은 삼각형 ACD뿐일까요?</u>
학　 생: ㉡<u>삼각형 ABC도 있습니다. 아! 그러면 PQ와 AC도 평행이니까, PQ와 SR도 평행이 돼요. 그리고 선분 BC를 그으면 PS와 QR도 평행이 되어 한꺼번에 증명이 돼요.</u>
(교사가 어떤 문제를 칠판에 제시한다,)
김 교사: ㉢<u>이제 여러분들이 해 볼 차례입니다. 평소에 선생님이 문제를 해결하는 방식을 따라해 보면서, 이 문제를 스스로 해결해 보세요.</u>
학　 생: ㉣<u>선생님처럼 해 보니까, 이제 문제를 어떻게 풀어야 하는지 알겠어요.</u>

〈수업상황 B〉

최 교사: 삼각형 모양의 종이가 준비되었지요? 한 꼭짓점에서 두 변이 겹치도록 접었다가 펼쳐보세요. 다른 꼭짓점에서도 똑같이 해 보세요. 접은 두 선이 만나는 점이 있지요?
학　 생: 네.
최 교사: 그 점으로부터 삼각형의 세 변에 이르는 거리를 재어 보세요.
(학생들의 측정 활동이 이어진다.)
최 교사: 어떤 사실을 추측할 수 있어요?
학　 생: 삼각형의 두 내각의 이등분선의 교점으로부터 세 변에 이르는 거리가 같은 것 같습니다.
최 교사: 그러면, 명제 ㉤<u>‘삼각형 ABC와 두각 A와 B의 이등분선의 교점으로부터 세 변에 이르는 거리가 같다.’</u>를 증명할 수 있을까요?
학　 생: 네. 지난 시간에 한 것처럼 하면 될 것 같아요.
최 교사: 우리가 지난 시간에 어떻게 했지요?
학　 생: 분석법을 이용하여, 삼각형 ABC의 두 변 AB와 BC의 수직이등분선이 교점으로부터 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같다고 가정하고서
……(중략)……
그러고 나서 종합법을 이용하여 정리하니까 증명이 되었어요.
최 교사: 그래요. 이번에도 비슷하게 한번 해 볼까요?
학　 생: 네.
최 교사: 그럼, 삼각형 ABC의 두 각 A와 B의 이등분선의 교점으로부터 삼각형의 각 변에 이르는 거리가 같다고 가정하고 시작해 봅시다.

2007년 개정 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에서 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 권고한 유의사항에 근거하여, 〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉에 공통으로 나타난 수업의 특징을 구체적으로 설명하시오.

그리고 〈수업상황 B〉에서 명제 ㉤의 증명에 분석법과 종합법을 적용하는 과정을 구체적으로 제시하고, 명제를 증명할 때 분석법과 종합법을 함께 이용하는 활동의 수학교육적 의의를 설명하시오. [20점]

31. 다음은 대수학 강의 시간에 박 교수와 학생이 나눈 대화의 일부분이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2012 2차, 2교시-3-1]

박 교수: 지금까지 다항식 환에 대한 다음 정리를 증명하였습니다.

< 정 리 >

F가 체이면 다항식 환 $F[x]$가 주 아이디얼 정역(principal ideal domain)이다.

학생 A: 네. 체 위에서의 다항식 환이 주 아이디얼 정역임을 이해하였습니다.

박 교수: 이 정리를 출발점으로 하여, ㉠브라운(S.Brown)과 월터(M. Walter)가 제시한 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될까(What if not)' 전략에 따라 수업을 진행하고자 합니다. 그럼, 이 전략에 따라 새로운 문제를 만드는 단계까지 진행하고 그 결과를 발표해 봅시다.

학생 B: 앞의 정리를 바탕으로 다음과 같은 새로운 명제를 만들었습니다.

< 명 제 >

다항식 환 $R[x]$가 주 아이디얼 정역이면 R는 체이다.

박 교수: 참 잘 만든 명제입니다. 사실 이 명제는 참입니다. 이제 이 명제를 증명해 봅시다.

문제해결 과정에서 문제제기(문제설정, problem posing) 활동의 중요성을 3가지만 제시하시오. 그리고 아래의 정리를 출발점으로 하여, ㉠의 단계에 따라 이 정리가 n차방정식인 경우로 일반화될 수 있음을 구체적으로 설명하시오(단, 모든 근의 합과 모든 근의 곱에 대한 성질만 유도하시오.). [10점]

< 정리 >

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α_1과 α_2라 하면

$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{b}{a}$이고 $\alpha_1\alpha_2=\frac{c}{a}$이다.

32. 폴리아(G. Polya)의 수학관 및 수학 문제해결 교육론에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2013-6]

① 수학 문제해결 과정에서 학생이 교사의 시범을 모방하는 것은 바람직하지 않다.

② 수학적 지식의 발견은 귀납에 의해서가 아니라 하나의 전형적인 예에 대한 관찰에 의해 이루어진다.

③ 수학 문제해결 과정에서 인내하고 작은 진전의 가치를 인식하는 것과 같은 정의적 측면의 교육을 중요시하였다.

④ 수학 문제해결 과정에서 문제와 관련된 요소를 재조직하고 그 요소 사이의 관련성을 파악하게 하는 측면을 간과하였다.

⑤ 문제제기 활동은 해결의 실마리나 단서를 찾고 주의를 집중하는 데 방해가 되므로 문제해결의 계획 단계에서 하지 않는 것이 바람직하다.

33. 다음은 폴리아(G. Polya)의 수학적 문제해결 교육론에 근거해 어떤 문제를 해결한 과정의 일부이다.

〈이해 단계〉

문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 구하려는 것을 x로 놓는다.

〈계획 단계〉

문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하고, 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이때 방정식이 참이라고 하자.

$$\sqrt{2x-6}=3-x$$

〈실행 단계〉

양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다.

그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.

〈반성 단계〉

$x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. 따라서 $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다.

$x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

위 문제해결 과정에서는 수학적 발견술인 분석법이 사용되고 있다. 〈계획 단계〉와 〈실행 단계〉에서 분석법이 어떻게 사용되고 있는지 각각 설명하시오. [3점, 서술형B-1] [2014]

34. 다음은 김 교사가 정 교사의 수업을 참관한 후, 김 교사가 작성한 수업참관일지와 정 교사가 작성한 수업소감문의 일부이다.

(가) 김 교사의 [수업참관일지]

정 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 사실을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.

$$1+3+5+7=16=4^2$$

이로부터, “연속한 홀수의 합은 어떤 수의 제곱이 될까?”라고 발문을 하면서,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\square^2$$

이라는 탐구과제를 학생들에게 제시하였다. 학생들은 이 탐구과제를 수행하는 과정에서 아래와 같은 특수한 몇몇 사례를 조사하였다.

$$1=1=1^2$$
$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

학생들은 구체적인 사례에 대한 관찰로부터 새로운 추측

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

을 발견하였다. 이러한 발견 이후, ㉠정 교사는 수학적 귀납법을 이용하여 탐구과제에 대한 수업을 계속 진행하였다.

…(후략)…

(나) 정 교사의 [수업소감문]

학생들은 자신들이 관찰한 구체적인 사례로부터 공통점에 주목하여 새로운 추측을 잘 이끌어 내었다. 하지만, 조금 아쉬운 점은

㉡ $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

이 성립함을 보여 주는 시각적 모형(visual model)을 학생들에게 제공해 주지 못했다는 것이다.

위의 [수업참관일지]를 통해 볼 때, 정 교사의 수업에서 학생들이 사용했을 추론 유형을 적고, 이 추론 유형의 특성에 근거하여 ㉠의 이유를 설명하시오. 또, [수업소감문]에 제시된 ㉡에 해당하는 구체적인 예를 하나 제시하시오. [5점, 서술형A-2] [2015]

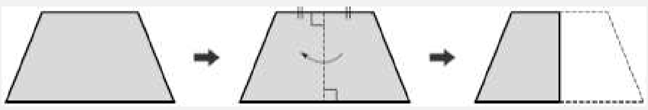
35. 다음은 수업 준비를 위한 교사용 보조 자료이다. 수학적 사실을 정당화하는 과정에서 두드러지게 나타나는 추론 유형을 (가), (나)에서 각각 하나씩 찾고, 이 두 유형의 추론을 기초로 정당화의 지도 방법을 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B-8] [2016]

〈한 가지 수학적 사실을 정당화하는 두 가지 접근〉

밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴에서 평행하지 않은 한 쌍의 대변의 길이는 서로 같음을 설명하시오.

(가)

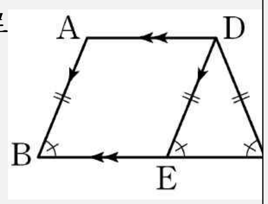
밑변의 양 끝각의 크기가 같은 사다리꼴 모양의 종이를 준비한다. 그림과 같이 윗변의 수직이등분선을 따라 접는다.



평행하지 않은 한 쌍의 대변이 일치하므로, 대변의 길이는 서로 같다.

(나)

그림과 같이 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이고 $\angle B = \angle C$인 사다리꼴 ABCD가 있다. $\overline{AB} = \overline{DC}$임을 보이자. 점 D에서 $\overline{AB}$에 평행한 $\overline{DE}$를 그으면, 동위각의 성질에 의해서 $\angle DEC = \angle B$이다. 그런데 $\angle B = \angle C$이므로 $\angle DEC = \angle C$이다.



따라서 $\triangle DEC$는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = \overline{DC}$이다.

또한 □ABED는 평행사변형이므로 $\overline{AB} = \overline{DE}$이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{DE}$이고 $\overline{DE} = \overline{DC}$이므로 $\overline{AB} = \overline{DC}$이다.

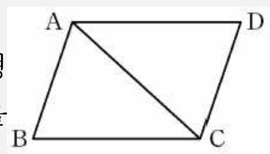
〈작성 방법 〉

- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 (나)와 같은 방법만으로 지도할 때 생길 수 있는 문제점을 포함할 것.
- 본론 부분에는 아래 요소를 포함하여 작성할 것.
  - -폴리아(G. Polya)의 관점에서 두 추론의 역할
  - -반 힐레(P. van Hiele)의 기하 학습 수준 이론에서 학습 수준을 제1수준~제5수준으로 구분할 때, 제3수준과 제4수준이 주는 시사점
- 결론 부분에는 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '교수·학습 방법' 에 제시된 수학적 추론 능력을 신장시키기 위한 유의사항을 포함할 것.

36. 다음은 중학교 1~3학년군 기하 영역의 작도와 합동 단원 수업의 일부이다.

김 교사: 지금까지 삼각형의 합동 조건을 배웠습니다. 이제 삼각형의 합동 조건을 이용하여 다음을 설명해 봅시다.

사각형 ABCD에서 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$, $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$일 때, 삼각형 ABC와 삼각형 CDA가 합동임을 설명하시오.



(김 교사는 위 문제에서 두 삼각형이 합동임을 연역적으로 설명한다.) ……①

학생 A: $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle DCA$이고 변AC가 공통이라는 조건을 어떻게 찾았는지 궁금합니다.

김 교사: 좋은 질문입니다. 위의 문제는 삼각형 ABC와 삼각형 CDA가 합동임을 보이는 것입니다. ㉠이런 문제를 만났을 때 우선 이 두 삼각형이 합동이 된다고 생각하고, 합동이 되기 위해서는 어떤 조건을 만족해야 하는지를 찾아봅시다.

학생 B: 그림에서 변 AC가 공통이니까 $\angle ACB = \angle CAD$, $\angle BAC = \angle DCA$이어야 할 것 같아요.

김 교사: 잘 찾았어요. 그리고 그 양 끝각의 크기가 각각 같기 위해서는 두 대변이 평행이어야 합니다. 이것은 문제에서 조건으로 주어져 있습니다. ㉡문제에 대한 ①의 설명에서는 문제에서 주어진 조건과 찾아낸 세 조건을 이용하여 두 삼각형이 합동임을 보이고 있습니다.

…(하략)…

김 교사는 ㉠에서 풀이 계획을 발견하는 방법을 설명하고 ㉡에서 그 계획을 실행하는 방법을 설명하고 있다. ㉠과 ㉡에 해당하는 방법을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2017]

37. 고등학교 확률과 통계의 순열과 조합 단원 수업에서 학생의 추론 능력을 평가하기 위하여 서술형 평가를 실시하였다. 다음은 박 교사가 실시한 평가 문항과 채점 기준표, 그리고 이 평가 문항에 대한 한 학생의 답안이다.

(가) 평가 문항과 채점 기준표

- 평가 문항

다음 등식의 참, 거짓을 판단하고 그 이유를 설명하시오. [4점]

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{0} + {}_{n}\mathrm{C}_{1} + {}_{n}\mathrm{C}_{2} + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_{n} = 2^{n} $$

- 채점 기준표

점수	채점 기준
4	- 일반성을 보장하는 추론 유형을 사용하여 참이라고 판단한 경우
2	- 일반성을 보장하는 추론 유형을 사용하였으나 사소한 오류로 인해 거짓이라고 판단한 경우 - 일반성을 보장할 수 없는 추론 유형을 사용하여 참이라고 판단한 경우
1	- 추론 과정에 대한 서술 없이 참이라고 판단한 경우
0	- 그 외의 경우

(나) 학생의 답안

$n=1$일 때, ${}_{1}\mathrm{C}_{0} + {}_{1}\mathrm{C}_{1} = 2$

$n=2$일 때, ${}_{2}\mathrm{C}_{0} + {}_{2}\mathrm{C}_{1} + {}_{2}\mathrm{C}_{2} = 4 = 2^{2}$

$n=3$일 때, ${}_{3}\mathrm{C}_{0} + {}_{3}\mathrm{C}_{1} + {}_{3}\mathrm{C}_{2} + {}_{3}\mathrm{C}_{3} = 8 = 2^{3}$이 된다.

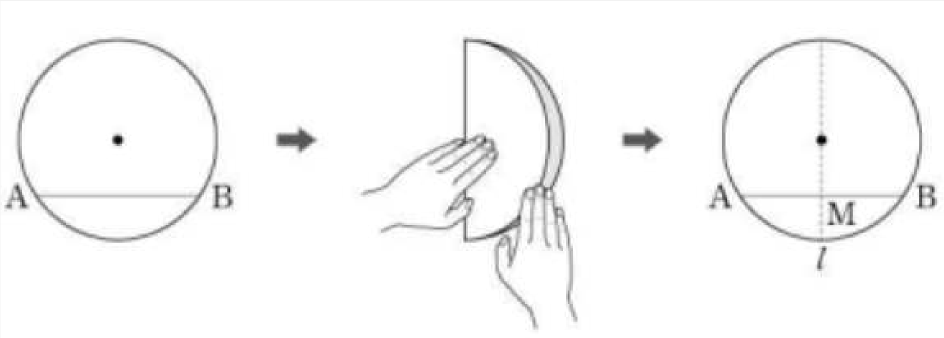
따라서 이 등식은 참이다.

위 (나) 학생의 답안에 나타난 추론의 유형을 쓰고, 그 유형의 특성을 설명하시오. 그리고 (가)의 채점 기준표에 근거하여 위 학생의 답안을 채점한 점수를 쓰고, 학생의 추론적 사고가 가진 제한점을 보완할 수 있는 지도 방안을 1가지 서술하시오. [4점, 서술형A-10] [2017]

38. 원의 현에 관한 성질 중 한 가지를 지도하기 위해 교사가 <자료 1>과 <자료 2>를 개발하였다.

<자료 1>

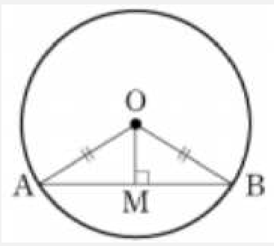
① 원 모양의 종이에 현 AB를 그린다.
② 점 A와 점 B가 겹쳐지도록 접었다가 펼친다.
③ ②에서 접은 선을 l이라 하고, l과 현 AB가 만나는 점을 M이라고 한다.



질문: 직선 l이 원의 중심을 지나는가?
직선 l이 현 AB와 이루는 각의 크기는 얼마인가?
$\overline{AM}$과 $\overline{BM}$의 길이를 비교하시오.

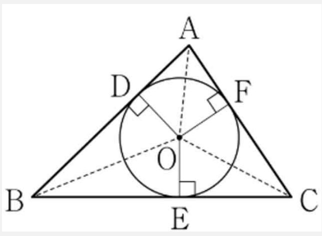
<자료 2>

원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면
$\triangle OAM$과 $\triangle OBM$에서
$\overline{OA}=\overline{OB}$(반지름)
$\angle OMA=\angle OMB=90^\circ$
$\overline{OM}$은 공통
이므로 직각삼각형의 합동 조건에 의하여
$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$이다.
따라서 $\overline{AM}=\overline{BM}$이다.
이로부터 다음을 알 수 있다.
(　　　㉠　　　)



<자료 1>과 <자료 2>를 통해 교사가 공통으로 가르치려는 원의 현에 관한 성질 ㉠을 서술하시오. 그리고 <자료 1>과 <자료 2>에서 사용한 정당화 방법이 무엇인지 각각 쓰고, 두 자료를 학생 수준에 맞게 수업에서 어떻게 활용할지 서술하시오. [4점, 서술형B-3] [2020]

39. 다음은 어떤 교수가 예비교사를 대상으로 분석법을 다루는 수업의 일부이다.

> 예비교사: 옛날 사람들이 삼각형의 내접원을 작도하는 방법을 처음에 어떻게 찾았는지 궁금해요.
>
> 교　　수: 분석법을 통해 찾은 것으로 알려져 있는데요. 우리도 직접 찾아보도록 하지요. 작도법을 찾는 문제는 일종의 답을 찾는 문제라 할 수 있으니까, 방정식 문제를 해결할 때처럼 해 봅시다. 먼저, 분석법을 적용해서 방정식 문제를 해결할 때 어떻게 시작했나요?
>
> 예비교사: (　　　㉠　　　)
>
> 교　　수: 네. 그렇습니다. 삼각형에 내접하는 원의 작도법을 찾는 문제를 해결할 때에도 같은 방식으로 시작해 봅시다. 그럼, 이 작도 문제를 해결할 때 어떻게 시작하면 될까요?
>
> 예비교사: (　　　㉡　　　)
>
> 교　　수: 그림을 그릴게요. 원의 중심 O로부터 삼각형의 각 변 AB, BC, CA에 각각 수선의 발 D, E, F를 내려 봅시다. 세 수선의 길이는 서로 어떻게 되나요?
>
> 
>
>
> 예비교사: 원의 반지름이니까, 서로 같아요.
>
> 교　　수: 원의 중심 O에서 △ABC의 각 꼭짓점으로 선분 OA, OB, OC를 그어 볼까요? 그러면, △ODB와 △OEB는 서로 어떤 관계인가요?
>
> 예비교사: 서로 합동이 돼요. RHS 합동이니까요.
>
> 교　　수: △ODA와 △OFA는 어떤 관계이고, △OFC와 △OEC는 어떤 관계인가요?
>
> 예비교사: 마찬가지로, RHS 합동에 의해 서로 합동이 돼요.
>
> 교　　수: 그러면 선분 OA, OB, OC에 의해 ∠A, ∠B, ∠C는 각각 어떻게 되나요?
>
> 예비교사: 이등분이 돼요.
>
> 교　　수: 그런데 지금까지 유도된 결과들을 잘 살펴보면, ‘작도법’이 무엇인지 짐작할 수 있어요. 예를 들어, ∠A와 ∠B를 이등분하는 두 직선의 교점을 찾고 그 교점으로부터 수선의 발을 내리게 되면, 앞의 것은 원의 중심을 작도하는 것이고 뒤의 것은 원의 반지름을 작도하는 것이라는 생각이 들지 않나요?
>
> 예비교사: 정말 그럴듯한데요. 삼각형의 내접원을 작도하는 법을 어떻게 추측해 냈는지 알 것 같아요.

괄호 안의 ㉠, ㉡에 적합한 내용을 순서대로 쓰시오. 또한 분석법이 지니는 수학교육적 의미를 1가지 기술하고, 이를 뒷받침하는 근거를 이 수업에서 찾아 제시하시오. [4점, 서술형B-5] [2023]

[수학학습심리학]

<소크라테스>

1. 수학교수-학습과정에서 발생적 원리의 특징이 아닌 것은? [1995-7]

① 학습자의 사전 이해와 결부시킨다.

② 교수-학습 과정의 주도권은 학습자가 갖게 한다.

③ 개념을 문맥으로부터 비형식적으로 도입한다.

④ 동기 유발을 지속적으로 유지시킨다.

2. 다음은 고등학교 1학년 수학 수업에서 명제의 필요충분조건을 지도하는 장면의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2011 2차, 1교시-1-2]

정 교사: 중학교에서 마름모를 어떻게 정의했죠?

다　래: '네 변의 길이가 같은 사각형' 입니다.

정 교사: 마름모의 성질을 모두 말해 볼까요?

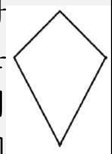
다　래: 마주보는 두변이 평행합니다. 마주보는 두 각의 크기가 같습니다, 두 대각선이 서로 수직입니다.

정 교사: 그렇다면 '두 대각선이 서로 수직인 사각형은 마름모이다.' 가 참일까요?

다　래: 예, 모든 마름모의 두 대각선이 서로 수직이므로 참일 것 같습니다.

서　우: 아닙니다. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있습니다.

정 교사: 그렇군요. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있네요. 이것은 어떤 명제가 참이지만 그 명제의 역은 참이 아닌 예가 됩니다. 그러면 이런 반례를 제외시키기 위해서는 '두 대각선이 서로 수직이다.' 는 조건을 어떻게 바꿔야 할까요?



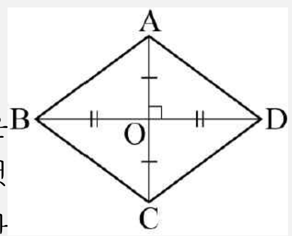
서　우: 아! 알았습니다. 제가 제시한 반례에서는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하지 않습니다. 조건을 '두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.' 로 바꾸면 될 것 같습니다.

정 교사: 그러면 명제 '두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.' 가 됩니다. 이 명제는 참일까요?

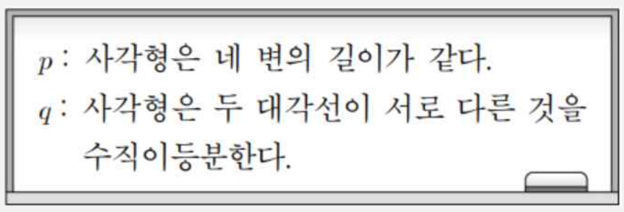
서　우: 예, 그럴 것 같습니다.

정 교사: 누가 증명해 볼까요?

승　호: 제가 증명해 보겠습니다. 도달해야 할 결론은 사각형 ABCD에서 네 변의 길이가 같다는 것입니다. 먼저 $\overline{AB}=\overline{AD}$임을 보이려면 직각을 한 변으로 가지는 삼각형이 합동이면 됩니다. 즉, $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$여야 하지요. 그런데 조건에서 두 대각선이 서로 수직이등분하므로 $\overline{BO}=\overline{DO}$이고 $\overline{AO}$는 공통, 그리고 끼인각이 $90°$로 같습니다. 따라서 $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 됩니다. 이와 같은 방법으로 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$가 모두 같다는 것을 증명할 수 있습니다.



정 교사: 훌륭합니다. 방금 승호가 증명한 명제를 조건 p와 q를 써서 나타내 봅시다.



승호가 증명한 명제는 무엇이죠?

다　래: $q \rightarrow p$입니다.

정 교사: 그렇다면 $p \rightarrow q$는 어떤 명제입니까?

서　우: '마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.' 입니다.

정 교사: 그것은 참인가요?

서　우: 예, 중학교에서 참임을 증명했습니다.

정 교사: 이처럼 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$가 동시에 참일 때 p와 q는 서로 '필요충분조건' 이라고 합니다. 이것은 두 명제가 논리적으로 서로 같다는 뜻입니다. 이 사실을 마름모의 정의에 적용하면 어떻게 될까요?

다　래: 마름모의 정의를 '두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형' 으로 대체할 수 있다는 뜻입니다.

승　호: ㉠<u>선생님, 너무 헷갈립니다. 중학교에서 '네 변의 길이가 같은 사각형' 은 마름모의 정의, '두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.' 는 마름모의 성질이라고 배웠는데, 이 성질이 정의가 될 수 있다는 것을 이해할 수 없습니다.</u>

정 교사: 좋은 질문입니다. 마름모의 정의를 바꿔도 되는 논리적인 이유가 무엇일까요?

학생들: …….

정 교사: 지난 시간에 진리집합을 배웠죠? p의 진리집합은 무엇인가요?

서　우: 마름모 전체의 집합입니다.

정 교사: q의 진리집합은 무엇인가요?

다　래: $p \rightarrow q$가 참이고 $q \rightarrow p$도 참이기 때문에 그것 또한 마름모 전체의 집합입니다.

승　호: 아! 그렇군요. p와 q의 진리집합이 마름모 전체의 집합으로 서로 같기 때문에 q를 마름모의 정의로 대체해도 되겠네요.

정 교사: 그렇습니다. p와 q가 서로 필요충분조건이라는 말은 p와 q의 진리집합이 서로 같다는 말과 같게 되고, 따라서 q를 마름모의 정의로 대체할 수 있게 됩니다.

위에 제시된 정 교사의 수업은 '발생적 원리' 와 '대화와 토론 방법' 을 따라 설계되고 실행되었다. 여기서 발생적 원리란, 완성된 최종 산물을 제시하는 방식으로 수학을 가르치는 것이 아니라 그 완성품까지 만들어가는 과정을 경험시키는 방식으로 가르쳐야 한다는 것을 말한다. 이러한 수업을 설계하는 과정에서 교사가 수행해야 할 준비 활동에 대하여 서술하시오. 그리고 다음 <논점>을 중심으로 정 교사의 교수·학습 방법과 소크라테스의 산파법과의 차이점을 설명하시오. 이 때, 정 교사의 교수·학습 방법에 대한 설명에서는 그 근거를 위의 수업 장면에서 찾아 함께 제시하시오. [20점]

<논점>

(가) 수업의 주도권

(나) 추측과 반박

<행동주의(손다이크, 스키너, 가네)>

1. Gagne는 인지 학습을 신호 학습, 자극-반응 학습, 연쇄 학습, 언어 연합 학습, 다중식별 학습, 개념 학습, 규칙 학습, 문제 해결 학습의 8가지 수준의 학습 유형으로 분류하고 있다. 〈보기〉의 학습 활동이 속하는 학습 유형은? [1995-3]

〈보기〉

아동에게 숫자를 5, 2, 7, 9, 8의 순서로 제시했을 때, 작은 수부터 큰 수부터 나열한다.

① 연쇄 학습
② 언어 연합 학습
③ 다중 식별 학습
④ 개념 학습

2. 수학 교수에서의 학습 위계에 관한 다음의 설명 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은? [1996-24]

① 하위 과제는 상위 과제에 포함되거나 중요한 요소가 된다.
② 모든 상위 과제는 하위 과제보다 학습하기 어렵고 학습하는 데에도 항상 시간과 노력이 더 필요하다.
③ 특정한 위계에서 확인된 각각의 하위 기능들은 다른 위계에서도 역할을 한다.
④ 위계에 의하여 만든 진단 검사는 학생 개개인의 개별학습에도 유용하게 사용될 수 있다.

3. 연결주의(connectionism)에 입각한 손다이크(E. L. Thorndike)의 관점에서 수학 학습-지도를 설명한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-7]

〈보기〉

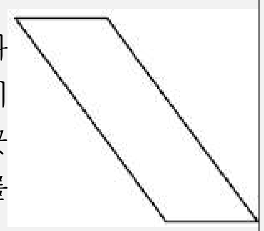
ㄱ. 계산이 부정확하다는 것은 관련 본드(bond)가 약하다는 것을 의미한다.
ㄴ. 계산의 기초적인 학습은 연역적인 설명보다는 귀납적인 확인을 통해 이루어지는 것이 효과적이다.
ㄷ. 추론적 사고는 연습의 법칙으로 설명될 수 없으므로 훈련을 통하여 얻을 수 없다.
ㄹ. 수 개념은 양의 측정 활동을 통해 구성되므로 사칙연산도 지속적으로 측정 활동과 관련지어 다루는 것이 바람직하다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

<형태주의(베르타이머)>

1. 어떤 교사 모임에서 문제해결의 심리학적 배경이 된 형태(게슈탈트) 심리학에 대해 연구하고 토론하였다. 논의 주제는 베르트하이머(M. Wertheimer)의 생산적 사고(productive thinking)에 관한 것으로 다음과 같다.

[논의 주제]
베르트하이머는 수업 시간에 학생들에게 오른쪽 그림과 같은 평행사변형을 제시하고 이 도형의 넓이를 구하게 하였더니, 학생들은 도형의 밑변과 수직이 되게 선을 긋지 못하였다. 결과적으로 학생들은 평행사변형의 넓이를 올바르게 구하지 못하였다.

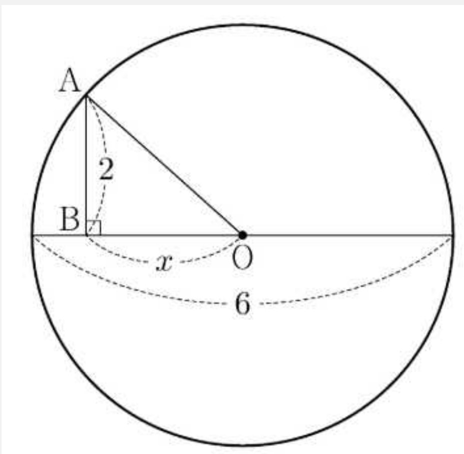


위의 논의 주제와 관련한 교사들의 대화 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2012-6]

① 김 교사: 평행사변형을 직사각형으로 변형하면 (밑변)×(높이) 공식을 적용할 수 있는데, 학생들이 평행사변형과 직사각형의 관련성을 이해하지 못했습니다.
② 이 교사: 베르트하이머의 생산적 사고는 공식의 맹목적인 적용이나 시행착오를 의미하는 것이 아닙니다.
③ 박 교사: 학생들이 평행사변형의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪는 것은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법에 관한 구조적 이해, 즉 '통찰'이 결여되었기 때문입니다.
④ 정 교사: 베르트하이머는 생산적인 사고 과정을 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작을 통해 문제의 '내적인 구조적 관련성'을 파악해 가는 것으로 간주하였습니다.
⑤ 강 교사: 베르트하이머는 전체에 대한 부분의 구조적 기능을 파악하여, 부분의 구조적 특성에 합치되는 방향으로 전체의 재구조화가 일어남을 강조하였습니다.

2. 다음은 윤 교사와 강 교사가 수업을 반성하는 대화의 일부이다.

윤 교사: 그림과 같이 지름의 길이가 6인 원 O 위의 점 A에서 지름에 내린 수선의 발을 B라 하고, $\overline{AB}=2$일 때, 원의 중심 O에서 점 B까지의 거리 x의 값을 구하게 하였더니 어떤 학생이 x의 값을 구하지 못하더군요. 피타고라스 정리를 알고 이차방정식을 비교적 잘 푸는 학생임에도 불구하고 말이지요.



강 교사: <u>㉠선분 OA를 직각삼각형 OAB의 빗변으로 보면서 동시에 원 O의 반지름으로 보는 것과 같이 문제의 내적인 구조적 관련성을 파악하는 과정</u>이 없었던 것이 아닐까요?
윤 교사: 저도 그렇게 생각합니다. ㉡<u>전체에 대한 부분의 구조적 기능이 파악되어 '구조의 개선적 변화'가 일어나는 지적 과정</u>에 더욱 관심을 기울여야겠다는 생각을 하게 되었습니다.

형태심리학에서 ㉠을 설명하는 용어와 베르트하이머(M. Wertheimer)가 ㉡을 설명하는 용어를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형B-1] [2021]

<Piaget>

1. 다음은 Piaget의 이론에 근거한 아동의 인지 발달 단계 중 어느 한 단계에 중요한 인지적 특성을 설명한 것이다. 이 단계는? [1996-16]

㉠ 가역적 사고가 가능하고, 전체와 부분 사이의 관계를 이해한다.
㉡ 양, 무게, 넓이, 부피 개념을 인식한다.
㉢ 실체적 경험과 관련된 추론을 한다.

① 감각-운동단계　　② 전 조작단계
③ 구체적 조작 단계　　④ 형식적 조작단계

2. 다음에 주어진 상황을 읽고, 피아제(Piaget)의 균형(평형)이론에 비추어 밑줄 친 (a)와 (b)의 장면에서 학생의 상태를 해석하시오. [3점] [2005-5]

김 교사는 학생들에게 확률 개념을 지도하였다. 이 수업 후에 A학생에게 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나올 확률은 얼마인지 물었을 때 (a) 학생은 $\frac{1}{6}$이라고 답하였다. 다음에 교사는 똑같은 2개의 동전을 던질 때 모두 앞면이 나올 확률이 얼마인지 물어보았고, 이 학생은 전체 경우의 수가 3이므로 확률이 $\frac{1}{3}$이라고 답하였다. 이에 대하여, (b) 교사는 전체 경우의 수가 4이므로 정답은 $\frac{1}{4}$이라고 말하였다.

3. 경호가 배우는 10-나 단계의 교과서에 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식' 을 구하는 과정이 다음과 같이 나와 있다.

원과 직선의 방정식을 각각

$$x^2+y^2=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots ②$$

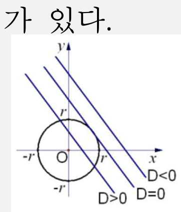
이라 하면, 이들 교점의 좌표는 이 두 방정식을 연립하여 풀었을 때의 해이다. ②를 ①에 대입하여 y를 소거하면

$$x^2+(mx+n)^2=r^2$$

이 식을 정리하면

$$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

이때, $m^2+1 \neq 0$이므로 ③은 x에 대한 이차방정식이다. 따라서 ③의 판별식을 D라 하면 원 ①과 직선 ② 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.



[1] $D>0$ ⇔ 서로 다른 두 점에서 만난다.
[2] $D=0$ ⇔ 한 점에서 만난다. (접한다)
[3] $D<0$ ⇔ 만나지 않는다.

특히 [2]의 경우 $\frac{D}{4}=m^2n^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=0$이므로, 원과 직선이 접할 때 $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$임을 알 수 있다.

결국 구하는 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$이다.

피아제(J. Piaget)는 반영적 추상화의 메커니즘을 '반사와 반성'이라는 두 가지 성분으로 설명하였다. 경호가 위의 내용을 학습하는 과정에서 '반사와 반성'이 일어날 수 있는 상황을 찾아 한 가지만 제시하고, 그 상황이 '반사와 반성' 과정에 해당한다고 할 수 있는 이유를 설명하시오. [5점] [2008-5]

- '반사와 반성'이 일어나는 상황 :
- 이유 :

4. 수학적 개념을 구성주의 관점으로 지도한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의-6]

<보기>

ㄱ. '공간에서 한 평면에 속하지 않은 두 직선은 꼬인 위치에 있다' 고 정의를 말해 주고, 그 정의에 대한 예를 보여주면서 꼬인 위치의 개념을 지도하였다.

ㄴ. 양팔저울을 가지고 무게를 비교하는 실험을 교사가 직접 실행해 보여주고, 양팔저울을 특성으로부터 등식의 성질을 유도하면서 일차방정식을 지도하였다.

ㄷ. 학생들에게 다양한 평행사변형을 그려서 공통된 성질을 찾아보게 한 후, 이 성질을 활용하여 평행사변형이 되는 조건을 써보게 하면서 평행사변형을 지도하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

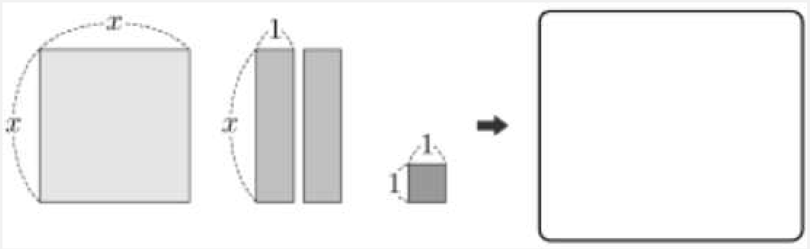
5. 피아제(J. Piaget)의 인지발달 이론에서 핵심적인 개념 중의 하나는 '반영적 추상화(reflective abstraction)' 이다. 이 개념과 관련된 수학적 활동이나 과정의 예로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2.5점] [2011-4]

① 구체적인 세기를 통한 덧셈 활동이 덧셈 알고리즘으로 공식화되는 과정
② x를 $2x$로 대응시키는 활동이 함수 $y=2x$의 그래프 전체로 대상화(encapsulation)되는 과정
③ 다양한 모양을 보고 공통적인 외형을 인식하는 활동
④ 다양한 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분이 밑변의 길이의 반이 되고 밑변과 평행하다는 점을 확인하여 '삼각형의 중점연결정리' 에 대한 가설을 설정하는 활동
⑤ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌을 시계 방향과 시계 반대방향으로 각각 세어 본 후 결과가 같음을 확인하여 '세는 순서에 관계없이 개수는 일정하다.' 고 인식하는 활동

6. 다음은 김 교사가 박 교사의 수업을 참관한 후 작성한 참관일지의 일부이다.

박 교사는 도입 단계에서 다음과 같은 탐구 활동을 제시하여 학생의 학습 동기를 유발하고자 하였다.

[그림 1]과 같이 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양 1개, 가로와 세로의 길이가 각각 1과 x인 직사각형 모양 2개, 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양 1개가 있다. 물음에 답하시오.



[그림 1] [그림 2]

(1) [그림 1]의 사각형 4개를 모두 이용하여 만든 정사각형 모양을 [그림 2]의 빈칸에 그려 넣고, 그린 정사각형의 넓이를 (한 변의 길이)^{2}으로 나타내시오.

(2) [그림 1]의 사각형 4개의 넓이를 각각 구하여 그 합을 식으로 나타내시오.

(3) 위 (1)과 (2)의 결과를 등식으로 나타내시오.

학생은 탐구 활동을 통하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2$이 성립함을 인식하였다.

박 교사는 학생이 구한 식을 이용하여 인수분해의 뜻을 알려주고, 이것이 이전 시간에 학습한 다항식의 곱셈 공식과 어떤 관계가 있는지 찾아보도록 안내하였다.

학생은 다항식의 곱셈 공식을 이용하여 다음과 같은 인수분해 공식을 이끌어 내었다.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

…(하략)…

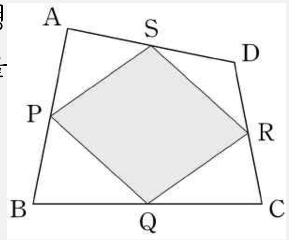
피아제(J. Piaget)는 활동에 대한 일반적 조정으로부터의 추상화를 무엇이라고 하였는지 쓰시오. 그리고 이 추상화의 예를 위 참관일지의 상황에서 1가지 찾아, 이 추상화의 과정을 반사와 반성으로 구분하여 그 근거와 함께 설명하시오. [4점, 서술형A-10] [2019]

〈Vygotsky〉

1. 다음 〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉를 보고 물음에 답하시오. [30점] [2012 2차, 1교시-1-1]

〈수업상황 A〉

학생들이 기하 탐구형 소프트웨어를 이용하여, 사각형 ABCD의 변의 길이를 변화시키면서 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS의 성질을 탐구하고 있다.



김 교사: 사각형 PQRS는 어떤 사각형인 것 같아요?
학　 생: 평행사변형인 것 같은데요.
김 교사: 그러면, 사각형 PQRS가 평행사변형이라는 것을 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 두 변 PQ와 SR, 그리고 PS와 QR가 각각 평행인 것을 보이면 됩니다.
김 교사: 서로 평행인 것은 어떻게 보일 수 있을까요?
학　 생: 잘 모르겠는데요.
김 교사: 이 문제에서 사용할 수 있는 성질이나 조건에는 어떤 것이 있을까요?
학　 생: 중점이요.
학　 생: 평행이요.
김 교사: 중점, 평행하면 생각나는 정리 없어요?
학　 생: 삼각형의 중점 연결 정리요.
김 교사: 좋아요. 그 정리를 이 문제에 이용하려면 어떻게 하면 될까요?
학　 생: 삼각형을 만들면 돼요. 점 A와 C를 연결하면 삼각형 ACD를 만들 수 있어요
김 교사: 그러면 무엇을 알 수 있지요?
학　 생: 중점 연결 정리 때문에 AC와 SR가 평행이에요.
김 교사: ㉠중점 연결 정리를 적용할 수 있는 삼각형은 삼각형 ACD뿐일까요?
학　 생: ㉡삼각형 ABC도 있습니다. 아! 그러면 PQ와 AC도 평행이니까, PQ와 SR도 평행이 돼요. 그리고 선분 BC를 그으면 PS와 QR도 평행이 되어 한꺼번에 증명이 돼요.

(교사가 어떤 문제를 칠판에 제시한다,)

김 교사: ㉢이제 여러분들이 해 볼 차례입니다. 평소에 선생님이 문제를 해결하는 방식을 따라해 보면서, 이 문제를 스스로 해결해 보세요.
학　 생: ㉣선생님처럼 해 보니까, 이제 문제를 어떻게 풀어야 하는지 알겠어요.

〈수업상황 A〉에서 ㉠과 ㉡에 나타난 수준의 변화 과정과 ㉢과 ㉣에 나타난 교수・학습 방법의 특성을 비고츠키(L. Vygotsky)의 학습심리학의 관점에서 각각 구체적으로 설명하시오. [10점]

2. 다음은 중학교 1학년 기하 영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 360°임을 알아내는 수업 상황이다.

(학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 360°임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)

…(상략)…

교사: (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?

학생: 180°입니다.

교사: 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?

학생: $180^\circ \times n$입니다.

교사: 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?

학생: 잘 모르겠어요.

교사: 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요?

(다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다.)

학생: 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.

교사: 내각의 크기의 합은 알고 있지요?

학생: 네. $(n-2)\times 180^\circ$입니다.

교사: 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?

학생: (외각의 크기의 합)$=180^\circ \times n-$(내각의 크기의 합)$=180^\circ \times n-180^\circ \times (n-2)=360^\circ$입니다.

교사: 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 360°로 일정함을 알 수 있어요.

…(하략)…

위 상황에서 교사는 학생의 근접 발달 영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수・학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는 데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파는 무엇이라 하는지 쓰시오. [2점, 기입형A-4] [2014]

3. 다음 (가), (나)는 교사 A와 B가 다항식의 곱셈을 지도하는 수업 상황이다.

(가) 교사 A의 수업 상황

교사 A: 다항식의 곱셈에 대한 또 다른 공식을 공부하겠습니다. 다음 공식을 기억하세요.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

학　생: 네, 알겠습니다.

교사 A: 그러면 $(x+3)^3$을 전개해 볼게요.

$$\boxed{\begin{aligned}(x+3)^3 &= x^3+3\times x^2\times 3+3\times x\times 3^2+3^3\\ &= x^3+9x^2+27x+27\end{aligned}}$$

교사 A: 이제 공식을 이용하여 $(5x+2)^3$을 각자 전개해 보세요.

학　생: (잠시 후) 공식에 대입하여 전개해 보니 $125x^3+150x^2+60x+8$이 되었어요.

교사 A: 맞습니다. 공식을 이용하여 또 다른 문제를 풀어 볼까요?

…(하략)…

(나) 교사 B의 수업 상황

교사 B: $(a+b)^3$을 어떻게 전개하는지 공부하겠습니다.

학　생: 네, 선생님.

교사 B: 중학교 때 배운 공식 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$을 기억하고 있나요?

학　생: 네. ㉠$(a+b)^2$을 $(a+b)(a+b)$로 바꾸어 전개하면 $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$이므로 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이 되는 것을 알고 있어요.

교사 B: 맞아요, 그렇다면 $(a+b)^3$은 어떻게 전개할까요?

학　생: 잘 모르겠어요.

교사 B: $(a+b)^3$을 두 다항식의 곱으로 나타낼 수 있을까요?

학　생: $(a+b)^3$은 $(a+b)$와 $(a+b)^2$의 곱입니다. 즉, $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$이에요.

교사 B: 그러면 $(a+b)(a+b)^2$을 전개할 수 있을까요?

학　생: $(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$이므로 분배법칙을 이용하여 전개하면 될 것 같아요.

(잠시 후)

㉡아하, 그러면 $(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$ $=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이므로 $(a+b)^3$은 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이네요. 이제 $(a+b)^3$을 어떻게 전개하는지 확실히 알게 되었으니, 혼자서도 할 수 있어요.

교사 B: 그래요. 그러면 $(5x+2)^3$은 여러분이 직접 전개해 볼까요?

…(하략)…

위 (가)의 수업 상황에서 발생할 수 있는 극단적인 교수학적 현상이 무엇인지 쓰고, 그 이유를 설명하시오. 또한 위 (나)의 수업 상황에서 ㉠에서 ㉡으로의 '실제적 발달 수준(actual development level)'의 변화 과정을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파의 '비계설정(scaffolding)'에 근거하여 설명하시오. [4점, 서술형A-9] [2018]

<Bruner>

1. 브루너(Bruner, J. S.)는 학생들의 지적 능력이나 경험에 맞는 적절한 수준에서 수학내용을 이해하도록 제시하는 표상 양식에 관하여 연구하였다. 그 중의 하나로, 타일이나 나무토막과 같은 구체물을 이용한 활동적 표상에 따른 인수분해 지도의 예를 들 수 있다. 이것을 x^2+5x+6의 인수분해를 통하여 보이시오[4점]. [1998-4]

2. 다음 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

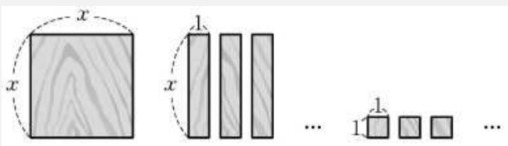
김 교사: 저는 수학 수업에서 지식의 구조, 곧 기본적인 아이디어를 다루는 것이 중요하다고 생각합니다. 그러한 아이디어는 학생의 사고 양식에 맞게 세 가지 표현으로 재구성할 수 있습니다. 세 가지 표현을 이용하면 어떤 지식이든 어떤 수준의 학습자라도 이해할 수 있도록 적절한 형태로 제시할 수 있습니다.

김 교사의 생각에 반영되어 있는 이론을 참고하여, 위의 대화에서 김 교사가 말한 '세 가지 표현'이 무엇인지 쓰시오. 그리고 김 교사가 "삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다."는 성질을 지도하고자 할 때, 가장 낮은 수준의 학생들도 이해할 수 있도록 삼각형 모양의 종이를 활용하여 이 성질을 표현하는 과정을 구체적으로 쓰시오. [4점] [2006-3]

- 세 가지 표현:
- 과정

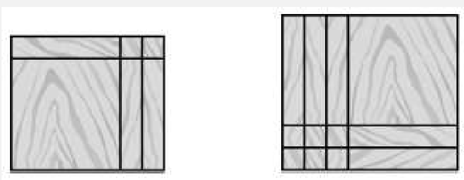
3. 다음은 브루너(J. Bruner)의 학습 이론을 적용하여 진행한 수업의 일부이다.

교　사: 나무로 된 교구를 이용하여 인수분해 공식의 원리를 발견하는 수업을 하겠습니다. 한 변의 길이가 x인 정사각형, 두 변의 길이가 각각 1과 x인 직사각형, 한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 교구가 있어요. 자유롭게 도형을 만드는 활동을 시작해 보세요.



학생들: 네. (교구를 가지고 활동을 하면서 교구에 대한 충분한 친밀감을 가진다.)

교　사: 이제 교구에 익숙해졌나요? 한 가지 질문을 할게요. 주어진 세 종류의 교구를 최소한 한 개씩 사용하여 직사각형을 만들 수 있을까요? (학생들은 다음과 같은 직사각형을 구성하고, 교사는 학생이 구성한 직사각형을 칠판에 그린다.)



학생 1: 교구로 직사각형을 만들었더니, 참 재미있어요. 이것으로 다른 활동을 할 수 있나요?

교　사: 다른 활동을 할 수 있지만, 수학적 원리, 개념 등을 찾는 것에 집중해 봅시다. 여러분이 만든 직사각형의 넓이를 가로의 길이와 세로의 길이를 이용하여 표현할 수 있을까요?

학생 2: 잘 모르겠어요. 교구로 다른 모양을 만들어 보는 것이 더 재미있을 것 같아요.

교　사: 그러면 새로운 직사각형을 더 만들어 보고, 두 변의 길이와 직사각형의 넓이를 어떻게 나타낼 수 있는지 각자 공책에 기록해 봅시다.

(잠시 후 교사는 계속 질문을 한다.)

학생들: (교사의 질문에 집중하지 못하고, 활동에 집중한다.)

…(중략)…

교　사: 이제 수업 시간이 별로 남지 않았어요.

위 수학 수업이 브루너의 이론을 반영하였음을 보여 주는 근거 1가지를 찾아, 그 이유와 함께 서술하시오. 또한 위 수업 상황에서 가장 두드러지게 나타나는 극단적인 수학 교수학적 현상을 쓰고, 이 현상을 수업 상황과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형B-1] [2016]

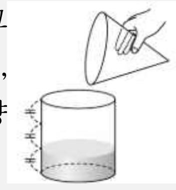
4. 다음은 중학교 입체도형의 부피에 대한 수업 자료의 일부이다.

(가) 1**차시 수업 자료: 원뿔의 부피**

o 학생의 사전 지식: 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 부피는 $V=\pi r^2 h$이다.

o <탐구활동 1>

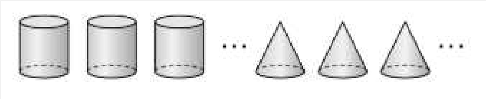
- 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 그릇이 있다. 원뿔모양의 그릇에 물을 가득 채운 다음, 원기둥 모양의 그릇에 물을 옮겨 붓는다. 원기둥 모양의 그릇에 물이 가득 찰 때까지 반복한다.



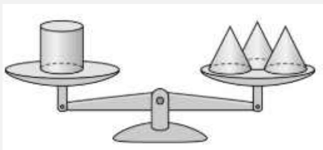
- [물음 1] 밑넓이와 높이가 같은 원기둥과 원뿔의 부피 사이의 관계를 적으시오.

o <탐구활동 2>

- 재질이 같고, 밑넓이와 높이가 각각 같은 원기둥과 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



- 수평인 접시거울의 왼쪽 접시에 원기둥 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다. (단, 접시저울이 수평이 되면, 양쪽 접시 위에 있는 물체의 부피는 서로 같다.)

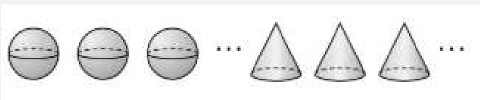


- [물음 2] 위 활동의 결과를 도식으로 표현하고, 원기둥의 부피(V_1)와 원뿔의 부피 (V_2) 사이의 관계를 기호로 표현하시오.

(나) 2**차시 수업 자료: 구의 부피**

o <탐구활동 3>

- 재질이 같고, 반지름의 길이가 r인 구 모양의 나무조각과 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원뿔 모양의 나무조각이 충분히 주어져 있다.



- 수평인 접시저울의 왼쪽 접시에 구 모양의 나무조각을 몇 개 올려놓은 다음, 오른쪽 접시에는 원뿔 모양의 나무조각을 올려놓아, 저울이 수평이 되도록 한다. 활동을 여러 번 실행하고 결과를 관찰한다.
- [물음 3] 위 활동의 결과를 ㉠도식으로 표현하고, 원뿔의 부피(V_2)와 구의 부피(V_3) 사이의 관계를 ㉡기호로 표현하시오.
- [물음 4] 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $2r$인 원기둥의 부피 공식, 반지름의 길이가 r인 구의 부피 공식을 적으시오.

(나)에 따른 수업에서 구의 부피 공식을 발견하는 과정을 <탐구활동 2>와 <탐구활동 3>에 근거하여 설명하시오. 또한, (나)의 [물음 3]에 밑줄 친 서로 다른 2가지 표현(representation) 방식 ㉠과 ㉡의 명칭을 브루너(J. Bruner)의 학습이론에 근거하여 순서대로 쓰고, [물음 3]에서 교사가 기대하는 밑줄 친 ㉠과 ㉡에 대한 학생의 반응을 각각 1가지씩 제시하시오. [4점, 서술형B-4] [2024]

<Ausubel>

1. 다음 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

박교사: 저는 지식의 표현 방법도 중요하지만, 그 지식의 지도 순서도 중요하다고 생각합니다. 그래서 저는 학생들에게 일반적인 개념이나 원리를 먼저 지도하고, 이 개념을 발판으로 하여 이어지는 학습 내용을 점점 특수화하고 세분화하는 형태로 지도할 때 학생들에게 의미 충실한 학습이 될 수 있다고 생각합니다.

박 교사는 다항식의 곱셈과 관련된 <보기>의 학습 내용을 ①에서부터 순서대로 지도하려고 한다. 이때, 박 교사가 계획한 학습 내용의 지도 순서와 관련하여, 그의 생각에 반영되어 있는 학습 지도 원리를 쓰고, 그 원리에 입각하여 <보기>의 학습 내용 지도 순서를 구체적으로 해석하시오.[4점] [2006-4]

<보기>

① $(a+b)(c+d)$의 전개
② $(a+b)^2$의 전개
③ 101^2의 계산

- 원리:
- 해석

2. 오수벨(D. Ausubel)의 '점진적 분화의 원리'를 사용한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009 모의-5]

ㄱ. 삼각형, 사각형, 오각형 등의 내각의 합을 구해보게 한 후, n각형의 내각의 합이 $180° \times (n-2)$임을 지도하였다.
ㄴ. 함수 $f(x)$에서 변수 x와 $f(x)$의 관계로부터 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$를 이해시켰다.
ㄷ. $a>0$, $a \neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$이 성립한다는 것을 학습한 후에 이전에 학습한 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$을 재인식하도록 하였다.
ㄹ. 이항연산에서 역원의 개념을 지도한 후 복소수의 곱셈에 대한 역원을 지도하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ

3. 다음은 수학교육론 수업에서 오수벨(D. Ausubel)의 유의미 수용학습을 다룬 수업 자료의 일부이다. (가)가 설명하는 '지식'과 (나)가 설명하는 '원리'를 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2024]

(가) 유의미 수용학습이 이루어지기 위한 조건 중 하나는 학습자의 인지구조 내에 학습 과제와 관련이 있는 '지식', 즉 유의미한 학습 과제를 받아들일 수 있는 '지식'이 있어야 한다는 것이다.

(나) 유의미 수용학습을 촉진하는 교수・학습 전략 중 하나로, 낯선 새로운 아이디어의 학습이 가능하려면 새로운 아이디어는 반드시 기존의 낯익은 아이디어와 충분하게 식별되어야 한다는 '원리'가 있다. 예를 들어, 학생이 경우의 수 단원에서 조합의 의미를 새롭게 학습할 때, 이전에 배운 순열의 의미와 어떻게 유사하고 차이가 있는지를 충분히 식별하는 기회를 가져야 한다는 것이다.

<van Hiele>

1. van Hiele의 기하 개념의 이해 발달 단계 중 정사각형은 직사각형임을 처음으로 이해하는 단계는? [1994-8]

① 분석단계　　② 비형식적 연역 단계
③ 형식적 연역 단계　　④ 엄밀 단계

2. 반힐(van Hiele)의 기하학적 사고발달 단계이론에서 제시된 5단계 중에서 첫 네 단계의 특징을 간략히 기술하고 이 단계이론을 바탕으로 우리나라 중학교 논증기하 지도의 문제점을 약술하시오. [1997 모의-4]

3. 반힐레(Van Hiele) 모델은 기하 학습에 있어서 위계적인 사고 수준(수준1～수준5)의 존재를 가정하고 있다. [총 6점] [2000-4]

(1) 개념의 정의를 비로소 올바르게 사용할 수 있는 반힐레 수준(수준1～수준5)을 명시하시오. [2점]

(2) 반힐레 수준2와 수준3에서 사고의 특징을 각각 서술하고, 수준2에서 사고하는 학습자를 수준3으로 이행하게 하는데 효과적인 교수 활동을 구체적으로 예시하시오. [4점]

4. 반 힐레(van Hieles)는 기하 학습의 수준을 제0수준 ～ 제4수준의 다섯 가지로 구분하였다. 경호의 응답 내용을 근거로 볼 때, 경호가 도달한 수준은? [2점] [2009 모의-7]

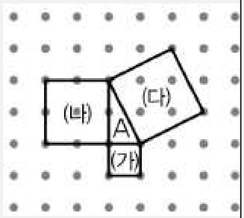
김 교사 :	(직사각형을 칠판에 제시하고 묻는다.) 이 도형은 무엇일까요?
경　호 :	직사각형이요.
김 교사 :	이 도형과 정사각형의 중요한 차이점은 무엇인가요?
경　호 :	직사각형은 네 각의 크기가 모두 같기만 하면 되지만, 정사각형은 네 각의 크기가 같아야 할 뿐만 아니라 네 변의 길이도 모두 같아야 합니다. 음... 그리고요, 정사각형은 항상 직사각형이 되지만 직사각형은 정사각형이 되지 않을 때도 있어요.

① 제0수준 - 시각적 인식 수준(recognition)
② 제1수준 - 기술적/분석적 인식 수준(analysis)
③ 제2수준 - 관계적/추상적 인식 수준(ordering)
④ 제3수준 - 형식적 연역 수준(deduction)
⑤ 제4수준 - 엄밀한 수학적 수준(rigor)

5. 다음은 피타고라스 정리를 지도하는 예시이다. 이를 반 힐레(P. M. van Hiele)의 교수·학습 단계 이론에 비추어 설명한 <보기>의 내용 중 적절한 것을 모두 고른 것은? [2.5점] [2010-14]

<1단계> 학습할 주제를 학생들에게 소개한다.

<2단계> 직각삼각형을 만들고 이 삼각형의 밑변, 높이, 빗변을 한 변으로 갖는 각각의 정사각형을 만든다. 그리고 각각의 정사각형 넓이를 구한다.
(단, 밑변의 길이와 높이는 양의 정수)



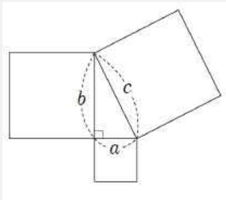
<3단계> 다른 직각삼각형을 몇 개 더 만들어 보고 각각의 삼각형에 <2단계>를 실시한다.

<4단계> 결과를 모두 다음과 같이 표에 기록한다.

직각 삼각형	밑변의 길이	높이	(가)의 넓이	(나)의 넓이	(다)의 넓이
A	1	2	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

<5단계> 표를 보고 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 찾아본다.

<6단계> 직각삼각형의 밑변의 길이, 높이, 빗변의 길이를 각각 a, b, c라 하고 그 각각의 변을 한 변으로 갖는 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 식으로 표현한다.



<7단계> 역동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 직각삼각형에 대해서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하는지 알아본다.

<보기>

ㄱ. <2단계>부터 <4단계>는 학습 주제를 탐구하고 구조를 점진적으로 파악하는 안내된 탐구 단계(제한적 탐구 단계, directed orientation)이다.

ㄴ. <6단계>는 학습한 아이디어를 명확하게 하는 발전/명료화 단계(explication)이다.

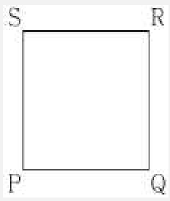
ㄷ. <7단계>는 다양한 해결 방법을 찾은 후 새로운 관련성을 찾는 자유탐구 단계(free orientation)이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 반 힐레(P. M. van Hiele)의 기하 학습 수준을 알아보기 위해 문항을 개발하였다. 문항 A는 m 수준, 문항 B는 n 수준의 도달 여부를 판단하기 위한 것이다. 반 힐레 이론의 관점에서 이 두 수준에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2011-14]

〈문항 A〉

사각형 PQRS는 정사각형이다. 옳은 것은?



① 선분 PR와 선분 RS의 길이는 같다.
② 선분 PS와 선분 QS의 길이는 같다.
③ 선분 QS와 선분 PR는 서로 수직이다.
④ 선분 PS와 선분 QR는 서로 수직이다.
⑤ 각 Q의 크기는 각 R의 크기보다 크다.

〈문항B 〉

두 문장

S: ΔABC의 세 변의 길이는 같다.

T: ΔABC에서 $\angle$B와 $\angle$C는 같다.

에 대하여 옳은 것은?

① S와 T는 동시에 참일 수 없다.
② S가 참이면 T도 참이다.
③ T가 참이면 S도 참이다.
④ S가 거짓이면 T도 거짓이다.
⑤ ① ~ ④ 모두 거짓이다.

① m 수준에서 다음 수준으로의 이행은 교육 내용이나 방법보다는 나이나 신체의 성숙에 달려 있다.
② m 수준에서 추론하는 학생은 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해할 수 있다.
③ m 수준에서는 도형이라는 대상을 도형의 성질이라는 수단에 의해 사고한다.
④ n 수준에서는 명제가 사고의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리의 수단으로 등장한다.
⑤ n 수준에서 다음 수준으로의 이행을 위해서는 ‘안내된 탐구’, ‘자유로운 탐구’, ‘발전/명확화’, ‘통합’의 4단계 순서로 교수·학습이 이루어져야 한다.

7. 반 힐레(P. van Hiele)는 학생들의 사고 발달 및 학습 수준의 상승이 교사의 지도 과정에서 다음과 같은 단계들을 거쳐 이루어진다고 하였다. 이 단계들을 옳은 순서로 나열한 것은? [2점] [2012-8]

(가) 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.
(나) 학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.
(다) 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습 주제를 파악하게 된다.
(라) 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.
(마) 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

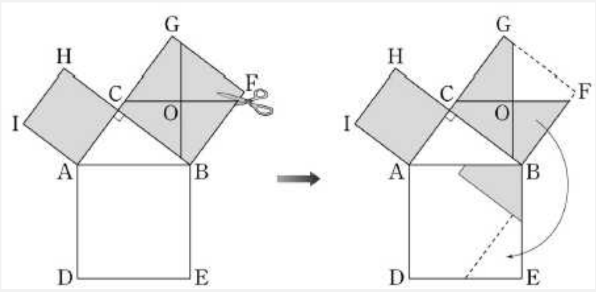
① (가) → (나) → (다) → (마) → (라)
② (나) → (단) → (가) → (라) → (마)
③ (나) → (다) → (가) → (마) → (라)
④ (다) → (가) → (나) → (마) → (라)
⑤ (다) → (나) → (가) → (라) → (마)

8. 다음은 중학교에서 다루는 피타고라스 정리에 관한 [문제]이다.

[문제]
직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그려서 다음과 같은 [단계 1], [단계 2]를 통해 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.

[단계 1]
정사각형 CBFG의 두 대각선의 교점 O를 지나고 두 변 AB와 BE에 평행인 선분을 각각 긋고, 그어진 선을 따라 4개의 사각형을 오린다.

[단계 2]
[단계 1]에서 오려 낸 4개의 사각형과 정사각형 ACHI를 정사각형 ADEB에 채워 본다.



[단계 1] [단계 2]

위의 [문제]에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-9]

<보기>

ㄱ. 수학적 아이디어를 구체적 조작과 탐구 활동을 통하여 정당화할 수 있는 예이다.
ㄴ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형의 구성 요소와 성질에 주목하여 이를 인식하는 기술적/분석적 수준에 해당하는 활동의 예이다.
ㄷ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 위의 [문제]를 해결한 후 가정, 결론 용어를 사용하는 연역적 증명 방법에 의한 교수・학습이 뒤따라야 한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

9. 김 교사는 반 힐레(P. van Hiele)의 수학 학습 수준 상승을 위한 교수・학습 5단계를 적용하여 고등학교 조합 단원의 수업을 계획하였다. 다음은 김 교사가 계획한 수업 과정을 순서 없이 나열한 것이다.

단계	교수・학습 활동
(가)	학생이 학습할 조합에 친숙해질 수 있도록 서로 다른 4개의 학용품 중에서 2개를 선택하는 경우의 수를 구해보게 한다. 학생과 대화를 통해서 학습 주제를 소개한다.
(나)	학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 조합의 구조에 대한 의견을 표현해 봄으로써 그 구조를 명확히 하고, 관계 체계를 형성한다.
(다)	교사는 수형도 등 다양한 방법으로 구할 수 있는 간단한 조합 문제를 제시하여 학생이 해결해 보도록 안내한다.
(라)	교사는 여러 교과서에 제시된 다양한 탐색적 과제로 구성한 활동지를 제공하여, 학생이 과제를 해결하는 동안 조합의 구조에 정통하게 한다. 또한 실생활 문제를 해결해 봄으로써 다양한 상황에서 조합의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
(마)	학생은 조합과 이전 시간에 학습한 순열의 관련성을 파악하고, 전체적으로 조망하면서 사고 수준의 비약에 이른다.

교수・학습 5단계에 따라 (가)~(마)를 순서대로 배열하고, (마) 단계의 명칭을 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2019]

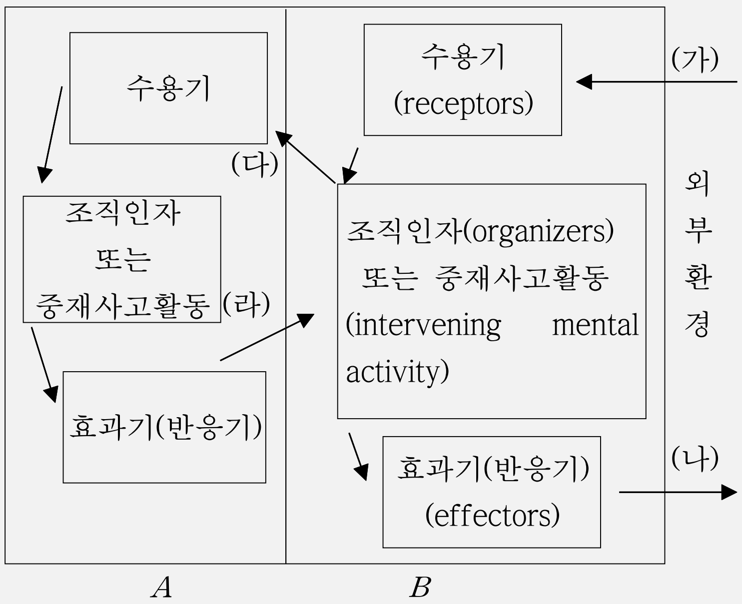
<Skemp>

1. Skemp의 학습 이론에 관한 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 고르면? [1996-15]

㉠ 이 이론은 Piaget 심리학을 수학 교육에 적용한 것이다. ㉡ 이 이론은 동화, 조절에 의한 scheme의 자발적 구성 과정에 근거한다. ㉢ 이 이론은 개념의 계층론을 주장하여 학습에서의 준비성을 강조한다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉢ ④ ㉠, ㉡, ㉢

2. 스켐프(Skemp)는 아래와 같은 그림으로 사고 과정을 설명하고 있다. 다음 물음에 답하시오. [총 6점] [1999 추시-2]



(1) 어떤 아동이 주어진 수학 문제는 해결했는데, 자신이 그 문제를 어떻게 풀었는지 그 과정을 설명할 수 없었다. 이 경우는 위의 그림에서 A와 B 가운데 어느 부분이 미숙하기 때문이며, 그 부분을 무엇이라 하는가? [3점]

(2) 위 (1)의 아동의 경우, 위의 그림 (가)와 (다)에서 이 아동이 인식하는 대상은 각각 구체적으로 무엇인가? [3점]

3. R. Skemp는 규칙의 근본 원리를 모르고 규칙만을 기억하여 문제해결에 적용할 수 있는 능력을 '도구적 이해(instrumental understanding)'라고 하고, 규칙의 적용방법과 이유를 아는 상태에서 보다 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 연역할 수 있는 능력을 '관계적 이해(relational understanding)'라고 하였다. 이와 관련한 다음 각 물음에 답하시오. [총 7점] [2001-3]

(1) R. Skemp가 주장한 ‘도구적 이해’를 목표로 하는 수학 학습의 장점 3가지를 제시하시오. [3점]

(2) R. Skemp가 주장한 ‘관계적 이해’를 목표로 하는 수학 학습의 장점 4가지를 제시하시오. [4점]

4. 스켐프(R. Skemp)는 수학적 개념에 대한 이해 유형의 일부로 도구적 이해와 관계적 이해를 비교하여 설명하였고, 수학 학습-지도에서는 궁극적으로 수학적 개념에 대한 관계적 이해를 목표로 해야 한다고 주장하였다. 김 교사가 학생들이 '이항'을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 일차 방정식 문제를 풀게 하였더니, 학생 A와 학생 B가 아래와 같이 동일한 방법으로 문제를 풀었다.

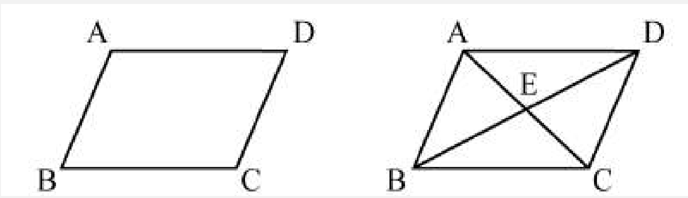
(문제) 방정식 $3x+7=19$를 풀어라.
(학생 A와 학생 B의 풀이)
$3x+7=19$ ㉠
$3x=19-7$
$3x=12$
$x=4$

잠시 후 김 교사는 학생 A와 학생 B에게 ㉠의 과정을 각자 설명해 보라고 하였다. 김 교사는 두 학생의 설명을 듣고 나서, 학생 A는 '이항'에 대하여 도구적 이해를 하고 있고, 학생 B는 관계적 이해를 하고 있다고 판단하였다. 학생 A와 학생 B가 ㉠의 과정을 어떻게 설명했을지 각각 제시하시오. (단, 두 학생 모두 '이항'이라는 용어는 사용하지 않았고, 그 설명이 7-가 단계의 수준을 넘지 않았다고 한다.) [4점] [2008-3]

- 학생 A의 설명 :
- 학생 B의 설명 :

5. 김 교사는 '평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다'는 성질을 가르치고 있다. 스켐프(R. Skemp)가 제안한 '이해'의 유형 가운데 철수의 대답과 가장 관련이 깊은 것은? [2점] [2009 모의-4]

김 교사 : 여기에 평행사변형이 있습니다([그림 1]). 평행사변형의 두 대각선을 그렸을 때([그림 2]), 이 두 대각선은 어떤 성질이 있는지 이야기해 볼까요?



[그림 1] [그림 2]

철 수 : 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분해요. 그러니까 선분 AE의 길이와 선분 EC의 길이가 같고, 선분 BE의 길이와 선분 ED의 길이가 같아요.
김 교사 : 아! 그렇군요. 그럼 어떻게 그렇다는 것을 알 수 있지요?
철 수 : 그림에서 보면 바로 똑같다는 것을 알 수 있어요. 초등학교 때 그렇게 배운 것으로 기억하고 있는데, 그 이유는 잘 모르겠어요.

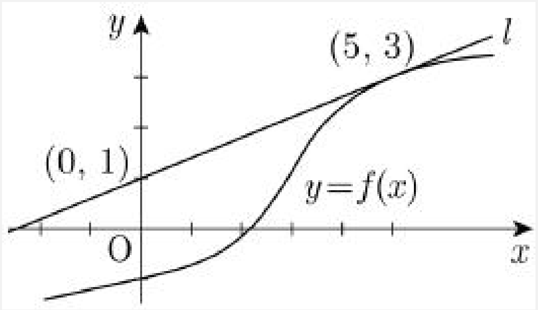
① 도구적 이해　② 관계적 이해
③ 논리적 이해　④ 형식적 이해
⑤ 기호적 이해

6. 다음은 고등학교 2학년 확률과 미적분에 대한 평가 문항과 이에 대한 정답률 및 답지 반응률이다. 최 교사는 이 자료에 근거하여 학생들의 이해 상태를 판단하였다. 적절하게 판단한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011-11]

1. 공정한 동전을 6번 던질 때 '앞면-앞면-앞면-앞면-앞면-앞면'의 순서로 나올 확률을 a, '앞면-앞면-뒷면-뒷면-앞면-뒷면'의 순서로 나올 확률을 b라 하자. 옳은 것은?

① $a<b$　② $a>b$　③ $a=b$

2. 그림과 같이 직선 l이 점 $(5,3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.



3. 다음 정적분의 값을 구하시오.

(1) $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$　(2) $\int_{-2}^{1}(3x^2-4x+2)dx$

문항 번호		정답률(%)	답지 반응률(%)		
			①	②	③
1		25	70	5	25
2		17			
3	(1)	45			
	(2)	93			

<보기>

ㄱ. 사건의 독립성에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄴ. 미분계수의 기하학적 의미에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄷ. 스켐프(R. Skemp)의 관점에서 보면 정적분에 대한 '관계적 이해'가 이루어졌다고 볼 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

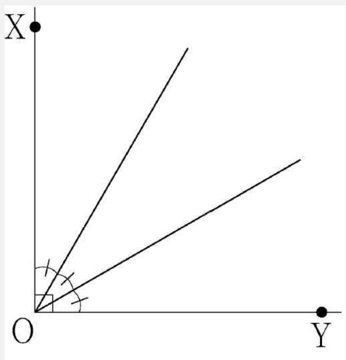
7. 스켐프(R. Skemp)의 이해와 관련된 설명 중 옳지 않은 것은? [2점] [2013-3]

① 등식의 성질을 이해하지 못하고 이항하여 일차방정식을 푸는 것은 도구적 이해의 예이다.
② 도구적 이해는 문제를 푸는 공식에 초점을 두기 때문에 관계적 이해보다 기억의 지속력이 더 강하다.
③ 관계적 이해를 통해 만족감을 얻게 되면, 새로운 자료도 관계적으로 이해하게 되고 능동적으로 찾게 된다.
④ 새로운 개념을 지도할 때 동화나 조절이 잘 이루어지도록 기존의 스키마를 잘 활용하는 것은 관계적 이해를 도모하기에 적절하다.
⑤ 관계적 이해는 무엇을 해야 할지 왜 그런지를 모두 알고 있고 일반적인 수학적 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 능력이다.

8. 다음은 어느 예비교사가 수학 교육론 강의 시간에 분석법을 이용하여 직각의 삼등분선의 작도 문제를 해결한 과정이다.

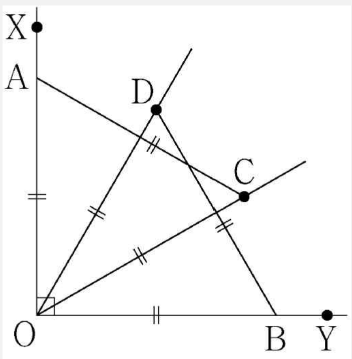
[문제] 직각 XOY의 삼등분선을 작도하시오.

[해결 과정] 우선 직각 XOY의 삼등분선이 [그림 1]과 같이 작도되었다고 가정한다.



[그림 1]

삼등분선을 작도하기 위하여 필요한 도형은 직각을 삼등분하는 두 반직선 위의 두 점임을 알 수 있다. 직각을 삼등분하면 한 각의 크기가 $30°$이므로, [그림 2]와 같이 $\triangle AOC$와 $\triangle DOB$가 정삼각형이 되도록 하는 두 점 C, D를 작도하면 된다.



[그림 2]

이를 토대로 직각 XOY의 삼등분선을 작도하는 절차를 정리하면 다음과 같다.

① 점 O를 중심으로 하는 원을 작도하고, 이 원이 두 반직선 OX, OY와 만나는 두 점을 각각 A, B라 한다.

② 점 A를 중심으로 하여①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 C라 한다.

③ 점 B를 중심으로 하여 ①에서 작도한 원과 반지름의 길이가 같은 원을 작도하고, ①에서 작도한 원과 만나는 점을 D라 한다.

④ 점 O와 점 C, 점 O와 점 D를 각각 이으면 직각의 삼등분선이 된다.

위 과정에서 수학적 발견술인 분석법이 어떻게 적용되었는지 그 근거와 함께 서술하시오. 그리고 작도 문제 해결 교육에서 분석법을 이용하는 의의를 스켐프(R. Skemp)가 제시한 도구적 이해와 관계적 이해의 관점에서 각각 설명하시오. [4점, 서술형A-9] [2019]

<Dienes>

1. Dienes는 수학 개념은 점진적인 단계로 학습되어진다고 보고, 수학 개념의 학습 단계를 자유놀이, 게임, 공통성 탐구, 표현, 기호화, 형식화의 6단계로 제시하였다. 다음 학습 활동이 속하는 단계는? [1994-3]

> $f(x)$에 대하여 $f(1)=8,\ f(2)=6,\ f(3)=4,\ f(4)=2,\ f(5)=0$임을 알고, $f(6)$의 값을 구한다.

① 게임단계
② 공통성 탐구 단계
③ 표현단계
④ 기호화 단계

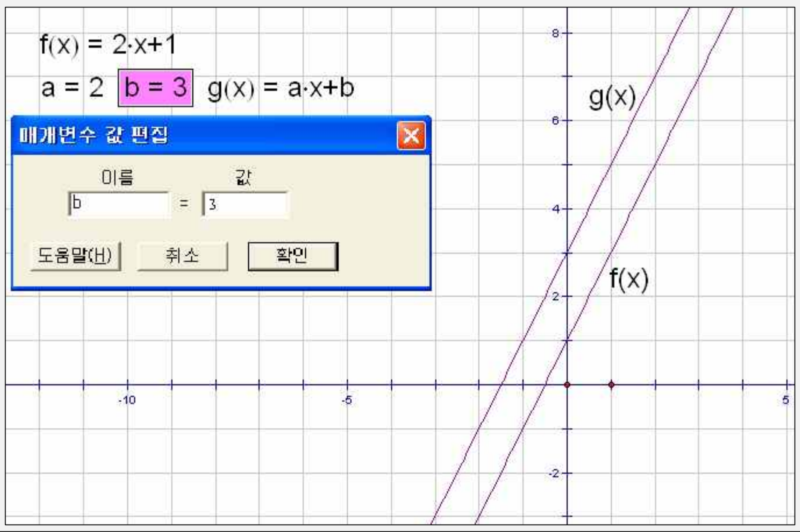
2. 최근 수학교육 개혁운동의 기본철학이라고 할 수 있는 구성주의(constructivism)의 핵심사항을 약술하고, 구성주의적 수업을 구현하기 위해서 고안된 딘즈(Z. P. Dienes)의 수학적 다양성의 원리와 지각적 다양성의 원리를 설명하시오. [1997 모의-5]

3. Z. P. Dienes는 수학적 다양성의 원리(mathematical variety principle)와 지각적 다양성의 원리(perceptual variety principle)를 수학적 개념의 지도원리로 제시하고 있다. 이 중 수학적 다양성의 원리가 무엇인지 간략히 서술하고(2점), 이 원리가 평행사변형의 개념지도에서 어떻게 적용될 수 있는지 구체적인 예를 들어 설명하시오. (4점) (총 6점) [1997-3]

4. 최 교사는 "기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다."는 학습 내용을 지도하려고 한다. 다음은 최 교사가 수업에 사용하기 위해 만든 학습 자료와 그 학습 자료를 활용한 학습 활동에 대한 계획이다.

〈학습 자료〉

탐구형 소프트웨어를 이용하여 컴퓨터 화면에 함수 $f(x)=2x+1$의 그래프를 그린다. 매개변수 입력창에 a, b의 값을 입력하면 그 값에 따라 새로운 함수 $g(x)=ax+b$의 그래프가 동일한 화면에 그려지도록 한다.



〈학습 활동〉

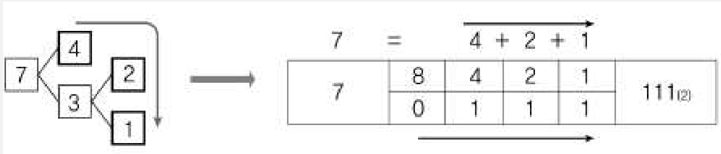
활동①: 위 학습 자료에서 a의 값을 2로 입력하여 고정한다.
활동②: b의 값에 3을 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.
활동③: b의 값을 바꾸어 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.
활동④: 활동 ③의 과정을 여러 번 반복해서 실행한다.

딘즈(Z. P. Dienes)가 제시하는 수학 학습 원리 중 '수학적 다양성의 원리'를 쓰고, 지도하려는 학습 내용에 대한 최 교사의 수업 계획을 수학적 다양성의 원리의 관점에서 평가하시오. [5점] [2006-5]

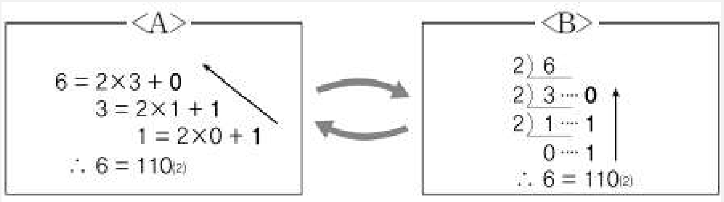
[5～6] 다음은 주어진 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 지도하기 위한 김 교사의 수업 계획과 수업을 한 후 어느 학생을 평가한 내용이다. 이를 보고 물음에 답하시오.

[가] 수업 계획

<1단계> 주어진 수를 8, 4, 2, 1의 합으로 나타내고, 이를 이진법으로 나타내는 활동을 한다.

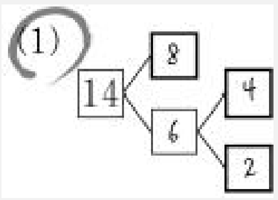


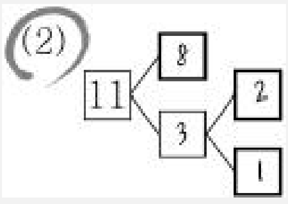
<2단계> <A>와 <B>를 관련시키면서, 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 명하고 적용하는 활동을 한다.



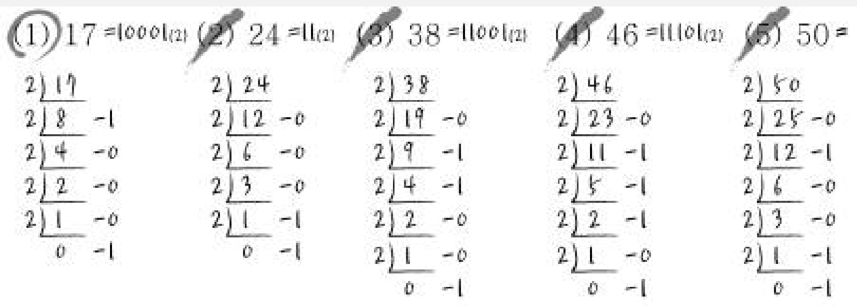
[나] 예은이의 성취도 평가 답안지

1. 다음 빈칸에 알맞은 수를 넣어라.





2. 다음 수를 이진법으로 나타내어라.



5. [가], [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? [2점] [2010-8]

① <1단계>는 딘즈(Z. Dienes)의 개념 형성 과정 중 자유놀이 단계에 해당한다.

② 딘즈에 따르면, 지각적으로 다양한 상황은 혼란을 제공하므로 <1단계>에서 한 가지 지도 수단을 사용하는 것이 효과적이다.

③ <1단계>에서는 오수벨(D. Ausubel)의 통합 조정의 원리가 적용되고 있다.

④ <2단계>에서 김 교사는 스켐프(R. Skemp)가 말하는 도구적 이해를 의도하고 있다.

⑤ 김 교사가 사용한 지도 수단이 [나]에서 평가의 대상이 되는 현상을 볼 수 있다.

6. [나]에서 예은이가 범한 오류에 대한 <보기>의 설명 중 적절한 것을 모두 고른 것은? [2점] [2010-9]

<보기>

ㄱ. 예은이는 [나]에서 2번의 (5)에 대한 답으로 $10011_{(2)}$이라고 할 가능성이 많다.

ㄴ. 예은이의 오류를 교정하기 위해서는 <2단계> 활동에 대한 반성보다 <1단계> 활동을 연습시키는 것이 필요하다.

ㄷ. 예은이가 [나]에서 2번의 (1)에서 정답을 맞힌 것은 주어진 수의 특성에 기인한 것으로 보인다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

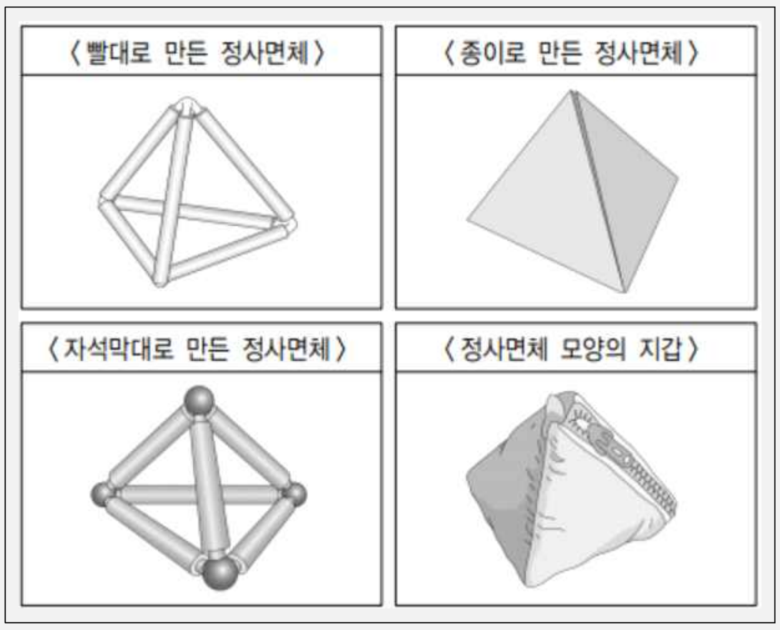
7. 딘즈(Z. Dinenes)는 놀이를 통한 수학 개념의 학습 과정을 다음과 같이 여섯 단계를 제시하였다.

1단계	2단계	3단계	4단계	5단계	6단계
자유 놀이	(가)	(나)	(다)	(라)	형식화

위의 (가), (나), (다), (라)에 들어갈 것으로 모두 옳은 것은? [2점] [2013-4]

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	게임	표현	공통성의 탐구	기호화
②	게임	공통성의 탐구	표현	기호화
③	게임	공통성의 탐구	기호화	표현
④	공통성의 탐구	표현	게임	기호화
⑤	공통성의 탐구	게임	표현	기호화

8. 중학교 기하 수업에서 다음과 같은 자료를 이용하여 정사면체에 대해 학습하였다.



위 자료들은 서로 다르게 보이지만, 구조적으로는 같은 구체물이다. 딘즈(Z. Dienes)의 수학 학습 이론에서 볼 때, 이러한 다양한 형태의 구체물을 활용한 수업은 어떤 원리를 적용한 것인지 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2015]

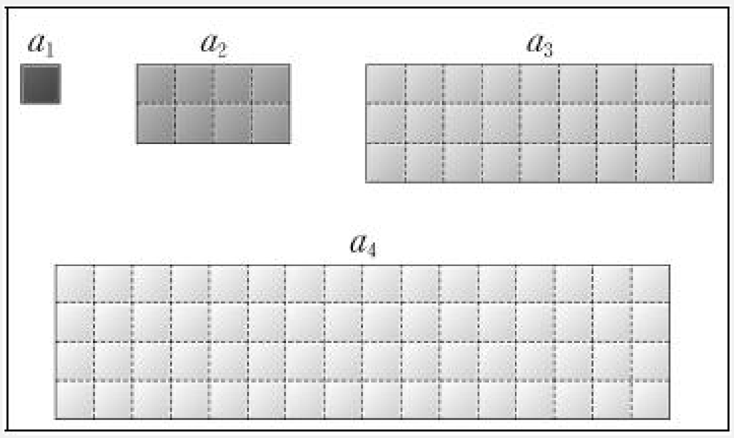
9. 다음은 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 기초하여 탐구 활동을 강조한 수학 수업에서 사용할 교구 제작 및 활용을 위한 계획서의 일부이다.

[교구 제작 및 활용을 위한 계획서]

〈제작 계획〉

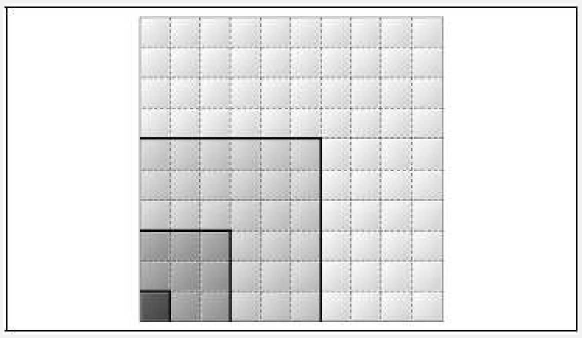
- 1단계: 한 변의 길이가 1인 정사각형 조각들을 사용하여 (가)와 같이 직사각형 모양 4개를 만든다. 이때 각 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 정사각형 조각의 개수는 a_1, a_2, a_3, a_4이다.

(가)



- 2단계: (가)에서 각각의 직사각형 모양을 만드는 데 사용된 모든 정사각형 조각들을 재배치하면 (나)와 같은 큰 정사각형 모양으로 만들 수 있다.

(나)



〈활용 계획〉

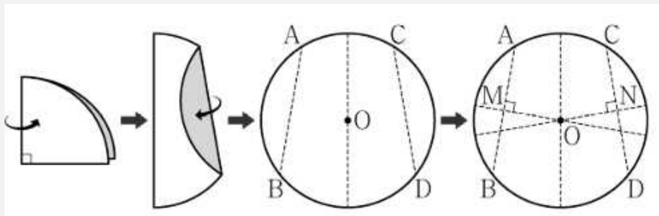
- (가)에 있는 정사각형 조각의 총 개수는 $a_1+a_2+a_3+a_4$임을 파악한다.
- (나)에 있는 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $1+2+3+4$임을 파악한다.
- (가)와 (나)에 있는 정사각형의 조각의 개수는 서로 같다는 것을 인식한다.

…(하략)…

※ 필요하면 a_1, a_2, $\cdots$, a_n에서 n의 값에 따른 교구를 추가로 만들어 사용할 수 있다.

위 교구를 활용한 고등학교 수열 단원 수학 수업에서 학습자가 형성하기를 기대하는 일반화된 식을 쓰고, 그 식을 어떻게 유도하였는지 위 교구와 관련지어 설명하시오. 또한 딘즈의 개념 형성 이론의 관점에서, 수학 학습을 위해 고안된 교구 또는 구체물 속에 내포되어 있어야 하는 것이 무엇인지 쓰시오. [4점, 서술형A-10] [2018]

10. 다음은 김 교사가 계획한 중학교 3학년 원의 현에 대한 단원의 교수·학습 지도안의 일부이다.

<table>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td>원의 현에 관한 성질을 이해한다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">단계</td><td>교수·학습 활동</td></tr>
<tr><td colspan="2">도입</td><td>• 준비 학습: 전시 학습을 상기하도록 안내한다.
• 동기 유발: 실생활에서 원의 성질을 응용한 여러 사례를 살펴본다.
• 본시 학습 목표를 확인한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">전개</td><td>[활동1]</td><td>• 다음 활동에 학생들이 자발적으로 참여하도록 유도한다.
① [그림 1]과 같이 원 모양의 색종이를 완전히 포개어지도록 반으로 두 번 접어 원의 중심 O를 찾는다.
② 다시 처음 상태에서 색종이를 반으로 접고 [그림 2]와 같이 접은 후 펼친다.
③ [그림 3]과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡는다.
④ 점 A와 점 B, 그리고 점 C와 점 D가 서로 겹치도록 색종이를 각각 접었다 펼친 후, [그림 4]와 같이 현 AB의 중점 M과 현 CD의 중점 N을 찾는다.


[그림 1] [그림 2] [그림 3] [그림 4]
⑤ $\overline{OM}=\overline{ON}$임을 확인한다.</td></tr>
<tr><td>[활동2]</td><td>• 친구들과 자유롭게 토의·토론하면서 [활동1]을 통해 ‘길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.’는 성질을 학생이 정리할 수 있도록 허용적인 분위기를 조성한다.
• 학생이 정리한 현에 관한 성질에서 ‘원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.’는 성질을 재구성해 보도록 안내한다.
• 현에 관한 성질을 연역적으로 논증하기 등 학생 수준에 맞게 정당화 방법을 활용한다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">정리</td><td>• 본시 학습 내용을 정리한다.
• 다음 차시를 예고한다.</td></tr>
</table>

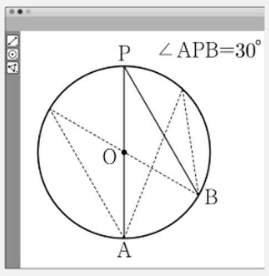
딘즈(Z. Dienes)가 제안한 수학 학습 원리 중 1가지를 사용하여 교수·학습 지도안의 전개 단계를 **[활동1]** ⇒ **[활동2]**로 실행하려는 이유를 설명하시오. 그리고 **[활동2]**과정 없이 ‘도입→전개(**[활동1]**)→정리’로 수업을 진행한다고 했을 때 김 교사의 수업을 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 메커니즘과 관련지어 평가하시오. [4점, 서술형B-5] [2021]

11. (가)는 김 교사가 탐구형 소프트웨어를 활용하여 원주각의 성질을 지도하는 수업의 일부이다. (나)는 피아제(J. Piaget)와 딘즈(Z. Dienes)의 이론에 대한 오 교사와 김 교사의 대화의 일부이다.

(가)

김 교사: 점 P를 원 O 위에서 움직이면서 원주각 ∠APB의 크기가 어떻게 변하는지 관찰해 봅시다. 여러분, 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면 ∠APB의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 1: 점 P를 움직여도 ∠APB의 크기가 30°로 변하지 않았어요.



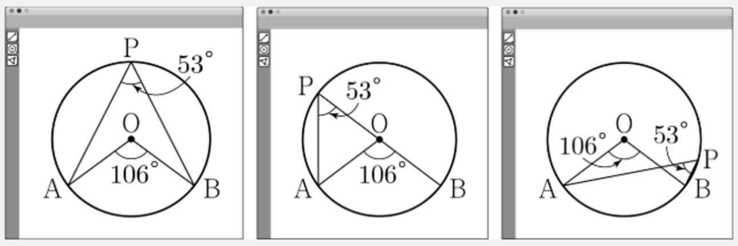
김 교사: 잘 관찰했습니다. 이번에는 원 O에서 점 B를 움직여 호 AB의 길이를 바꾼 후 점 P를 움직여 보세요. 원주각의 크기가 어떻게 변화하나요?

학 생 2: 점 P를 움직였는데, 호 AB에 대한 원주각이 여러 개 생기지만 그 크기는 항상 같았어요.

김 교사: 이제 원주각의 크기와 중심각의 크기 사이의 관계를 관찰해 봅시다. 이때도 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 움직이면서 중심각 ∠AOB의 크기와 원주각 ∠APB의 크기의 측정값을 비교해 보세요. 무엇을 발견했나요?

학 생 1: 원주각 ∠APB의 크기가 중심각 ∠AOB의 크기의 $\frac{1}{2}$인 것 같아요.

김 교사: 네, 그렇네요. 한 호에서 여러 개의 원주각을 만들 수 있어요. 점 P를 원 O 위의 호 AB를 제외한 부분에서 더 움직여 보면서 원주각과 중심각의 크기를 좀 더 관찰해 봅시다.



학 생 2: 점 P의 위치와 관계 없이 ∠APB는 호 AB에 대한 원주각이고 그때 각의 크기가 같으니까, 원주각과 중심각의 크기의 관계는 언제나 똑같아요. 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사: 잘 관찰했습니다. 지금까지 탐구형 소프트웨어를 활용해 관찰한 원주각의 성질을 문장으로 만들어 봅시다. 누가 발표해 볼까요?

학 생 1: 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같습니다. 그리고 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

김 교사: 잘 만들었어요. 이제, 이러한 성질을 자세하게 분석해 봅시다.

[이후, 원주각의 크기와 중심각 크기 사이의 관계를 연역적으로 정당화하는 교수・학습이 이루어진다.]

(나)

오 교사: 피아제는 반영적 추상화를 내용과 형식의 끊임없는 교대 작용으로 설명합니다. 피아제의 영향을 받은 딘즈도 지식의 성장 과정을 같은 방식으로 설명합니다. 구체적으로, 딘즈는 지식의 성장 과정을 개폐연속체 개념으로 설명합니다.

김 교사: 닫힌 상태는 ‘형식’으로 정리된 상태인데, 그 다음에 열린 상태는 ‘내용’으로 열리게 된 것이지요?

오 교사: 맞습니다. 이런 의미에서 딘즈는 수학 교수・학습 원리 중 하나로 ㉠ ‘수학적 대상을 먼저 구성하고 그 대상에 대해 분석해야 한다.’라는 원리를 제안한 바 있는데, 물론 분석한 결과인 ‘닫힌’ 형식은 그 다음 수준에서는 ‘열린’ 상태의 탐구 내용이 됩니다.

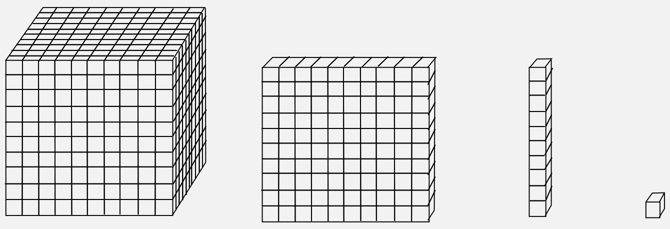
딘즈의 수학적 다양성의 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 수업 내용과 관련시켜 구체적으로 서술하시오. 또한 딘즈의 밑줄 친 ㉠의 원리의 명칭을 쓰고, 이 원리가 (가)에서 어떻게 적용되고 있는지를 서술하시오. [4점, 서술형B-3] [2023]

[수학 교수-학습이론 및 실제(오개념)]

<수와연산>

1. 현행(제6차) 수학과 교육과정에 따르면, 중학교 3학년에서는 삼각비를 직각삼각형의 닮음의 성질을 바탕으로 직각이 아닌 한 예각에 대한 두 변의 길이의 비로 정의하여 다루도록 되어 있다. 고등학교 공통수학에서는 삼각비를 일반화시킨 삼각함수를 어떻게 정의하고 있는지 설명하시오. [5점] [1998-11]

2. 자연수 10진법의 모델은 십진막대(base ten blocks)로 나타낼 수 있으며 그 모델은 다음과 같다. 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [1999 추시-4]



10^3 10^2 10 1

(1) 앞에 제시된 10진법의 모델을 참고로 하여 5진법의 모델을 그리시오. (3차원 이외의 모델은 평면으로 그려도 되며, 자를 사용하지 않아도 됨) [2점]

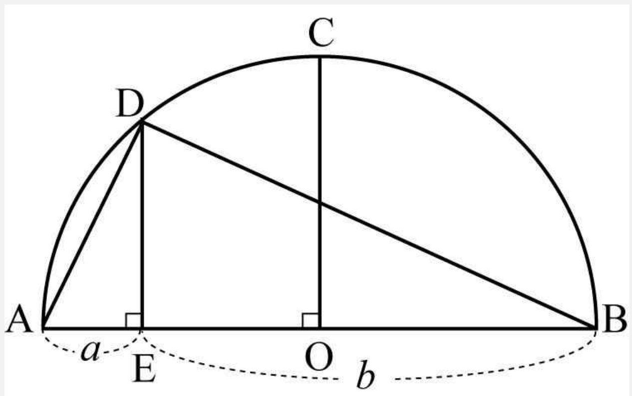
(2) 아래의 5진법 덧셈을 위의 모델을 가지고 그림으로 설명하시오. (3차원 이외의 모델은 평면으로 그려도 되며, 자를 사용하지 않아도 됨) [3점]

$$\begin{array}{r} 3\ 2_{(5)} \\ +\quad 2\ 4_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

3. 수학 교사 A, B의 다음 대화를 읽고 물음에 답하시오. [총 5점] [2003-4]

교사 A: 저는 학생들이 수학의 각 영역의 관련성을 인식하도록 가르치는 것이 바람직하다고 생각합니다. 예를 들면, 추상적인 식을 시각화한 자료는 식을 직관적으로 이해하게 해줄 뿐 아니라 대수와 기하의 연결성을 인식하게 하는 데에도 도움이 될 것입니다. 교사 B: 참 좋은 말씀입니다. 저는 수학의 역사가 수학을 가르치는 데 도움이 된다고 생각합니다. 예를 들면, '기존의 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지되도록 하면서 체계를 확장하는 원리'가 수학의 역사상 수 체계의 확장에 유용하게 활용되었습니다. 이 원리는 학교에서 음수의 연산 법칙을 유도하거나 지수의 확장을 가르칠 때 활용될 수 있습니다.

(1) 교사 A는 부등식 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ $(a>0,\ b>0)$를 가르칠 때 사용하려고 다음 자료를 만들었다. 다음 그림이 어떻게 위의 부등식을 나타내고 있는지 설명하시오. (단, 그림에서 점 O는 원의 중심이다.) [1점]



(2) 교사 B는 다음 수학 시간에 지수의 확장을 가르치고자 한다. 교사 B의 진술에 들어 있는 원리를 사용하여, 지수의 정의를 지수가 자연수인 경우로부터 '$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ (단, $a\neq0$, n은 자연수)'로 확장해 가는 과정을 서술하시오. [4점]

[4～5] 음수 지도에 관한 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

김 교사 :	음수 개념의 역사적 발생 과정을 살펴보면, 많은 수학자들이 음수를 수로 인정하기 어려워하였습니다. 학생들도 수학자들과 마찬가지로 ①음수개념과 그 연산의 의미를 크기 또는 양과 관련지어 파악하기 때문에 음수를 수로 받아들이기 어려워합니다.
박 교사 :	동의합니다. 그래서 저는 먼저 ②구체적인 음수지도 모델을 도입하고, 규칙성을 탐구하여 연산의 원리를 발견하는 ③귀납적 외삽법, 기존의 수 체계에서 성립하는 성질을 이용하여 음수를 논리적으로 정의하는 방식인 ④형식 불역의 원리(principle of the permanence of equivalent forms)를 이용하여 음수의 연산을 지도합니다.

4. ①의 예와 ②의 예를 각각 2가지 쓰시오. [4점] [2007-1]

5. ③에 따라 지도할 때 '$2\times(-1)=-2$'를 어떻게 설명하는지 쓰고, ④에 따라 지도할 때 '-1'을 어떻게 정의하는지 쓰시오. [4점] [2007-2]

6. <정의 1>은 고등학교 『수학 Ⅰ』에서 유리수 지수와 수열의 극한을 이용하여 무리수 지수를 예시적으로 정의한 것이고, <정의 2>는 실수의 완비성(completeness)을 이용하여 실수 지수를 정의한 것이다. 유리수의 조밀성과 유리수 지수에 관한 성질이 성립함을 가정하고, 물음에 답하시오. [20점] [2009모의 2차, 2교시-4]

<정의 1>

무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$에 한없이 가까워지는 수의 나열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\cdots$에 대하여 다음 수들은 어떤 일정한 수에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

$$3^{1},\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots \ (*)$$

이때, 이 수들이 가까워지는 일정한 수를 $3^{\sqrt{2}}$로 정의한다.

<정의 2>

두 실수 $a(a>1)$와 x에 대하여 a^x을 다음과 같이 정의한다.

$$a^x=\sup\{a^r \mid r<x,\ r\text{은 유리수}\}$$

(단, $\sup S$는 집합 S의 상한(supremum)이다.)

6-1. 위로 유계인 단조 증가(monotone increasing) 수열은 수렴함을 증명하고, 이 사실을 이용하여 <정의 1>의 수열 (*)이 수렴함을 밝히시오. 또, 다음 (가)와 (나)를 밝히고, <정의 2>에 따라 $a>1$일 때 두 실수 x와 y에 대하여 $a^x a^y=a^{x+y}$임을 보이시오. [14점]

(가) <정의 2>에서 모든 실수 x에 대하여 a^x이 유일하게 결정된다.
(나) 유리수 t와 두 실수 x와 y에 대하여 $t<x+y$이면,
두 유리수 r와 s가 존재하여 $r<x$, $s<y$, $t<r+s$가 성립한다.

6-2. 두 실수 x와 y에 대하여 $e^{x+iy}=e^x(\cos x+i\sin y)$로 정의한다. 두 복소수 $a(a\neq 0)$와 b에 대하여 $a^b=e^{b\log a}$로 정의할 때, b가 정수, 유리수, 무리수, 허수인 경우로 나누어, a^b이 나타내는 값의 개수에 대하여 간단히 쓰시오. 그리고 로그의 한 분지에서 $a^b a^c=a^{b+c}$가 성립함을 보이시오. [6점]

7. 다음은 수학에서 정의를 확장하거나 정리를 일반화할 때 고려되는 어떤 원리를 설명한 것이다.

> 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계를 확장하고 연산과 관계를 확장하듯이, 어떤 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때에는 기존의 체계가 가지고 있는 기본적인 성질이 유지되도록 하면서 그 구조를 확장해야 한다.

학교 수학에서 설명되는 다음 사례 중 위의 원리와 가장 거리가 먼 것은? [2.5점] [2009-6]

① 중학교에서 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들로 정의되었던 원이 고등학교에서는 좌표평면 위에서 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 정의된다.

② 중학교에서 $a^n=a\times a\times\cdots\times a$로 자연수 n에 대해서만 정의되었던 지수가 고등학교에서는 지수법칙 $a^{m+n}=a^m a^n$에 의해 정수 지수도 정의된다.

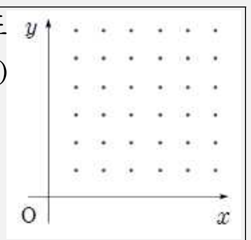
③ 중학교에서 직각삼각형의 변의 길이의 비로 정의되었던 삼각비가 고등학교에서는 좌표를 이용하여 둔각이나 음의 각에 대해서도 정의되는 삼각함수로 설명된다.

④ 음수 -2와 -3이 각각 $(-2)+2=0$과 $(-3)+3=0$을 뜻하는 자연수의 덧셈에 대한 역원으로 정의되면, 교환법칙과 결합법칙에 의해 $(-2)+(-3)$은 $-(2+3)$을 의미하도록 정의하는 것이 자연스럽다.

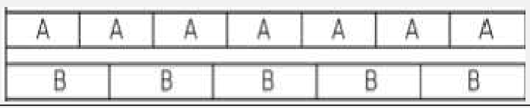
⑤ 음수가 도입되기 전에는 $x+y=3$의 그래프를 1사분면의 사분면으로만 그릴 수 있지만, 음수가 도입되고 나면 그 그래프를 자연스럽게 직선으로 그릴 수 있다.

8. 학생들이 다음 문제를 풀 때 겪을 수 있는 장애에 대한 설명 중 적절한 것은? [2점] [2010-7]

<문제1> 원점과 1사분면을 지나는 모든 직선은 적어도 하나의 격자점(x좌표와 y좌표가 양의 정수인 점)을 지나는가?
(예, 아니오)



<문제2> 길이가 다른 두 종류의 막대 A와 B가 있다고 하자. 동일 출발선에서 막대를 계속 이어 붙여 막대 A를 늘어놓은 전체 길이와 막대 B를 늘어놓은 전체 길이가 같게 되도록 하는 것이 항상 가능한가?
(예, 아니오)



① 유리수에 대한 유추적 모델을 가지고 있는 경우에는 발생하지 않는다.
② 유리수의 조밀성을 이해하면 극복할 수 있는 장애이다.
③ 정수에 대한 스키마를 유리수에 대한 스키마로 재구성하면 극복된다.
④ 직선을 직접 그어보거나, 막대를 계속 이어 붙여 보는 활동을 통해 극복된다.
⑤ 이런 장애는 직관이 수학적 사고를 방해할 수 있음을 보여주는 예이다.

9. 다음은 중학교 1학년에서 정수의 덧셈과 곱셈을 지도한 후, 유리수의 정의와 유리수의 덧셈, 곱셈을 지도하는 두 교사의 방법이다. 물음에 답하시오. [30점] [2010 2차, 1교시-1]

〈김 교사〉

- 유리수는 분모($\neq 0$), 분자가 정수인 분수 꼴로 나타낼 수 있는 수이다.

  예를 들면 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{-3}{5}$, $\dfrac{7}{-2}$, $\dfrac{-5}{-6}$ 등이다.
- 유리수의 계산은 초등학교에서 다룬 분수의 계산법을 따른다.

  예를 들면 $\dfrac{3}{-4}+\dfrac{5}{7}=\dfrac{3\times 7+(-4)\times 5}{(-4)\times 7}=\dfrac{1}{-28}$ 이다.

〈정 교사〉

- 유리수 $\dfrac{b}{a}$는 방정식 $a\times x=b$의 해이다(단, a와 b는 정수이고 $a\neq 0$).

  예를 들면 $\dfrac{-2}{3}$는 $3\times x=-2$의 해이다.
- 유리수의 계산은 정수의 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙에 형식불역의 원리(principle of the permanence of equivalent forms)를 적용하여 지도한다.

〈 참고사항 〉

초등학교에서 다루는 분수의 계산법 :

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+a\times d}{a\times c},\quad \frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c},\quad \frac{b}{a}=\frac{b\times c}{a\times c}$$

(단, a, b, c, d는 자연수)

9-1. 김 교사의 방법으로 수업을 받은 학생들이 $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{4}{5}$를 계산할 수 있도록 하기 위해서 김 교사가 추가해야 할 설명이 무엇인지 제시하고, 김 교사의 방법과 추가한 설명에 따라 $\left(-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{4}{5}$의 계산과정을 상세하게 쓰시오. [10점]

9-2. 정 교사는 학생들에게 $\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{5}{7}$와 $\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{5}{7}$를 계산하는 방법을 지도하려고 한다. 이를 위해 정 교사가 고려해야 할 구체적인 내용을 다음 순서에 따라 서술하시오. [20점]

① 형식불역의 원리의 상세한 의미

② 추가로 정의해야 할 수학적 대상에 대한 설명

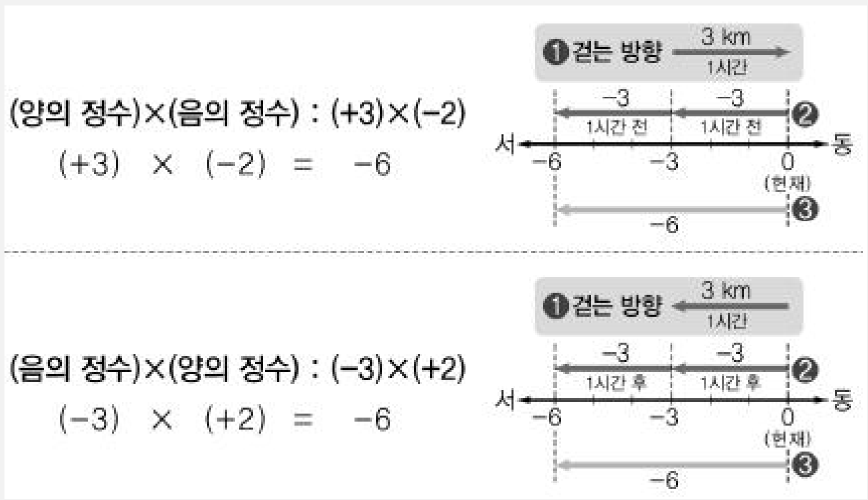
③ $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}=\dfrac{b\times c+a\times d}{a\times c}$, $\dfrac{b}{a}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{b\times d}{a\times c}$의 유도

(단, a, b, c, d는 정수이고 $a\neq 0$, $c\neq 0$)

④ $\left(-\dfrac{3}{4}\right)+\dfrac{5}{7}$와 $\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{5}{7}$의 상세한 계산 과정

10. <A>와 <B>는 2007년 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 1학년 교과서의 일부분이다. <A>와 <B>에서 음수의 연산을 다루는 방식에 관한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2011-10]

<A>



<B>

①

5×	2	=	10
5×	1	=	5
5×	0	=	0
5×	(−1)	=	□
5×	(−2)	=	□

②

2	×5 =	10
1	×5 =	5
0	×5 =	0
(−1)	×5 =	□
(−2)	×5 =	□

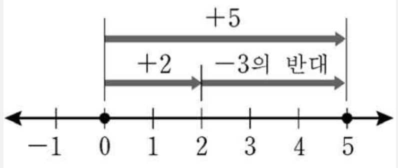
(1) 위 ①에서 규칙을 찾아보고, □안에 알맞은 수를 말하여 보자.
(2) 위 ②에서 규칙을 찾아보고, □안에 알맞은 수를 말하여 보자.

① <A>에서 음의 부호는 다중적인 의미를 가지지만 이것은 음수 개념 자체가 갖는 본질이라고 볼 수 있다.
② <A>와 같은 방식은 $(-6)\div(-3)=2$ 꼴의 나눗셈은 설명할 수 없다는 한계를 지닌다.
③ <A>와 같이 음수의 연산을 직관적 방법으로 지도하더라도 음수의 계산에 숙달되도록 많은 훈련이 필요하다.
④ <B>는 자연수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계와 연산을 확장하는 '형식불역의 원리'에 따라 음수의 곱셈을 도입하고 있다.
⑤ <B>와 같은 귀납적 확장은 기하학적으로 보면 반직선이나 선분이 직선으로 확장되면서 얻어지는 결과이다.

11. 수 개념에는 다양한 측면이 있으므로 수 개념 지도에도 다양한 관점과 방법이 존재한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2012-5]

① 프로이덴탈(H. Freudenthal)에 따르면 음수를 방정식의 근으로 정의하고 형식불역의 원리를 적용하여 음수의 연산을 지도해야 한다.
② 수직선 모델에서 음수를 표현하기 위한 음의 부호는 상황에 따라 왼쪽 방향이나 반대 방향을 뜻하므로 다중적인 의미를 갖는다.
③ 듀이(J. Dewey)에 다르면 고정 단위를 이용한 측정 활동을 하는 동안에 학생들이 분석과 종합의 과정을 경험하도록 수 개념을 지도해야 한다.
④ 피아제(J. Piaget)는 수 개념 지도에서 포함 관계에 의한 집합의 분류 활동과 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 강조한다.
⑤ 1960년대 미국에서 일어난 새수학 운동(New Math Movement)에서는 집합론의 기수(cardinal number) 개념을 강조하였다.

12. 다음은 정수의 사칙연산을 지도하기 위한 셈돌 모델, 수직선 모델, 귀납적 외삽법에 대한 예시이다.

셈돌 모델	$2+(-3)=-1$	●● + ○○○ = ○
수직선 모델	$2-(-3)=5$	
귀납적 외삽법	$2\times(-3)=-6$	$2\times2=4$ $2\times1=2$ $2\times0=0$ $2\times(-1)=-2$ $2\times(-2)=-4$ $2\times(-3)=-6$

정수의 사칙연산을 지도할 때, 셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점을 각각 쓰시오. 그리고 정수의 사칙연산을 지도할 때, 수직선 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 귀납적 외삽법의 장점을 각각 쓰시오. [3점, 서술형A-1] [2014]

13. 다음은 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정의 수와 연산 영역에 제시된 〈교수·학습 방법 및 유의 사항〉과 〈평가 방법 및 유의 사항〉의 일부이다.

〈교수·학습 방법 및 유의 사항〉

- 다양한 상황을 이용하여 음수의 필요성을 인식하게 한다.
- 정수의 사칙계산의 원리는 여러 가지 ㉠모델을 이용하여 직관적으로 이해하게 할 수 있다.

〈평가 방법 및 유의 사항〉

- 정수, 유리수와 관련하여 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.
- ㉡사칙계산 이외의 이항연산 문제는 다루지 않는다.

셈돌 모델을 이용하여 $(+3)-(-2)$를 계산하는 방법을 그림과 함께 설명하고, ㉠방법의 한계를 보완하기 위한 지도 방안을 서술하시오. 또 ㉡에 해당하는 수학 문제를 하나 제시하시오. [4점, 서술형B-1] [2018]

<대수>

1. 수학적 모델링(Modeling)과정이 무엇인지 간략히 기술하고, 이를 바탕으로 우리나라에서 일반적으로 행해지는 대수교육의 교수방법을 비판하고 대안을 제시하시오. [1997 모의-3]

2. 다음은 수학문제와 어느 학생의 답안이다.

(문제) 놀이공원에서 회전그네를 타는데 어린이는 1인당 500원, 어른은 1인당 1200원을 내야 한다. 어린이 a명, 어른 b명이 모두 회전그네를 타려면 얼마의 비용이 필요한가?
(풀이) $500 \times a + 1200 \times b = 500a + 1200b = 1700ab$
(답) $1700ab$ (원)

학생이 기록한 답안 이외에 몇 가지 방법으로 확인한 결과, 이 학생의 오류는 체계적(systematic)이며 '+' 기호에 대한 인식부족에서 비롯된 것임이 밝혀졌다. [총 5점] [2000-2]

(1) 이 체계적 오류의 확인 과정에서 사용하였을 것으로 추정되는 방법을 2가지 이상 쓰시오. [2점]

(2) 이 학생이 '+' 기호를 어떻게 인식하여 $1700ab$를 답으로 하였는가를 설명하고, 대수 학습을 성공적으로 하기 위하여 '+' 기호를 어떻게 인식해야 하는가를 기술하시오. [3점]

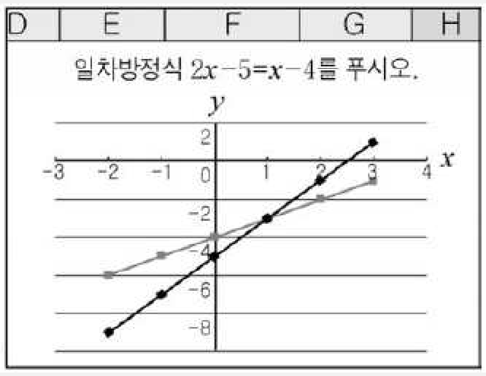
3. '변수'는 변화하는 대상(variable object)', '다가이름(polyvalent name)', '자리지기(placeholder)' 등과 같이 다양한 수학적 의미를 가지고 있다. 일차방정식 $2x-5=x-4$의 풀이에 대한 다음 수업에 반영된 변수 개념에 관한 설명으로 가장 적절한 것은? [2.5점] [2009 모의-13]

스프레드시트를 이용하여 일련의 x값에 대해 두 일차식 $2x-5$와 $x-4$의 값을 계산하여 두 식의 값이 같아지는 x값을 찾도록 한다([그림 1]).

[그림 1]의 표의 값을 그래프로 나타내어 두 식의 값이 같아지는 x값 근처에서 그래프가 서로에게 접근해가는 것을 시각적으로 확인할 수 있도록 한다([그림 2]).

	A	B	C	D
1	일차방정식 $2x-5=x-4$를 푸시오.			
2	x	$2x-5$	$x-4$	
3	−2	−9	−6	
4	−1	−7	−5	
5	0	−5	−4	
6	1	−3	−3	
7	2	−1	−2	
8	3	1	−1	
9	4	3	30	
10				

[그림 1]



[그림 2]

① 미지수와 동일한 개념이다.
② 변화 관계를 표현하는 동적 개념이다.
③ 이항(移項)을 이용한 일차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
④ 근의 공식을 이용한 이차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
⑤ 명제 '평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}+\overline{BC} \geq \overline{AC}$이다'에 사용된 변수 A, B, C와 동일한 개념이다.

4. 다음은 대수 학습에서 어려움을 겪고 있는 중학생의 사례이다. 이에 대한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-4]

(가영) $a=3$, $b=4$일 때 $2ab$의 값을 234라고 썼다.
(나현) $S=\{1, 2, 3\}$일 때 집합 $\{a+b \mid a, b \in S\}$를 $\{3, 4, 5\}$라고 썼다.
(다은) a는 양수이고 $-a$는 음수라고 생각한다.

<보기>

ㄱ. 스켐프(R. Skemp)에 따르면 가영이는 수와 연산에 관한 스키마를 가지고 있지 않다.
ㄴ. 나현이의 오류는 a와 b가 서로 다른 수를 나타낸다고 하는 문자에 대한 잘못된 이해로 해석될 수 있다.
ㄷ. 다은이는 문자가 나타내는 대상을 제한된 범위에서만 생각하는 것으로 볼 수 있다.
ㄹ. 갈등상황을 제공하는 것은 나현이와 다은이가 산술적 사고에서 대수적 사고로 이행하는 데 방해가 된다.

① ㄱ, ㄹ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ ,ㄹ

5. 다음은 수학사의 활용에 대해 논의하고 있는 교사들의 대화이다.

박 교사: 수학사를 수업에서 활용하는 방법에는 어떤 것이 있을까요? 각자의 경험을 함께 얘기해 봅시다.
최 교사: 저는 수학자들의 이야기를 해 주면서 학생들의 흥미를 유발한 적이 있습니다. "우리는 언제부터 문자를 사용해서 방정식을 나타내고 풀게 되었을까?"라고 질문하면서, 아주 옛날에는 문제의 풀이를 일상 언어만으로 기술했지만 약 3세기 디오판토스(Diophantus) 이후 미지수를 문자로 표현하였고, 16세기 프랑스의 수학자 비에트(F. Viète) 이후 ㉠방정식에서 문자의 사용 범위가 확대되었다는 이야기를 해 주었습니다,
김 교사: 저는 학생들에게 피타고라스 정리가 성립함을 설명하는 방법이 많다고 얘기해 주면서, 인도의 수학자 바스카라(A. Bhaskara)가 제시한 그림에서 피타고라스 정리가 왜 성립하는지 알아보는 활동을 하게 한 적이 있어요. 수학사를 소재로 학생들이 피타고라스 정리를 탐구할 수 있었죠.
박 교사: 수학사를 수업에 활용하는 또 다른 방법이 있을까요?
최 교사: 교육과정 내용을 재구성할 때도 수학사를 참고할 수 있어요. ㉡수학을 발생된 것으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하는 원리에 따라서요. 퇴플리츠(O. Toeplitz)의 『미분적분학』에서 이 원리를 반영하고 있죠.
김 교사: ㉢퇴플리츠와 방식은 다르지만 프로이덴탈(H. Freudenthal)도 수학사를 교육적으로 활용해야 한다고 했어요.
박 교사: 선생님들과 이야기하다 보니 수학사를 수업에 활용하는 방법을 더 연구해야겠다는 생각이 드네요.

방정식의 일반해를 나타낼 수 있게 되었다는 점에서 밑줄 친 ㉠의 확대된 문자의 사용 범위를 구체적으로 쓰시오.
또한, 밑줄 친 ㉡이 뜻하는 용어가 무엇인지 쓰고, 밑줄 친 ㉢에서 '수학사를 교육적으로 활용' 한다는 것의 의미를 설명하시오. [4점, 서술형A-6] [2022]

6. 다음은 강 교수가 예비교사를 대상으로 형식 불역의 원리를 다루는 수업의 일부이다.

강 교수: 지금까지 음수 지도를 형식적인 관점에서 접근하는 형식 불역의 원리를 설명했습니다. 그런데 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 이를 '기하적·대수적 형식 불역의 원리'로 확장합니다. 여러분, 오른쪽과 같은 정수의 나눗셈을 어떻게 기하적인 방법으로 접근할 수 있을까요?

$$\begin{aligned} 2 \div 2 &= 1 \\ 1 \div 2 &= \frac{1}{2} \\ 0 \div 2 &= 0 \\ (-1) \div 2 &= ? \\ (-2) \div 2 &= ? \end{aligned}$$

예비교사 A: 잘 모르겠어요.

강 교수: 자, 주어진 나눗셈 식에서 나누는 수는 얼마인가요?

예비교사 A: 나누는 수는 2입니다.

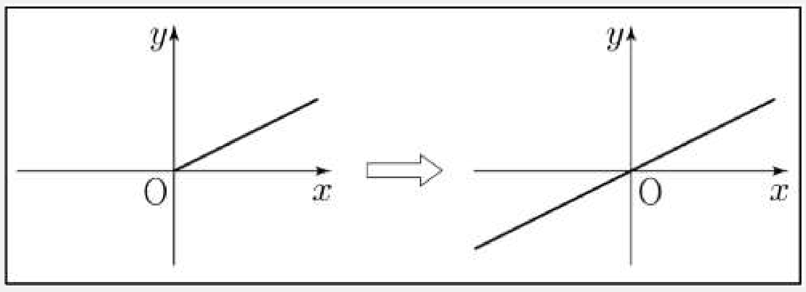
강 교수: 그렇습니다. 그럼 이 연산을 함수로 이해해 봅시다. 나누어지는 수 x에 연산 결과 y를 대응시킨다고 할 때, y는 얼마인가요?

예비교사 B: $x \div 2$, 즉 $\frac{x}{2}$입니다.

강 교수: 네, 맞습니다. 그런데 음수의 연산을 아직 배우지 않은 학생들이 할 수 있는 나눗셈 식은 어디까지인가요?

예비교사 A: $0 \div 2 = 0$입니다.

강 교수: 맞아요. 음수가 도입되기 전까지는 이 함수의 x의 범위가 $x \geq 0$으로 제한됩니다. 그런데 x의 범위를 음수까지 확장하면 다음과 같이 함수 $y = \frac{x}{2}$의 그래프가 변화하게 됩니다.



예비교사 B: 결국 $x < 0$일 때 $x \div 2$가 어떻게 정해져야 하는지를 알 수 있는 거네요.

강 교수: 그렇습니다. 예를 들어, 주어진 그래프에서 x좌표가 -4일 때의 y좌표를 구하면 나눗셈 식 (㉠)을/를 유도할 수 있습니다.

예비교사 A: ㉡이렇게 음수의 나눗셈을 기하적인 방법으로 해석하다니 정말 창의적인 것 같습니다.

강 교수: 맞아요. 일차함수의 그래프를 배운 후에 음수의 연산을 새로운 관점에서 보는 자료로 활용하면 좋을 것 같습니다.

괄호 안의 ㉠에 들어갈 나눗셈 식을 쓰고, '기하적·대수적 형식 불역의 원리'의 의미를 위의 수업 장면과 관련지어 기하적 측면과 대수적 측면에서 설명하시오. 또한, 밑줄 친 ㉡에서 가장 두드러지게 나타나는 수학 교과 역량의 명칭을 2022 개정 수학과 교육과정에 제시된 용어로 쓰시오. [4점, 서술형A-5] [2024]

〈기하(측정 포함)〉

1. 정다면체에서 각 면의 중심에 점을 찍고 이웃한 면들에 찍힌 점을 이은 선분들을 모서리로 하는 정다면체를 원래 정다면체의 쌍대 정다면체라 한다. 이 때 다음 표를 완성하시오. [4점] [2000-10]

정다면체	면의 모양	한 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수	쌍대 정다면체의 면의 모양	쌍대 정다면체
정4면체	정3각형	3	정(　　)각형	정(　　)면체
정6면체	정4각형	3	정(　　)각형	정(　　)면체
정8면체	정3각형	4	정(　　)각형	정(　　)면체
정12면체	정5각형	3	정(　　)각형	정(　　)면체
정20면체	정3각형	5	정(　　)각형	정(　　)면체

2. 학생들이 증명에 대한 생각을 이해하는 것은 증명 지도 방법을 개선하는 데 도움이 된다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [25점] [2009모의 2차, 1교시-1]

(가) **증명에 대한 학생들의 대화**

학생 갑: 수업 시간에 선생님의 증명을 보면 간단명료하고, 심지어 감탄까지 나와. 그런데 나 혼자 증명을 하려고 하면 도대체 어떻게 해야 할지 모르겠어.

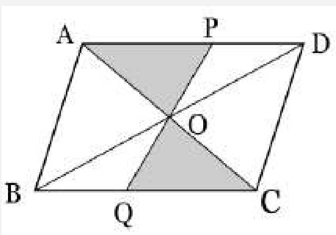
학생 을: 삼각형과 관련된 증명은 항상 합동인 삼각형만 찾으면 돼. 그래서 나는 크기와 모양이 비슷한 삼각형을 먼저 찾아보곤 해.

학생 병: 평행사변형의 대변의 길이가 같다는 것을 초등학교에서 이미 배웠는데, 중학교에서 그것을 왜 증명하는지 이해가 안 돼.

학생 정: 더 이해가 안 되는 것은, 선생님은 항상 한 삼각형에 대해서만 증명을 하고는 모든 삼각형에 대해서 증명을 했다고 하시는 거야!

(나) **중학교 2학년 학습 내용**

평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점 O를 지나는 한 직선이 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $\overline{PO}=\overline{QO}$이다.



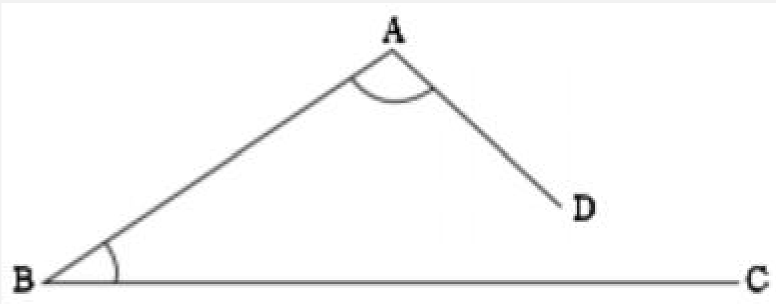
2-1. (가)에 등장하는 학생들의 증명에 대한 생각과 그 원인을 각각 분석하고, 그 결과를 근거로 증명 지도 개선 방안에 관하여 논하시오. [12점]

2-2. 문항 2-1에서 논한 증명 지도 개선 방안을 근거로 (나)의 학습 내용에 대한 지도 방법을 제시하시오. [13점]

3. 다음은 김 교사가 중학교 1학년 학생을 대상으로 삼각형의 결정조건을 지도하는 수업의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 1교시 -1-1]

김 교사: 지금까지 여러 모둠이 발표한 결과에 따르면, 세 변의 길이가 모두 주어진 경우, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어진 경우, 한 변의 길이와 양 끝각의 크기가 주어진 경우로 삼각형의 결정조건을 정리할 수 있습니다. 다른 경우를 발견한 모둠이 있습니까?

가영: 저희 모둠에서는 두 각과 한 변이 주어졌는데 그 두 각이 주어진 변의 양 끝각이 아닌 경우에 삼각형이 결정되는지 알아보려 했어요. (칠판에 아래의 그림을 그린다.)



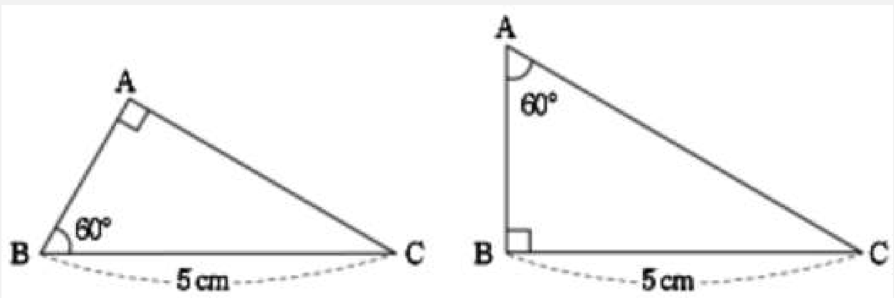
여기서 선분 BC는 주어진 변이고 각 A와 각 B가 주어진 각이에요. 그런데 이 그림에서 보면 삼각형 모양이 만들어지지 않아요. 그러면 이 경우는 삼각형을 결정할 수 없나요?

김 교사: ㉠여기서 선분 AB와 선분 AD는 길이가 주어지지 않은 것이라서 늘이거나 줄일 수 있어요. 이 그림에서 선분 AB의 길이를 늘려서 선분 AD의 연장선이 점 C를 지나도록 하면 삼각형은 만들어지겠지요.

나영: 하지만 그 그림에서 각 A의 크기와 각 B의 크기를 서로 바꾸면 다른 삼각형이 만들어져요.

김 교사: ㉡(전체 학생을 향해) 나영이가 한 말을 이해했어요? (학생들이 이해를 못하는 상황) 그럼 나영이는 지금 한 말을 다른 친구들이 이해할 수 있도록 좀 더 자세히 설명해 보겠어요?

나영: 예를 들어, 한 변의 길이가 5cm이고 두 각의 크기가 90°, 60°인 삼각형을 다음과 같이 그릴 수 있어요.



김 교사: 네. 잘했어요. 나영이가 설명한 것처럼 가영이네 모둠이 제시한 조건은 삼각형의 결정조건이라고 할 수 없습니다.

다영: 선생님, 질문이 있는데요. 그럼 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각이 주어진 경우는 삼각형의 결정 조건이 되나요?

2007년 개정 수학과 교육과정에서는 학생 스스로 문제를 해결하면서 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 수학적 사실을 추측하고 이를 정당화 또는 증명하여, 수학적 사고력과 의사소통능력을 신장하고 수학에 대한 긍정적 태도를 함양하도록 지도할 것을 권고하고 있다. 이러한 관점에서 밑줄 친 부분 ㉠과 ㉡ 각각에 대하여 장점 또는 개선이 필요한 점을 한 가지 찾아 그 근거와 함께 설명하시오. [10점]

4. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 방식에 따라 기하를 지도할 때, 학생들의 국소적 조직화에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-2]

<보기>

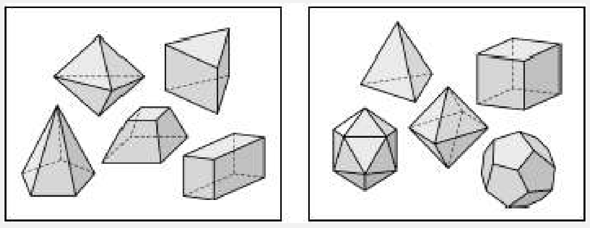
ㄱ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형을 그 성질에 기초하여 인식하는 분석적 수준에 해당하는 활동이다.
ㄴ. 학습자가 자신의 실제로부터 시작하여 기하 지식 체계를 조직하는 활동이다.
ㄷ. 수학자가 이론을 정립할 때 행하는 활동으로서 유클리드(Euclid) 『원론』의 조직화 방식과 동일하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

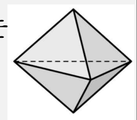
5. 다음은 중학교 1학년 기하 영역의 정다면체에 관한 수업의 일부이다. [30점] [2013 2차, 1교시-1]

(상략)

교　사: 그러면 이제부터 정다면체에 대해서 함께 생각해 보려고 해요. 여기 오른쪽에는 정다면체인 입체도형을 모아 놓았고 왼쪽에는 정다면체가 아닌 입체도형을 모아 놓았어요. 이 두 부류의 입체도형을 비교하면서 정다면체를 뭐라고 약속하면 좋을지 서로의 의견을 말해 보도록 합시다.



학　생1: 정다면체인 입체도형은 모든 면이 정삼각형이거나 정사각형, 정오각형이에요. 아, 그러면 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있는 입체도형이라고 약속하면 될 것 같아요.
학　생2: 선생님! 그러면 저 입체도형도 정다면체가 될 수 있는 거 아니에요?



교　사: 그래요? 왜 그렇다고 생각하나요?
학　생2: 저 입체도형도 모든 면이 합동인 정삼각형으로 이루어졌어요.
교　사: <u>㉠지금은 정다면체가 무엇인지 약속하려고 하는 거니까 미리 정해져 있다고 주장하기보다는 학생 2가 말하는 입체도형이 왜 정다면체가 될 수 없는지 그 이유를 구체적으로 말해 주면 정다면체가 무엇인지 약속하는 데 도움이 될 거에요.</u>
학　생1: 오른쪽에 놓인 입체도형은 다른 특징을 가지고 있는 것 같아요.
교　사: 그러면 우리가 아까 정다면체가 무엇인지 약속한 것에다 어떤 것을 추가하면 될까요?
학　생1: 아까 정한 약속에다가 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같다는 것을 추가하면 되겠네요.
학　생2: 학생 1의 말을 들으니 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져야 하고, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 모두 같은 입체도형으로 약속하면 될 것 같아요.
교　사: 지금까지 여러분의 토론을 종합해 보면 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 모두 같다는 것으로 약속할 수 있어요.

(하략)

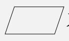
5-1. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 학교 수학에서 인지적 능력 개발 및 정의적 태도 개선과 더불어 인성 함양을 강조하고 있다. 위의 상황에서 교사는 학생들이 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 함양하기 위한 수업을 하고 있다. 밑줄 친 ㉠에서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정이 제시하는 인성 함양을 위한 교수·학습 방법 관련 유의사항을 어떻게 반영하고 있는지 설명하시오. [10점]

5-2. '프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 과정으로서 국소적 조직화'와 '사회적 구성주의에 따른 수학적 지식의 구성 과정에서의 사회적 합의'에 대하여 각각 기술하고, 이와 각각 관련지어 위 수업에서 나타난 교수·학습 과정을 설명하시오. [20점]

6. (가)는 정 교사와 박 교사가 평행사변형의 지도에 대해 나눈 대화의 일부이고, (나)는 박 교사가 중학교에서 평행사변형의 성질을 지도하는 수업의 일부이다.

(가)

정 교사: 완성된 수학의 논리적인 전개 순서를 반영하여 평행사변형의 성질을 지도하는 것이 수월하다고 생각해요. 평행사변형의 정의를 먼저 제시한 후 그 성질들 각각을 정당화하도록 하는 방식이 논리적이지 않나요?

박 교사: 저는 다른 방식으로 지도합니다. 학생들에게 평행사변형의 정의를 처음부터 제시하지 않고, 처럼 생긴 도형을 평행사변형으로 부르도록 안내한 후 평행사변형의 성질을 먼저 찾아보게 합니다. 그런 다음, ㉠ <u>학생들이 찾은 평행사변형의 성질들이 서로 어떻게 관련되는지를 탐구하게 합니다</u>.

(나)

박 교사: 여러분, 평행사변형은 어떤 성질이 있는 도형인지 말해봅시다.

학 생 1: 평행사변형은 두 쌍의 대변이 각각 평행하고 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같고, 두 대각선은 서로를 이등분해요. 그리고 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같고, 이웃하는 두 내각의 크기의 합은 180° 예요.

박 교사: 잘 알고 있네요. 그럼 여러분이 찾은 평행사변형의 성질들 사이의 관계를 살펴봅시다. 서로 어떤 관계가 있을까요?

학 생 1: 평행사변형에서 두 쌍의 대변이 각각 평행하다는 것과 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다는 것은 서로 관계가 없는 것 같은데요. 잘 모르겠어요.

프로이덴탈(H. Freudenthal)의 국소적 조직화 관점에서 (가)의 박 교사가 밑줄 친 ㉠을 통해 평행사변형의 정의를 지도하는 방식을 지칭하는 용어를 쓰고, 그 방식을 설명하시오.

또한 반 힐레(P. van Hiele)의 기하 학습 수준 이론에서 학습 수준을 제1수준～제5수준으로 구분할 때, (나)에서 학생 1의 기하 학습 수준을 쓰고, 그렇게 판단한 근거를 설명하시오. [4점, 서술형B-4] [2023]

<함수(미적분 포함)>

1. 역사발생적 원리에 따라 수학 수업을 하려면, 수학적 지식을 완성된 결과가 아니라 수학화의 과정으로 다루어야 한다. [총 6점] [1999-4]

> (가) 물체의 운동을 연구하면서 함수의 개념화가 시작되었고, 이 때 양의 가변성과 종속성이 함수 관계로 표현되었다(1단계). 수학의 발전과 더불어 함수 개념의 외연은 확장되었고 그 내포 또한 변화되었다(2단계). 마침내 19세기에 Dirichlet는 대응으로서의 함수를 정의하였다(3단계)
>
> (나) 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응될 때, 이 대응 f를 X에서 Y로의 함수라 한다(제 6차 교육과정, 고등학교 공통수학)

(1) 역사발생적 원리에 따라, (가)를 참고하여 (나)를 지도하는 수업을 계획하고자 한다. (가)의 1단계를 반영한 학습활동, 2단계를 반영한 학습활동을 각각 제시하시오. [4점]

(2) (가)를 고려하지 않고 (나)를 지도함으로써 생길 수 있는 문제점을 제시하시오. [2점]

2. 미적분학의 역사에서 뉴턴, 라이프니츠, 페르마의 업적을 비교하여 약술하시오. [5점] [2000-12]

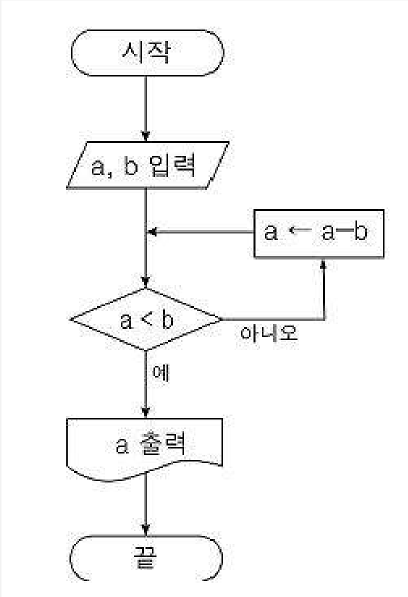
3. 다음은 무한수열의 수렴에 관한 수업에 앞서 최 교사가 교과서와 교사용 지도서를 분석하면서 기록한 내용이다.

> ① 교과서에서는 직관적이고 자연스러운 사고에 따라 무한수열의 수렴을 정의한다.
>
> ② 지난 해에 ①과 같이 정의를 배운 학생 중에는 ‘1, 1, 1, 1, …’과 같은 상수수열이 수렴하지 않는다는 오개념을 가진 경우가 있었다.
>
> ③ 바이어슈트라스(Weierstrass)는 엄밀하지만 <u>자연스러운 사고에 역행하는</u> 방식으로 무한수열의 수렴을 정의하였다.

①과 ③에서 ‘무한수열의 수렴의 정의’를 각각 제시하고, 이를 토대로 최 교사가 ③에서 ‘자연스러운 사고에 역행한다’고 판단하는 근거를 쓰시오. 또한 ②에 제시된 오개념의 원인을 ①과 관련하여 구체적으로 쓰시오. [5점] [2007-5]

- 무한 수열의 수렴의 정의
- 판단 근거
- 오개념의 원인

4. 알고리즘은 문제해결에 필요한 유한 번의 계산 절차 또는 처리 순서를 말한다. 음이 아닌 정수 a와 자연수 b에 대해 어떤 값을 구하는 알고리즘을 다음과 같이 순서도로 표현하였다.



이 알고리즘은 컴퓨터가 자료를 처리하는 특정 방식을 반영하고 있다. 수열의 정의에서 사용되기도 하는 이 방식이 무엇인지, 이 알고리즘이 입력값 a, b에 대하여 어떤 값을 출력하는지 각각 쓰시오. 그리고, 이미 익숙한 연산을 '알고리즘과 순서도'로 수학 교과에서 지도하는 의의를 이 사례와 관련하여 쓰시오.[5점] [2007-6]

- 방식
- 출력값:
- 지도의 의의

5. 다음은 함수 개념을 도입할 때 사용할 수 있는 예이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-3]

(가) 매분 $2\,\mathrm{km}$의 속력으로 직선 운동하는 기차가 P 지점을 지난지 x분 후에 P 지점으로 $y\,\mathrm{km}$ 떨어진 지점을 지난다. x, y 사이의 관계식을 표로 나타내어라.

(나) 넓이가 $12\,\mathrm{cm}^2$ 인 직사각형의 가로의 길이가 $x\,\mathrm{cm}$이면 세로의 길이는 $y\,\mathrm{cm}$이다. x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.

(다) 다음 그림에서 각 나라와 그 나라의 수도를 연결하여라.

중국	도쿄
일본	베이징
대한민국	파리
영국	런던
프랑스	서울

<보기>

ㄱ. 역사 발생적 원리에 따라 함수 개념을 지도한다면 (가)와 (나)로부터 출발하여 (다)로 나아가는 것이 바람직하다.

ㄴ. 집합론을 토대로 한 현대 수학에서는 함수 개념을 (가)와 (나)가 아니라 (다)와 같은 맥락으로 설명한다.

ㄷ. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 초등학교에서 지도하게 하고, 중학교에서는 (다)와 같은 맥락만으로 함수 개념을 도입하게 하였다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 어떤 수학적 개념이 구성되기 위해서는 그림과 같이 구체적인 ‘행동’이 정신적인 ‘과정’이 되고, 그 ‘과정’이 하나의 ‘대상’으로 인식된 후 구조화되어 ‘스키마’가 되는 단계를 거치게 된다.

행동 Action	⇨	과정 Process	⇨	대상 Object	⇨	스키마 Schema
			⇑ [단계 A]			

다음 사례 중 그림에서 지시하는 [단계 A]와 가장 거리가 먼 것은? [2점] [2009-8]

① 자연수를 끝없이 셀 수 있다는 가능적 무한(potential infinity)의 개념에서 완결된 무한 즉, 현실적 무한(actual infinity)을 인식하는데 이르게 되었다.

② 점화식 $a_{n+1}=2a_n+1$로 정의된 수열의 첫 번째 항이 1로 주어진 것으로부터 그 다음의 3개 항이 3, 7, 15임을 알게 되었다.

③ 삼각형과 삼각형이 아닌 것을 구별하던 아동이 삼각형의 성질에 관심을 가지게 되었다.

④ ‘2+3=5’를 ‘2와 3을 더한 결과가 5’라고 생각하는 것을 넘어서 ‘2+3’과 ‘5’가 동등한 의미를 가지는 것으로 생각하게 되었다.

⑤ 실수의 집합에서 두 실수를 대응시키는 함수를 다루다가 함수를 원소로 하는 새로운 집합을 생각하게 되었다.

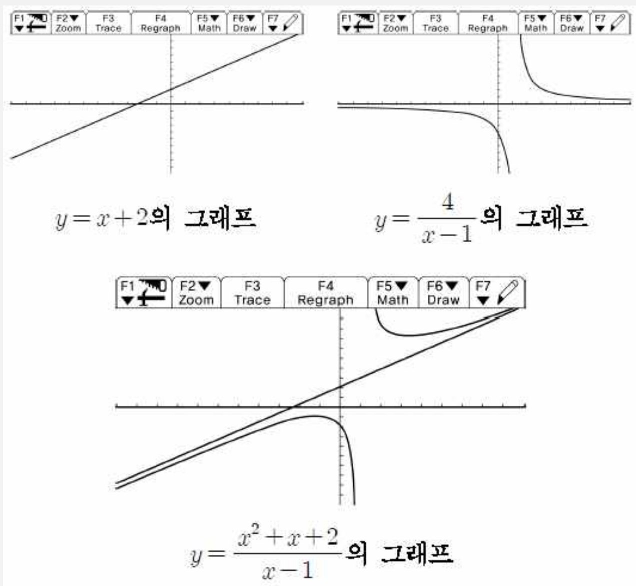
7. 다음 수업 상황에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2점] [2009-12]

교　사: 이번 시간에는 유리함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프를 그려보겠습니다. 먼저 이 그래프의 특징에 대해 알 수 있는 것을 자유롭게 이야기해 봅시다.

학 생A: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 y값을 더해서 그릴 수 있지 않을까요?

학 생B: $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 $x\to\pm\infty$일 때 직선 $y=x+2$와 비슷해질 것 같습니다.

교　사: 그러면 그래프 계산기로 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 두 함수를 더해 보면서 여러분이 생각했던 것을 확인해 봅시다.



$y=x+2$의 그래프　　$y=\dfrac{4}{x-1}$의 그래프

$y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프

교　사: 다음 시간에는 도함수를 이용하여 이 그래프의 개형을 그려 보겠습니다.

① 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 관찰하는 국소적 접근과 함수의 정의역 전체에서 그래프를 해석하는 전체적 접근을 통합하여 함수의 그래프를 지도하고 있다.

② 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 번역 활동을 통하여 이와 유사한 문제의 해결에서 유리함수의 개념을 유연하게 활용할 수 있도록 지도하고 있다.

③ 그래프 계산기를 사용하여 직선, 쌍곡선을 비롯한 여러 가지 그래프를 구체적으로 그려보고 있으므로 이 수업은 ‘수학적 다양성의 원리’를 적용한 것이다.

④ 대수식의 시각화를 통하여 유리함수와 관련된 추측이 참임을 확인하는 경험적 정당화 활동을 하고 있다.

⑤ 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 연계성을 통하여 학생들에게 대수식 조작의 의미를 반성하도록 하고 있다.

8. 〈A〉와 〈B〉에 대한 설명으로 적합하지 <u>않은</u> 것은? [2.5점] [2010-5]

〈A〉

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, $E \subset \mathbb{R}$일 때, 함수 $f : E \to \mathbb{R}$, $a \in E$라 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해서 적당한 $\delta(\varepsilon) > 0$가 존재하여 $|x-a| < \delta$인 모든 $x \in E$에 대해서 $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$이면, f는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

〈B〉

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

(ⅰ) 함숫값 $f(a)$가 정의되고,

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하며,

(ⅲ) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$를 만족할 때,

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① 〈A〉는 해석학의 산술화 결과로 만들어진 함수의 연속성에 대한 정의이다.
② 〈B〉는 〈A〉를 학생의 사고와 실제적 상황을 고려하여 탈개인화(depersonalization) 및 탈배경화(decontextualization)한 결과이다.
③ 〈A〉를 〈B〉로 변환하는 과정에서는 교사, 학생, 지식 사이의 삼원적 관계 속에서 교수 상황을 고려해야 한다.
④ 〈B〉는 x의 값이 변화함에 따라 $f(x)$의 값이 변화해 가는 과정에 초점을 맞춘다.
⑤ 〈A〉는 한 점 근방에서 근접성을 보존한다는 아이디어를 개념화한 것이다.

9. 다음은 어느 교사가 수학Ⅰ '수열의 수렴과 극한값 계산'을 지도한 수업 장면이다. 이 교사는 수열의 수렴을 정의하고 극한값 구하는 문제를 풀이한 다음, 그 결과를 그래프 계산기로 보여주고 있다. 이 수업 장면에 대한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2011-12]

〈수열의 수렴 정의〉

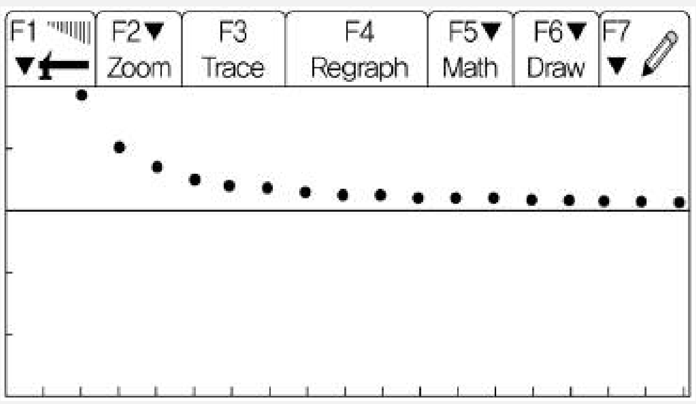
수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 이 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 극한값 또는 극한이라 한다.

기호: $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$일 때, $a_n \to \alpha$

[문제] $\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-1}$의 극한값은?

[풀이] $\lim_{n \to \infty} \dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-1} = \lim_{n \to \infty} \dfrac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{3+0-0}{1-0} = 3$

[그래프 계산기 결과 화면]



① 그래프 계산기로 그린 수열 그래프를 수학적 대상으로 조작함으로써 학생이 추측하도록 유도하고 있다.
② 그래프 계산기를 사용한 시각화를 통해 즉각적인 피드백을 제공하고 있다.
③ 이 수렴 정의는 학생에게 상수(constant) 수열의 극한값이 존재하지 않는다는 오개념을 유발시킬 수 있다.
④ 이 수렴 정의는 직관적 정의로서 n이 변함에 따라 a_n이 변화하는 동적인 측면을 표현하고 있다.
⑤ '한없이 커질 때⋯ 한없이 가까워진다.'는 학생이 수열의 수렴을 일상적 언어로 이해하도록 정의한 것이다.

10. 미적분의 역사적 발달과 관련한 설명 중 옳지 않은 것은? [1.5점] [2012-7]

① 고대 그리스 시대에는 극한 개념이 없었기 때문에, 아르키메데스(Archimedes)는 실진법(착출법, method of exhaustion)으로 포물선과 할선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하였다.

② 갈릴레이(G. Galilei)는 낙하하는 물체가 움직인 거리는 그 물체의 속도를 나타내는 직선과 시간 축 사이에 생기는 삼각형의 넓이라고 보는 관점을 제시하였다.

③ 카발리에리(B. Cavalieri)의 불가분량법(method of indivisibles)에서 평면도형의 불가분량은 현이고, 입체도형의 불가분량은 단면이다.

④ 뉴턴(I. Newton)이 미분의 아이디어를 설명할 때 아주 작은 양 o을 사용한 것에 대해 버클리(G. Berkeley)는 o을 엄밀하지 않게 이중적으로 사용했다고 비판하였다.

⑤ 라이프니츠(G. Leibniz)는 물체의 운동과 그 변화를 나타내기 위해 역학적 관점에서 미분의 아이디어를 생각하였다.

11. 다음은 중학교 수업에서 유리수와 순환소수의 관계를 지도하는 상황의 일부이다.

교 사: 지난 시간에 여러분은 순환소수를 배웠어요. 오늘은 유리수와 순환소수의 관계를 배워 봅시다. 순환소수의 예를 한 가지만 들어 볼까요?

학 생: $0.99999\cdots$가 있습니다.

교 사: 좋아요. 순환소수 $0.99999\cdots$에서는 9가 무한히 반복되는데, 그렇다면 $0.99999\cdots$는 1과 같을까요?

학 생: 1에 아주 가까이 가기는 하지만 1은 아닐 것 같습니다.

교 사: 그럼 $0.99999\cdots$를 분수로 고쳐서 1과 같은지 알아봅시다.

$$x = 0.99999 \cdots\cdots\cdots ①$$

라고 놓읍시다. ①의 양변에 10을 곱하면

$$10x = 9.99999 \cdots\cdots\cdots ②$$

이고, ②에서 ①을 변끼리 빼면

$$9x = 9$$

이므로 $x = \frac{9}{9} = 1$입니다.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2012-11]

<보기>

ㄱ. 학생의 순환소수에 대한 생각에는 가능적 무한(잠재적 무한, potential infinity) 개념이 반영되어 있다.

ㄴ. APOS(Action Process Object Schema) 이론에 의하면 교사가 지도하는 극한 개념은 학생의 극한 개념이 '내면화' 된 수준에 해당한다.

ㄷ. 교사가 $0.99999\cdots = 1$임을 보이는 과정은 무한급수가 수렴하지 않는 경우에 적용하였을 경우 모순된 결과를 가져올 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 함수의 역사적 발달과 관련된 설명 중 옳은 것은? [1.5점] [2013-8]

① 함수는 주로 정적인 맥락, 즉 여러 상황에 대한 동시 고려의 필요성이 제기되는 맥락에서 17세기 무렵부터 의식적으로 사용되기 시작하였다.

② 함수 기호 $f(x)$는 17세기말 라이프니츠(G. W. Leibniz)와 베르누이(J. Bernoulli)의 서신 교환에서 사용되었다.

③ 오일러(L. Euler)는 함수를 '어떤 양이 다른 양에 종속된다면 후자의 함수'라고 표현하였고, 이후에 '변하는 것과 어떤 상수가 결합된 크기'로 새롭게 표현하였다.

④ 디리클레(Dirichlet) 함수의 출현은 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해지는 결정적 계기가 되었다.

⑤ 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합 이론에 기초하여 '순서쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때, 그 부분 집합을 함수로 정의하였다.

13. 다음은 역사 발생적 원리에 대한 설명과 예비 교사가 작성한 수업 계획서의 일부이다.

(가) 역사 발생적 원리

수학이 발생된 것으로 파악하고 학습자가 학습 과정에서 수학의 발생을 경험하게 하는 원리이다. 이 원리는 클레로(A. Clairaut), 클라인(F. Klein), 퇴플리츠(O. Toeplitz) 등이 주장하였다.

(나) 수업 계획서

- 단원 제목: 삼각함수
- 지도 순서

1단계		2단계		3단계		4단계
함수 정의하기	⇨	표로 나타내기	⇨	그래프로 그리기	⇨	현실에 응용하기

-1단계에서는 함수 $y=\sin x$를 정의한다.

-2단계에서는 함수 $y=\sin x$에서 x와 y사이의 관계를 표로 나타낸다.

-3단계에서는 2단계에서 작성한 표를 바탕으로 그래프를 그린다.

-4단계에서는 함수 $y=\sin x$와 관련된 응용문제를 다룬다.

역사 발생적 원리에 따라 수학 수업을 진행할 때, 수학 교수・학습에서의 의의를 1가지 쓰시오. 또한 이 원리에 기초하여 (나)에서 제시한 지도 순서를 재구성하고, 그 이유를 지도 내용과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형A-9] [2016]

14. 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 함수 영역에서는 함수 개념을 도입하기 전에 다양한 상황을 그래프로 나타내고 해석하는 것을 다루도록 하고 있다. 이에 두 예비 교사 A와 B는 함수 그래프 지도 이론과 기존의 교과서 자료를 이용하여 함수 영역에 추가된 성취기준에 대한 수업을 설계해 보았다.

다음은 설계한 수업의 [학습 목표], [(가) 예비 교사 A의 활동지], [(나) 예비 교사 B의 활동지]이다. 두 활동지 (가)와 (나)에 기초하여 그래프 지도 방식을 비교하고, (가)와 (나)를 이용하여 수학 수업을 실행하기 위해 수업 장면에서 교사가 살펴보아야 할 사항을 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B-8] [2017]

[학습 목표]

학습 목표(성취기준): 다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다.

[(가) 예비 교사 A의 활동지]

※ 그림과 같은 3개의 용기에 일정한 속도로 물을 따른다고 할 때, 물음에 답하시오.

(ㄱ) (ㄴ) (ㄷ)

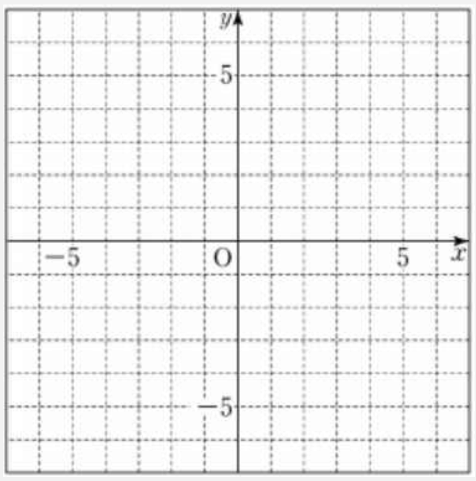
1. 각 용기에 물을 채울 때 시간에 따라 변하는 물의 높이를 대략적인 그래프 개형으로 나타내어 보시오.
2. 그래프를 보고 시간에 따른 물의 높이의 변화를 설명해 보시오.

[(나) 예비 교사 B의 활동지]

1. 1분에 1L씩 일정한 속도로 물이 나오는 수도꼭지에 물통에 물을 받고 있다. 물을 받는 시간을 x(분), 받은 물의 양의 y(L)라 할 대, 다음 표를 완성하시오.

x(분)	1	2	3	4	5
y(L)					

2. 위의 표를 이용하여 다음 좌표평면 위에 그래프를 그리시오.



3. 위의 그래프를 보고 받은 물의 양의 변화를 설명하시오.

〈작성 방법〉

- 크라벤담(H. Krabbendam)의 질적 접근과 양적 접근의 관점에서 그래프 지도 방식을 비교하여 제시할 것.
- 폴리아(G. Polya)의 문제해결 이론에 근거하여 (가)와 (나)의 문제를 해결하는 반성 단계에서 적절한 교사의 공통 발문 1가지와 그 발문이 적절한 이유를 제시할 것.
- (가)와 (나)를 이용하는 수업 장면에서 주의해야 할 극단적인 교수학적 현상을 수업 상황과 관련지어 각각 1가지씩 다르게 제시할 것.
- 중학교 함수 영역의 그래프에 대한 교수·학습 방법에서 유의해야 할 사항을 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 근거하여 제시할 것.
- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.

15. 다음은 함수와 관련한 수학사 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 함수 개념이 발생한 순서대로 배열하시오. [2점, 기입형A-1] [2020]

(가)	고대 바빌로니아나 그리스에서 천문학을 연구했던 사람들은 태양, 달, 행성 등의 변화를 관찰하여 수표를 작성하였다. 이 시기 사람들은 수표를 사용하여 천체 운동을 서술하고 주기성을 발견하였다. 삼각함수의 기원을 이 시기에서 찾을 수 있다.
(나)	비에트(F. Viète)가 문자를 사용하는 방식을 발전시키고 데카르트(R. Descartes)가 해석기하학을 창안한 것에 기초하여 함수를 대수적으로 연구하게 되었다. $f(x)$라는 기호를 처음으로 사용한 오일러(L. Euler)는 변수와 상수가 결합된 방식에 따라 함수를 분류했다. 이 시기에 이르러 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해졌다.
(다)	해석학을 엄밀하게 만들기 위해 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 연구가 이루어졌다. 데데킨트(R. Dedekind), 칸토어(G. Cantor) 등이 실수의 구조를 엄밀하게 하여 해석학을 발전시켰다. 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합론에 기초하여 '순서쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때 그 부분집합을 함수로 정의하였다.
(라)	이 당시 학자들은 주로 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 곡선의 접선, 곡선 아래의 넓이, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 연구하였다, 갈릴레이(G. Galilei)는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리와 시간의 관계를 연구하였는데, 과학에서 이루어진 운동에 대한 연구가 함수를 개념화하는 데 기여하였다.
(마)	푸리에(Fourier) 급수나 디리클레(Dirichlet) 함수에 대한 연구 결과로 인하여 함수 개념을 새롭게 정의할 필요성이 생겨났다. 일가성과 임의성을 가지는 대응으로 함수를 정의함으로써 한 변수의 각 값에 다른 변수의 유일한 값이 대응되느냐 되지 않느냐라는 논리적 조건에만 관심을 갖게 되었다.

16. 두빈스키(E. Dubinsky)는 스키마 구성을 설명하는 APOS 이론을 제안하였다. A는 행동(Action), P는 과정(Process), O는 대상(Object), S는 스키마(Schema)를 의미한다. 다음은 수학교육론 강의 시간에 교수가 APOS 이론을 설명하기 위해 제시한 두 고등학생의 학습 일지이다.

민수의 학습 일지

나는 $(5x^3+x^2-4x-2)\div(x-2)$와 같은 형태의 나눗셈 문제를 조립제법으로 풀 수 있다. 그런데 선생님께서 오늘 수업 시간에 조립제법에서 사용하는 여러 값을 차례로 입력하면 나눗셈 결과가 나오는 컴퓨터 프로그램을 보여주시면서, 프로그램 안에 포함된 계산 과정을 설명해보라고 하셨다. 이 컴퓨터 프로그램을 잘 모르는 내 친구는 잘 설명했는데, 이 프로그램을 잘 다루는 나는 설명하지 못해서 속상했다.

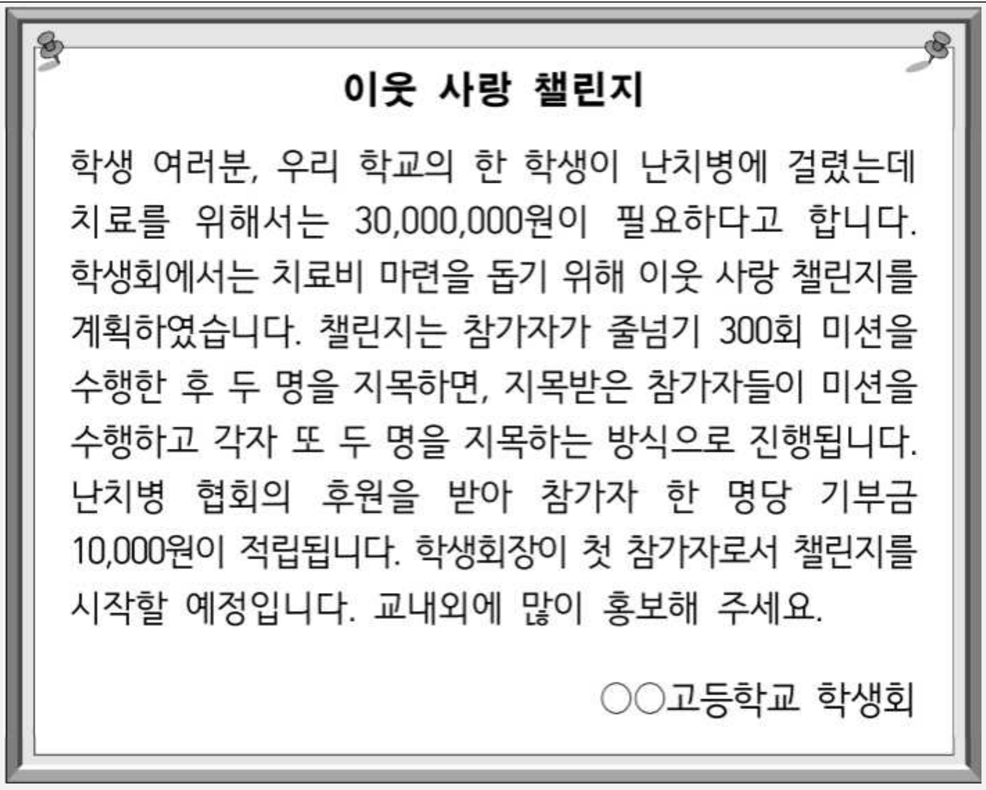
재희의 학습 일지

나는 오늘 수업 시간에 함수와 관련된 어려움을 겪었다. "두 함수 f, g의 합 $f+g$를 두 수의 합 $2+1$처럼 생각하면 된다."라고 하신 선생님 말씀이 잘 이해되지 않았다. 내가 아는 함수는 x의 값을 넣으면 y의 값이 나오는 것이었는데…. "함수 f나 g를 2나 1과 같은 수처럼 다룰 수 있을까?"라는 의문이 들었다.

민수의 학습 일지에 서술된 상황을 '행동' 및 '과정'과 관련지어 설명하고,

재희의 학습 일지에 서술된 상황을 '과정' 및 '대상'과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형A-5] [2020]

17. 다음은 ○○고등학교의 학생회가 주최하는 행사의 포스터를 보고 두 교사가 나눈 대화이다.



이웃 사랑 챌린지

학생 여러분, 우리 학교의 한 학생이 난치병에 걸렸는데 치료를 위해서는 30,000,000원이 필요하다고 합니다. 학생회에서는 치료비 마련을 돕기 위해 이웃 사랑 챌린지를 계획하였습니다. 챌린지는 참가자가 줄넘기 300회 미션을 수행한 후 두 명을 지목하면, 지목받은 참가자들이 미션을 수행하고 각자 또 두 명을 지목하는 방식으로 진행됩니다. 난치병 협회의 후원을 받아 참가자 한 명당 기부금 10,000원이 적립됩니다. 학생회장이 첫 참가자로서 챌린지를 시작할 예정입니다. 교내외에 많이 홍보해 주세요.

○○고등학교 학생회

윤 교사: 학생들이 자발적으로 좋은 일을 하고 있네요. 선생님들도 동참해야겠어요.

강 교사: 네, 학생들이 정말 대견하네요. 저는 이 행사를 홍보하고 추진하는 데 도움을 주고자 수학 수업에서 이 내용을 다뤄 보고자 해요.

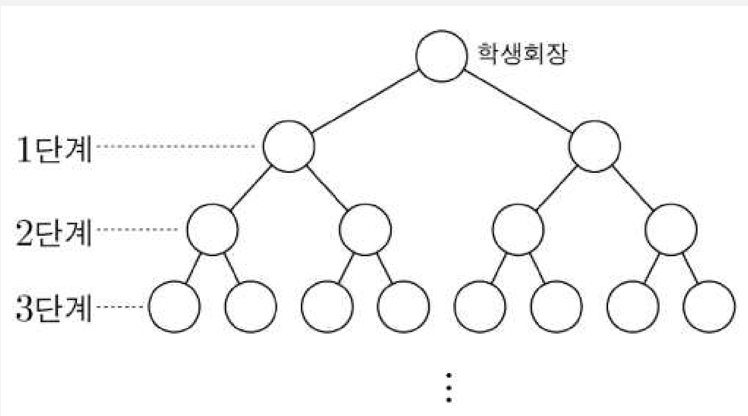
윤 교사: 어떻게요?

강 교사: ㉠크라벤담(H. Krabbendam)의 그래프에 대한 질적 접근 관점에서 이웃 사랑 챌린지가 진행되는 상황을 다루는 수업을 해 볼까 합니다.

윤 교사: 그 후에 ㉡그래프를 좀 더 정확하게 표현하는 정교화 활동을 하면 어떨까요?

강 교사: 네, 수업에 반영해 보겠습니다.

윤 교사: 저도 이웃 사랑 챌린지를 수업에서 다뤄 봐야겠어요. 학생들이 기획한 이웃사랑 챌린지를 실세계 현상으로 하여 30,000,000원을 모으려면 최소 몇 단계까지 미션을 수행해야 하는지 알아보게 하는 거죠. 물론 학생들이 계획한 대로 이상적으로 진행된다고 가정해서요.



강 교사: 학생들이 수학적 모델링도 경험할 수 있는 좋은 아이디어 같아요.

밑줄 친 ㉠에 포함해야 할 활동을 서술하고, 밑줄 친 ㉡의 예를 1가지 제시하시오.

또한, 윤 교사의 수업에서, 이웃 사랑 챌린지가 이상적으로 진행된다고 가정할 때 학생들이 실세계 현상으로부터 만들어야 할 수학적 모델과 도출해야 하는 결론을 각각 쓰시오. [4점, 서술형A-5] [2022]

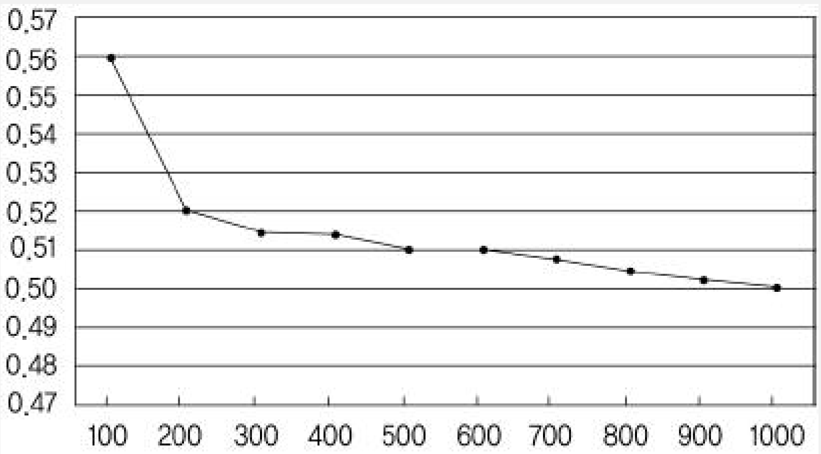
〈확률과 통계〉

1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [20점] [2009모의 2차, 1교시-2]

(가) **김 교사가 지도한 중학교 2학년 '확률의 뜻'에 대한 수업 내용 요약**

다음은 한 개의 동전을 여러 번 반복하여 던졌을 때, 앞면이 나온 횟수를 조사하고 그 상대도수를 구하여 표와 그래프로 나타낸 것이다.

던진 횟수	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
앞면이 나온 횟수	56	104	154	205	255	306	355	403	452	500
앞면이 나온 상대도수	0.5600	0.5200	0.5133	0.5125	0.5100	0.5100	0.5071	0.5038	0.5022	0.5000



동전을 던진 횟수가 많아질수록 상대도수는 일정한 값 0.5에 가까워진다.

같은 조건 아래에서 실험이나 관찰을 여러 번 되풀이할 때, 어떤 사건 A가 일어나는 상대도수가 일정한 값에 가까워지면 이 일정한 값을 사건 A가 일어날 확률이라고 한다.

그러나 실험이나 관찰을 여러 번 하지 않더라도 다음과 같이 확률을 생각할 수 있다.

일반적으로 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 어떤 사건 A가 일어날 수 있는 경우의 수가 a이면 사건 A가 일어날 확률 p는 다음과 같다.

$$p = \frac{(\text{사건 } A\text{가 일어날 경우의 수})}{(\text{모든 경우의 수})} = \frac{a}{n}$$

(나) **확률에 대한 중학교 2학년 학생 갑의 수학 일기**

오늘은 수학 시간에 확률에 관하여 학습하였다.

주사위를 던졌을 때, 나올 수 있는 경우는 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 모두 6가지이다. 1의 눈이 나올 수도 있고 나오지 않을 수도 있기 때문에 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 그러고 보니 모든 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 왜냐하면 어떤 사건이 일어나는 경우와 일어나지 않는 경우로 항상 생각할 수 있기 때문이다. 그럼 오늘 우리나라에서 지진이 일어날 수도 있고 지진이 일어나지 않을 수도 있기 때문에 지진이 발생할 확률은 $\frac{1}{2}$이 된다. 동전을 던져서 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$인데, 그러면 지진 발생 확률과 동전을 던졌을 때 앞면이 나올 확률이 같다는 말인가? 아휴, 머리가 아프다. 내일 선생님께 여쭈어보아야겠다!

1-1. 중학교 2학년에서 (가)와 같이 확률 개념을 직관적으로 도입할 경우, 학생들은 확률에 대한 오개념을 가질 수 있다. (가)에서 확률에 대한 오개념을 일으킬 수 있는 부분 2가지를 찾아 쓰고, 관련된 오개념 2가지를 설명하시오. 또, '큰수의 법칙'을 쓰고, 이를 이용하여 수학적 확률과 통계적 확률 사이의 관계를 설명하시오. [10점]

1-2. (나)와 같이 생각하고 있는 학생 갑의 확률에 대한 오개념을 분석하고, 그와 같은 오개념을 갖고 있는 학생에게 정육면체와 직육면체 주사위를 사용하여 확률 개념을 지도할 수 있는 방안을 제시하시오. [10점]

2. 다음은 학생들의 수학적 의사소통 능력을 신장하기 위해 만든 문제 [가]와 학생들의 대화 [나]이다. [가]와 [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? [2점] [2010-13]

[가] 문제

〈A〉는 어떤 두 학급의 수학 성적을 각각 50점 미만인 집단과 50점 이상인 집단으로 나누어 비교한 것이다. 이로부터 추론해낼 수 있는 것을 말해보시오.

반	집단별 평균		학급 평균
1	50점 미만	20	45
	50점 이상	80	
2	50점 미만	10	60
	50점 이상	70	

〈A〉 1반과 2반의 수학 성적 비교

[나] 학생들의 대화

예 리: ㉠ <u>두 집단의 평균이 모두 높은 1반이 오히려 평균은 2반보다 낮다는 것은 불가능해.</u>

효 진: 〈A〉에서 학급 평균이 아니라 최빈값을 구한 것은 아닐까?

예 리: 만일 모든 학생의 성적이 다르면 최빈값이 0이지.
그러니까 최빈값으로 두 반을 비교하는 것은 의미가 없어.

효 진: 어떤 점수에 해당하는 학생 수가 가장 많으면 그 학생 수가 최빈값이니까 최빈값은 여러 개가 있을 수 있어. 그래서 최빈값으로 두 반의 성적을 비교하는 것이 의미가 없지.

예 리: 그럼 〈A〉에서 학급 평균이 아니라 중앙값을 구한 것은 아닐까?

효 진: 잘 모르겠다.

교 사: ㉡ <u>1반에서 50점 이상인 학생들과 50점 미만인 학생들 주 어느 쪽이 더 많을까요?</u>

예 리: 학급 평균이 역전될 수 있겠네요! 1반의 학생들 중 50점 이하가 절반이 넘으면 돼요.

효 진: 그렇구나. 그렇다면, 2반에서는 학생들 중 50점 이상이 절반이 넘겠네요.

① [가]는 수학적 추론을 요구하므로 의사소통 능력 신장을 위한 문제로 적합하지 않다.

② [가]의 정보가 부족하여 [나]에서 학생들이 ㉠의 옳고 그름을 정확히 판단하지 못하였다.

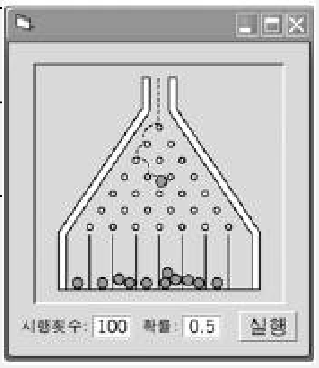
③ [나]에서 학생들이 거꾸로 풀기 전략을 이용하여 산포도를 구하고 있다.

④ [나]의 ㉡에서는 학생들이 해야 할 생각을 교사가 대신하여 주르뎅 효과(죠르단식 외면치레, Jourdain effect)가 나타났다.

⑤ [나]에서 예리와 효진이 모두 최빈값에 대한 오개념을 드러내고 있다.

3. 다음은 모의실험 프로그램을 활용한 수업이다.

교사: 오늘 수업에서는 컴퓨터로 모의실험을 해 볼 거예요. 위쪽에서 공을 떨어뜨리면 판 위에 규칙적으로 박혀 있는 못에 공이 부딪혀 바닥에 있는 빈칸 가운데 하나로 들어가게 돼요. 100개의 공을 하나씩 떨어뜨렸을 때 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수는 어떻게 분포될지 한번 예상해 보세요.



학생: 각 칸에 들어가는 공의 개수가 비슷할 것 같습니다.
교사: 그럼 이 프로그램으로 실험을 해 볼까요?
(모의실험 프로그램을 실행한다.)
교사: 자, 어떤 결과가 나왔나요?
학생: 각 칸에 들어간 공의 개수가 비슷하지 않습니다.
교사: 왜 그럴까요?
학생: 아무래도 가운데 칸으로 떨어지기가 쉬울 테니까 공이 양 끝에 있는 칸으로 떨어질 가능성이 가운데 칸으로 떨어질 가능성보다 낮을 것 같습니다.
교사: 그렇지요. 지금 여러분은 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-12]

<보기>

ㄱ. 위의 수업에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 발생하였다.
ㄴ. 위의 모의실험 프로그램은 중심극한정리(central limit theorem)를 학습할 수 있는 환경을 제공한다.
ㄷ. 위의 모의실험 프로그램은 이 수업에서 학생들의 학습을 안내하는 교사의 역할을 대신하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 확률과 통계의 교수·학습에 대한 논의 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-11]

<보기>

ㄱ. 물리적으로 비대칭적인 압정이나 윷은 라플라스(P.S. Laplace)의 고전적 확률 정의가 적용되지 않는 상황이 있음을 이해시키는 데 교수·학습 소재로 이용될 수 있다.
ㄴ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 의하면, 확률은 실험이나 관찰 상황에서 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.
ㄷ. 어느 도시 인구의 40% 정도가 안경을 쓴 사람이라고 할 때 5명 중 2명은 반드시 안경을 쓴 사람일 것이라 생각하는 것과 같이, 학생들이 ‘작은 표본이어도 모집단과 유사하다.’고 생각하는 경향은 교수·학습을 통해 교정되어야 할 필요가 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 다음은 중학교에서 확률 개념을 도입하는 수업의 일부이다. 이 수업 이전에, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 따라 ‘가능성’은 초등학교 5－6학년군에서 다루어졌고 ‘상대도수’, ‘사건’, ‘경우의 수’는 중학교에서 이미 다루어졌다고 하자.

김 교사: 오늘은 가능성의 크기를 어떻게 구하는지에 대해 공부하려고 해요. 이와 관련해 일어날 가능성이 가장 큰 사건을 찾는 활동을 해 봅시다. 예를 들어 두 주사위를 던졌을 때, 두 주사위의 눈의 합이 나올 수 있는 사건의 수는 11입니다. 합이 2인 사건부터 12인 사건까지 나올 수 있는 것이지요. 그 11가지 사건 중에서 일어날 가능성이 가장 큰 사건은 무엇일까요?

학생들: 11가지 사건이 일어날 가능성은 서로 같을 것 같은데요.

김 교사: 그러면 두 주사위를 던지는 실험을 통해 여러분의 예상이 맞을지에 대해 알아보도록 하지요.

12개의 모둠을 편성해서 모둠마다 두 주사위를 30번씩 던지고, 던진 횟수에 대해서 각 사건이 나온 횟수를 기입하는 방식으로 상대도수를 나타낸 아래의 표를 완성하였다.

	두 주사위의 눈의 합										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30회 상대도수	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(4)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$
60회 상대도수	$\frac{(2)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(11)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(1)}{60}$
⋮											
360회 상대도수	$\frac{(9)}{360}$	$\frac{(21)}{360}$	$\frac{(32)}{360}$	$\frac{(38)}{360}$	$\frac{(51)}{360}$	$\frac{(59)}{360}$	$\frac{(50)}{360}$	$\frac{(39)}{360}$	$\frac{(31)}{360}$	$\frac{(19)}{360}$	$\frac{(11)}{360}$

김 교사: 우리가 예상한 것과 상당히 다른 결과가 나온 이유가 뭘까요? 왜 그런지 생각해 봅시다.

학생 A: 제 생각에는 11가지 사건이 일어날 가능성이 원래부터 서로 같지 않아서 그런 것 같아요. 각 사건에 들어있는 경우의 수를 잘 세어야 해요.

김 교사: 그 가능성이 어떻게 서로 다른지에 대해 자세히 설명해줄 수 있나요?

학생 A: 네. 두 주사위의 눈의 합이 나오는 사건의 수는 11이 맞습니다. 하지만 두 주사위의 눈이 나오는 경우의 수는 $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $\cdots$, $(5,6)$, $(6,1)$, $\cdots$, $(6,6)$과 같이 36입니다.

이후, 학생 A는 두 주사위의 눈의 합이 2인 사건부터 12인 사건 각각에 포함된 경우들을 언급하면서, 전체 경우의 수에 대한 해당 사건에 포함된 경우의 수를 세어서 11가지 각 사건이 일어날 가능성이 $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$임을 설명하였다.

김 교사: 실험 결과에서 합이 2인 사건부터 12인 사건까지의 상대도수가 서로 비슷하지 않은 이유가 무엇인지 알겠어요?

학 생 들: 네. 알 것 같아요. 원래 가능성이 서로 달랐기 때문에 실험 결과에서도 서로 다르게 나온 것 같아요.

학생 B: 그러고 보니까, 학생 A가 제시한 각각의 가능성이 실험을 통해 나온 각각의 상대도수와 거의 같아요.

김 교사: 좋은 관찰입니다. …(중략)…어떤 사건이 일어날 가능성을 확률이라 합니다. 이제 우리가 오늘 했던 활동을 바탕으로 일반적으로 확률을 어떻게 구하면 될지 생각해 볼까요?

학생 A: 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때에는 그 사건에 들어있는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누면 구할 수 있어요.

학생 B: ㉠선생님, 다른 상황에서도 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때 각각의 경우는 항상 같은 가능성을 가지고 있다고 생각하면 되는 거지요?

김 교사: ㉡지금 질문한 내용이 중요합니다. 여러분이 확률을 구해야 하는 상황에서 흔히 잘못 생각하는 부분이 있어요. 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 던진다고 생각해 봅시다. …(중략)… 실험도 해 볼까요. …(중략)… 이런 점을 잘 고려해서, 어떤 사건이 일어날 확률은 어떻게 구하면 되고 이때 무엇에 유의해야 하는지 정리해 볼까요. …(하략)…

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 확률과 통계 영역 〈교수・학습상의 유의점〉 2가지 사항과 확률 직관에 대한 피시바인(E. Fischbein)의 이론을 적용하여, 김 교사는 ‘경우의 수의 비율’로 확률 개념을 도입하고 있다.

김 교사의 수업에서 확률과 통계 영역의 〈교수・학습 상의 유의점〉 2가지 사항이 각각 어떻게 적용되고 있는지 설명하시오. 그리고 학생이 확률을 배우기 이전부터 가지고 있던 ‘확률 직관의 특성’과 ‘확률 직관의 발달의 특성’에 대한 피시바인의 이론을 각각 설명하고, 위의 밑줄 친 ㉠과 ㉡에서 그러한 피시바인의 이론이 어떻게 적용되고 있는지 각각 설명하시오. [10점, 논술형B-1] [2014]

6. 다음은 투키(J. Tukey)가 제안한 탐색적 자료 분석의 관점을 적용한 중학교 3학년 통계 영역 수업의 일부이다.

김 교사: 지난 시간에 우리가 사는 지역의 환경 보전을 위하여 탄소 배출량 줄이기 프로젝트를 수행하기로 결정하였습니다. 프로젝트의 자료를 수집하기 위하여 전체 학생 647명 중 100명을 대상으로 설문 조사를 실시하였고 수집한 자료를 다음 표와 같이 정리하였습니다. 이 표를 이용하여 우리 지역 탄소 배출량 자료의 특징을 알아봅시다.

연번	탄소 배출량	가족 구성원 수	탄소 소비와 관련된 생활 특징
1	340.03	4	절수기를 사용함.
2	676.14	6	조부모님과 함께 거주함.
3	457.33		플러그 뽑기를 생활화함.
99	3503.1	4	가족이 외출하는 시간이 많음.
100	405.78	3	컴퓨터 사용 시간이 많음.

학생 A: 이 표만으로는 자료의 특징을 찾기 어렵습니다.

김 교사: 어떻게 하면 자료의 특징을 알 수 있을지 함께 생각해 봅시다.

학생 B: 저는 평균으로 자료의 특징을 찾아보려고 합니다.

김 교사: 평균과 같은 대푯값을 구해 보는 것도 좋은 생각입니다. 이와 같이 수치로 나타내는 방법 이외에도 자료의 특징을 쉽게 파악할 수 있는 다른 방법은 (㉠).

학생 B: 평균으로 자료의 특징을 찾아보려고 표를 살펴보니 빈칸이 하나 있고 99번의 탄소 배출량은 소수점이 잘못 표시되어 있는 것 같습니다. 이런 경우에도 평균을 이용해도 될지 궁금합니다.

김 교사: 좋은 질문입니다. 이와 같이 평균을 이용하기 어려운 상황에서는 (㉡).

…(하략)…

탐색적 자료 분석의 관점에서 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 김 교사가 제시할 수 있는 지도 내용을 각각 쓰시오. 그리고 탐색적 자료 분석의 관점에서 ㉠과 ㉡의 지도 내용이 적절한 이유를 서술하시오. [4점, 서술형A-9] [2017]

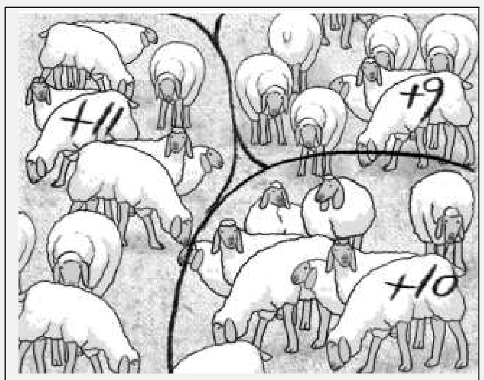
7. 다음은 김 교사가 베커(A. Bakker)의 통계 교육 이론에 기초하여 중학교 3학년 통계 단원 수업을 한 후 작성한 수업일지의 일부이다.

나는 도입 단계에서 다음과 같은 <자료>를 학생들에게 제시하며 통계가 현실과 단절된 수량적인 자료의 계산 체계가 아님을 알려주고자 하였다.

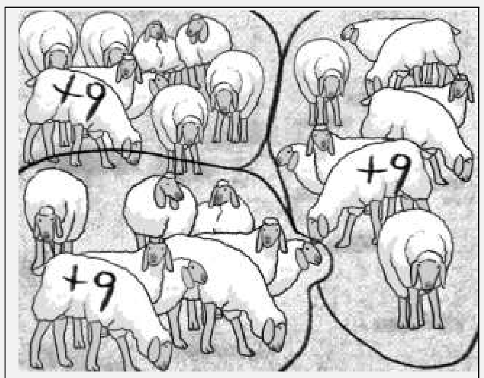
<자료>

어느 학자에 따르면, 역사적으로 평균 개념은 큰 수를 대략적으로 추정하기 위한 상황에서 활용되었다고 한다. 고대 인도의 이야기 속 주인공은 나무 한 그루에 달린 나뭇잎과 과일의 총수를 알아보기 위해 우선 평균 크기의 나뭇가지를 선택하고, 그 나뭇가지에 달린 나뭇잎과 과일 수를 헤아린 후 전체 나무에 달린 나뭇잎과 과일 수를 추정하였다.

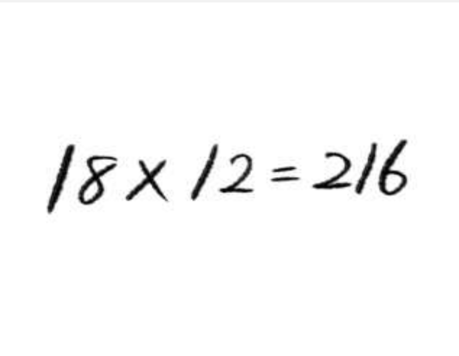
본시 학습에서는 그림 속 양의 개체수를 추정하는 활동 과제를 제시하였다. 각각의 학생들은 자신만의 큰 수 추정 방법을 활용하여 몇 마리의 양이 있는지를 (a), (b), (c), (d)와 같이 찾아내었다.



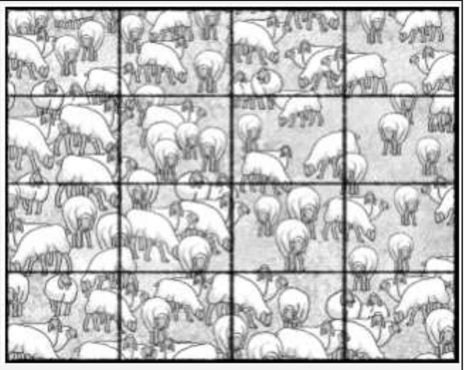
(a) 묶음을 만들어서 각 묶음에 실제로 몇 마리의 양이 있는지 세어 합하였다.



(b) 하나의 수를 먼저 정한 후, 그 수만큼의 양이 들어 있는 묶음을 표시하고 그 크기의 묶음이 몇 개인지를 어림하여 계산하였다.



(c) 그림의 위쪽 모서리와 오른쪽 모서리를 따라 각각 양의 수를 구한 후, 그 두 수를 곱하여 전체 양의 수를 어림하였다.



(d) 격자를 만들어 격자 속 양의 수가 평균적인 것에 해당되는 것을 고른 후 그 안에 들어 있는 양의 수를 세어 격자의 수에 곱하였다.

㉠학생들은 통계의 주요 개념의 역사를 살펴보면서 주어진 상황을 탐색하고, 상황 속 문제 해결의 방법을 배웠다.

베커의 이론에 기초한 통계 수업을 진행할 때 얻을 수 있는 교육적 의의를 위 수업일지에 근거하여 2가지 제시하시오. 그리고 ㉠과 관련지어 (a)와 (d)를 비교하여 설명하시오 [4점, 서술형B-3] [2021]

8. 다음은 ‘확률’에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교　사: 우리가 공부한 확률의 뜻을 이용해서 문제를 풀어보세요.

[확률의 뜻] 어떤 실험이나 관찰에서 각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 n, 어떤 사건 A가 일어나는 경우의 수를 a라고 하면 사건 A가 일어날 확률 p는

$$p=\frac{a}{n}$$

[문제] 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 4장의 카드 중에서 2장의 카드를 동시에 뽑아 각 카드에 적힌 두 수를 곱했을 때 1이 나올 확률을 구하시오,

교　사: <학생 A의 풀이>를 같이 볼까요?

<학생 A의 풀이>

카드에 적힌 수 1, 2를 서로 곱해서 나올 수 있는 값은 1, 2, 4로 모두 3가지이다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수는 3이므로, 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

교　사: <학생 A의 풀이>에 대하여 의견 있나요?

학생 B: 저는 다르게 풀었습니다. 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 6이므로, 답은 $\frac{1}{6}$입니다.

학생 A: 학생 B의 의견을 들어보니, 문제를 풀 때 ㉠[확률의 뜻]에서 제가 확인하지 않은 부분이 있네요.

…(중략)…

교　사: 이번에는 컴퓨터 프로그램을 이용해서 [문제]를 다시 살펴봅시다. 카드 2장을 뽑는 횟수를 입력하면 $\frac{\text{(두 수의 곱이 1이 되는 횟수)}}{\text{(카드 2장을 뽑는 횟수)}}$의 값이 나오는 모의실험 프로그램을 작성해 두었습니다. 여러분은 카드 2장을 뽑는 횟수만 입력하면 됩니다.

학생 B: 선생님, 10을 입력하니까 0.2, 30을 입력하니까 0.3, 50을 입력하니까 0.24가 나왔어요. $\frac{1}{6}$과는 차이가 큰 것 같아요.

학생 A: 저는 10을 입력하니까 0.4, 20을 입력하니까 0.4, 30을 입력하니까 0.2가 나왔어요. 저도 $\frac{1}{6}$과 차이가 큰 것 같아요.

교　사: 그럼 이렇게 해보세요. (　　　　㉡　　　　)

학생 B: 선생님 말씀대로 했더니 $\frac{1}{6}$에 가까워지는 값이 나오네요.

밑줄 친 ㉠의 ‘확인하지 않은 부분’이 무엇인지 쓰고, 학생 A가 ㉠과 같이 말한 이유를 <학생 A의 풀이>를 이용하여 설명하시오. 또한, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 교사의 발문 1가지를 쓰고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 [문제]를 다시 살펴본 의의를 폴리아(G. Polya)의 문제 해결 과정 중 반성 단계의 측면에서 서술하시오. [4점, 서술형B-4] [2022]

<Brousseau>

1. 다음은 공학 도구를 활용하여 피타고라스 정리의 기하학적 의미를 탐구하는 과정에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다. (단, 모든 학생들의 수학 지식이 9－나 단계의 수준을 넘지 않는다고 한다.)

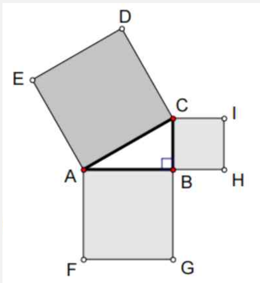
(김 교사는 공학 도구를 가지고 피타고라스 정리의 기하학적인 의미를 [그림 1]을 이용하여 설명한 후, 학생들에게 직접 작도하여 확인해 보도록 하였다.)

$\mathrm{BCIH} = 1.86\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{ABGF} = 5.80\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{CDEA} = 7.66\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{CDEA} - (\mathrm{BCIH} + \mathrm{ABGF}) = 0.00\mathrm{cm}^2$



[그림 1]

(진영이는 실수로 [그림 2]와 같이 직각삼각형이 아닌 삼각형을 작도하여 관찰하고 있다.)

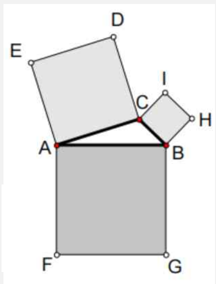
진영: (혼잣말로) 이렇게 그린 다음 … 이것을 움직이면 … 음 …….

$\mathrm{DEAC} = 4.92\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{FGBA} = 7.87\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{HICB} = 0.91\mathrm{cm}^2$

$\mathrm{FGBA} - (\mathrm{DEAC} + \mathrm{HICB}) = 2.04\mathrm{cm}^2$



[그림 2]

김 교사: ①아! 진영이는 제이코사인 법칙을 발견했구나. 정말 대단하네!

공학 도구를 활용한 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상 중 ①에 해당하는 것을 제시하고, 제시한 현상의 의미를 위의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점] [2008-4]

- ①에 해당하는 극단적인 교수 현상 :
- 현상의 의미 :

2. 박 교사는 확률과 통계 단원에서 조합의 개념을 도입하는 수업을 한 후 다음과 같이 수업 일지를 썼다.

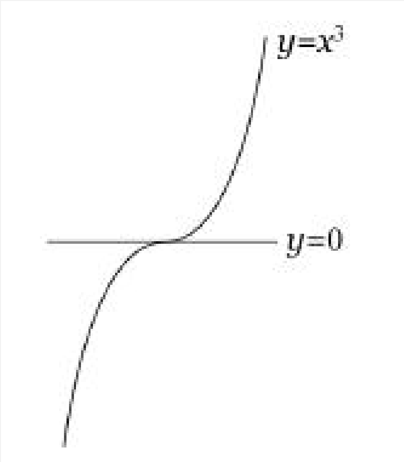
도입	5명씩 이루어진 각 모둠에서 2명을 대표로 뽑는 방법이 몇 가지인지 모둠별로 알아보라고 하였는데, A 모둠에서는 가위바위보를 하자, 제비뽑기를 하자는 등 의견이 분분하였고, B 모둠에서는 각 경우를 수형도로 나타낼 것인지, 표로 나타낼 것인지 결정하느라 많은 시간을 소비하였다.
전개	도입에서 너무나 많은 시간을 소비하여 ${}_nC_r$의 정의를 곧바로 제시한 후……. (이하 생략)

도입부에서 나타나는 교수학적 현상과 관련된 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2009-5]

① 이러한 현상은 수학적 지식의 개인화, 배경화 과정을 간과함으로써 일어난다.
② 이와 같은 현상을 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)이라고 부른다.
③ 문제해결 지도에서 발견술 자체가 지도 목적이 되는 것도 유사한 현상으로 이해할 수 있다.
④ 학생들의 활동을 강조하는 수업에서는 활동의 규약을 많이 만들수록 이와 같은 문제가 발생하기 쉽다.
⑤ 도입부와 같은 활동 없이 곧바로 전개 부분부터 수업이 시작된다면 형식적 고착이 일어날 가능성이 높다.

3. 다음은 수학 학습 과정에서 학생들이 갖는 오개념의 사례이다.

· 아무것도 없는 것을 5명에게 나누어준다는 것은 불가능하므로 $0 \div 5$는 불능이다.
· 순환소수 $0.999\cdots$ 는 1이 아니라 1에 한없이 가까워지는 수이다.
· 곡선의 접선은 그 곡선을 스치고 지나가야 하므로 다음 그림의 직선은 접선이 아니다.



위와 같은 유형의 오개념과 관련한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-11]

<보기>

ㄱ. 일상적인 언어, 과도한 일반화, 은유 등의 영향으로 이러한 오개념이 발생한다.
ㄴ. 이러한 오개념을 극복하는 학습으로부터 형성된 신념을 바탕으로 학생들은 이차 직관을 형성한다.
ㄷ. 이러한 오개념을 극복하기 위해서는 구체적인 활동을 통해 직관적으로 지도하는 교수학적 노력이 필요하다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 다음은 중학교 수업의 한 장면이다. 이 장면에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2011-13]

교 사: 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고 이 점이 삼각형의 외심이 된다는 것을 배웠습니다. 사각형의 경우에는 어떨까요?
자 영: 글쎄요. 아마도 사각형은 삼각형과 비슷하므로 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만날 것 같아요.
교 사: 확인해 봅시다.
[교사는 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 예를 보여 준다.]
교 사: 한 점에서 만날 수도 있고 아닐 수도 있군요. 그럼 어떤 사각형일 때 한 점에서 만날까요? 삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점이 삼각형의 어떤 중심인지 한번 생각해 보세요.
[대답 없음]
자 영: 삼각형에서 세 변의 수직이등분선의 교점은 외심입니다. 만약 사각형의 네 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다면 그 점이 이 사각형의 외심이 되지 않을까요? 실제로 외심이 됩니다. 이 외심은 사각형의 외접원의 중심입니다. 정리하면 사각형이 원에 내접한다면 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만납니다.

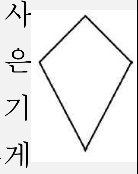
<보기>

ㄱ. 동적 기하 소프트웨어를 학생 주도형의 구성주의적 관점에서 사용하고 있다.
ㄴ. 가르쳐야 한다는 교수학적 계약에 의한 압박으로, 토파즈효과(토파즈식 외면치레, Topaze effect)가 나타날 가능성이 있다.
ㄷ. 학생의 유추와 이에 대한 교사의 반례 제시를 포함하고 있다.

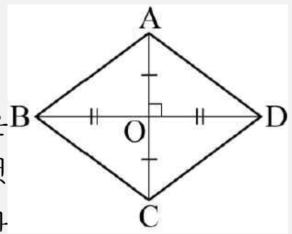
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

5. 다음은 고등학교 1학년 수학 수업에서 명제의 필요충분조건을 지도하는 장면의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [30점] [2011 2차, 1교시-1-1]

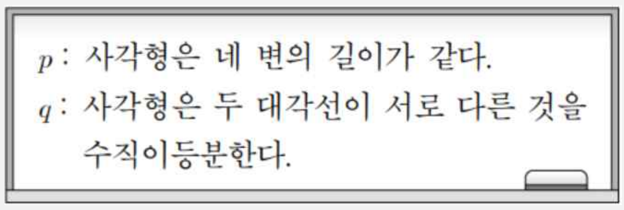
정 교사: 중학교에서 마름모를 어떻게 정의했죠?
다 래: ‘네 변의 길이가 같은 사각형’ 입니다.
정 교사: 마름모의 성질을 모두 말해 볼까요?
다 래: 마주보는 두변이 평행합니다. 마주보는 두 각의 크기가 같습니다, 두 대각선이 서로 수직입니다.
정 교사: 그렇다면 ‘두 대각선이 서로 수직인 사각형은 마름모이다.’ 가 참일까요?
다 래: 예, 모든 마름모의 두 대각선이 서로 수직이므로 참일 것 같습니다.
서 우: 아닙니다. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있습니다.
정 교사: 그렇군요. 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형이 있네요. 이것은 어떤 명제가 참이지만 그 명제의 역은 참이 아닌 예가 됩니다. 그러면 이런 반례를 제외시키기 위해서는 ‘두 대각선이 서로 수직이다.’ 는 조건을 어떻게 바꿔야 할까요?



서 우: 아! 알았습니다. 제가 제시한 반례에서는 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하지 않습니다. 조건을 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.’ 로 바꾸면 될 것 같습니다.
정 교사: 그러면 명제 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.’ 가 됩니다. 이 명제는 참일까요?
서 우: 예, 그럴 것 같습니다.
정 교사: 누가 증명해 볼까요?



승 호: 제가 증명해 보겠습니다. 도달해야 할 결론은 사각형 ABCD에서 네 변의 길이가 같다는 것입니다. 먼저 $\overline{AB}=\overline{AD}$임을 보이려면 직각을 한 변으로 가지는 삼각형이 합동이면 됩니다. 즉, $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$여야 하지요. 그런데 조건에서 두 대각선이 서로 수직이등분하므로 $\overline{BO}=\overline{DO}$이고 $\overline{AO}$는 공통, 그리고 끼인각이 90°로 같습니다. 따라서 $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$이므로 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 됩니다. 이와 같은 방법으로 $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$가 모두 같다는 것을 증명할 수 있습니다.
정 교사: 훌륭합니다. 방금 승호가 증명한 명제를 조건 p와 q를 써서 나타내 봅시다.



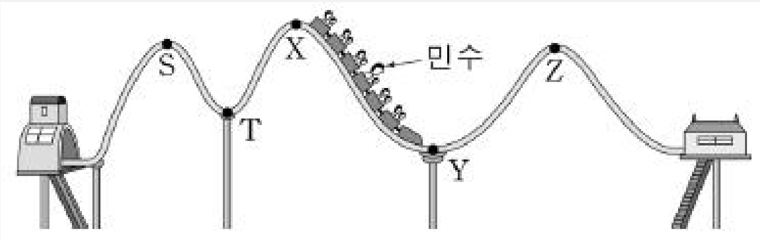
승호가 증명한 명제는 무엇이죠?
다 래: $q \to p$입니다.
정 교사: 그렇다면 $p \to q$는 어떤 명제입니까?
서 우: ‘마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.’ 입니다.
정 교사: 그것은 참인가요?
서 우: 예, 중학교에서 참임을 증명했습니다.
정 교사: 이처럼 명제 $p \to q$와 $q \to p$가 동시에 참일 때 p와 q는 서로 ‘필요충분조건’ 이라고 합니다. 이것은 두 명제가 논리적으로 서로 같다는 뜻입니다. 이 사실을 마름모의 정의에 적용하면 어떻게 될까요?
다 래: 마름모의 정의를 ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형’ 으로 대체할 수 있다는 뜻입니다.
승 호: ㉠<u>선생님, 너무 헷갈립니다. 중학교에서 ‘네 변의 길이가 같은 사각형’ 은 마름모의 정의, ‘두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분한다.’ 는 마름모의 성질이라고 배웠는데, 이 성질이 정의가 될 수 있다는 것을 이해할 수 없습니다.</u>
정 교사: 좋은 질문입니다. 마름모의 정의를 바꿔도 되는 논리적인 이유가 무엇일까요?
학생들: …….
정 교사: 지난 시간에 진리집합을 배웠죠? p의 진리집합은 무엇인가요?
서 우: 마름모 전체의 집합입니다.
정 교사: q의 진리집합은 무엇인가요?
다 래: $p \to q$가 참이고 $q \to p$도 참이기 때문에 그것 또한 마름모 전체의 집합입니다.
승 호: 아! 그렇군요. p와 q의 진리집합이 마름모 전체의 집합으로 서로 같기 때문에 q를 마름모의 정의로 대체해도 되겠네요.
정 교사: 그렇습니다. p와 q가 서로 필요충분조건이라는 말은 p와 q의 진리집합이 서로 같다는 말과 같게 되고, 따라서 q를 마름모의 정의로 대체할 수 있게 됩니다.

㉠에서 승호가 겪는 혼란을 잘 설명할 수 있는 개념을 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 찾아 그 뜻을 쓰고, 이 개념을 사용하여 승호의 혼란을 설명하시오. [10점]

6. 다음은 함수의 극대와 극소에 대한 수업 상황 [가], [나]에서 교사와 학생이 나눈 대화의 일부이다.

[가]

김 교사: 오늘은 함수의 극대와 극소에 대하여 알아보려고 합니다. ([그림]을 제시하며) 이 그림은 놀이 공원의 궤도 열차가 움직이는 모습을 옆에서 바라본 것입니다. 이 열차에 타고 있는 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 되는 지점을 말해 보세요. 또 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 아래에 위치하는 지점을 말해 보세요.



[그림]

학생 A: [그림]의 점 S, X, Z에서 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 됩니다. 그리고 점 T와 Y에서 아래에 위치합니다.

김 교사: 네, 그래요. 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 [그림]의 궤도 열차가 지나가는 길과 같은 모양일 때, 함수 $f(x)$의 증감상태를 살펴봅시다.

[나]

박 교사: 함수 $g(x)=|x|$는 극값을 갖나요?

학생 B: $g(x)=|x|$의 그래프 모양이 뾰족해서 극값을 갖지 않습니다. 함수들이 극값을 가질 때는 그 그래프 모양이 항상 매끄러운 곡선이었거든요.

박 교사: 극값을 갖는지 알려면 극대, 극소의 정의를 알아야 합니다. (곧바로 함수의 극대와 극소의 정의를 말한 후) $g(x)=|x|$는 $x=0$의 좌우에서 감소상태가 증가상태로 바뀌죠?

학생 B: (대답 없음)

박 교사: 그러니까 $x=0$에서 극솟값을 갖겠죠?

학생 B: (대답 없음)

위의 수업 상황 [가], [나]에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-7]

<보기>

ㄱ. [가]에서 김 교사는 함수의 극대와 극소의 의미를 개인화/배경화(personalization, contextualization) 시키고 있다.

ㄴ. [나]에서 학생 B는 함수의 그래프가 매끄러운 곡선 모양일 때만 극값을 가진다는 개념이미지를 지니고 있다.

ㄷ. [나]에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 나타났다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 다음은 중학교 2학년 기하 영역의 평행사변형의 성질을 다루는 수업의 일부이다.

교사: 측정 활동을 통해 알아낸 평행사변형의 성질 '두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.'가 왜 성립하는지 설명해 보도록 하지요.

학생: 어려워요.

(이 문제를 해결한 학생이 없는 듯 보인다.)

교사: 시간이 없으니 어쩔 수 없네. 대각선을 그어 평행사변형을 두 삼각형으로 나누면, 그 두 삼각형이 합동이 돼요. 그러면 그 성질이 성립한다는 것을 바로 보일 수 있을 것입니다.

학생: 합동이 되니까 성립하네요.

교사: 그러면 다음 내용을 공부합시다.

밑줄 친 부분에서 학생 스스로 학습할 환경을 교사가 제거하는 현상이 발생하고 있다. 여기서 이 교수학적 현상은 '교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.'는 압박에 의해 발생한다고 할 수 있다. 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 이러한 현상을 설명할 수 있는 개념과 이러한 압박을 설명할 수 있는 개념을 각각 쓰시오. [2점, 기입형A-3] [2014]

8. 다음은 수학 수업에서 발생할 수 있는 교수·학습 현상을 분석하기 위하여 수집한 수학 교사와의 면담 내용의 일부이다.

> **〈김 교사의 사례〉**
> "학생들이 ㉠수 개념을 크기와 관련짓는 것은 자연수를 학습하는 상황에서는 유용하지만, 음수를 학습하게 될 때는 오히려 그것이 수 개념을 확장하는 데 방해가 되는 것 같아요."
>
> **〈박 교사의 사례〉**
> "저는 수학 시간에 열심히 가르치는데, 학생들이 잘 이해하지 못하는 경우가 종종 있어요. 그래서 ㉡학생들에게 이해할 시간을 주지 않고 문제 해결을 위한 명백한 실마리를 성급하게 제공하거나 유도 질문을 통해 답을 가르쳐 주는 경우가 많습니다."

브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론에서 ㉠을 설명할 수 있는 개념을 쓰고, 이를 극복하기 위하여 역사 발생적 측면에서 음수의 정의를 어떻게 도입할 수 있는지를 서술하시오. 그리고 ㉡과 같은 극단적인 교수 현상을 설명할 수 있는 개념을 쓰고, 이 현상이 일어나는 이유를 설명하시오. [4점, 서술형B-1] [2019]

9. 다음은 김 교사의 교수·학습 지도안에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

김 교사: 교수·학습 지도안을 다음과 같이 작성해 보았습니다.

<table>
<tr><td>학습 목표</td><td>무리수의 개념을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>교수·학습 활동</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>◦준비 학습: 유리수의 정의를 상기한다.
◦동기 유발: 실생활에서 무리수의 예를 보여주는 동영상을 시청한다.
◦본시 학습 목표를 확인한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>◦스프레드시트를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명한다.
<table>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1.3</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.4</td><td>1.96</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1.5</td><td>2.25</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1.41</td><td>1.9881</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1.42</td><td>2.0164</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1.41421</td><td>1.9999899241</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1.41422</td><td>2.0000182084</td></tr>
</table>
◦무리수와 실수를 정의한다.
◦무리수 $\sqrt{2}$를 수직선에 나타내는 방법을 설명한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>◦본시 학습 내용을 정리한다.</td></tr>
</table>

최 교사: $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명하기 위해 공학적 도구를 이용하였네요. 2015 개정 수학과 교육과정에 이에 대한 근거가 있나요?

김 교사: 네, ㉠정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수·학습 방법에 명시된 내용이 있습니다.

최 교사: 그렇군요. 저도 수업 시간에 스프레드시트를 이용한 적이 있는데, ㉡학생들이 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수라는 것에는 관심을 두지 않고, "선생님, 무슨 식을 입력하였기에 x에 수를 넣으면 x^2이 계산되는 건가요? 스프레드시트 다루는 방법 좀 알려주세요."라는 말을 해서 난감했던 적이 있었습니다.

김 교사: 그런 점을 주의하여 수업을 하려고 합니다.

김 교사가 교수·학습 지도안에서 스프레드시트를 이용한 근거를 ㉠의 구체적인 내용으로 제시하시오. 그리고 브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론에서 ㉡을 설명할 수 있는 극단적인 교수 현상을 쓰고, 그 현상을 ㉡의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점, 서술형B-5] [2020]

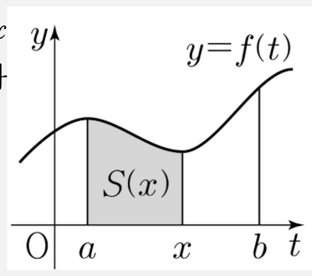
10. 다음은 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2020－236호)의 선택 과목 <수학Ⅱ>의 ‘정적분’ 수업에 대한 두 교사의 대화이다.

임 교사: 정적분 수업을 준비하면서 고등학교에서 다루는 수학 개념은 대학에서 공부했던 수학 개념과는 차이가 있다는 것을 느꼈습니다. 예를 들어 정적분을 정의하는 방식이 그렇습니다. 정적분은 리만적분의 개념을 고등학생들의 학습 수준을 고려하여 의도적으로 변형한 것으로 보입니다.

정 교사: 맞습니다. 그래서 수학을 가르칠 때는 ㉠지식의 파손성에 유의할 필요가 있습니다. 고등학교에서 정적분을 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수로 한정하여 정의하더라도, 학생들이 불연속 함수에 대해서는 정적분을 아예 정의할 수 없다고 생각하지 않도록 주의할 필요가 있습니다. 실제로 ㉡<수학Ⅱ>의 함수의 극한과 연속 영역에서 다룰 수 있는 함수 중에도 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 불연속이지만 리만적분 가능한 함수 $f(x)$의 예는 많으니까요.

임 교사: 그런데 이전 교육과정에 비해 정적분의 정의 방식이 달라졌습니다. 그래서 저는 달라진 방식에 따라 정적분의 정의를 제시한 뒤, 몇 가지 예를 통해 정적분의 값을 구해 보게 합니다. 선생님께서는 정적분 개념을 어떻게 지도하시나요?

정 교사: 저는 먼저 미적분의 기본 정리와 아이디어를 이용하여 정적분의 넓이 측정과 관련되어 있다는 것을 다음과 같이 설명합니다.

> 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(t) \geq 0$이라 하자.
>
> 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$ $(a \leq x \leq b)$로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(x)$라 하자.
>
> 
>
>
> $t \to x$일 때 $\dfrac{S(t)-S(x)}{t-x} \to f(x)$이므로 $S'(x)=f(x)$이다.
>
> $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 다음을 얻는다.
>
> $S(x)=F(x)=C$ (단, C는 상수)
>
> ⋯ (중략) ⋯
>
> $S(b)=($ ㉢ $)$

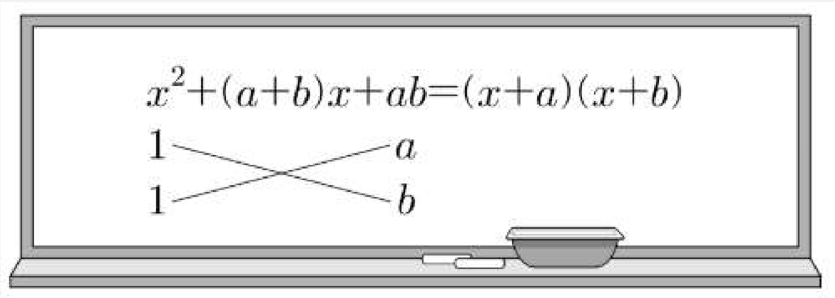
이로부터 (㉢)을/를 $f(t)$의 a에서 b까지의 정적분이라 정의합니다.

임 교사: 선생님과 제 수업 모두 ㉣2015 개정 수학과 교육과정의 <수학Ⅱ> 적분 영역에 제시된 교수 · 학습 방법 및 유의 사항을 반영했습니다. 그 결과 정적분의 도입 및 설명 방식은 다르지만, 정적분의 정의는 같네요.

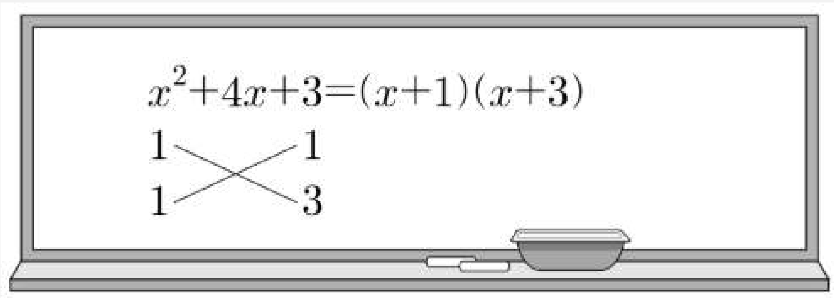
밑줄 친 ㉠의 의미를 쉐발라드(Y. Chevallard)의 교수학적 변환론의 관점에서 서술하고, 밑줄 친 ㉡을 1가지 쓰시오.
또한, 괄호 안의 ㉢에 공통으로 해당하는 내용을 쓰고, 두 교사의 정적분 도입 및 설명 방식이 다른 이유를 밑줄 친 ㉣의 내용을 근거로 설명하시오. [4점, 서술형B-3] [2022]

11. 다음은 ‘이차식의 인수분해’에 대한 중학교 수업의 일부이다.

교 사: 이차식 $x^2+(a+b)x+ab$를 인수분해하는 방법을 알아보겠습니다. 이런 유형의 이차식은 다음과 같은 방법으로 인수분해하면 됩니다.



예를 들어 x^2+4x+3은 다음과 같이 인수분해할 수 있습니다.



$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$를 공책에 쓰고 암기하세요. 이 방법을 사용해서 인수분해할 수 있는 문제 20개를 준비했습니다. 활동지 문제를 풀면서 방법을 연습해 봅시다.

활동지

다음 이차식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+4x-5=$

(2) $x^2+4x+4=$

학생 A: 다 풀었어? 우리끼리 답 맞춰 보자.

학생 B: (1)번은 답이 뭐야?

학생 A: $(x+5)(x-1)$이야.

학생 B: 나랑 똑같네. 왜 그렇게 인수분해가 되는지 설명할 수 있어?

학생 A: 그건 몰라. 그런데 오늘 배운 방법을 외우고 있으면 $x^2+(a+b)x+ab$꼴의 이차식의 인수분해는 전부 다 할 수 있어. (2)번 답도 맞춰 보자.

학생 B: (2)번은 $(x+2)^2$이야. $x^2+2ax=a^2=(x+a)^2$을 이용하면 돼. 그런데 <u>ab가 a^2이 될 수는 없으니까</u> 오늘 배운 방법은 이용할 수 없을 것 같아.

위에 제시된 교사의 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상을 의미하는 브루소(G. Brousseau)의 용어를 쓰고, 그 판단 근거를 수업 내용과 관련지어 설명하시오.

또한, $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$에 대한 학생 A의 이해 상태를 의미하는 스켐프(R. Skemp)의 용어를 쓰고, 밑줄 친 부분에서 학생 B가 가지고 있을 것으로 예상되는 문자에 대한 오개념 1가지를 제시하시오. [4점, 서술형B-5] [2022]

12. 다음 (가)는 ‘함수의 연속’에 대한 박 교사의 수업의 일부이고, (나)는 박 교사가 수업 후에 최 교사와 나눈 대화이다.

(가)

박 교사: 지금부터 연속에 대해서 배워볼게요. 여러분, 평소에 연속이라는 말을 들어보았나요?

학 생 A: 네, 3년 연속 우승이라고 할 때 연속이요.

학 생 B: 선생님, 연속 촬영도 있어요.

박 교사: 좋아요 여러분이 말한 것은 실생활에서 사용되는 연속이네요. 그럼 이제는 수학과 관련해서 연속이라는 말을 어떤 의미로 사용하였는지 말해볼까요?

학 생 A: 보통 선이나 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있을 때를 연속이라고 한 것 같아요.

박 교사: 그렇군요. 여러분 모두 그동안 연속이라는 말을 실생활이나 수학에서 사용해 온 것 같네요. 그런데 수학에서는 몇 가지 조건으로 ‘함수의 연속’을 정의하고 있습니다. 예를 들어, 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \ge 1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속인지 불연속인지를 어떻게 판단할까요?

학 생 B: 그래프를 그려서 그래프가 이어져 있는지 확인해 봐요.

박 교사: 네, 좋은 생각이긴 하지만, 함수의 그래프는 연속을 시각적으로 확인하는 보조적인 수단에 불과합니다. 함수의 연속은 수학적 정의로 판단해야 하는데요. 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 가지 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 합니다.

…(중략)…

박 교사: 지금까지 $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 알아보고, 이와 관련된 문제를 풀어보았어요. 혹시 질문이 있나요?

학 생 들: 아니요.

박 교사: 그렇다면, $x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 말해볼까요?

학 생 들: 함숫값 $f(a)$와 극한값 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 존재해야 하구요. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$이어야 합니다.

박 교사: 좋아요. 여러분 모두 아주 잘 이해하고 있네요.

(나)

박 교사: 오늘 수업 시간에 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \ge 1) \\ 2x & (x<1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속인지 판단하고 했더니, 일부 학생들은 연속의 정의보다는 그래프가 이어져 있는지를 확인하려는 모습을 보였습니다.

최 교사: 저도 같은 경험을 했어요. 학생들은 연속 개념의 형식적 정의보다는 그래프가 끊이지 않고 연결되어 있다는 (㉠)에 영향을 많이 받는 것 같습니다.

박 교사: 맞아요. 그런데 함수 개념에 대한 이해가 불완전한 학생들도 있어요. 오늘 수업에서 학생 C는 앞의 $f(x)$에 대해서, $y=x^2+1(x\ge 1)$과 $y=2x(x<1)$은 각각 함수이지만 이를 함께 제시한 $f(x)$는 함수가 아니라고 주장하더군요.

최 교사: 네, 학자들은 함수 학습과 관련해서 개념 정의와 (㉠)의 불일치, 인식론적 장애에서 비롯되는 어려움을 이야기하는데요. ㉡<u>학생C의 어려움은 그중의 하나로, 함수 개념의 역사적 발달 과정에서도 나타난 경향입니다.</u>

박 교사: 동의합니다.

브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론의 관점을 바탕으로 (가)의 수업 상황에서 박 교사가 학생들의 개인화와 배경화를 돕고 있다고 볼 수 있는 근거를 기술하고, 학생들의 탈개인화와 탈배경화된 지식을 확인하기 위한 교사의 발문 1가지를 찾아 제시하시오. 또한, 비너(S. Vinner)의 관점에서 (나)의 괄호 안의 ㉠에 들어갈 용어를 쓰고, 밑줄 친 ㉡에 해당하는 함수 학습과 관련된 어려움을 서술하시오. [4점, 서술형B-3] [2024]

<Freudenthal>

1. 수학적 개념이나 원리를 지도할 때 시각적 모형(visual model)을 사용하기도 한다. (총 5점) [1997-4]
  (1) 시각적 모형이 왜 교수-학습과정에 도움이 되는지 그 이유를 간략히 설명하시오. (3점)
  (2) '등차수열의 합의 공식'을 지도할 때 도움이 되는 시각적 모형을 한 가지 제시하고, 그 모형을 설명하시오. (2점)

2. 실세계의 현상이나 문제 상황은 수학적 모델링을 통하여(적용하여) 해결될 수 있다. 수학적 모델링의 과정을 단계별로 설명하고[4점], 그 과정에 따라 다음에 주어진 문제 상황을 해결하시오[2점]. [총 6점] [1998-2]

높이가 9m인 대나무가 바람에 부러져서 그 끝이 나무 밑동에서부터 3m 떨어진 곳에 닿았다. 이 때 대나무는 몇 m 높이에서 부러졌는가?

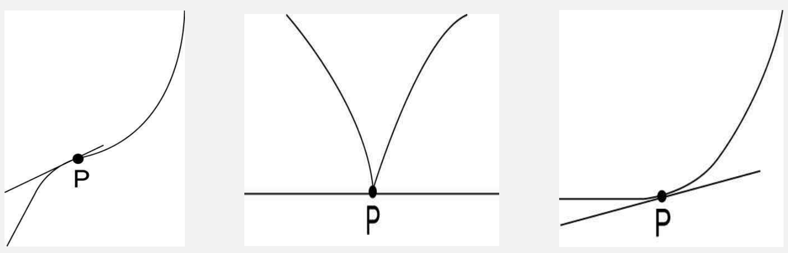
3. 다음은 고등학교에서 롤(Rolle)의 정리를 도입하기 전에 실물자료, OHP 또는 컴퓨터를 통해 학생들에게 제시할 실세계 상황이다. 다음 물음에 답하여라. [총 5점] [2002-4]

땅에서 공중으로 쏘아올린 어떤 물체(공 또는 로켓)가 a초 후에 땅에 떨어진다고 할 때, 이 물체의 속도(velocity)가 0이 되는 시각이 존재한다.

(1) 위의 상황을 롤의 정리와 관련지어 설명하시오.[2점]
(2) 위와 같이 수학적 개념을 지도하는데 있어서 상황(context)과 관련 짓는 교수-학습의 장점을 세 가지로 요약하여 제시하시오.[3점]

[4～5] 다음은 제7차 수학과 교육과정 수학Ⅱ의 다항함수의 미분법 중 미분계수 영역에 대한 수행평가 결과에서 나타난 오류 유형과 오류를 바로 잡기 위한 교수 방안이다.

(가) 박 교사는 미분계수를 가르친 후, 학생들이 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 몇 개의 그래프를 주고 주어진 점 P에서 접선을 그리도록 하였다. 그 결과 나타난 대표적인 오류 유형은 다음과 같다.

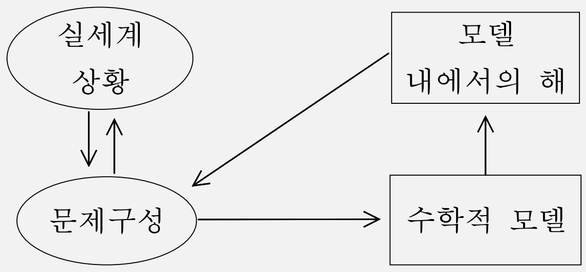


(나) 박 교사는 평가결과를 분석한 후 프로이덴탈(Freudenthal)의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 수업을 하는 것이 미분계수에 대한 개념적 이해와 접선 개념에 대해 학생들이 가지고 있는 장애 수정에 도움이 될 것이라 생각했다.

4. (가)에서의 수행평가 결과에서 나타난 오류의 원인을 인식론적 장애(epistemological obstacle)의 관점에서 3줄 이내로 설명하시오. [3점] [2005-1]

5. 프로이덴탈의 수학화 교수·학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 미분계수 개념의 교수·학습을 위한 내용 요소를 순서를 고려하여 3가지 제시하시오. [4점] [2005-2]

6. 다음 그림은 실세계 상황을 수학적 모델로 표현하여 문제를 해결하는 수학적 모델링 과정이다.



아래에 제시된 실세계 상황과 이 상황으로부터 구성된 문제를 중학교 수준에서 해결하기 위한 수학적 모델을 2가지 제시하시오. [2점] [2005-3]

실세계 상황: 철수는 생일을 맞이하여 친구 5명을 생일 모임에 초대하였다. 모임에 참석한 6명이 서로 악수를 나누고 있다.
문제: 모임에 참석한 6명이 빠지지 않고 모두 악수를 할 때 악수는 몇 번 이루어지는가?

7. 다음은 학교수학에 관한 두 가지 입장을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2점] [2009-2]

(가) 학생들이 수학을 통하여 현상을 이해하는 안목을 기를 수 있게 하기 위해서는 학생들에게 수학의 구조를 가르쳐야 한다. 이때, 수학의 구조를 가르친다는 것은 학생들이 수학자와 본질적으로 동일한 일을 하게 하는 것으로, 어떤 수준의 학생에게도 그 본질은 적절한 형태로 제공될 수 있다.
(나) 수학의 구조를 가르친다는 명분으로 완성된 형식적 수학을 구체적으로 번역하여 학생들에게 제공하려는 하향식 구성은 반교수학적인 전도이며, 학생들 스스로 발전적인 조작의 가능성을 갖지 못하는 지식을 제공하는 데 그칠 우려가 있다.

① ‘새수학(New Math)’ 운동은 (가)와 같은 관점에서 출발하였다.
② (가)에서 어떤 수준의 학생에게도 수학자가 하는 일과 본질적으로 같은 것을 제공할 수 있다는 생각은 브루너(J. Bruner)의 EIS 이론으로 뒷받침되었다.
③ (가)의 입장을 따른다면 수학사의 대역적인 학습 과정을 단축된 형태로 재현하는 방식의 지도가 바람직하다.
④ (나)의 입장에서 (가)에 대한 대안은 현상을 정리, 조직하는 수단으로서 수학을 학습하게 해야 한다는 것이다.
⑤ (나)의 입장을 따른다면 알고리즘, 사고패턴 및 문제 해결 전략 등의 수학적 사고를 재발명에 의해 학습하는 것이 바람직하다.

8. 다음은 함수 개념을 도입할 때 사용할 수 있는 예이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? [2점] [2009-3]

(가) 매분 $2\,\mathrm{km}$의 속력으로 직선 운동하는 기차가 P 지점을 지난지 x분 후에 P 지점으로 $y\,\mathrm{km}$ 떨어진 지점을 지난다. x, y 사이의 관계식을 표로 나타내어라.
(나) 넓이가 $12\,\mathrm{cm}^2$인 직사각형의 가로의 길이가 $x\,\mathrm{cm}$이면 세로의 길이는 $y\,\mathrm{cm}$이다. x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.
(다) 다음 그림에서 각 나라와 그 나라의 수도를 연결하여라.

<보기>

ㄱ. 역사 발생적 원리에 따라 함수 개념을 지도한다면 (가)와 (나)로부터 출발하여 (다)로 나아가는 것이 바람직하다.
ㄴ. 집합론을 토대로 한 현대 수학에서는 함수 개념을 (가)와 (나)가 아니라 (다)와 같은 맥락으로 설명한다.
ㄷ. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 초등학교에서 지도하게 하고, 중학교에서는 (다)와 같은 맥락만으로 함수 개념을 도입하게 하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 김 교사는 〈A〉에 대한 토론 활동 후 〈B〉를 지도하는 수업 계획을 세웠다. 김 교사의 수업 계획과 관련된 의견 중 수학화 교수·학습 이론의 관점에서 적절한 것은? [2점] [2010-6]

〈A〉

- 오늘 최저 기온은 $-5℃$이고 최고 기온은 $6℃$였다. 오늘 기온이 $0℃$인 순간이 있었을까?
- 오늘 보니 우리 딸의 키가 나보다 크다. 나와 우리 딸의 키가 같은 순간이 있었을까?

〈B〉

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c) = k \text{ (단, } a < c < b\text{)}$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

① 〈A〉에 대한 토론 활동에 교사가 개입하는 것은 적절하지 못하다.
② 본질로 정리되어야 할 현상이 〈A〉에서 먼저 제공되어 반교수학적 전도가 일어날 가능성이 있다.
③ 귀납에 의한 개념 획득을 강조해야 하므로 〈A〉에 가능한 많은 예를 제시하는 것이 중요하다.
④ 〈B〉가 〈A〉에서 주어진 현상을 정리할 수단이므로 〈B〉가 먼저 제시되어야 한다.
⑤ 〈B〉는 더 높은 수준에서는 정리되어야 할 현상으로 다루어질 수 있다.

10. 다음은 일차함수 단원에 나오는 문제와 풀이이다. 수학적 모델링 관점에서 볼 때, 이 풀이에 대한 설명으로 옳은 것만을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? [1.5점] [2011-6]

[문제] 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동수 h회와 신체 나이 a세 사이에는 $h = -0.8a + 176$인 관계식이 성립한다고 하자. 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수의 변화를 구하는 과정을 설명하시오.

[풀이] $a = 15$를 대입하면 $h = -0.8 \times 15 + 176 = 164$ 이고, $a = 20$을 대입하면 $h = -0.8 \times 20 + 176 = 160$이므로 $164 - 160 = 4$이다. 따라서 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수는 4만큼 감소한다.

〈보기〉

ㄱ. 실세계 상황을 수학 문제로 단순화시키는 활동이 포함되어 있다.
ㄴ. 수학적 모델 내에서 찾은 해를 해석하는 활동이 포함되어 있다.
ㄷ. 수학적 모델을 탐색하고 수정하는 활동이 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

11. 김 교사는 미분과 적분의 계산 방법을 지도한 후 ‘정적분의 활용’ 단원에서 속도와 거리 사이의 관계를 설명하고, 읽을거리 <A>를 학생들에게 제공하였다. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 이론 관점에서 볼 때, <A>와 김 교사의 수업에 대한 설명으로 적절하지 <u>않은</u> 것은? [2.5점] [2011-8]

<A>

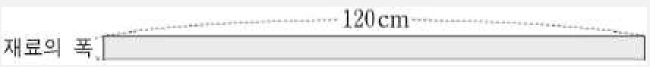
14세기 수학자 오렘(Oresme)은 등가속도 운동 상황을 시각화하기 위해 그래프를 창안하였다. 먼저 일정하게 속력이 변하면서 움직이는 물체가 이동한 거리를 조사할 때, 동일한 시간 간격에서 속력이 같은 양만큼 증가한다는 것을 이용하여, 높이가 속력이고 폭이 시간 간격인 직사각형을 연결하여 그래프로 나타내었다. 그리고 오렘은 시간 간격을 매우 작게 함으로써 직선과 수평선 사이의 삼각형의 넓이가 움직인 거리와 같다는 것을 보였다. 오렘에 의해 도입된 그래프 표현과 위의 아이디어는 이후 미적분학의 기본 정리 등을 포함한 미적분 발달에 결정적인 역할을 하게 되었다.

① <A>에서 수학자 오렘이 한 것처럼 학생은 수학화 과정을 경험하는 것이 바람직하다.
② <A>에서 그래프는 등가속도 운동이라는 현상을 조직화하기 위한 수단으로 이용된다고 볼 수 있다.
③ <A>에서 그래프는 수학화를 위한 모델이라고 할 수 있다.
④ 김 교사의 수업은 수학화 이론의 역사 발생적 원리를 따랐다고 볼 수 있다.
⑤ 김 교사의 수업은 수학화 활동보다 수학화 결과를 강조한 것이라 볼 수 있다.

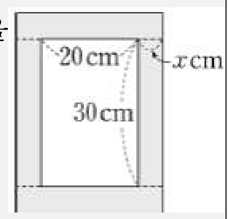
12. 다음은 A 교사가 제시한 과제와 B 모둠이 제출한 답안이다. 이와 관련된 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013-10]

[A 교사가 제시한 과제]

사진을 액자에 넣기 위해 액자틀을 만들 때, 사진의 크기나 액자틀의 폭에 따라 필요한 재료의 길이가 달라진다. 가로의 길이 20cm, 세로의 길이 30cm인 사진을 넣기 위해 직사각형 모양의 액자를 만들려고 한다. 아래 그림과 같은 120cm 길이의 재료를 남김없이 사용하여 액자틀을 만들었다면 액자틀의 폭은 얼마인가? (단, 액자틀의 폭과 재료의 폭은 같으며, 재료의 두께는 고려하지 않는다.)



[B 모둠의 답안]



[가] 이 문제를 해결하기 위해서 필요한 액자틀의 폭을 $x$cm, 재료의 길이를 $y$cm라 한다.

[나] 액자틀의 가로의 길이는 $20+2x$(cm)이므로,
$y=2\{(20+2x)+30\}=4x+100$이다.

[다] 문제에서 주어진 재료의 길이는 120cm이므로,
$120=4x+100$
$x=5$
따라서 폭이 5cm인 액자틀을 만들 수 있다.

[라] 우리 모둠에서는 사진의 크기와 액자틀의 폭이 달라짐에 따라 필요한 재료의 길이에 대해서도 알아보았다. 그 결과, 사진의 가로의 길이가 $a$cm, 세로의 길이가 $b$cm, 액자틀의 폭이 $x$cm일 때, 필요한 재료의 길이를 $y$cm라 하면 $y=2\{(a+2x)+b\}=4x+2(a+b)$이다.

<보기>

ㄱ. [가]는 수직적 수학화에 해당한다.
ㄴ. [나]에서는 문제 상황에 영향을 미치는 요인들의 관계를 수학적으로 해석하여 주어진 문제 상황에 적합한 모델을 구축하였다.
ㄷ. [라]는 [가], [나], [다]를 통해 얻은 결과를 일반화한 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

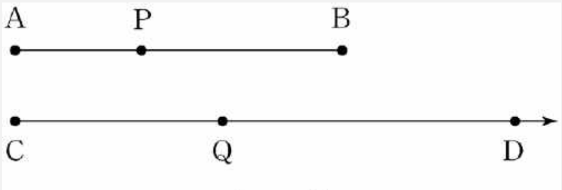
13. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수·학습 이론에 따르면, 아래의 2가지 사항은 현상으로부터 본질에 이르는 접근이 아니라 학습자에게 본질을 부과하는 접근이다. 프로이덴탈은 이와 같은 교수학적 접근 방식을 무엇이라 하였는지 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2014]

- 기성 수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것
- 수학화 과정에 대한 경험은 생략하고 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

14. 다음은 어떤 수학적 개념의 원형과 그 개념에 들어있는 아이디어를 다룬 교사 교육용 자료의 일부이다.

- 이 개념의 원형은 다음과 같다.

[그림]과 같이 선분 AB와 반직선 CD에 대하여, 선분 AB 위의 점 P와 반직선 CD 위의 점 Q가 각각 A와 C로부터 같은 속도로 동시에 출발하여 각각의 선을 따라 움직인다고 하자. 이때 점 P의 속력은 PB의 거리에 비례하고, 점 Q의 속력은 일정하다고 하자.



[그림]

이때, 거리 CQ를 거리 PB의 (　　　)(이)라고 하였다.

- 다음은 이 개념에 들어있는 아이디어를 활용한 계산의 한 예이다.

n	$\cdots$	1005	$\cdots$	1009	$\cdots$	2014	$\cdots$
$(1.0001)^n$	$\cdots$	1.1057181	$\cdots$	1.1061604	$\cdots$	1.2231016	$\cdots$

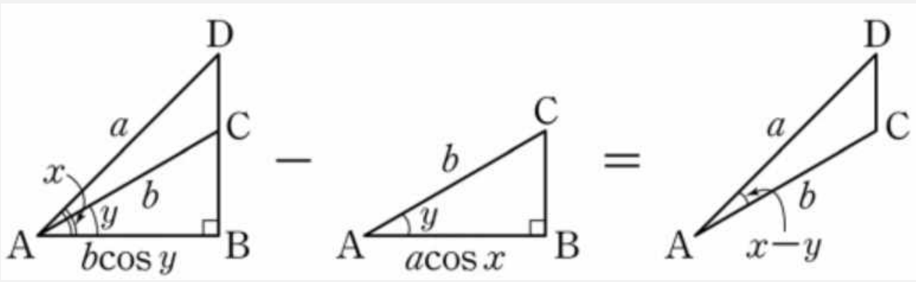
이 표를 활용하면, $1.1057181 \times 1.1061604$의 근삿값을 쉽게 얻을 수 있다.

… (하략) …

(　　　) 안에 들어갈 용어가 무엇인지 쓰시오. 그리고 수학을 완성된 생산품으로 제공하는 것이 아니라 수학이 발생해 온 과정을 경험하게 하기 위해 수학적 개념의 원형이나 그 개념에 들어있는 아이디어를 활용하는 교수·학습 원리가 무엇인지 쓰시오. [2점, 기입형A-2] [2014]

15. 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 교실 수업을 위한 사고실험(thought-experiment)을 그의 교수·학습 이론에서 제안하고 있다. 다음은 사고실험에 대해 두 교사가 나눈 가상 대화의 일부이다.

최 교사: 사고실험이 중요하다고 하는데, 정말인가요?
김 교사: 그럼요. 다음 수업 시간에 가르칠 학습 내용을 1가지만 말씀해 주세요.
최 교사: 네, 삼각함수의 덧셈정리 중에서 $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$ 임을 증명하는 문제가 있어요. 교과서에서는 좌표평면에서 점의 좌표를 이용하여 증명하고 있어요.
김 교사: 예전에 이 문제를 지도하면서 수업 시간에 겪은 어려움 중에 기억나는 것이 있나요?
최 교사: 학생들에게 적절한 질문을 하지 못했고, 예상하지 못한 학생들의 궁금증에 충분한 답을 주지도 못했어요. 예를 들어, 한 학생이 좌표를 이용하지 않고도 삼각함수의 덧셈정리를 증명할 수 있는지 질문하였을 때, 제가 좀 망설였던 것 같아요.
김 교사: 김 교사: 그렇습니다. 학생의 눈높이에 맞는 수학 수업을 위해서는 수업에 앞서 철저한 준비가 필요합니다.
최 교사: 그렇군요.
김 교사: 삼각함수의 덧셈정리 문제로 다시 돌아가 볼까요? 이 문제에 대한 어느 수학자의 접근 방법을 찾아보면, '삼각형 ABD의 넓이에서 삼각형 ABC의 넓이를 뺀 것은 삼각형 ACD의 넓이와 같다'는 사실을 이용하고 있습니다.

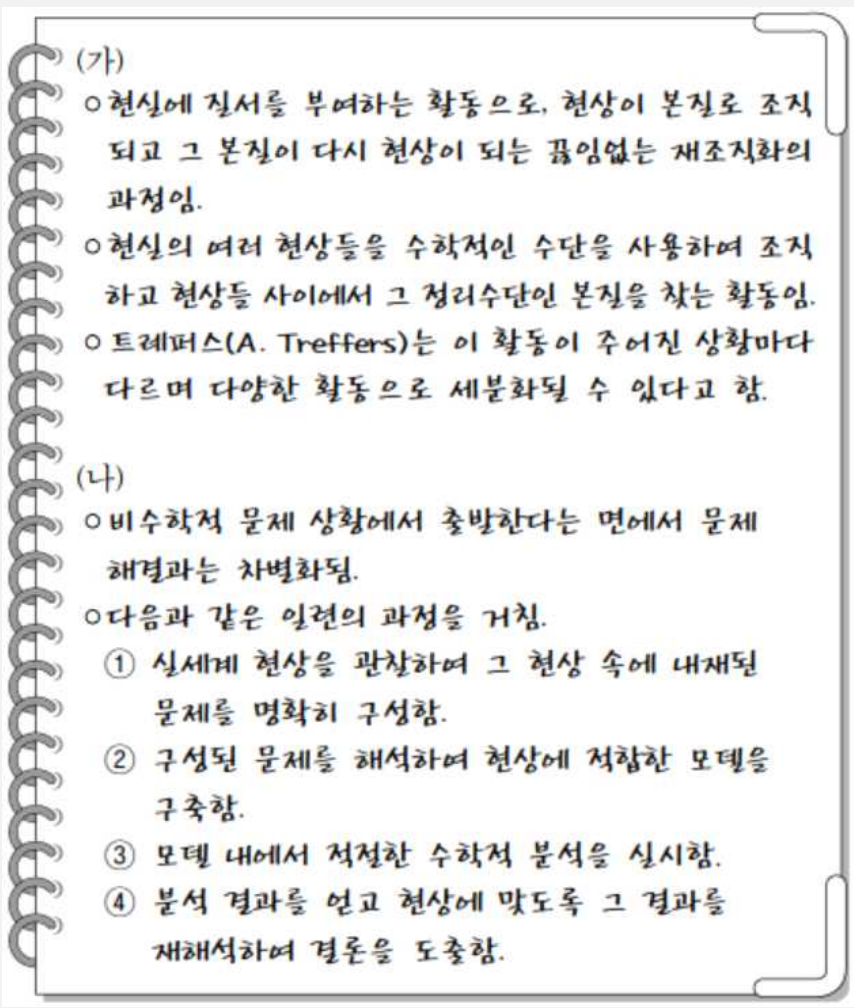


(김 교사는 위 그림을 이용하여 삼각함수의 덧셈정리에 대하여 논의한다.)

최 교사: 최 교사: 그렇군요. 좌표를 이용하지 않고도 학생들을 증명으로 안내할 수 있고, 직관적으로도 이해시킬 수 있네요.
김 교사: 지금까지 나눈 대화를 통해 사고실험에 대해 정리해 볼까요.
…(후략)…

프로이덴탈의 교수·학습 원리의 관점에서 사고실험의 역할을 적으시오. 또, 교실 수업에서 사고실험을 통해 얻을 수 있는 의의를 위 가상 대화에 근거하여 2가지 제시하시오. [5점, 서술형B-2] [2015]

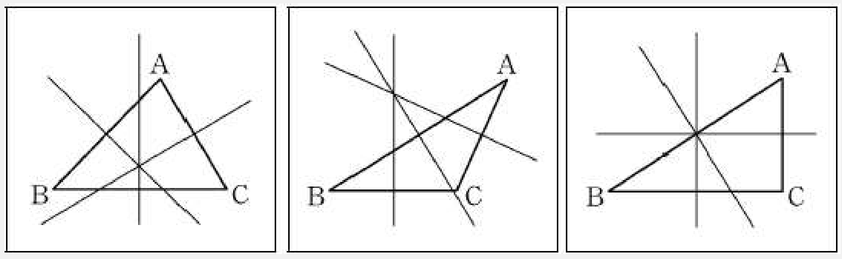
16. 다음은 수학교육론 강의 시간에 다양한 현상과 결부된 개념을 학습한 다음, 이를 요약한 것이다. (가)와 (나)의 설명에 해당하는 개념을 순서대로 쓰시오. [2점, 기입형A-1] [2016]



(가)
○현실에 질서를 부여하는 활동으로, 현상이 본질로 조직되고 그 본질이 다시 현상이 되는 끊임없는 재조직화의 과정임.
○현실의 여러 현상들을 수학적인 수단을 사용하여 조직하고 현상들 사이에서 그 정리수단인 본질을 찾는 활동임.
○트레퍼스(A. Treffers)는 이 활동이 주어진 상황마다 다르며 다양한 활동으로 세분화될 수 있다고 함.

(나)
○비수학적 문제 상황에서 출발한다는 면에서 문제 해결과는 차별화됨.
○다음과 같은 일련의 과정을 거침.
① 실세계 현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재된 문제를 명확히 구성함.
② 구성된 문제를 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축함.
③ 모델 내에서 적절한 수학적 분석을 실시함.
④ 분석 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출함.

17. 다음은 김 교사가 딘즈(Z. Dienes)의 수학 학습 이론과 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수・학습론을 반영하여 작성한 수업 계획의 일부이다.

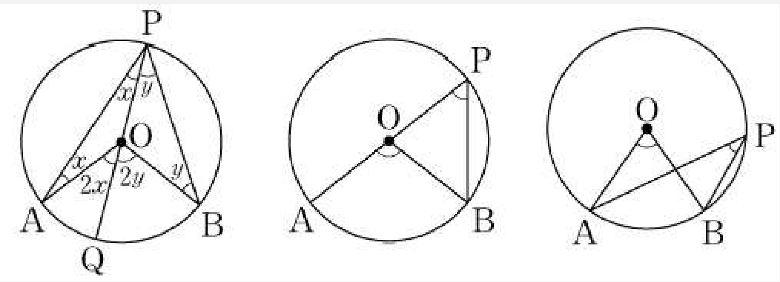
학습 목표	삼각형의 외심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.
교수・학습 방법	협력 학습
교실 환경	컴퓨터, 빔 프로젝터
준비물	삼각형 모양의 색종이, 자, 컴퍼스
교수・학습 활동 순서	(1) 종이 접기를 이용하여 ‘삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.’는 것을 확인하게 한다. (2) 탐구형 소프트웨어를 이용하여 삼각형의 모양을 다양하게 변화시키면서 (1)에서 찾은 성질이 성립함을 보여 준다.  (3) 지난 시간에 학습한 선분의 수직이등분선의 성질을 이용하여 다음 순서로 삼각형의 외심의 성질을 확인하게 한다. ① 삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 수직이등분선을 그리시오. ② 두 수직이등분선의 교점을 표시하시오. ③ 변 AC의 수직이등분선을 그리시오. ④ 변 AC의 수직이등분선이 어디를 지나는지 확인하시오. (4) 모둠 토론을 통하여 삼각형의 외심의 성질에 대하여 형식적인 정당화를 하게 한다. (5) 모둠별 토론 결과를 발표하게 한다.

딘즈의 수학적 다양성의 원리를 위의 계획된 수업 상황과 관련지어 설명하시오. 그리고 프로이덴탈의 국소적 조직화가 수학 교수・학습에서 갖는 의의 1가지를 계획된 수업 상황과 관련지어 서술하시오. [4점, 서술형B-1] [2017]

18. 다음 〈자료 1〉은 원주각의 성질을 지도하는 수업 상황의 일부이고, 〈자료 2〉는 원주각의 성질을 활용하는 수업 계획서의 일부이다. 〈자료 1〉과 〈자료 2〉에 나타난 수업 양상과 이 수업에서 강조되는 수학 교과 역량에 대하여 〈작성 방법〉에 따라 논술하시오. [10점, 논술형B-8] [2018]

〈자료 1〉

교 사: [그림 1]에서 원주각과 중심각 사이의 관계를 살펴보았어요. 일반적으로 원주각과 중심각 사이에는 어떤 관계가 성립하는지 발표해 볼까요?



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

학생 A: 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이라는 관계를 찾을 수 있습니다.

교 사: 자신의 생각을 잘 말해 주었어요. 다른 의견이 있나요?

학생 B: 선생님, 한 호에서 여러 개의 원주각을 만들 수 있습니다. [그림 2], [그림 3]의 경우는 [그림 1]과 다르므로 이 관계가 성립하지 않을 것 같습니다. [그림 1]와 같이 중심 O가 $\angle APB$의 안쪽에 있을 때에만 원주각의 크기가 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$입니다.

학생 A: [그림 2], [그림 3]에서도 $\angle APB$는 호 AB에 대한 원주각이므로, 점 P의 위치에 관계없이 성립할 것 같아요.

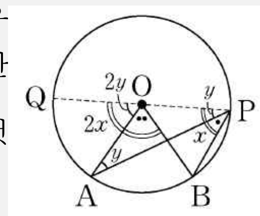
학생 B: 원주각은 맞지만, 점 P의 위치가 변하기 때문에 각의 크기도 변할 것입니다. 따라서 성립하지 않을 것 같아요.

교 사: 두 학생의 의견이 서로 다르네요. 왜 그렇게 생각했는지 누가 말해 볼까요?

학생 A: 제가 말해 볼게요. [그림 3]의 경우, [그림 4]와 같이 지름 $\overline{PQ}$를 그으면 삼각형의 두 내각과 이웃하지 않는 한 외각의 크기에 대한 성질을 이용하여 [그림 1]처럼 원주각과 중심각 사이의 관계를 설명할 수 있어요.

학생 C: 맞아요. [그림 2]의 경우에도 비슷한 방법으로 설명할 수 있어요.

학생 B: 그러네요. 점 P의 위치에 관계없이 모든 경우에 성립한다는 것을 알게 되었어요. 이것을 간단히 $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$라고 표현해도 좋을 것 같아요.



[그림 4]

…(중략)…

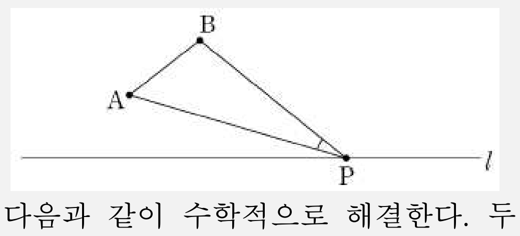
교 사: 지금까지 여러분들의 토론을 종합하면, ‘한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 그 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다’라고 합의할 수 있습니다.

〈자료 2〉

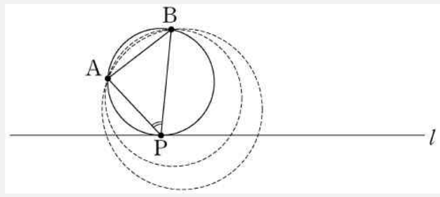
- 도입: 교사는 선수 학습 내용을 확인하고, 실세계 현상을 기초로 하는 비수학적 문제 상황을 제시한다. 학생은 제시된 문제가 현실과 결부되어 있음을 이해하고 탐색한다.

  [문제] 그림과 같이 도로 한쪽 편에 스크린이 설치되어 있다. 스크린이 있는 반대편에서 도로를 따라 이동하면서 스크린을 촬영하려고 한다. 스크린 좌우 양 끝점과 카메라가 이루는 각의 크기가 최대가 되는 카메라의 위치를 결정하시오.

- 전개
  ① 1단계: 주어진 실세계 문제에서 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하도록 한다.
  ② 2단계: 현실과 결부된 문제 상황을 다음과 같이 변환한다. 선분 AB와 직선 l이 주어져 있다. 점 P가 직선 l 위를 움직일 때, $\angle APB$의 크기가 최대가 되는 점 P의 위치는?



  ③ 3단계: 문제를 다음과 같이 수학적으로 해결한다. 두 점 A, B를 지나는 다양한 크기의 원을 작도하고, 호 AB에 대한 원주각의 크기를 이용하여 문제를 해결한다.



…(하략)…

〈작성 방법〉

- 서론, 본론, 결론의 형식을 갖출 것.
- 서론 부분에는 사회적 구성주의와 급진적 구성주의의 차이점, 현실주의적 수학교육에서 수학화의 의미를 각각 제시할 것.
- 본론 부분에는 다음을 포함할 것.

  첫째, 〈자료 1〉의 수업 상황을 사회적 구성주의 이론의 ‘객관화된 수학 지식을 얻기까지 거쳐야 할 과정’의 관점에서 분석한 내용.

  둘째, 〈자료 2〉의 수업 계획서를 현실주의적 수학교육 이론의 ‘수학화 과정’의 관점에서 분석한 내용.
- 결론 부분에는 〈자료 1〉에서 의사소통 역량, 〈자료 2〉에서 문제 해결 역량이 각각 강조되는 이유를 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 ‘교수・학습 방법’ 중 문제해결 능력, 의사소통 능력 함양을 위해 제시한 사항에 근거하여 각각 설명할 것.

19. 다음은 윤 교사가 고등학교 수학 ‘도형의 방정식’ 단원에서 사용한 활동 과제 중 3가지를 나타낸 것이다.

(1) 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]은 축구공이 골라인을 나타내는 직선 l을 지나가는 상황을 차례로 찍은 사진이다. [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 각각 직선 l을 x축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하시오.

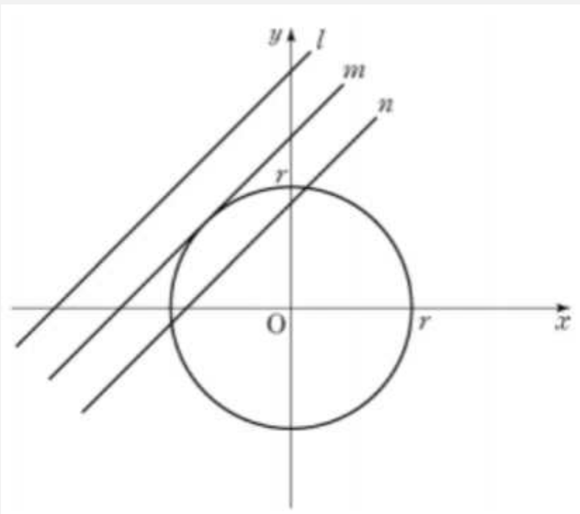
※준비물: 삼각자

[그림 1]

[그림 2]

[그림 3]

(2) 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보시오.



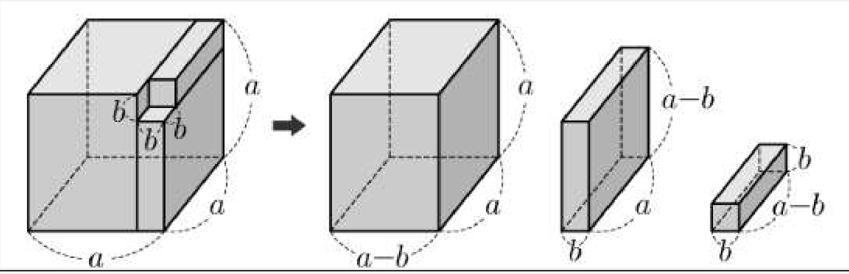
(3) 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=px+q$의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 설명하시오.

트레퍼스(A. Treffers)가 제시한 수평적 수학화와 수직적 수학화의 의미를 설명하고, 윤 교사의 활동 과제를 수평적 수학화와 수직적 수학화의 관점에서 분석하여 서술하시오. [4점, 서술형A-6] [2020]

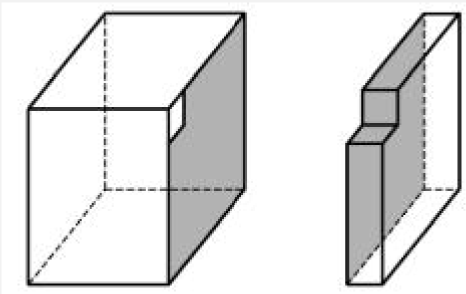
20. 다음은 최 교사가 고등학교 '수학'에서 다루는 내용을 소재로 수학 동아리 학생들과 진행할 수업에 대하여 정 교사와 나눈 대화의 일부이다.

최 교사: '수학자처럼 꼼꼼해지기'라는 주제로 동아리 학생들과 수업을 진행하려고 합니다. 아래의 [탐구]를 소재로 삼아 수업을 하려고 하는데요. 수업 준비를 위해 어떤 사고 실험을 할 수 있을까요?

[탐구] 다음 도형을 이용하여 인수분해 공식
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$이 성립함을 설명해 보자.



정 교사: "a, b, $a-b$가 양수이다", "입체도형을 분리하여 만든 새로운 입체도형들의 부피의 합은 분리하기 전 입체도형의 부피와 같다.", "도형을 분리할 때 새로 생성된 면은 부피에 영향을 주지 않는다." 등 여러 가지 숨겨진 가정을 생각해 보고 그 가정을 학생이 찾아내도록 하는 발문도 생각해 보면 좋겠습니다.



최 교사: "직육면체의 부피를 V, 밑면의 넓이를 S, 높이를 h라고 할 때, $V=Sh$이다."라는 것도 [탐구]에서 사용됩니다. 학생들이 이 공식을 배운 시점에서는 유리수 범위에서만 수를 다루었기 때문에 ㉠모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에 대해서 이 공식 $V=Sh$를 정당화하는 과정도 생각해 보면 좋겠습니다.

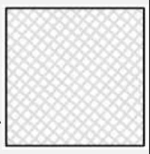
정 교사: 직육면체 모서리의 길이가 양의 유리수인 경우, 모서리의 길이가 1인 정육면체를 적절하게 등분하여 만든 작은 정육면체를 여러 개 사용하여, 주어진 직육면체를 구성하는 과정을 이용해 이 공식을 정당화할 수 있습니다. 하지만 모서리의 길이 중 하나 이상이 양의 무리수인 경우에는 이 공식을 체계적으로 정당화하기 위해 여러 가지 배경 지식이나 소양이 필요하기 때문에 학생 수준을 고려하여 수업을 준비하여야 할 것 같습니다.

프로이덴탈(H. Freudenthal)이 말하는 사고 실험의 의미를 설명하고, ㉠에 대한 최 교사의 사고 실험을 수업 내용에 중점을 두고 예상하여 서술하시오. [4점, 서술형B-4] [2021]

21. 다음은 수학적 모델링과 수학화 과정에 대한 자료이다.

(가) 현실적 문제 상황

[1단계] 작은 소품 상자가 필요해서 문구점에서 한 변의 길이가 12cm인 정사각형 모양의 판지를 구입했다. 네 귀퉁이에서 같은 크기의 정사각형을 잘라내어, 남은 부분으로 뚜껑이 없는 최대 부피를 가지는 직육면체 모양의 소품 상자를 만드는 현실적 문제 상황을 탐구한다.



(나) 미국수학교사협의회(NCTM)의 수학적 모델링 과정

o '(가)' 를 [1단계]로 하는 '수학적 모델링' 과정의 설명과 예시

[2단계]

설명 (㉠)

예시 (㉡)

[3단계]

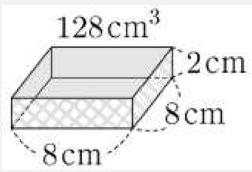
설명 수학적 분석을 실시한다.

예시 직육면체의 밑면은 한 변의 길이가 $12-2x$인 정사각형이고, 높이가 x이므로 $V(x)=x(12-2x)^2$이다.
$V'(x)=12(x-2)(x-6)$이므로, $0<x<6$에서 $V(x)$의 증가와 감소에 의해서 $x=2$에서 $V(x)$는 최대가 된다.

[4단계]

설명 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

예시 판지의 네 귀퉁이에서 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 2cm로 하면, 상자의 최대 부피는 128cm^3이다.



(다) 현실주의적 수학교육 이론의 수학화 과정

o '(가)' 를 [1단계]로 하는 '수학화' 과정의 설명

[2단계] 현실 내의 문제 상황을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 과정이다.

[3단계] 세련된 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 과정이다.

[4단계] 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 과정이다.

'(가)' 가 (나)와 (다)의 [1단계]가 될 수 있는 이유를, '수학적 모델링' 과 '수학화' 의 개념과 함께 서술하시오. 또한, (나)의 괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 내용을 제시하시오. [4점, 서술형B-5] [2024]

[공학적 도구 및 교구]

1. BASIC, LOGO등을 이용한 프로그래밍 과정을 수학교육에 도입했을 때의 바람직한 효과를 수학적 문제해결력 신장과 관련하여 약술하시오. [1997 모의-1]

2. 다음은 기술 공학을 수학 교육에 활용하는 대상이다. 물음에 답하시오. [총5점] [1999 추시-3]

(1) 역동적 기하 소프트웨어를 활용하여 삼각형 내각의 합에 대해서 학생들과 함께 탐구해 보려고 한다. 생략된 마지막 부분 (라)에 어떤 활동 내용이 들어가면 가장 적절한가? [2점]

(가) 삼각형 ABC를 그린다.
(나) 각A, 각B, 각C의 크기를 각각 구한다.
(다) 각A, 각B, 각C의 크기를 모두 더한다.
(라)

(2) LOGO 언어로 ‘임의의 정다각형 그리는 절차’를 만들고자 한다. 생략된 절차 (나)를 완성하시오. 참고로 정삼각형을 그리는 절차는 다음과 같다. [3점]

```
TO TRIANGLE :SIDE
REPEAT 3 [ FD :SIDE RT 120]
END
(가) TO POLYGON :SIDE :N
(나)
(다) END
```

3. 계산기와 컴퓨터의 활용에 관한 다음 물음에 답하시오. [총 5점] [2000-1]

(1) 제 7차 수학과 국민공통기본 교육과정은 수학 교과의 교수·학습 방법에서 계산기나 컴퓨터의 활용에 관한 입장을 명시적으로 서술하고 있다. 계산기나 컴퓨터의 활용에 관하여 교육과정이 명시하고 있는 바를 기술하시오. [2점]

(2) 계산기나 컴퓨터의 소프트웨어를 활용하는 수학 교과수업에서 교수학적 변환이 행해질 때, 가장 우려되는 극단적인 현상의 유형을 명시하고, 구체적인 사례를 들어 설명하시오. [3점]

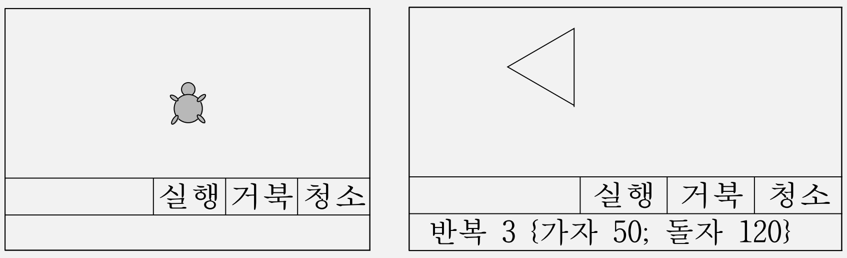
4. 다음은 컴퓨터를 활용한 수학 수업에 대하여 김 교사가 갖고 있는 신념이다.

수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 귀납적 발견을 위하여 컴퓨터를 활용하는 활동은 그 목적을 분명히 해야 한다. 컴퓨터의 시각적·조작적 기능은 학생이 수학에 보다 쉽게 접근할 수 있게 해 주지만, 이것만으로는 부족하고 조작에 대한 반성이 반드시 요구된다.

김 교사는 로고(LOGO)와 비슷한 소프트웨어를 활용하여 ‘정n각형의 외각의 합은 $360°$이다’라는 명제를 지도 하고자 한다. 김 교사가 시범을 보인 한 변의 길이가 50인 정삼각형을 그리는 활동과 기본 명령어는 다음과 같다.

<정삼각형을 그리는 활동>

‘반복 3 {가자 50; 돌자 120}’이라고 입력한 후 화면의 ‘실행’ 버튼을 누른다.



<초기화면> <완성된 화면>

<기본 명령어>

- 가자 x : 거북이 이동하면서 길이가 x인 선분을 그린다.
- 돌자 y : 거북의 진행 방향을 $y°$ 만큼 시계반대방향으로 바꾼다.
- 반복 n {⋯ } : 괄호 안에 있는 명령어를 n번 반복하여 실행한다.
- 거북 : 화면의 거북을 사라지게 하거나 다시 나타나게 한다.

김 교사는 이후에 학생들에게 위의 소프트웨어를 활용하여 정사각형과 정오각형을 그려보게 하였다. 학생들이 주어진 명제를 발견하기 위해 자신의 탐구 활동을 반성하여 반드시 알아내야 하는 사실을 2가지 제시하시오. [5점] [2005-7]

5. 교수・학습의 측면에서 계산기 활용의 장점을 언급한 두 명의 교사를 <보기>에서 옳게 고른 것은? [2점] [2009 모의-9]

<보기>

ㄱ. 김 교사: 사칙계산을 배우는 초기 단계에서 계산기를 이용하면 계산을 빨리할 수 있으므로, 학생들에게 연산의 의미와 구조에 대한 지식을 깊이 있게 전달할 수 있어요.

ㄴ. 이 교사: 학생들에게 ‘$16^{-\frac{1}{2}}=(\quad)$’를 지필 또는 계산기를 이용하여 풀게 했는데 약 99%의 학생이 계산기를 이용하여 풀고 난 후 0.25라고 답했습니다. 학생들이 소수를 사용하는 것에 더 익숙하므로, 앞으로는 수업 시간에 분수보다 소수를 주로 사용하는 것이 좋겠습니다.

ㄷ. 최 교사: 함수 $y=ax+b(a\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있는 학생들이 그래픽 계산기를 사용하여 a와 b의 값이 변하는 것에 따라 그래프의 모양을 관찰하면 그래프의 성질을 발견하는 데 도움이 됩니다.

ㄹ. 박 교사: $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 탐구하는 과정에서

$$1=1^2<2<2^2=4,$$
$$1.96=1.4^2<2<1.5^2=2.25,$$
$$1.9881=1.41^2<2<1.42^2=2.0164$$

등의 계산을 계산기가 도와주므로 편리하지요.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ　⑤ ㄷ, ㄹ

6. 다음은 실수 e에 관한 두 교사의 대화이다. 물음에 답하시오. [2010 2차, 2교시-3-2]

김 교사: 실수 e가 무리수임을 무한급수를 이용해 보일 수 있습니다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$으로 정의되는 수 e가 무리수임을 증명하려면, 먼저 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴함을 보여야 합니다. 한편 무한급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$이 수렴하고 그 합이 e와 같음을 보일 수 있습니다. 이 사실에 귀류법을 적용하면 ①$\underline{e\text{가 무리수}}$임을 증명할 수 있습니다.

정 교사: 실수 e와 관련된 내용 중, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 특이적분(improper integral) ②$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1}$을 이중적분(double integral)의 성질을 사용하여 증명할 수 있습니다.

박 교사: 네, 맞습니다. 그렇지만, 고등학교 학생들이 김 선생님과 정 선생님의 증명 과정을 이해하기는 어렵다고 생각합니다. 저는 ③$\underline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.7182\cdots=e\text{임을 직관적으로 이해시킨}}$ 후, 학생들이 여러 극한값을 능숙하게 구하도록 하는 데에 많은 시간을 할애합니다. 그리고 e가 무리수임이 알려져 있음을 간략하게 언급하는 정도로만 다룹니다. 한편, 표준정규분포의 확률밀도함수에 대한 것도 여러 통계 문제를 해결하는 데에 초점을 맞추어 지도합니다.

2007년 개정 수학과 교육과정에서는 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념・원리・법칙을 도입하고, 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념・원리・법칙의 이해 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 권고하고 있다.

박 교사가 이러한 권고사항에 따라 밑줄 친 ③을 위해 시도할 것으로 예상되는 지도 방안 한 가지를 그 근거와 함께 제시하시오. [10점]

[수학과 평가]

1. 다음은 일반적인 수학과의 평가 과정을 단계별로 나타낸 것이다. □에 들어갈 가장 적절한 것은? [1996-35]

수학과 행동 분류표 작성
↓
과 제 분 석
↓
이원 분류표 작성
↓
□
↓
평가 문항 개발

① 목표의 상세화
② 기출 평가 문항의 검토
③ 관련 교과 지식의 개관
④ 학생의 수준 고려

2. 일반적으로 문제풀이의 과정을 중시하여 채점하는 방법으로 '총체적 점수화 방법'과 '분석적 점수화 방법'을 들 수 있으며, 여기서 분석적 점수화 방법이란 풀이과정을 몇 단계의 요소로 나누어 채점 요소를 세우고 각 요소에 점수를 할당하여(배점) 이것을 척도로 이용하는 방법을 말한다. 다음의 서술형 주관식 문항을 분석적 점수화 방법으로 채점하기 위한 모범답안[2점]과 이 답안을 10점 만점으로 하는 채점기준(즉, 채점요소와 배점)을 제시하시오[4점]. [1998-3]

> A중학교의 작년의 학생 수는 1050명이고, 금년은 작년보다 남학생은 4% 증가하고, 여학생은 2% 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

3. 아래 그림은 수학과 평가의 일반적인 절차를 6단계로 나누어 나타낸 것이다. 나머지 빈칸을 완성하시오. [4점] [2001-4]

1단계	평가 목적 선정
	↓
2단계	
	↓
3단계	
	↓
4단계	
	↓
5단계	평가 실시
	↓
6단계	

4. 다음과 같은 [문제]와 [학생 A의 풀이]에 대하여 주어진 [채점기준]으로 평가하려고 한다.

[학생 A의 풀이]에 타당한 점수를 [채점기준]에 근거하여 쓰고, 그 점수를 부여한 이유를 학생이 사용한 추론 양식과 관련하여 30자 이내로 서술하시오. [4점] [2003-2]

[채점기준]

1점 - 문제이해 부족, 부정확한 수학적 표현

2점 - 그럴듯한 추론, 관찰을 수반한 풀이

3점 - 명확한 추론, 풀이과정의 경미한 실수

4점 - 명확한 추론, 바른 답

[문제] 성숙한 토끼 한 쌍은 한 달이 지나면 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍은 2개월 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳기 시작한다고 한다. 1월 1일에 성숙한 토끼 한 쌍을 사서 기르기 시작하면, n개월 후에는 몇 쌍의 토끼가 있게 되는가? (단, 토끼들은 죽지 않는다고 가정한다.)

[학생 A의 풀이]

1개월 후부터 4개월 후까지 토끼의 쌍의 수를 세어보았더니 다음과 같다.

2, 3, 5, 8

이 수열은 제1계차가 1, 2, 3, ⋯ 인 등차수열이므로 n번째 항은

$$a_n = 2 + \{1+2+3+\cdots+(n-1)\} = \frac{n^2-n+4}{2}.$$

따라서, n개월 후의 토끼의 쌍의 수는 $\dfrac{n^2-n+4}{2}$이다.

5. A 교사가 학생들에게 '둘레의 길이가 100m인 도형의 넓이'라는 조건을 사용하여 조별로 문제를 만들고 해결하여 발표하고, 보고서로도 제출하게 하였다. 이때 가능한 한 일상생활이나 다른 분야와 연계된 풍부한 배경을 가진 문제를 만들도록 하였다.

A 교사는 학생들의 조별 발표를 관찰하고 보고서를 검토하면서 수학적 의사소통 능력에 초점을 두어 평가하려고 한다. 이때, 수학적 의사소통 능력을 평가하기 위한 항목을 2 가지만 쓰시오. [총 4점] [2004-4]

6. 다음은 제 7차 수학과 교육과정의 '평가' 항목에서 제시하고 있는 내용의 일부이다.

① 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고, ② 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가가 이루어질 수 있게 한다.

제 7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 학습 평가의 목적을 학생과 교사의 측면에서 각각 쓰고, 수학 학습 평가에서 ①에 비해 ②가 갖는 장점을 인지적 영역과 정의적 영역의 측면에서 각각 쓰시오. [4점] [2006-6]

7. 다음은 수학 7-나 단계에서 학습하는 내용 요소와 평가 문항이다. 다음에 제시된 평가 문항의 문제점을 보완하기 위해 면담을 이용한 평가를 계획하려고 한다.

① 내용 요소 : 히스토그램

② 평가 문항 : 도수분포표를 그래프로 나타낸 것을 무엇이라고 하는가?

①을 ②의 문항으로 평가할 때의 문제점을 쓰고, 면담을 이용한 평가의 의의를 하시오. 또한 ①을 면담에 의해 평가할 때 활용할 수 있는 ①과 직접 관련된 질문을 한 가지 쓰시오. [4점] [2007-3]

8. 제 7차 수학과 교육과정에서는 '수학학습의 평가가 ①학생 개개인의 수학학습을 돕고, ② 교사 자신의 수업 방법을 개선' 하는 데 기여할 것을 평가 목적의 하나로 명시하고 있다. 다음 문항을 위에 기술한 평가 목적에 보다 부합하도록 재구성하고, 재구성한 근거를 ①과 ②의 관점에서 문항 내용과 관련지어 서술하시오. (단, 문항을 재구성할 때, 주어진 명제는 변형하지 않도록 한다.) [4점] [2008-1]

> 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.
>
> 답 : ________
>
> 명제 : 이차함수 $y=ax^2+bx+c$는 x절편과 y절편을 모두 갖는다.

- 재구성 문항 :
- 재구성한 근거

  ①의 관점 :

  ②의 관점 :

9. 다음은 '평균'에 대한 이해 및 문제해결 능력을 평가하기 위한 문항과 채점기준이다. 이 기준에 따라 채점할 때, 아래에 제시된 답안의 평가 결과로 가장 적절한 것은? [2.5점] [2009 모의-14]

〈문항〉

어떤 네 수의 평균이 17이다. 그 네 수 가운데 세 수는 15, 18, 16이다. 나머지 한 수는 얼마인가? 풀이 과정을 모두 제시하고 구한 값이 답이 되는 이유를 설명하시오.

등급	채 점 기 준
A	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략이 적절하며 정확하게 사용되었다. • 옳은 답을 제시하였다.
B	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략은 적절하지만 전략 사용에서 사소한 실수나 생략이 나타났다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
C	• 평균의 의미를 부분적으로 이해하고 있다. • 전략의 사용이 부분적으로 불완전하거나 부정확하다. • 답은 옳을 수도 틀릴 수도 있다.
D	• 평균의 의미에 대한 이해가 초보적이다(예 : 자료의 합만 구한 경우). • 문제해결 과정에 분명히 드러난 전략이 없다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
E	• 평균의 의미를 전혀 파악하지 못했다. • 의미 없는 계산이 제시되어 있고, 설명이 제시되지 않았거나 설명이 단순히 문제를 재진술하고 있다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.

〈답안〉

먼저 알고있는 세수를 다 더한 뒤
네번째 수를 찾기 위해
여러가지 수를 더해서 평균을 구해봤다.

$15 + 16 + 18 = 49$

$49 + 17 = 56$ $\quad 56 \div 4 = 14$

$49 + 20 = 69$ $\quad 69 \div 4 = 17 \cdots 1$

답은 20 이다.

① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

10. 다음은 김 교사가 삼각함수 단원을 수업한 후 수행평가를 위하여 만든 과제이다. 이 과제로 평가할 수 있는 항목으로 가장 거리가 <u>먼</u> 것은? [2점] [2009-13]

1. 우리 도시의 지난 2년간 월평균 온도를 조사하시오. 2. x축을 월, y축을 월평균 온도로 하고, 이 자료를 순서쌍 (x, y)로 하여 좌표평면 위에 나타내시오. 3. 이 점들이 나타낼 수 있는 적당한 삼각함수를 찾는 과정을 자세히 기록하시오. 4. 내년 우리 도시의 월별 온도를 예측하시오.

① 주기함수에 대한 이해를 바탕으로 하여 과제를 논리적으로 해결하는 과정을 평가할 수 있다.
② 자연현상을 수학적 모델링을 통하여 이해하고 분석하는 능력을 평가할 수 있다.
③ 문제 해결에 필요한 식, 그래프, 기호의 정확한 사용 능력을 평가할 수 있다.
④ 주어진 문제 상황에 수학적 개념과 원리를 적용하는 능력을 평가할 수 있다.
⑤ 수학의 유용성과 수학적 활동의 가치에 대한 신념을 평가할 수 있다.

11. 다음 교사들의 의도에 적합한 평가 방법이 가장 알맞게 연결된 것은? [2점] [2009-14]

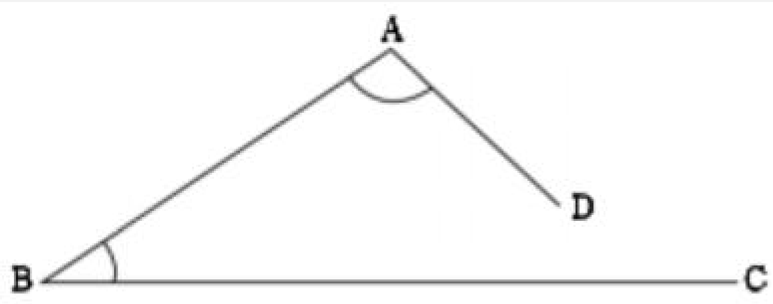
(가) 학생들이 미분과 적분 단원을 학습하는 동안 수학적 이해가 발달하는 과정을 전체적으로 평가하고 싶습니다. 또, 학생 스스로의 반성적인 자기 평가도 이루어지면 더 좋겠습니다. (나) 수학 공부를 아주 열심히 하는데 성적은 항상 낮은 학생이 있습니다. 이 학생의 메타-인지적인 능력을 평가할 필요가 있다고 생각합니다. (다) 스스로 문제를 찾고, 이를 해결하기 위해 자신의 추론 능력이나 알고리즘을 사용하는 능력, 자신의 아이디어를 다른 사람에게 전달하는 능력을 평가하고 싶습니다.

	(가)	(나)	(다)
①	관찰과 면담	수학저널 쓰기	포트폴리오
②	포트폴리오	관찰과 면담	프로젝트
③	포트폴리오	프로젝트	수학저널 쓰기
④	프로젝트	관찰과 면담	포트폴리오
⑤	수학저널 쓰기	포트폴리오	프로젝트

12. 다음은 김 교사가 중학교 1학년 학생을 대상으로 삼각형의 결정조건을 지도하는 수업의 일부이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오. [2009 2차, 1교시-1-2]

김 교사: 지금까지 여러 모둠이 발표한 결과에 따르면, 세 변의 길이가 모두 주어진 경우, 두 변의 길이와 그 끼인각이 주어진 경우, 한 변의 길이와 양 끝각의 크기가 주어진 경우로 삼각형의 결정조건을 정리할 수 있습니다. 다른 경우를 발견한 모둠이 있습니까?

가영: 저희 모둠에서는 두 각과 한 변이 주어졌는데 그 두 각이 주어진 변의 양 끝각이 아닌 경우에 삼각형이 결정되는지 알아보려 했어요. (칠판에 아래의 그림을 그린다.)



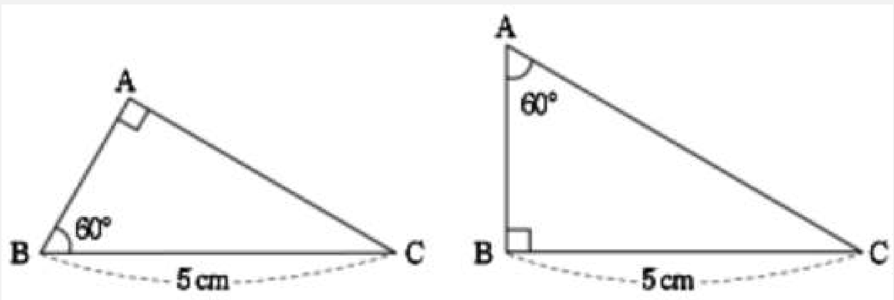
여기서 선분 BC는 주어진 변이고 각 A와 각 B가 주어진 각이에요. 그런데 이 그림에서 보면 삼각형 모양이 만들어지지 않아요. 그러면 이 경우는 삼각형을 결정할 수 없나요?

김 교사: ㉠여기서 선분 AB와 선분 AD는 길이가 주어지지 않은 것이라서 늘이거나 줄일 수 있어요. 이 그림에서 선분 AB의 길이를 늘려서 선분 AD의 연장선이 점 C를 지나도록 하면 삼각형은 만들어지겠지요.

나영: 하지만 그 그림에서 각 A의 크기와 각 B의 크기를 서로 바꾸면 다른 삼각형이 만들어져요.

김 교사: ㉡(전체 학생을 향해) 나영이가 한 말을 이해했어요? (학생들이 이해를 못하는 상황) 그럼 나영이는 지금 한 말을 다른 친구들이 이해할 수 있도록 좀 더 자세히 설명해 보겠어요?

나영: 예를 들어, 한 변의 길이가 5cm이고 두 각의 크기가 90°, 60°인 삼각형을 다음과 같이 그릴 수 있어요.



김 교사: 네. 잘했어요. 나영이가 설명한 것처럼 가영이네 모둠이 제시한 조건은 삼각형의 결정조건이라고 할 수 없습니다.

다영: 선생님, 질문이 있는데요. 그럼 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각이 주어진 경우는 삼각형의 결정 조건이 되나요?

김 교사는 다영이의 질문을 아래와 같이 문제로 만들어 과제로 내 주었다. [문제]에 대한 모범 답안을 만들고, 과제물을 평가할 수 있는 채점 기준을 다음 <조건>에 따라 작성하시오. 그리고 아래의 <학생 과제물 사례>에 있는 [풀이]를 위에서 작성한 채점 기준의 채점 영역별로 평가한 결과를 근거와 함께 서술하시오. [20점]

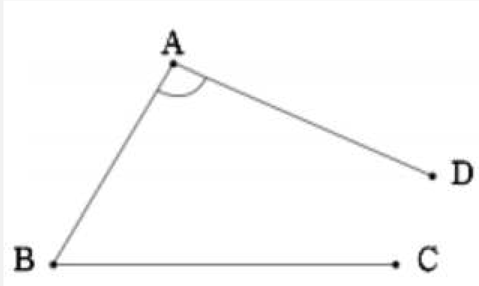
<조건>

- 분석적 점수화 방법을 적용하여 채점 기준을 작성하되, 배점은 고려하지 않는다.
- 채점 기준은 채점 영역과 채점 요소로 구성한다.
- 채점 영역을 먼저 '문제해결'과 '수학적 추론과 정당화'로 구분하고, '문제해결' 영역은 다시 '문제의 이해', '계획의 작성 및 실행', '반성'의 3가지 하위 영역으로 구분한다.
- 위에서 밑줄 친 4가지 채점 영역 각각에 대하여 채점 요소가 2가지만 포함되도록 채점 기준을 구성한다.

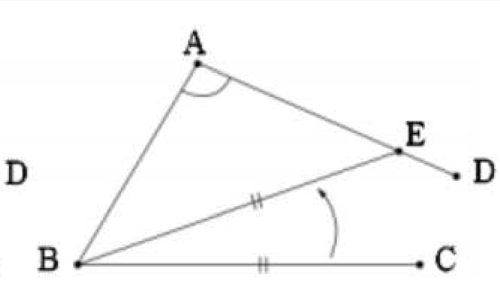
<학생 과제물 사례>

[문제] 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 되는지 판단하고, 그 이유를 설명해 보세요.

[풀이] 나는 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 된다고 생각한다. 내 생각이 맞는지 알아보기 위해 컴퓨터 프로그램을 이용하여 직접 그려 보았다. 다음은 컴퓨터 화면을 캡처한 것이다.



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 선분 AB와 선분 BC는 길이가 주어진 두 변을 나타내고 각 A는 크기가 주어진 각을 나타낸다. 여기서 선분 BC의 길이가 변하지 않도록 꼭짓점 B를 중심으로 선분 BC를 돌려서 [그림 2]와 같이 선분 AD와 만나도록 한다. 이때 생기는 교점을 E라고 하면 삼각형 ABE가 만들어진다. 선분 BC를 꼭짓점 B를 중심으로 회전시킨 이유는 선분 BC의 길이를 유지하면서 세 번째 꼭짓점을 구할 수 있기 때문이다.

이처럼 문제의 조건을 이용하여 삼각형을 실제로 만들어 낼 수 있으므로 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우는 삼각형의 결정조건이 된다.

13. 다음은 학생의 수학 학습에 대한 정의적 태도 평가를 위한 교사용 관찰 점검표이다. <보기>에서 적절한 설명을 모두 고른 것은? [2점] [2010-4]

정의적 태도 관찰 점검표

학생 이름 : ___________

항목	세부 관찰 항목	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	매우 그렇지 않다
수학에 대한 흥미와 호기심	수학 시간에 즐거워한다.					
	수학적 개념이나 원리를 알려고 한다.					
수학에 대한 자신감	어려운 수학 문제를 잘 풀 수 있다고 생각한다.					
과제집착력과 의지	주어진 문제를 끝까지 해결한다.					
	모르는 점은 교사와 친구에게 질문하여 알려고 한다.					

<보기>

ㄱ. 위의 관찰 점검표는 교사가 평가를 위해 관찰해야 할 학생의 행동 목록을 제공하므로 기록한 자료의 분석을 수월하게 한다.
ㄴ. ‘발견술에 대한 지식을 많이 가지고 있다’는 정의적 태도 평가를 위한 세부 관찰 항목으로 적합하다.
ㄷ. 위의 관찰 점검표는 학생이 자신의 수학적 태도를 스스로 자기 평가하는 데에도 활용될 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 다음은 어느 교사가 출제한 고등학교 로그 단원의 평가 문항이다. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 인지적 영역의 평가 항목 중 이 문항으로 평가하고자 하는 것으로 가장 적절한 두 개를 <보기>에서 고른 것은? [2점] [2011-9]

빛이 어떤 유리 한 장을 통과할 때마다 밝기가 1% 씩 감소한다고 할 때, 빛이 이 유리 n장을 통과하면 밝기는 $(1-0.01)^n$배가 된다. 밝기가 100 럭스(Lux)인 빛이 이 유리 10장을 통과했을 때 빛의 밝기를 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.
(단, $\log 9.036 = 0.9560$, $\log 9.90 = 0.9956$으로 계산한다.)

<보기>

ㄱ. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
ㄴ. 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
ㄷ. 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력
ㄹ. 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

15. 다음 문항과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2012-13]

[문항]
다음은 세 명의 야구 선수 A, B, C가 최근 5경기에서 기록한 안타 수이다. 경기 당 안타 수가 가장 고른 선수는 누구이겠는가? 그 이유를 설명하여라.

A: 1, 3, 3, 1, 2
B: 0, 4, 0, 4, 2
C: 1, 3, 0, 4, 2

<보기>

ㄱ. 현재 수학 학습의 평가에서는 2007년 개정 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수해야 하므로, 이 문항은 중학교 2학년에서 다뤄질 수 있다.
ㄴ. 이 문항은 분산, 표준편차 등의 수학 용어를 사용하여 수학적으로 표현해 봄으로써 의사소통 능력을 기르는 데 도움이 될 수 있다.
ㄷ. 이 문항은 해결 결과뿐만 아니라 해결 과정도 중시하고 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

16. 다음은 김 교사가 평가도구 개발 단계에서 제작한 고등학교의 도형의 방정식에 대한 문항과 그 채점 기준이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2점] [2013-12]

[문항]
어떤 공장에서 제품 A, B를 P, Q 두 팀으로 나누어 생산하고 있다. 이때 제품 A, B를 각각 1톤 생산하는 데 필요한 시간과 제품에서 얻는 이익은 아래 표와 같다.

제품	1톤 생산하는 데 필요한 시간		이익
	P팀	Q팀	
A	2시간	2시간	30만원
B	1시간	3시간	20만원

하루에 일하는 시간이 P팀은 8시간, Q팀은 12시간을 초과할 수 없다고 할 때, 이 공장에서 하루에 제품 A, B를 생산하여 얻을 수 있는 최대 이익은 얼마인지 구하여라. 풀이 과정과 답을 쓰시오. [10점]

[문항 정보]

평가 목표	행동 영역			
부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.	계산	이해	추론	문제해결

[채점 기준]

채점 요소	배점
문제 상황을 연립부등식으로 나타낸다.	2점
연립부등식이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.	3점
하루 이익이 최대인 경우를 찾는다.	3점
최대 이익(130만원)을 구한다.	2점

<보기>

ㄱ. [문항]은 주어진 수학 외적 상황과 수학 내용의 관련성을 파악하여 문제를 해결한다는 측면에서 볼 때, [문항 정보]의 행동 영역에서 문제해결로 분류하는 것이 적절하다.
ㄴ. [문항]은 개방형 문제(open-ended problem)로서, 수학적 개념과 기능을 학생들이 얼마나 습득하고 이를 적용할 수 있는지를 평가하기에 적합하다.
ㄷ. [채점 기준]은 분석적 점수화 방법에 따라 만들어진 기준으로, 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 과정을 구체화하여 각 과정별로 채점 요소를 정해 점수를 부여한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

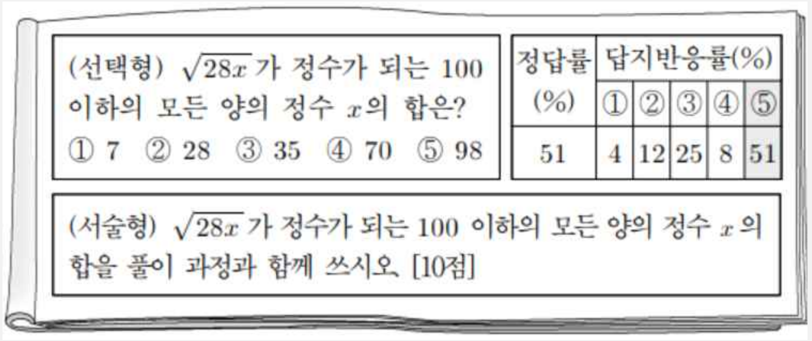
17. 다음은 수학 교사를 위한 ‘평가’ 연수 시간에 이루어진 대화의 일부이다.

김 강사: 서술형 평가의 중요성에 대해 말씀을 드렸습니다. 혹시 질문이 있으세요?

박 교사: 서술형 평가는 선택형 평가와 비교해 장점도 있지만, 채점의 어려움이 걱정입니다.

김 강사: ‘총체적 점수화 방법’을 적용하여 채점하면 좋을 듯 합니다. <자료1>로 설명해 볼게요.

<자료1>



(선택형) $\sqrt{28x}$ 가 정수가 되는 100 이하의 모든 양의 정수 x의 합은?

① 7 ② 28 ③ 35 ④ 70 ⑤ 98

정답률 (%)	답지반응률(%)				
	①	②	③	④	⑤
51	4	12	25	8	51

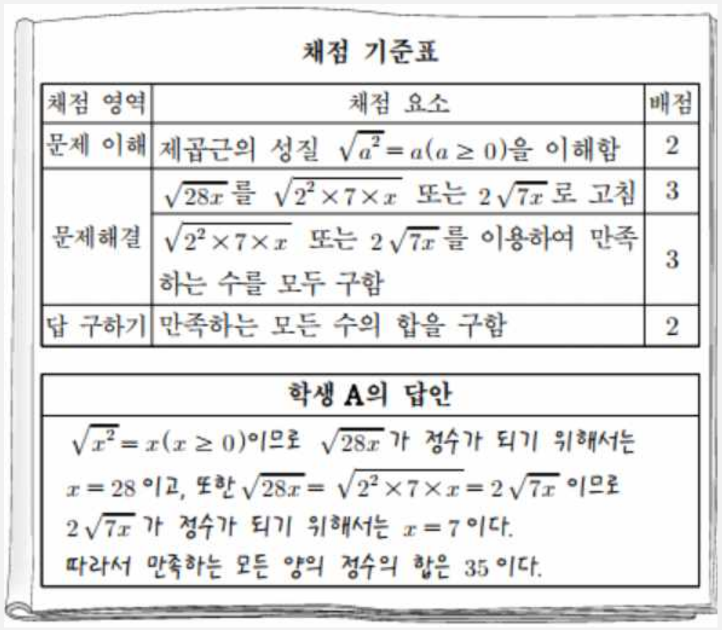
(서술형) $\sqrt{28x}$ 가 정수가 되는 100 이하의 모든 양의 정수 x의 합을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [10점]

…(중략)…

박 교사: 아, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법이군요. 다른 채점 방법도 있나요?

김 강사: 네, ‘분석적 점수화 방법’이 있습니다. 문제를 해결하는 데 필요한 내용이나 과정을 몇 단계로 구분하여 단계별로 점수를 부여하는 방법입니다. <자료2>는 <자료1>의 (서술형) 문제에 대해 어느 교사가 작성한 채점 기준표와 학생 A의 답안입니다.

<자료2>



채점 기준표

채점 영역	채점 요소	배점
문제 이해	제곱근의 성질 $\sqrt{a^2}=a(a\geq 0)$을 이해함	2
문제해결	$\sqrt{28x}$를 $\sqrt{2^2\times 7\times x}$ 또는 $2\sqrt{7x}$로 고침	3
	$\sqrt{2^2\times 7\times x}$ 또는 $2\sqrt{7x}$를 이용하여 만족하는 수를 모두 구함	3
답 구하기	만족하는 모든 수의 합을 구함	2

학생 A의 답안

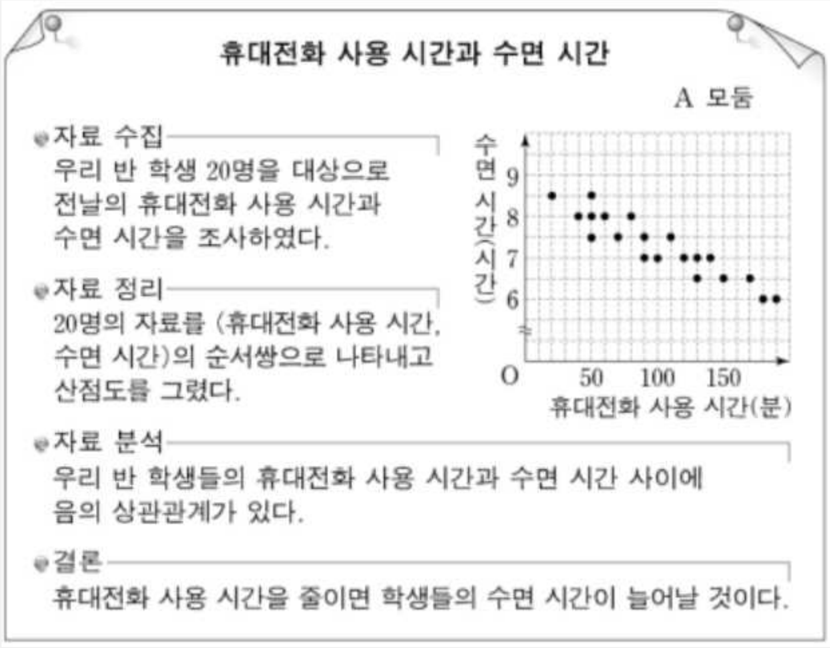
$\sqrt{x^2}=x(x\geq 0)$이므로 $\sqrt{28x}$가 정수가 되기 위해서는 $x=28$이고, 또한 $\sqrt{28x}=\sqrt{2^2\times 7\times x}=2\sqrt{7x}$이므로 $2\sqrt{7x}$가 정수가 되기 위해서는 $x=7$이다.
따라서 만족하는 모든 양의 정수의 합은 35이다.

…(중략)…

박 교사: 네, 서술형 평가 실시에 큰 도움이 될 것 같습니다.

교사의 수업 개선에 초점을 맞추어 서술형 평가의 장점을 <자료1>, <자료2>와 관련지어 서술하시오. 또한 <자료2>의 채점 기준표에 근거하여 ‘학생 A의 답안’을 채점한 점수를 쓰고, 그 점수를 부여한 이유를 설명하시오. [4점, 서술형A-10] [2016]

18. 박 교사는 상관관계를 지도하는 수업 시간에 학생들에게 '휴대전화 사용 시간과 수면 시간의 상관관계'를 포스터로 제작하도록 하였다. A 모둠 학생들이 만든 포스터는 다음과 같다.



박 교사는 프로젝트 평가 방법을 사용하여 학생들의 포스터를 다음의 항목에 대해 평가할 계획이다.

평가 항목	(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?
	(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?
	(3) 자료를 옳게 분석하였는가?
	(4) 결론이 적절한가?

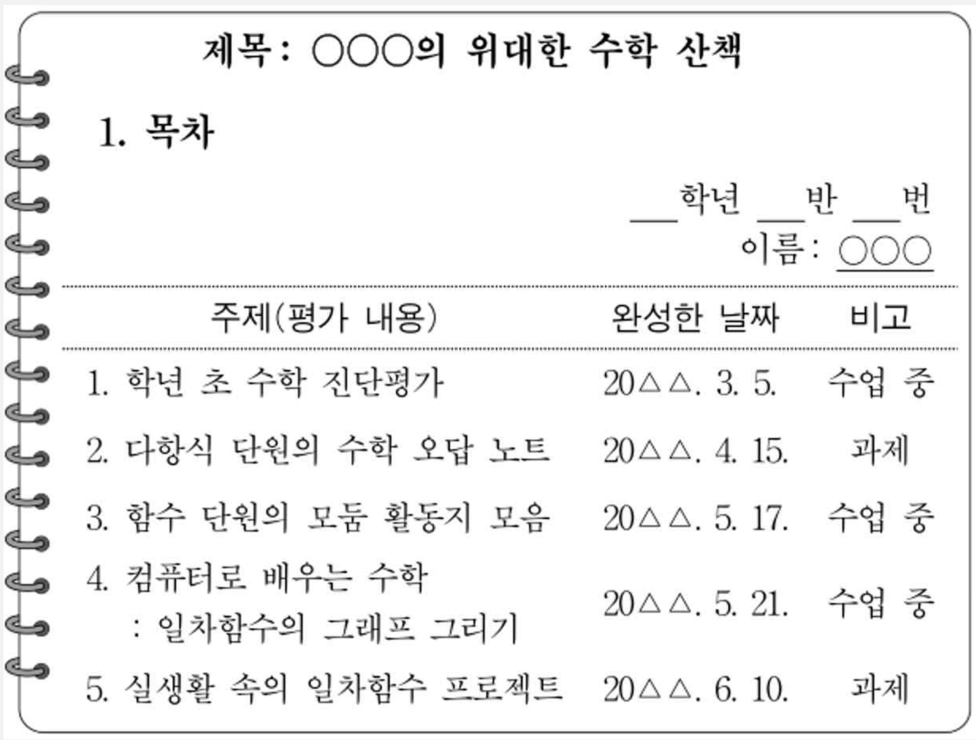
이 수업의 평가 방법으로 프로젝트 평가가 적절한 이유를 설명하시오. 그리고 평가 항목 (3)에 따라 A 모둠 포스터의 '자료 분석'을, 평가 항목 (4)에 따라 A 모둠 포스터의 '결론'을 평가하여 그 결과를 각각 서술하시오. [4점, 서술형B-4] [2020]

19. 다음은 강 교사와 임 교사가 학기 초에 수학 교과의 평가 방법을 논의하면서 나눈 대화의 일부이다.

강 교사: 이번 학기에는 ㉠학생이 일정 기간 동안 시험지, 단순 과제물, 프로젝트 형태의 결과물, 수학 일기 등을 모아 제출하고, 교사가 이 제출물에 기초하여 학생의 학습 내용 이해뿐만 아니라 관련된 교과 역량을 종합적으로 평가하면 좋을 것 같습니다.

임 교사: 네. 학생과 협력하여 목표 영역을 정하고, 장시간에 걸친 학생들의 수학 학습 수행과 그 결과물을 정해진 준거에 따라 평가하고 활용하는 방법이군요.

강 교사: 그렇습니다. 이 평가 방법을 지난 학기에 사용했을 때 학생이 제출한 예시 자료를 보여 드릴게요.


제목: ○○○의 위대한 수학 산책

1. 목차

___학년 ___반 ___번
이름: ○○○

주제(평가 내용)	완성한 날짜	비고
1. 학년 초 수학 진단평가	20△△. 3. 5.	수업 중
2. 다항식 단원의 수학 오답 노트	20△△. 4. 15.	과제
3. 함수 단원의 모둠 활동지 모음	20△△. 5. 17.	수업 중
4. 컴퓨터로 배우는 수학 : 일차함수의 그래프 그리기	20△△. 5. 21.	수업 중
5. 실생활 속의 일차함수 프로젝트	20△△. 6. 10.	과제

임 교사: ㉡협력 학습 상황에서 동료의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 학생들이 서로 평가한 기록지를 제출물에 추가하면 좋겠어요.

밑줄 친 ㉠, ㉡의 평가 방법의 명칭을 2015 개정 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2020-236호)의 '평가 방법'에 제시된 용어로 순서대로 쓰시오. 또한 2015 개정 수학과 교육과정의 '평가 원칙'에 제시된 수학과 평가의 목적을 기술하고, 그 목적의 관점에서 밑줄 친 ㉠의 평가 방법이 갖는 장점을 1가지 서술하시오. [4점, 서술형A-6] [2023]

20. 다음은 '수학평가론'의 강의 내용을 요약한 공책의 일부이다.

〈과제 1〉 다음 [문제]에 대한 채점기준표를 만들고, [예시답안]을 채점하시오.

[문제]
두 함수 $f(x)=\log_n x$, $g(x)=1-\log_n(x+4)$의 그래프가 구간 $1<x<2$에서 만나도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.) [4점]

[예시답안]
교점을 (x,y)라 하면, 방정식 $\log_n x = 1-\log_n(x+4)$이므로 방정식 $x^2+4x-n=0$은 실근을 가진다. 이차함수의 그래프에 적용하면 직선 $x=-2$를 축으로 하는 포물선이므로, $1<x<2$에서 실근을 가지려면 $D \geq 0$, $f(1)>0$, $f(2)>0$이다. 따라서 $n \geq -4$, $n<5$, $n<12$이므로, n의 값은 2, 3, 4이다. 합은 9이다.

o 우리가 만든 채점기준표

채점기준표 A

채점 요소	배점
o 백지 혹은 오답 이외 다른 내용이 없음	0
o 문제를 이해한 듯하나, 겨우 풀기 시작함	1
o 합리적으로 풀었지만, 중요한 실수로 옳은 풀이를 방해함	2
o 문제는 해결했지만, 단순한 계산 실수로 답을 구하지 못함	3
o 적절한 방법을 사용하여 문제를 해결하고 답을 구함	4

채점기준표 B

채점 영역	채점 요소	배점
문제 이해	o 방정식을 이용하고 있음	1
문제 해결	o 방정식 $x^2+4x-n=0$을 제시함	1
	o 구간 $1<x<2$에서 해가 존재할 조건을 제시하고, 모든 n의 값을 구함	1
답 구하기	o 모든 n의 값의 합을 정확히 구함	1

o [예시답안]의 채점 점수
채점기준표 A에 의한 점수는 (㉠)점이고, 채점기준표 B에 의한 점수는 (㉡)점이다.

〈과제2〉 채점기준표 A에 의한 채점 방법과 비교하였을 때, 채점기준표 B에 의한 채점 방법이 가지는 장점 1가지를 적으시오.

괄호 안의 ㉠과 ㉡에 들어갈 점수를 순서대로 쓰고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 점수를 부여한 이유를 채점기준표 B에 근거하여 설명하시오. 또한, 〈과제 2〉에 대한 답을 적고, 장점의 이유를 채점기준표 B에 의한 채점 방법의 의미에 근거하여 서술하시오. [4점, 서술형A-6] [2024]

[수학사]

1. 수학자와 그의 업적에 관하여 잘못 짝지어진 것은? [1994-32]
① 가우스(Gauss) --------------------------쾨니히스베르크의 다리 문제
② 데자르그(Desargues) -------------------------------------사영기하
③ 리만(Riemann) ------------------------------------비유클리드 기하
④ 아르키메데스(Archimedes) ------------------구와 원기둥에 관한 연구

2. 다음 인물 중에서 미적분의 발견과 관계가 깊은 수학자는? [1995-5]

㉠ Gauss	㉡ Newton
㉢ Riemann	㉣ Leibniz

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢
③ ㉡, ㉣　　④ ㉢, ㉣

3. 사영기하에 대한 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? [1996-2]

㉠ 쌍대 원리가 성립하지 않는다.
㉡ 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 오직 하나이다.
㉢ 어느 세 점도 동일 직선상에 있지 않은 네 점이 존재한다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉢　　④ ㉡

4. 〈보기〉의 ㉠, ㉡에 들어갈 수학자가 옳게 짝지어진 것은? [1996-26]

〈보기〉

㉠은(는)일반 5차 다항식은 거듭 제곱근을 써서 풀 수 없음을 처음으로 증명하였다.
㉠의 연구는 ㉡의 연구에 영향을 끼쳤고, ㉡은(는) 일반n차 다항식의 가해성(solvability by radicals)은 특정한 군(group)의 성질과 연관되어 있음을 발견하였다.

	㉠	㉡		㉠	㉡
①	Gauss	Galois	②	Gauss	Abel
③	Abel	Galois	④	Galois	Gauss

5. 비유클리드 기하학의 태동배경과 수학사적 의미에 대해 논하시오. [1997 모의-6]

6. 피보나치 수열 $\{f_n\}$은 다음과 같이 정의된다.

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ (n \ge 3)$$

피보나치 수열의 유래를 간단히 쓰고[3점], 다음 등식이 성립함을 보이시오[5점]. [총 8점] [1998-7]

$$f_{n+1} f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n\ (n \ge 2)$$

7. 비유클리드 기하학은 『원론』의 다섯 공준 가운데 평행선의 공준을 하나의 정리라 생각하고, 이를 증명해 보려는 가운데 탄생했다. 평행선의 공준은 “직선 l과 그 위에 있지 않은 점 P가 있을 때, P를 지나며 l과 만나지 않는 직선은 오직 하나 있다”이다. 물음에 답하시오. [총 4점] [1999 추시-5]
(1) 쌍곡기하(hyperbolic geometry)와 타원기하(elliptic geometry)에서의 평행선의 공준을 각각 서술하시오. [2점]
(2) 쌍곡기하와 타원기하 공간의 모델을 각각 그림으로 나타내고, 각각의 공간 모델에서 삼각형 내각의 합이 180°보다 작거나 크게 되는 것을 삼각형을 그려서 나타내시오. [2점]

[수학자 주요 업적 연대표]

수 학 자	주 요 업 적
아메스 Ahmes B.C1700년경 이집트	• 이집트의 왕실 서기로, 저서 『아메스 파피루스』에 산술, 기하, 대수 등이 기록 • 단위분수 사용 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$을 의미) • 일차 방정식: 가법, 감법, 항등을 표시한 기호사용 • 넓이의 계산 정사각형, 직사각형, 이등변삼각형, 등변 사다리꼴, 원 $(=\frac{256}{81}\times r^2)$
탈레스 Thales B.C640? ~ 546 그리스	• 그리스 기하학의 시조 • 비례식을 최초로 생각 • 원은 지름에 의해서 이등분된다 • 이등변삼각형의 두 밑각은 같다 • 맞꼭지각은 같다 • 삼각형의 내각의 합은 $2\angle R$이다.
피타고라스 Pythagoras B.C572? ~ 492? 그리스	• 수에 관한 연구 : 홀수, 짝수, 완전수, 삼각수, 사각수, 피타고라스수 • 피타고라스의 정리 • 황금분할 방법 연구 • 비례와 평균의 연구: 산술평균, 조화평균 • 정다면체의 연구 • 무리수의 발견
제논 Zenon B.C490? ~ 429? 그리스	• 제논의 역설 주장 (아킬레스는 거북을 앞지를 수 없다, 날아가는 화살은 정지되어 있다)
에우독소스 Eudoxos B.C408? ~ 355? 그리스	• 구의 체적은 반지름의 세제곱에 비례한다. • (각뿔(원뿔)의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(각기둥(원기둥)의 부피)
히포크라테스 Hippocrates B.C460? ~ 77? 그리스	• 입방 배적 문제 연구 • 비례중항을 고안하여 델로스의 문제 해결 시도
플라톤 Platon B.C427? ~ 347? 그리스	• 진리를 알기 위하여 수학의 중요성을 역설 • 신은 끊임없이 기하학화한다. • '점은 선의 시작'
아리스토텔레스 Aristoteles B.C384 ~ 322 그리스	• 연역 논리를 조직화 • 기하학적 전개 방법 확립 • '점, 선, 면은 각각 선, 면, 체의 한계이고, 체는 3방면의 방향을 가진 것이다'
유클리드 Euclid B.C330? ~ 275? 그리스	• 『기하학 원론』 13권 • 논증의 체계 확립 • 호제법으로 최대공약수 구함 • 평행선의 성질 • 삼각형의 합동 조건
아르키메데스 Archimedes B.C287? ~ 212 그리스	• 정96각형을 이용하여 π의 값을 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$로 계산 • 구분구적법에 의하여 넓이, 부피 구함 • 부력의 원리로 비중을 측정 • 지렛대의 원리 • (원의 넓이)=(원주의 $\frac{1}{2}$)×(반지름) • 수의 무한성에 관한 연구
에라토스테네스 Eratosthenes B.C275 ~ 194 그리스	• 지구의 둘레를 산정함 • 에라토스테네스의 체를 만듦 • 태양, 달까지의 거리 측정
아폴로니우스 Apollonios B.C262? ~ 200? 그리스	• 원추곡선의 성질 연구 • 『원뿔곡선론』 8권 • 타원, 쌍곡선, 포물선의 명칭을 사용
히파르코스 Hipparchos B.C190? ~ 125? 그리스	• 구면삼각법의 창안자

수 학 자	주 요 업 적
헤론 Heron B.C130 ~ 75? 그리스	• 측량기구 제조 • 헤론의 공식(삼각형의 넓이) 발견 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$
니코마코스 Nicomachos B.C50 ~ 150? 그리스	• 『산술입문』 • 세제곱수는 연속되는 홀수의 합으로 나타낼 수 있다. $1^3=1,\ 2^3=3+5,\ 3^3=7+9+11,\ \cdots$
프톨레마이오스 Ptolemaeos B.C85? ~ 165? 그리스	• 3각법의 연구가: 삼각법의 가법정리, 반각공식 • 저서 『Almagest』에 sin표와 같은 수표 작성 • 원주를 360°로 나누고 60진법에 의하여 도, 분, 초로서 호와 현의 길이 측정 • 평행선 공준을 증명하려고 시도
디오판토스 Diophantos B.C246? ~ 330? 그리스	• 『산학』 13권 : 대수적 수론을 해석적 논법으로 씀 • 부정방정식 연구 • 생략속기법의 대수적 표기를 이용: 지수법칙 생각
파푸스 Pappos 300년경 그리스	• 『수학집성』 8권: 그리스 기하학을 집대성 • ·파푸스의 정리 발견
조충지 祖沖之 430 ~ 501 중국	• 원주율의 근사값으로 $\frac{22}{7}$와 $\frac{355}{113}$를 사용
브라마굽타 Brahmagupta 598 ~ 660? 인도	• 원에 내접하는 사각형의 넓이 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (단, $s=(a+b+c+d)/2$) • 원주율의 근삿값으로 $\sqrt{10}$ 사용
알콰리즈미 Alkhwarizmi 780 ~ 850 아라비아	• 분수의 횡선 도입 • 'algebra'란 용어를 이항이란 뜻으로 씀 • 이차방정식을 기하학적으로 씀 • alkwarizmi → algoritmi → algorithm (어떤 특별한 방법으로 계산하는 기술)
카얌 Khayyam 1140 ~ 1123 아라비아	• 삼차방정식의 근을 원뿔곡선을 이용하여 구함
바스카라 Bhaskara,A 1114 ~ 1185 인도	• 이차방정식에 두 근의 존재를 인정 • $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$을 증명 • 『vija-ganita(代數)』 • 원의 반지름은 원주의 $\frac{3438}{21600}$로 계산
피보나치 Fibonacci 1180? ~ 1250? 이탈리아	• 피보나치 수열을 생각 • 『산반서(算盤書)』 • 인도-아라비아 숫자를 유럽에 소개 • 『실용기하학』
주세걸 1300년경 중국	• 『산학계몽(算學啓蒙)』 • 한국 및 일본 수학에 영향을 줌
봉필 Bonfil, I. 1350년경 프랑스	• 소수(小數)의 기호를 최초로 사용
파촐리 Pacioli, L. 1450? ~ 1520 이탈리아	• 1, 2차 방정식 해법의 표준형을 다룸 • 확률론을 연구 • 복식부기를 시작 • 산술서 『Summa de Arithmetica』
페로 Ferro 1465? ~ 1526 이탈리아	• 삼차방정식의 해법 연구 • $x^3+mx=n$을 대수적으로 풀었으나 미발표
슈티펠 Stifel, M. 1487 ~ 1567 독일	• 로그개념의 선구자 • 17제곱 이하의 모든 이항계수를 구함 • 음수, 거듭제곱, 거듭제곱근을 다룸
비트만 Widmann, J. 1462 ~ 1498 보헤미아	• 모든 상거래에서 +, −를 사용하기 시작함 • 『상업상술』

수 학 자	주 요 업 적
타르탈리아 Tartaglia, N. 1500? ~ 1557 이탈리아	• 삼차방정식의 해법 발견
카르다노 Cardano, G. 1501 ~ 1576 이탈리아	• 『위대한 술법』: 3, 4차 방정식의 해법 • 확률문제 다룬 도박사의 안내서 씀 • 허수발견
레코드 Recorde, R. 1510 ~ 1558 영국	• 등호 ‘=’를 처음 사용
페라리 Ferrari, L. 1522 ~ 1565 이탈리아	• 사차방정식 해법을 최초로 발견하여 스승 카르다노의 『위대한 술법』에 실음
비에트 Viete, F. 1540 ~ 1603 프랑스	• 대수학의 체계화에 노력(기호대수학) • 방정식을 일반적인 형태로 표현(문자사용) • 『해석학 입문』
스테빈 Stevin, S. 1548 ~ 1620 네델란드	• 10진 소수의 발명(단, 소수점은 사용하지 않음) (5⓪9①1②2③=5.912)
네이피어 Napier, J. 1550 ~ 1617 영국	• 산술, 대수, 삼각법 등의 단순화·계열화 시도 • 로그를 발견하고 최초로 로그표 발간 • 소숫점 도입
뷔르기 Burgi 1552 ~ 1632 스위스	• 현재 사용하는 소수 표시법 사용 • 로그표 작성 및 자연로그를 생각
해리엇 Harriot, T. 1560 ~ 1621 영국	• 방정식을 최초로 인수로 분해 • 부등호(>, <)를 사용함
브리그스 Briggs, H. 1556 ~ 1631 영국	• 상용로그표 작성 • 1도(度)를 100등분
케플러 Kepler, J. 1571 ~ 1630 독일	• 무한소의 계산 • 적분학의 시초(회전체의 부피 구하는 법 연구) • 행성운동의 3법칙 발견
오트레드 Oughtred, W. 1574 ~ 1660 영국	• 승법(乘法) 기호로 ×를 사용 • 비례의 기호로 :를 사용 • 차(差)의 기호로 ~를 사용 • 계산자 발명
건터 Guanter, F. 1581 ~ 1626 영국	• cosine과 cotangent라는 말을 사용 • 로그자를 처음 만듦
스넬리우스 Snellius, R.W 1591 ~ 1626 네덜란드	• 삼각측량법을 발전시킴 • 삼각법으로 지구의 크기를 측정
데자르그 Desargues, G. 1593 ~ 1662 프랑스	• 사영기하학의 창시 • 데자르그의 정리발견
지라르 Girard, A. 1595 ~ 1632 프랑스	• 허근을 생각해냄 • 근과 계수와의 관계를 증명 • 방정식은 그 차수만큼 근을 가진다는 것을 귀납적으로 추론
데카르트 Descartes, R 1596 ~ 1650 프랑스	• 기하학에 대수적 해법을 적용한 해석기하학 창시 • 『방법서설』: 기하학 해설 • ‘나는 생각한다. 그러므로 나는 존재한다.’
카발리에리 Cavalieri, F. B. 1598 ~ 1647 이탈리아	• ‘카발리에리의 원리’ 발견 • ‘불가분량의 연속기하학’ : 무한소에 관한 논문

수 학 자	주 요 업 적
페르마 Fermat, P. 1601 ~ 1665 프랑스	• 확률의 수학적 이론의 창시자 • 기하학을 대수적으로 취급 • 좌표와 방정식을 이용한 도형성질 연구 • 아폴로니우스의 원뿔곡선 연구 • 페르마의 원리(최단시간의 원리) 발견 • ‘페르마 대정리’
스파이델 Speidell, J. 1619년경 영국	• e를 사용한 로그표를 만듦
그랜트 Graunt, J. 1620 ~ 1674 영국	• 『사망표에 관한 자연적 및 정치적 제관찰』 • 근대 통계학의 발전에 기여
파스칼 Pascal, B. 1623 ~ 1662 프랑스	• 파스칼의 정리 • ‘파스칼 삼각형’(수삼각형) • 사이클로이드에 관한 문제 해결 • 미분, 적분의 선구적 업적을 남김 • 계산기 제작
배로 Barrow, I. 1630 ~ 1677 영국	• 접선을 통한 미분연구 • 미분법과 적분법이 역연산임을 증명
그레고리 Gregory, J. 1638 ~ 1675 영국	• 기하학적 도형의 면적측정에 관한 독자적 방법 발표 • 원주율을 무한급수로 표시함 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$
뉴턴 Newton, I. 1642 ~ 1727 영국	• 미적분학 발견(유율법〈流率法〉) • 만유인력의 법칙을 발견하여 천체 역학의 원리 완성 • 스펙트럼 분석 연구
최석정 崔錫鼎 1646 ~ 1715 조선	• 마방진 연구 • 『구수략(九數略)』
라이프니츠 Leibniz, G.W. 1646 ~ 1716 독일	• 라이프니츠 계산기 만듦 • 미적분법의 창시자 • 미분기호, 적분기호 창안 : $\frac{dy}{dx}$, $\int$ • 두 함수의 곱의 n계 도함수 구하는 공식 발견 • ‘기호주의(記號主義)’의 선구자
롤 Rolle, M. 1652 ~ 1719 프랑스	• 롤의 정리 발견 • 초등 미적분학 연구
로피탈 L’Hospital, F.A. 1661 ~ 1704 프랑스	• 로피탈의 정리 발견 • 행렬식 연구
베르누이 Bernoulli ,J. 1667 ~ 1748 스위스	• 미분방정식 연구 • 개연적 기댓값의 개념을 고안 • 극좌표 최초 사용 • 변분법을 최초로 연구 • ‘베르누이 분포’, ‘베르누이 정리’
드무아브르 De Moivre, A. 1667 ~ 1754 프랑스	• ·확률론 및 보험학에 많은 공헌 • 『우연설』, 『수명에 따른 연금』, 『해석기요』 • ‘드무아브르의 정리’ 발견
테일러 Taylor, B. 1685 ~ 1731 영국	• ‘테일러 급수’ 발견 • 미적분학 연구
심슨 Simson, R. 1687 ~ 1768 영국	• 초등기하학(유클리드원론) 연구 • 심슨선 연구
매클로린 Maclaurin, C. 1698 ~ 1746 영국	• 매클로린 정리로 곡선 연구 • 『미적분학』 • 『기하학의 기본』

수 학 자	주 요 업 적
크라머 Cramer, G. 1704 ~ 1752 스위스	• 행렬식 발견 • 크라머의 공식 발견
오일러 Euler, L. 1707 ~ 1783 스위스	• 허수기호 i 사용 • 무한급수의 수렴, 발산 개척 • $f(x)$기호 사용 • 함수를 해석적인 식으로 정의 • 삼각함수의 기호 도입(sin, cos, tan) • ‘오일러의 정리’ : $v-e+f=2$ • 선형 미분 방정식의 체계적인 해법을 제시 • 복소수에 대한 삼각함수의 개념 도입
심프슨 Simpson, T. 1710 ~ 1761 영국	• 심프슨공식 발견 • 삼각함수의 약호, 기호 도입 (오일러와 동시 사용)
달랑베르 D’Alembert, J.L. 1717? ~ 1783 프랑스	• 편미분방정식 연구 • ‘역학이론’ 발표 • 달랑베르의 정리 발견
람베르트 Lambert, J.H. 1728 ~ 1777 독일	• 원주율 π가 무리수임을 증명 • 평면도법이론에 공헌
라그랑주 Lagrange, J.L 1736 ~ 1813 프랑스	• 극한의 개념 및 미적분 연구 • ‘해석학(analysis)’이란 용어 사용 • 변분법에 관한 일반적인 방법 제시 • 도함수 기호 $f'(x)$, $f''(x)$ 사용 • ‘라그랑주의 정리’ 발견
몽주 Monge, G. 1746 ~ 1818 프랑스	• ‘화법기하학’ 창시 • 미분기하학의 선구적 역할을 함
라플라스 Laplace, P.S. 1749 ~ 1827 프랑스	• ‘정적분’ 용어 사용 • ‘라플라스의 방정식’, ‘라플라스 공식’ • 『우주체계론』, 『천체역학론』, 『확률의 해석적 이론』 • 고전적 확률론에 공헌
르장드르 Legendre, A.M 1752 ~ 1833 프랑스	• 타원함수, 수론, 최소제곱법 연구 • 르장드르 함수 발견
카르노 Carnot, L.N.M 1753 ~ 1823 프랑스	• 『위치의 기하학』,『횡단선의 이론에 관한 소고』⟹ 종합기하학의 기초 닦음
에머슨 Emerson, W. 1768년경 영국	• 무한대의 기호(∞)를 처음 사용
푸리에 Fourier, J.B.J. 1768 ~ 1830 프랑스	• ‘푸리에급수’ : 삼각함수의 무한 합 연구 • 현대적인 함수 이론의 발전에 기여 • 『열전도론』 : 수리물리학에 영향
가우스 Gauss, K.F. 1777 ~ 1855 독일	• 최소제곱법을 이론화 • 곡면론, 허수론, 방정식론, 급수론, 천문학, 측지학, 전자기학 등을 연구 • 대수학의 기본정리 발견 • 복소수의 개념을 확립 • 『정수론』 • 가우스 분포, 가우스 평면, 가우스 기호 발견
포아송 Poisson, S.D. 1781 ~ 1840 프랑스	• 근세 확률론의 기초를 확립 • 포아송분포 연구
볼자노 Bolzano, B. 1781 ~ 1848 체코	• 극한개념 및 무한집합과 관련한 연속함수 연구 • 『무한의 역설』
브리앙숑 Brianchon, C.J. 1785 ~ 1864 프랑스	• 사영기하학 연구
퐁슬레 Poncelet, J.U 1788 ~ 1867 프랑스	• 사영기하학의 사상을 생각함 • 쌍대의 원리연구 • 『도형의 사영적 성질에 관하여』
코시 Cauchy, A.L. 1789 ~ 1857 프랑스	• 정적분 정의 • ‘행렬식(determinant)’이라는 용어 사용 • 행렬의 특성 방정식을 행렬 이론에 도입 • 적분과 역도함수 사이의 관계 입증 • 현대 해석학의 기초 확립 • 극한의 뜻과 연속함수를 정의
뫼비우스 Möbius, A.F. 1790 ~ 1868 독일	• 천문학, 기하학연구 • 뫼비우스의 띠 • 『중심해석』 지음
로바체프스키 Lobachevskii N.I. 1793 ~ 1856 러시아	• 비(非)유클리드 기하학 창시자의 한 사람 • 『로바체프스키 기하학』
베가 Vega, G.F. 1794년경 오스트리아	• 현재 사용되는 로그표를 만듦
케틀레 Quetelet, L.A.J. 1796 ~ 1874 벨기에	• 확률론 연구
플뤼커 Plücker, J. 1801 ~ 1868 독일	• 자료를 이용한 해석기하학 연구
아벨 Abel, N. H. 1802 ~ 1829 노르웨이	• ‘아벨정리’, ‘아벨적분’, ‘아벨방정식’, ‘아벨군’ • 타원함수론 전개 • 대수학 군론을 완성 • 5차이상의 대수방정식은 대수적 해법이 없음을 증명
볼리아이 Bolyai, J. 1802 ~ 1860 헝가리	• 비(非)유클리드 기하학 창시자의 한사람 • 미적분학, 역학, 곡선론에 공헌
야코비 Jacobi, K.G.J 1804 ~ 1851 독일	• 타원함수론, 야코비행렬식 연구 • 편미분 방정식, 진폭 계산, 삼면체 계산
이상혁 李尙爀 1804 ~ 1889 조선	• 『算術管見』 • 기하학, 삼각법 연구
디리클레 Dirichlet. P 1805 ~ 1859 프랑스	• 정수론 연구 • 해석적 정수론을 창시 • 퍼텐셜론을 정밀화 • 『정수론으로의 미적분학의 여러 응용에 관한 연구』
해밀턴 Hamilton, W.R 1805 ~ 1865 영국	• 벡터 해석학의 기초 확립 • 해밀턴 방정식 연구 • 사원수 이론 연구
드모르간 De Morgan, A 1806 ~ 1871 영국	• 드모르간 법칙 • 기호 논리학 완성
그라스만 Grassmann, H.G. 1809 ~ 1877 독일	• 『광연론』 • 그라스만의 법칙 발견 • 그라스만 대수, 선형대수학 창시자

수 학 자	주 요 업 적
갈루아 Galois, E. 1811 ~ 1832 프랑스	• 군론과 방정식의 해법 연구 • ‘군(group)’이라는 말을 최초로 사용 • 갈루아의 이론 세움
실베스터 Sylvester, J. 1814 ~ 1897 영국	• 수적 불변식론 전개 • 행렬을 ‘matrix’라 부름 • 행렬의 고유치 • 행렬이론의 창시자
불 Boole, G. 1815 ~ 1864 영국	• 『사고의 법칙』 • 논리학에 집합 개념을 도입 • 불 대수(Boolean algebra)를 창시
바이어슈트라스 Weierstrass, K.T 1815 ~ 1897 독일	• 수학에서 엄밀성 강조 • 해석함수론의 기초를 확립함 • 바이어슈트라스 정리 발견 • 극소곡면의 이론으로 기하학에 공헌
체비셰프 Chebyshyov, P. L. 1821 ~ 1894 러시아	• 오차론(誤差論)연구 • 체비셰프 부등식 발견
케일리 Cayley, A. 1821 ~ 1895 영국	• 불변식론 연구 • 행렬의 개념 도입 • 8원수 발견 • 사영기하학을 써서 비유클리드 기하학 표현
에르미트 Hermite, C. 1822 ~ 1901 프랑스	• 정수론, 불변식론, 함수론 연구 • e가 초월함수임을 증명 • 에르미트 다항식, 에르미트 방정식, 에르미트 행렬 발견
크로네커 Kronecker, L. 1823 ~ 1891 독일	• 방정식론, 정수론 등 연구 • 유한론자: 수학의 정수론화
리만 Riemann, G.F.B. 1826 ~ 1866 독일	• 리만 기하학(타원기하)창시 • 리만적분, 복소함수론 연구 • 상대성 원리에 절대적 역할을 함
데데킨트 Dedekind, J.W 1831 ~ 1916 독일	• 이데알론의 창시로 추상대수의 선구자 • 절단에 의한 무리수와 유리수의 정의
벤 Venn, J. 1834 ~ 1923 영국	• 논리학자 • 벤 다이어그램을 창안
기브스 Gibbs, J.W. 1839 ~ 1903 미국	• 대수학, 벡터해석 연구 • 3차원 공간벡터의 개념 확립 • 통계학 연구
리 Lie, M. S. 1842 ~ 1899 노르웨이	• 리군론 연구 • 기하학에 공헌이 큼
슈바르츠 Schwarz, H.A. 1843 ~ 1921 독일	• 등각사상, 극소곡면, 초기하급수, 미분방정식 등 연구 • 슈바르츠의 부등식 발견
칸토어 Cantor, G. 1845 ~ 1918 독일	• 집합론의 창시자 • 초한수 이론을 발전시킴 • 현대 수학의 시조
프레게 Frege, F.L.G 1848 ~ 1925 독일	• 기수의 정의를 확립 • 집합 개념과 논리 관계 규명 • 명제함수 도입

수 학 자	주 요 업 적
프로베니우스 Frobenius, G.F. 1849 ~ 1917 독일	• 행렬식론, 급수, 선형미분 방정식론 연구 • 『군의 지표』
클라인 Klein, F. 1849 ~ 1925 독일	• 기하학, 방정식론, 함수론 등에 공헌 • 수학교육 개선에 관심을 가짐 • ‘에를랑겐의 프로그램’ 제시
페리 Perry, J. 1850 ~ 1920 영국	• Perry 운동의 중심인물 • 수학의 실용성을 강조
푸엥카레 Poincare, J.H 1854 ~ 1912 프랑스	• 수론, 대수기하학, 위상기하학연구 • 자기동형함수, 제타-푸크스 함수의 이론을 발전
마르코프 Markov, A. 1856 ~ 1922 러시아	• 확률론, 수리통계학 연구
피어슨 Pearson, K. 1857 ~ 1936 영국	• 기술, 생물 통계학 연구 • 통계학의 수학적 기초 확립
페아노 Peano, G. 1858 ~ 1932 이탈리아	• 추상수학을 발전시킴 • 기호논리학에 기여 • 페아노의 공리
캐조리 Cajori, F. 1859 ~ 1930 미국	• 『수학사』
화이트헤드 Whitehead, A. 1861 ~ 1947 영국	• 논리주의 수학자 • 불(Boole)의 논리학을 발전시킴 • 러셀과 함께 『수학원리』3권 • 『보편대수학』
무어 Moore, E.H. 1862 ~ 1932 미국	• 해석수학자 • 수학교육학자 • 미국수학회 회장 역임
힐베르트 Hilbert, D. 1862 ~ 1943 독일	• 불변식론, 대수적 정수론, 포텐셜론 등에 공헌 • 20세기 수학 연구의 목표 제시 • 공리론적 방법으로 현대수학의 기틀을 마련 • 기하학의 기초론, 힐베르트 공간 창시
하우스도르프 Hausdorff, F. 1868 ~ 1942 독일	• 위상공간론 창시자
체르멜로 Zermelo, E. 1871 ~ 1953 독일	• 공리적 집합론의 창시자 • 선택공리로 유명
러셀 Russell, B. 1872 ~ 1970 영국	• 수리철학 및 논리기호학에 공헌 • 화이트헤드와 『수학원리』 3권
프레셰 Frechet, M. 1878 ~ 1973 프랑스	• 『추상공간론(抽象空間論)』
아인슈타인 Einstein, A. 1879 ~ 1955 미국	• 상대성 원리의 연구에 리만기하학을 응용 • 통일장 이론에 대한 연구
뇌터 Noether, A.E 1882 ~ 1935 독일	• 다원수론 전개 • 추상대수학의 선구자
피셔 Fischer, R.A 1890 ~ 1962 영국	• 상관계수의 표본분포에 관한 연구 완성 • 현대 추측통계학의 창시자

수 학 자	주 요 업 적
위너 Wiener, N. 1894 ~ 1964 미국	• 정보를 수량으로 나타내는 엔트로피의 개념을 도입하여 통신이론의 ‘사이버네틱스’를 창시
브라우어 Brauer, R.D. 1901 ~ 1977 폴란드	• 위상기하학, 군 표현론 연구 • 직관주의 창시자
폰 노이만 Von Neuman, J. 1903 ~ 1957 미국	• 순수수학과 응용수학에 공헌 • Program 내장방식, 전자계산기의 개발 • Game이론 창시자
콜모고로프 Kolmogorov, A 1903 ~ 1987 소련	• 『확률론의 기초 개념』 • 공리론적 확률론에 공헌
괴델 Gödel, K. 1906 ~ 1978 미국	• 제1불완전성 정리 어떤 수학적 체계이든 본질적으로 불완전하다. • 제2불완전성 정리 어떤 공리계가 무모순일 때, 그 공리계 아래서는 증명할 수 없다.
슈발레 Chevalley 1909 ~ 1984 프랑스	• Bourbaki(부르바키)의 창시자
아일렌버그 Eilenberg, S 1913 ~ 1998 폴란드	• Category이론, Homology 대수학 창시자
슈바르츠 Schwarz, L 1915 ~ 2002 프랑스	• 『초함수론』