[전공교육학 유형별 기출문제 해설]

[수학교육의 필요성과 목적]

1. ②

- **수학의 특성(9가지)**
- 실용성: 수학은 인간 생활의 필요에 의하여 생겨났고, 인간의 생활과 함께 발전하여 왔으며, 실제 생활에서 여러 가지로 유용하게 사용된다.
- 추상성: 물리적 세계나 그 세계에 대한 경험을 직접 다루는 것이 아니라 마음속에 있는 아이디어를 다룬다.
- 형식성: 형식 언어로 쓰인 공리, 공준과 형식적인 추론 규칙에 의해 전개된다.
- 계통성: 기초적인 내용을 조합·통합하여 새로운 개념이나 내용을 만든다.
- 직관성: 논리적으로 정당화되는 대상은 직관에 의해 발견·발명된 것이다.
- 논리성: 전제로부터 결론을 타당하게 이끌어 낸다.
- 일반성: 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 집합에 대한 고찰로 확장한다.
- 특수성: 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합이나 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮겨간다.
- 이상성: 수학적 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 생각한다.

2. ④

① 실용성, ② 정신도야성, ③ 심미성

3. ① (무정의 용어)

4. ④

구조주의적 입장은 수학교육현대화운동의 근거

- 1957년 구소련의 스푸트닉(Sputnik) 인공위성 발사 성공이 도화선이 된 수학교육 현대화 운동(New Math)을 이론적으로 뒷받침한 심리학은 1959년 34명의 과학자, 수학자, 교육학자, 심리학자들의 회의 결과를 정리한 브루너의 저서 『교육의 과정』으로 대표되는 구조주의 심리학이다. 대표적인 학자로는 브루너와 딘즈가 있다.

5.

의사소통 능력 강화 수업방안의 내용은 standards89(NCTM)등에서 제시하고 있는데 내용은 다음과 같다.

첫째, 소집단별로 공동적인 과제를 해결하는 활동이 강조되어야 한다. 동료들과 함께 문제를 해결하는 과정에서 자신의 아이디어를 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 아이디어를 경청하고 절충하는 경험을 하여야 한다.

둘째, 표현하기, 말하기, 듣기, 쓰기, 읽기와 같은 중요한 의사소통 기능이 수학교육에 통합되어야 한다. 학생들은 자신이 알고 있는 것을 다른 사람들에게 분명하고 조리 있게 말할 수 있어야 하며, 상대방의 이야기를 주의 깊게 듣는 습관을 길러야 한다. 상대방의 이야기를 합리적으로 비판하며 합당한 대안을 제시하려고 노력하는 태도를 육성하여야 한다. 글로 쓰게 하는 활동도 강화되어야 한다. 일지를 쓰게 하거나 편지 형식으로 자신의 문제해결 활동을 기록하게 하는 활동이 강조되어야 한다.

셋째, 고학년의 경우 수학적 기호의 경제성과 위력과 우아함 그리고 수학적 아이디어가 발달하는 데 있어서의 기호의 역할을 음미하도록 하여야 한다.

넷째, 수학적인 상황을 다양한 방법, 즉, 구두로, 문장으로, 구체물로, 도식으로, 그래프로, 대수적인 수식을 사용하여 나타내는 활동을 강조한다.

6.

- 실용성: 수학은 인간 생활의 필요에 의하여 생겨났고, 인간의 생활과 함께 발전하여 왔으며, 실제 생활에서 여러 가지로 유용하게 사용된다.
- 정신도야성: 수학을 배우면 합리적·논리적·추상적·창의적 사고력, 비판적 능력, 기호화·형식화하는 능력, 단순화·종합화하는 능력 등을 기를 수 있다.
- 심미성: 수학적 대상을 통해 수학의 아름다움을 인식하고, 수학 공식이나 방법이 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다.
- 문화적 가치: 인류가 오래 전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 문화를 수용하고, 다음 세대에 전달할 가치가 있는 학문임을 느낄 수 있다.

7. ④

8. ①

[수학교육의 발달]

1.
① 수학이 실제로 활용되는 내용은 전혀 다루지 않고 공리적 방식으로만 전개되어 수학의 유용성과 실용성을 인식하기 어렵다.
② 개인차에 대한 고려 없이 엄밀하고 형식적인 논리적 전개 과정만을 일방적으로 강요하여 수학의 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성의 이해를 어렵게 하였다.
③ 개념이 발생하고 정리를 발견하는 과정이 생략되어 있어 학생들이 탐구하거나 발견하는 것이 어렵다.

2. ②
정신 도야적 교재에서 벗어나 실용적 수학교육을 강조하였다.

3. ⑤
ㄴ. 페리는 대수 공식을 이용하는 지식과 능력을 강조하였으나 순수수학(원론)을 강조하지는 않았다.

4. ③
① 대수적 구조도 강조
② 무어는 근대화 운동
③ 옳은 설명
④ 불필요한 내용(유클리드 기하)은 삭제하였다.
⑤ 클라인은 근대화 운동

5. (마), (나), (라), (가), (다)
(가) 기본으로 돌아가기
(나) 수학교육 근대화운동
(다) 문제해결
(라) 수학교육 현대화운동
(마) 수학교육 근대화운동 이전 시기

6. 수학교육 근대화 운동, 수학교육 현대화 운동

[수학과 교육과정]

1. ③

2. ④

(가) 학년군별(중학교)·과목별(고등학교) 내용의 배열 순서가 반드시 교수·학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수·학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(나) 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

(다) 문제를 해결할 때에는 문제를 이해하고 해결 전략을 탐색하며 해결 과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 한다.

(라) 학생의 수학 학습 과정과 결과는 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등의 다양한 평가 방법을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

3. ③

㉡ 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가를 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통해 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

㉢ 평가 결과는 학생, 학부모, 교사 등에게 환류하여 학생의 수학 학습 개선을 도울 수 있게 한다.

4. ④ (3차 교육과정)

5. ④

* 일반적 목표(NCTM, 1989)

① 학생들은 수학의 가치를 이해할 수 있어야 한다.

② 수학을 행하는 자신의 능력에 대한 확신을 가져야 한다.

③ 수학 문제의 해결자가 되어야 한다.

④ 수학적으로 의사소통하는 것을 배워야 한다.

⑤ 수학적으로 추론하는 것을 배워야 한다.

6.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
수학교육(수학교육동향)	4	70	수학과 교육과정과 평가의 새로운 방향 (구광조 외) pp. 112-126

규준 2: 의사소통으로서의 수학.

규준 3: 추론으로서의 수학.

규준 4: 수학적 연결성.

규준 2의 의사소통으로서의 수학은 수학적인 아이디어를 수학적인 언어나 기호, 그래프, 표 등으로 나타내거나 반대로 수학적인 언어, 기호, 그래프, 표 등으로 표현된 수학적 아이디어를 이해하고 사용하는 것을 많나다.

규준 3의 추론으로서의 수학은 어떤 근거에 기초하여 자신의 사고를 전개시키는 것으로 관찰의 결과를 일반화하여 가설을 설정하고 논리적 증명이나 반례를 찾아냄으로써 가설을 검증하는 것을 포함한다.

규준 4의 수학적 연결성은 수학과 실생활, 수학과 타학문 영역, 수학 내부의 다른 영역들과의 상관 관련성을 인식하고 실생활의 문제, 다른 과목에서의 문제, 수학 문제 등을 해결하는 데 이와 같은 수학적 사고를 적용하는 것이다.

*** 채점기준**

<규준 나열 : 2점>

- 2점: 3가지 모두 옳게 쓴 경우 (규준 2, 3, 4의 번호 매김이 잘못되어도 무방함).
- 1.5점: 2가지를 옳게 쓴 경우 (규준 2, 3, 4의 번호 매김이 잘못되어도 무방함).
- 1점: 1가지만 옳게 쓴 경우 (규준 2, 3, 4의 번호매김이 잘못되어도 무방함).
- 0점: 옳게 쓴 것이 1가지도 없는 경우

<규준 설명 : 2점>

- 2점 : 2가지 이상에 대하여 바르게 설명한 경우
- 1점 : 1가지에 대하여 바르게 설명한 경우.
- 0점 : 불완전하거나 어느 설명도 옳지 않은 경우.

7.

좌표평면에서 반지름 r인 원 위의 점 $P(x, y)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{OP}$와 시초선이 이루는 각 θ라 하자. 이때, θ의 값에 따라 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}(x\neq 0)$는 반지름의 길이 r에 관계없이 하나로 결정된다. 그러므로 임의의 실수 θ(라디안)에 이들 값을 대응시키는 함수 $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$를 각각 코사인함수, 사인함수, 탄젠트함수라 한다. 이 함수들을 삼각함수라 한다.

8.

(1) 국민 공통 기본 교육과정: 모든 국민에게 동일한 기간 동안 동일한 교육 내용을 가르치기 위하여 도입된 개념으로, 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지 10년간의 교육과정이다. 6개 내용영역: 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수.

(2) 수준별 교육과정: 학습자의 학습 능력 수준과 요구에 대응하는 차별적, 선택적 교육과정

① 심화 과정의 제시: 학생들의 수준 차이에 적극적으로 대치한다는 수준별 교육과정의 아이디어를 구현하기 위하여 각 단계의 영역마다 '심화과정'을 제시하였다.

② 선택 중심 교육과정: 고등학교 2, 3학년에 도입된 선택중심 교육과정은 다양한 선택 과목을 제시하고, 학생들은 자신의 능력, 진로, 적성에 부합하는 과목을 선택하여 학습할 수 있도록 하였다.

9. (1) 문제해결로서의 수학 (2) 의사소통으로서의 수학

10.

(1) 학습 진도의 관점

① 단계형 수준별 교육과정은 동일 학년의 학생이라도 학생의 성취도에 따라 서로 다른 교과서로 진도를 달리한다.

② 수준별 이동식 수업은 수학 성취도에 따라서 수준별 반을 편성하여 수업하되 동일한 교과서를 가지고 같은 속도로 학습한다.

(2) 교과내용 심도의 관점

① 단계형 수준별 교육과정은 학습자의 수준에 따라 서로 다른 교육과정과 교과서를 적용한다.

② 수준별 이동식 수업은 동일한 교과서를 가지고 교과 내용은 수준을 다르게 지도한다.

11. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변이나 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다.

[수학과 목표(2015)]

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

12.

(1) 보충 과정 지도

① 유의사항: 보충과정의 내용구성은 하향 초등화하여 최소 필수 내용 요소를 다룬다.

② 문제: 소인수분해를 이용하여 두 수 18, 24의 최소공배수를 구하여라.

(2) 심화 과정 지도

① 유의사항: 상위 단계의 내용 도입을 금지하고 실생활 활용 문제를 다루고 문제해결력을 향상시킨다.

② 문제: 어떤 공장에서 한 기계를 보았더니 두 개의 기어가 맞물려 돌아가고 있었습니다. 그런데 하나는 둘레의 길이가 18이고 다른 하나는 둘레의 길이가 24였습니다. 기어가 처음 돌아가기 시작하여 다시 만날 때에는 얼마만큼 돌아가야 합니까?

13.

(1) 문제해결력 신장에 관한 심화 학습 내용

공통교육과정 지도 후 학생들의 학습 수준에 따라 보충 학습이나 심화 학습을 실시할 수 있다.

(2) <u>도수분포표</u>에서 상대도수를 구하게 한다.

- 상대도수의 개념을 <u>처음</u> 지도할 때

10명의 수학 시험 성적을 나타낸 도수분포표에서 도수의 총합에 대한 각 계급의 도수의 비율을 구하게 한다.

점수(점)	학생 수(명)	학생의 비율
$60^{이상} \sim 70^{미만}$	1	0.1
70 ~ 80	2	0.2
80 ~ 90	3	0.3
90 ~ 100	4	0.4
합계	10	1

- (가)의 내용을 지도할 때

전체 학생 수가 다른 A반과 B반의 수학 시험 성적을 나타낸 도수분포표에서 상대도수를 구하여 두 반의 성적 분포를 비교해 보게 하여 상대도수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

점수(점)	A반		B반	
	학생 수	상대도수	학생 수	상대도수
$60^{이상} \sim 70^{미만}$	2	0.125	6	0.3
70 ~ 80	6	0.375	6	0.3
80 ~ 90	4	0.25	4	0.2
90 ~ 100	4	0.25	4	0.2
합계	16	1	20	1

(3) G. Polya(1962), M. Kline(1973) 등의 비판

① 학생들이 정신적으로 충분히 성숙하지 않았음에도 불구하고, 형식화를 서두르고 있으며, 추상화의 도입을 도모하였다.

② 교사들이 학생들을 가르칠 준비가 충분히 되어 있지 않았다.

③ 교육학자와 심리학자보다는 수학자 위주의 개혁이었으므로 수학교육적으로는 약점이 있었다.

14.

- 학습 내용: ㉠ 한 점에서 만난다. ㉡ 평행하다. ㉢ 꼬인 위치에 있다.
- 도입 방법: 생활 주변의 건축물, 예술 작품 등을 학생들이 관찰하고 탐구하게 하여 공간도형의 성질을 발견하고 이해하게 한다. (또는 직육면체를 도입하여 각 모서리들 간의 관계를 관찰·탐구하여 성질을 발견하고 이해하게 한다.)
- 이유: 공리계를 이용하는 지도 방식은 전반적 조직화, 즉 연역적 추론으로만 이루어진다. 이러한 지도 방식은 학생들의 탐구와 발견의 과정을 어렵게 하고, 수학의 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성의 이해에 방해가 되며, 수학의 필요성과 유용성을 인식할 수 없게 된다.

15. ⑤

16. ①
ㄱ. 삼각형의 합동 조건
ㄴ. 삼각형의 내심
ㄷ. 피타고라스 정리

17. ⑤
① 두 원의 위치관계는 다루지 않는다.
② 제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다.
③ 고등학교 1학년의 수와 연산 영역에서 다룬다.
④ 표본비율과 모비율의 관계는 심화수학Ⅱ에서 다룬다.
⑤ 선형변환과 행렬, 복소수의 극형식은 고급수학Ⅰ에서 다룬다.

18. ④ ㄱ, ㄷ, ㄹ
ㄱ. 점, 선, 면, 각과 관련된 용어는 다양한 상황에서 직관적으로 이해하게 한다.
ㄴ. 정당화는 한다.
ㄷ. 피타고라스 정리의 역은 직관적으로 이해하게 한다.
ㄹ. 공간도형의 성질은 관찰을 통해 직관적으로 이해한 후 증명하게 한다.

19. ⑤
① 공학적 도구를 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 탐구하고 모둠별 토의를 진행하고 있다.
② 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 다각형의 넓이의 비에 관한 성질을 발견하게 하고 있다.
③ 귀납을 통해 다각형의 넓이의 비에 대해 모둠별로 토의를 진행하여 정당화해 보도록 하고 있다.
④ 토의·토론 학습은 특정 주제에 대해 협의하거나 논의하는 교수·학습 방법으로, 의사소통이 지니는 상호 협력적인 면을 강조한다. 이를 통해 학생들이 교과 내용을 폭넓게 이해하고 논리적이고 비판적으로 추론하며 다른 사람의 의견을 비판적으로 수용하고 자신의 주장을 효과적으로 표현하는 능력을 기를 수 있게 한다.
⑤ 학생 개인에 대한 고려는 거리가 멀다.

20. ②
① 3차
② 2차
③ 7차
④ 계산력 향상을 목표로 하지 않는 복잡한 계산과 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 <u>가능하면 적극적으로</u> 활용할 수 있게 하였다. 7차
⑤ 5차

21. ②
인식론적 장애가 되어 적용할 수 없다.

22. ①
① 수학Ⅰ(일반 선택)에서 (1) 해석 [1] 지수와 로그, [2] 지수함수와 로그함수를 다룬다.
② 수학(공통)에서 (3) 수와 연산 [1] 집합을 다루며, 정의역, 공역, 치역 용어는 (4) 함수 [1] 함수에서 다룬다.
• 함수의 개념은 중학교에서 학습한 내용을 확장하여 주어진 두 집합 사이의 대응 관계를 통해 이해하게 한다.
③ 진법, 근삿값, 오차의 한계는 다루지 않는다.
④ 작도를 이용하여 삼각형의 합동 조건을 이해하게 한다. 삼각형의 결정 조건은 다루지 않는다.

23.
$1=0.\dot{9}$, $1.5=1.4\dot{9}$와 같이 유한소수를 순환소수로 나타내면 유한소수와 순환소수의 구분이 모호해진다.
<보기>와 같이 순환소수를 분수로 고칠 때는 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 간단한 것만 다루고, 이를 통해 유리수와 순환소수의 관계를 이해하게 한다.

24. ㉠ 상관관계 ㉡ 연립부등식

25. 협력 학습.
모둠 내의 공동의 목표에 도달하기 위해 학생들은 모둠 내에서 상호작용, 의사소통, 적극적인 참여를 해야 하며 이를 통해 다른 사람을 존중하고 배려하며 모둠 내의 역할을 이해하고 책임감을 기를 수 있기 때문이다.
(나)와 관련하여 모둠 내에서 각자 맡은 역할을 수행하고 그 결과를 모둠원들과 소통하는 의사소통 과정을 거쳐 공동의 학습 목표인 $y=a\sin(bx)$의 그래프의 성질에 대하여 다음과 같은 내용을 정리하게 된다.
$y=a\sin(bx)$의 그래프의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|b|}$이고 치역은 $\{y\mid -|a|\le y\le |a|\}$이다.

26. 태도 및 실천, 자기평가

27.
㉠의 자료로 적합한 5명의 신장의 예는 170, 172, 172, 173, 200이다.
이 자료는 극단적인 값이 존재하기 때문에 평균보다는 중앙값이 대푯값으로서 적절하다.
수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하게 한다.
제시문에서 생활 주변의 자료를 이용하여 대푯값이 유용하게 사용되는 상황을 탐구하고 대푯값을 구하는 문제를 해결하고 있다.

28. 변화와 관계, 대푯값

[수학교육(수리)철학]
<절대주의>

1.
힐버트, 『기하학기초론』 (1899)
• 공리계의 특징과 수리철학의 관점
힐베르트는 유클리드 기하학의 공리계를 더욱 계통적으로 철저하게 검토하여 기하학의 공리를 대수학 또는 실수론의 세계로 옮기고 기하학의 실수론적 모델을 만들었다.
수학을 완전한 형식 체계로 보고, 명제는 형식적인 추론 규칙에 따라 다루어지는 기호의 유한 번의 연쇄로 간주하였다. 수학을 추상적인 기호를 다루는 형식 체계로 보면, 기호가 의미하는 것은 문제가 되지 않으며, 기호를 다루는 규칙 체계가 건전한가 하는 문제만 남게 된다. 수학적 기호가 의미하는 것은 문제가 되지 않으므로 이러한 기호를 다른 기호로 나타내어도 상관이 없다. 이를 바탕으로 발전된 수리철학은 형식주의이다.
• 현대수학의 특징
수학을 의미가 배제된 형식 체계로 재조직함으로써 현대수학은 확실성, 무모순성과 완전성이라는 특징을 갖게 되었다.

* 1931년 괴델(Gödel)은 무모순인 공리 체계는 불완전하다는 것을 증명하여, 무모순인 공리 체계에 증명도 반증도 할 수 없는 결정불가능한 명제가 존재한다는 것을 보였다.

2. 직관주의, 형식주의

<구성주의>

1. 급진적 구성주의

지식은 개별 주체가 특정한 환경에 적응하기 위해 구성하는 것이므로 그러한 지식에 객관성을 부여할 수 없다.

① 자주적 구성의 원리 : 지식은 인식하는 주체에 의하여 능동적으로 구성된다.
② 생장 지향성의 원리 : 인식의 기능은 적응적이며 생장성을 지향한다.
③ 비객관성의 원리 : 인식은 주체가 경험 세계를 조직하는 데 도움을 주는 것이지 결코 객관적인 존재론적 실재를 발견하는 것이 아니다.

* 급진적 구성주의의 수학교육적 시사점
① 학생이 구성하는 지식은 고유하고 상황 의존적이다. 따라서 학생 개개인이 고유한 방식으로 그들 자신의 지식을 구성하도록 하는 교육이 필요하다.
② 창조성과 개성, 다양성을 중시한다. 교사가 제시하는 정확한 답이나 유일한 사고 방법을 찾는 것보다, 학생 스스로 사고를 전개하는 것이 중요하다.

2.
- 활동 과정: 분모의 소인수가 어떤 특징을 가질 때 유한소수로 나타내어지는지 학생들이 의견을 자유롭게 발표하고 토론하게 한다. 교사는 학생들의 의견을 종합하면서 합의를 이끌어낸다.
- 그 결과 얻어져야 할 지식(학습 목표와 관련): 유한소수로 나타내어지는 분수는 기약분수로 나타내었을 때 분모의 소인수가 2나 5 뿐인 것이다.

* 사회적 구성주의: 카브(P. Cobb), 어니스트(P. Ernest)
: 급진적 구성주의의 원리 ①, ②는 수용하되, ③을 사회적 상호 작용의 메커니즘에 근거하여 '지식의 사회적 구성'으로 수정하고 보완하는 데 주안점을 두었다.
* 수학적 지식의 사회적 구성 과정
① 과정1: 개인의 주관적 지식이 사회의 객관적인 수학적 지식이 되는 과정(창조의 과정)
② 과정2: 사회의 객관적인 수학적 지식이 개인의 주관적인 수학적 지식이 되는 과정(학습 재구성, 수학적 문화와의 과정)
* 개인의 주관적 지식이 공표되어 사회 속에서 공적인 비평과 재형성 과정을 거쳐 객관적인 지식이 된다.

3.
- 1단계 질문: 학생 A와 학생 B의 의견에 대해 어떻게 생각하나요?
- 의도: 학생 A와 B가 공표한 주관적인 수학적 지식들에 대한 학생들의 공적인 비평과 재형성 과정을 유도하기 위해서이다.
- 2단계 질문: B학생의 생각에 동의하나요?
- 의도: 학생들의 합의를 통해 객관적인 수학적 지식을 구성하기 위해서이다.

4. ③
ㄱ. 절대주의(형식주의)
ㄴ. 상대주의(사회적구성주의)
ㄷ. 상대주의(준경험주의)
ㄹ. 절대주의(플라톤주의)

5. 추론 유형과 보완점, 증명의 의미, 수학과 교육과정

[서론]

<자료 1>에서 학생이 사용한 추론 유형은 유추이다. 유추는 비슷한 두 대상에 대하여 한 대상에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 다른 대상에서 성립할 것이라 추론하는 것이다. 유추는 개연적 추론이므로 추론한 명제가 항상 참이라 할 수 없다. 그러므로 연역적 추론을 덧붙여 추론한 사실이 참인지 확인하는 과정이 필요하다.

[본론]

<자료 2>의 A에서 증명은 추측을 개선하고 그 과정에서 이론적 개념을 생성하는 수학적 발견의 수단이다. 교사는 학생들이 제기한 추측이 참인지 거짓인지 학생들이 발표하도록 하였다.

<자료 2>의 B에서 증명은 수학적 지식에 대한 설명과 확신의 수단이다. 교사는 학생들이 공표한 주관적 지식에 대하여 공적인 비평을 시도하도록 하였다.

2015 개정 수학과 교육과정에서 의사소통 능력, 태도 및 실천 능력 함양을 위해 강조한 사항을 근거로 ㉠에는 수학적 아이디어 또는 수학 학습 과정과 결과를 말, 글, 그림, 기호, 표, 그래프 등을 사용하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통한다가 들어갈 수 있다. ㉡에는 수학적 활동을 통해 논리적 근거를 토대로 의사결정하였다가 들어갈 수 있다.

[결론]

교사는 효과적인 교수·학습과 평가를 위하여 추론의 유형과 그 보완점, 증명의 의미와 그에 근거한 수학적 활동, 교육과정의 유의사항에 근거한 평가 방법 등에 대하여 풍부한 지식을 지니고 있어야 한다.

6. 비계 설정, 자료에서 가장 많이 나타나는 값.
지식의 비객관성의 원리이다.
개별 주체가 특정한 환경에 적응하기 위해 구성된 지식에 대해서는 객관성을 부여할 수 없다는 것이다. 즉, 인식은 주체가 경험 세계를 조직하는 데 도움을 주는 것이지 객관적인 존재론적 실재를 발견하는 것을 돕는 것이 아니라는 것이다.

<준경험주의>

1. 준-경험주의에서 수학적 지식의 성장 과정

함수 $f(x)=x^3$는 $f'(0)=0$이지만 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다(반례가 등장하여 추측과 증명을 반박). <보기>의 증명을 검토하면, $f(x)=x^3$이 $x=0$에서 극값을 갖지 않는 것은 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않기 때문이다(증명을 검토). 그러므로 <소박한 추측>에 보조정리 '$x=a$에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.'를 추가(합체)하여 개선된 추측을 얻을 수 있다(증명과 추측을 개선, 보조정리 합체법).

- 준경험주의: 증명과 반박에 따른 수학 학습

① 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가된 결과물이 아니라 증명과 반박에 의해 추측의 부단한 개선을 통해 성장하는 사고 실험과학이며, 수학적 지식은 추측에 불과하다.

② 반례는 새로운 지식의 성장을 위한 단서이며 반례의 출현에 따라 추측이 개선된다.

㉠ 국소적 반례(부분추측을 반박하지만 원래의 추측을 반박하지 않는 반례): 증명(부분추측)의 비판이지 추측의 비판이 아니므로 부분추측의 체계를 개선하여 오류발생을 억제한다.

㉡ 전면적 반례(원래 추측을 반박하는 반례): 원래의 추측은 반박되지만 증명은 반박되지 않으므로 증명이 실제로 증명하는 것이 무엇인가를 결정하는 것이 중요하게 되고 원래의 추측을 개선하게 된다.

* 반례 대응 방법

- 보조정리 합체법(lemma-in-corporation method)

㉠ 반례가 제기되었을 때 비판적인 증명분석을 통해 숨겨져 있는 결함있는 보조정리를 찾아내어 원래의 추측에 합체하여 추측을 개선하는 방법이다.

㉡ 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어진다.

- 괴물배제법(monster-barring method)

㉠ 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며, 오히려 반례가 잘못되었으므로 반례를 배제하여 원래의 추측을 존속시키는 방법이다.

㉡ 추측에 포함된 개념을 처음보다 명확하고 정교하게 재정의하여 추측을 보호한다.

- 예외배제법(exception-barring method)

㉠ 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건 절을 추측에 첨가하여 안전한 영역으로 철수하는 방법이다.

㉡ 괴물배제법과 달리 반례는 추측에 포함된 용어의 예이므로 용어가 축소되지는 않는다. 그러나 과대 또는 과소 일반화의 위험이 있다.

2. ②

ㄱ. 수학적 지식은 증명과 반박에 의해, 추측의 부단한 개선을 통해 성장하는 사고 실험과학이며, 수학적 지식은 잠정적인 추측에 불과하다.

ㄴ. 증명을 검토하고 증명과 추측을 개선함으로써 발견과 정당화가 동시에 이루어질 수 있다. (증명생성개념, 보조정리합체법)

ㄷ. 연역적 추측으로 수학적 발견이 가능하다. (cf. 소박한 추측)

ㄹ. 직관과 귀납의 역할을 강조하는 일반적인 수학교육의 입장을 거부하였다. 보기의 내용은 Polya의 견해에 가깝다.

3. ⑤

- 반례는 새로운 지식의 성장을 위한 단서이며 반례의 출현에 따라 추측이 개선된다. 그러므로 수학에서 거짓 명제도 의미가 있다.

- 준경험주의 수학 학습-지도 방법

① 학생

㉠ 스스로 문제를 제기하거나 재구성하고 이를 해결하면서 자신의 문제 해결 전 과정을 스스로 평가한다.

㉡ 추측에 대한 합리적이고 비판적인 분석능력과 태도를 개발하고, 비판이 개인에 대한 공격이 아닌 아이디어에 대한 공격임을 이해하여 자신의 추측이 교사나 동료들에 의해서 비판되기를 기대해야 한다.

② 교사

㉠ 학생들에게 지식은 끊임없이 변하며 교사를 포함하여 누구도 완전한 지식을 소유할 수 없다는 입장을 취한다.

㉡ 학생이 증명을 할 때 추측과 증명의 각 단계에 대한 적절한 반례를 준비해 두었다가 필요할 때에 제시한다. 학생 수준에서 반박이 불가능한 증명을 단번에 제시해서는 안 되며, 반박을 하기 위하여 터무니없는 증명을 제시해서도 안 된다.

㉢ 철저한 교재 연구에 바탕을 둔 지도 과정에 대한 사고 실험을 해야 한다.

㉣ 학생들이 능동적으로 사고과정의 질을 평가하고 오류를 수정해 가는 능력과 태도를 개발해 주어야 한다.

4. ②

- 사례 ㉠: $16-24+11=3$
- 사례 ㉡: $16-20+6=2$
- 사례 ㉢: $16-24+12=4$

① 사례 ㉠은 [1단계]는 통과하지만 [2단계]를 통과하지 못한다. (그물처럼 펼쳐짐, E, F가 1씩 증가 안함)

② 사례 ㉢은 [1단계]를 통과하지 못하는 국소적 반례인 동시에 원래의 추측을 반박하는 전면적 반례이다. (그물처럼 펼쳐 놓을 수 없음)

(ㄱ) 전면적 반례 : 원시적 추측에 대한 반례

(ㄴ) 국소적 반례 : 원시적 추측의 부분추측에 대한 반례

③ 괴물배제법은 추측이 옳으며, 반례를 틀린 것(괴물)으로 보고 반례를 배제하는 방법으로, 반례를 수용하는 방법이 아니다. 사례 ㉠, ㉢을 배제함으로써 다면체의 정의가 정교하게 재정의된다.

④ 사례 ㉠은 [1단계]를 통과하므로 [1단계]에 대한 국소적 반례가 아니다. 증명 분석을 통해 증명-생성 개념 즉, '단순 연결된 면을 가진 다면체'라는 개념을 생성해 낼 수 있는 사례는 [1단계]를 통과하지 못하는 사례 ㉢이다.

⑤ 다면체의 정의를 정교화하는 데 기여하는 방법은 괴물배제법이다. 사례 ㉠은 전면적 반례이지만, 사례 ㉡은 전면적 반례는 아니다. 예외배제법은 용어가 축소되지는 않으나 과대 또는 과소 일반화의 위험이 있다.

5.

(가) 괴물배제법: 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례가 잘못되었다고 보고 반례를 배제하여 원래의 추측을 존속시키는 방법이다.

(나) 예외배제법: 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건절을 추측에 첨가하여 안전한 영역으로 철수하는 방법이다.

(다) 보조정리합체법: 반례가 제기되었을 때 비판적인 증명분석을 통해 반례가 출현하게 된 원인이 되는 (숨겨져 있는, 결함 있는) 보조정리를 찾아내어 그에 해당하는 조건을 원래의 추측에 추가(부가, 합체)하여 추측을 개선하는 방법이다.

을이 제시한 반례 S^0, 즉 $n=0$인 경우는 갑이 제시한 원래의 추측을 반박하는 반례이다. 갑의 추측에 대한 증명을 분석하면, 반례가 출현하게 되는 원인이 되는 유죄인 보조 정리는 증명 3단계에서 n이 0 이상의 정수라는 것이다. 그러므로 '자연수 n'을 원래의 추측에 추가하여 원래의 추측을 '자연수 n에 대하여 S^n은 연결 공간이다.'와 같이 개선할 수 있다.

6. 반례 대응 방법, 수학적 지식의 성장 과정

예외배제법. 예외배제법은 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건절을 추측에 첨가하여 안전한 영역으로 철수하는 방법으로, 과대 또는 과소 일반화의 위험이 있다.

(수학적 지식의 성장과정은 수학적 추측을 제기하는 단계, 추측을 부분추측으로 분해하는 단계, 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계, 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계로 이루어진다.)

민태는 수학적 추측을 제기하고 그 추측을 3단계로 분해하였다. 혜수와 은영이 민태의 추측을 반박하였다. 박 교수와 학생들은 민태의 증명을 분석(검토)하여 (유죄인, 결함 있는) 보조정리 '$a\neq 0$, $b^2-4ac>0$'를 민태의 추측에 추가하여 원래의 추측을 개선하였다.

7. ㉠ 괴물배제법 ㉡ 보조정리합체법

8. 증명생성, 준경험

1. ④

• **문제해결 4단계 활동(Polya, 1945)**

① 문제 이해(understanding the problem): 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하여 문제를 분석한다.
  ㉠ 목표에 주의를 집중하기
  ㉡ 문제의 주요부분에 주목하기
  ㉢ 조건에 주목하여 문제를 조망해 보기
  ㉣ 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기
  ㉤ 조건을 분해하여 써보기

② 문제해결 계획 수립(devising a plan): 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악한다.
  ㉠ 관련된 지식을 동원하기
  ㉡ 유용한 패턴 찾아보기
  ㉢ 관련된 문제나 정리를 알아보기
  ㉣ 미지인 것이나 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해보기
  ㉤ 관련된 문제의 풀이 결과와 방법을 활용하기
  ㉥ 보조 요소를 도입하여 활용하기
  ㉦ 문제를 달리 진술해 보기
  ㉧ 정의를 되짚어 보기
  ㉨ 보다 단순한 문제, 보다 일반적인 문제, 보다 특수한 문제, 유사한 문제 등 관련된 문제를 풀어보기
  ㉩ 미지인 것과 조건 및 자료를 변형하여 보조 문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해 보기
  ㉪ 진척이 없을 때 상황을 재평가하기
  ㉫ 자료, 조건, 핵심적인 개념의 사용 여부 점검하기

③ 계획 실행(carrying out the plan): 해결 계획에 따라 실행한다.
  ㉠ 매 단계를 점검하면서 풀어가기

④ 반성(looking back): 문제해결과정을 처음부터 검토한다.
  ㉠ 풀이결과와 논증과정을 점검하기
  ㉡ 다른 풀이 방법을 알아보기
  ㉢ 풀이결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기
  ㉣ 관련된 새로운 문제를 만들어보기

2. ②

① 공리론적 방식으로 전개되는 유클리드 원론은 추상적인 기호를 사용하고 있지는 않다.
② 무정의 용어, 공리, 공준 등으로부터 시작하여 새로운 사실을 연역해 나아간다.
③ 개연적 추론 과정이다.
④ 개연적 추론의 방식이다.

3. ②

* 문제해결교육론에서 문제, 문제해결과 수학적 사고
① 문제는 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제해결을 위해서는 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다.
② Polya는 분명하게 인식된, 즉각적으로 얻을 수 없는 목표를 얻는데 필요한 어떤 행동을 의식적으로 조사할 때 문제를 가졌다고 보았고, 문제에는 목표, 장애요인, 해결자의 의식이 수반된다고 하였다.
③ 좋은 문제란 해결 과정에서 여러 종류의 개념과 기능을 필요로 하고, 다른 장면으로 일반화, 확장될 수 있어야 하며, 다양한 해법이 존재해야 한다.

4. ③

5.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
수학교육(수학문제해결)	6	50	수학과 교육과정 해설서 (중: p. 156; 고등학교: p. 183)

주어진 문제는 원판의 수를 간단한 경우부터 생각하여 필요한 이동의 수에 관한 규칙을 발견하면 해결할 수 있는 문제로서, 문제 해결 전략 중 “규칙성 찾기” 전략을 사용하면 가장 효과적이다. 문제의 풀이는 다음과 같다.

주어진 원판의 크기 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4라고 하자. 원판이 1개(a_1)만 주어진 경우 필요한 이동의 최솟값은 1이다. 원판이 2개(a_1, a_2) 주어진 경우, 가장 큰 원판 a_2를 옮기기까지 1번의 이동이 필요하고, a_2를 옮긴후 다시 1번의 이동이 필요하다. 따라서 모두 3번의 이동이 필요하다. 원판이 3개(a_1, a_2, a_3) 주어지면, 가장 a_3을 옮기기까지 a_1과 a_2를 모두 옮겨야 하므로 3번의 이동이 필요하다. 또 a_3을 이동하고 나면 다시 3번의 이동이 필요하다. 따라서 모두 $3+1+3=7$번의 이동이 필요하다. 즉, 가장 큰 원판을 옮기기 전까지 필요한 이동의 수와 가장 큰 원판을 옮긴 후에 필요한 이동의 수가 같으므로, 원판이 4개 주어진 경우 필요한 이동의 수는 $7+1+7=15$이다. (답 15)

(일반적으로 원판이 n개 주어졌을 때 필요한 이동의 최소 횟수를 $f(n)$이라고 하면, “$f(n)=f(n-1)+1+f(n-1)$”이라는 규칙을 얻을 수 있고, 이것을 정돈하면 그 결과는 $f(n)=2^n-1$이다.)

*** 채점 기준**

<문제 해결 전략 제시 : 2점>
- 2점: 규칙성 찾기를 지적한 경우.
- 1점: 표 만들기를 지적한 경우.
- 0점: 그 외의 다른 전략을 지적하였거나, 답을 쓰지 않은 경우.

<문제 풀이 : 4점>
- 4점: 규칙성을 바르게 찾아 정답을 구했으며, 발견한 규칙 (예 : “가장 큰 원판을 옮기고 나면 그 후의 과정을 그 앞의 과정과 같다.”, “$f(n)=f(n-1)+1+f(n-1)$” 등을 명시한 경우 (단, “$f(n)=2^n-1$”만을 규칙으로 제시한 경우는 1점 감점).
- 3점: 규칙성을 이용하여 정답을 구했으나 발견한 규칙을 명시하지 않은 경우.
- 2점: (1) 정답을 구했으나 비효과적인 전략을 사용한 경우
 (예 : 직접 모든 과정을 해보는 경우 등).
 (2) 규칙을 명시했으나 계산오류 등으로 틀린 답을 한 경우.
- 1점: 기타의 문제 해결 전략을 시도하였으나 답을 구하는 일에 실패한 경우.
- 0점: 전략 사용도 없이 문제 풀이에 실패한 경우.

6. 반성 단계의 활동

(1) 문제해결 과정의 네 번째 단계는 반성 단계로, 문제해결과정을 처음부터 검토해 보는 단계이다. 반성 단계에서 하는 활동은 다음과 같다.

① 풀이결과와 논증과정을 점검하기
② 다른 풀이 방법을 알아보기
③ 풀이결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기
④ 관련된 새로운 문제를 만들어보기

(2) 반성 단계의 활동과 반영적 추상화

반영적 추상화는 인식주체의 활동과 조작에 대한 일반적 조정으로 이루어지는 추상화이다. 반성 단계는 문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해보는 단계이다. 이러한 활동은 문제해결 과정과 결과에 대하여 일반적 조정을 통하여 반영적 추상화를 유도하는 것으로 판단할 수 있다.

- 반성은 자신의 사고 과정을 대상으로 하는 인식활동이라는 점에서 메타인지(meta-cognition)적인 사고라고 할 수 있다.
  ㉠ 메타인지는 자신의 사고 과정에 대한 인지로서, 자신의 사고 과정을 모니터하거나 조절하는 정신적 활동이다.
  ㉡ 문제해결 과정에서 수행하는 모든 활동을 모니터하고 조절해야 하므로 메타인지는 문제해결 4단계에 모두 영향을 미친다. 그러나 메타인지와 가장 밀접하게 관련 있는 단계는 반성단계이다. 즉 반성단계에서 이루어지는 '결과와 풀이과정의 점검', '다양한 방법의 모색', '다른 문제에의 일반화', '우아한 해법의 추구' 등은 대표적인 메타인지 활동이다.

7. 증명 교수-학습에서 분석법과 종합법

(1) 분석법에 의한 추론 과정

$\overline{AE}=\overline{DB}$라 가정하자. $\overline{AE}=\overline{DB}$일 충분조건은 $\triangle ACE\equiv\triangle DCB$.
$\triangle ACE\equiv\triangle DCB$일 필요충분조건 $\overline{AC}=\overline{DC}$, $\overline{CE}=\overline{CB}$, $\angle ACE=\angle DCB$.
이때 $\overline{AC}=\overline{DC}$, $\overline{CE}=\overline{CB}$는 주어진 조건에 의해 성립.
$\angle ACE=\angle BCE=60^\circ$이고 $\angle DCE$는 공통이므로 $\angle ACE=\angle DCB$이다.

이는 증명하고자 하는 명제 $\overline{AE}=\overline{DB}$를 성립한다고 가정하여 이미 참이라고 알고 있는 명제에 도달한 것이다. 그러므로 이 과정을 거꾸로 하면 명제를 증명할 수 있다.

(2) 분석법을 고려하지 않은 증명 지도의 문제점

(분석법은 풀이의 계획을 발견하는 과정이고, 종합법은 그 계획을 실행하는 과정이다. 분석법을 고려하지 않고 종합법만으로 증명을 지도하는 것은 풀이 계획의 발견 없이 실행이 곧바로 이루어지는 것이다.) 학생들의 탐구와 발견의 과정을 어렵게 하고 수학의 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성의 이해에 방해가 되며, 수학의 필요성과 유용성을 인식할 수 없게 한다.

- 분석법과 종합법

㉠ 분석법(풀이 계획을 발견하는 과정): 구하거나 증명하고자 하는 것을 이미 구하거나 증명한 것처럼 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고, 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속하여, 이미 알고 있는 명제에 도달하는 과정
㉡ 종합법(그 계획을 실행하는 과정): 분석의 과정을 거꾸로 하여 분석에서 마지막에 도달한 지점, 곧 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제로부터 출발하여 분석 과정을 거꾸로 되밟아 감으로써, 마지막에 요구하는 명제에 도달하는 과정

- 분석법-종합법 활용의 의의

㉠ 수학에 대한 인식 변화: 모든 수학적 지식이 이미 존재하는 결과물로 단순히 전달되거나 전수된 지식이 아닌 인간에 의해 발견되고 논의되고 계속적으로 연구된 인간적 대상임을 알게 된다.
㉡ 동기유발: 모든 문제는 해결될 수 있는 과정이 있음을 학생 스스로 인식하고 문제해결에 동기유발을 얻게 되며, 스스로 문제를 해결하려고 노력한다.
㉢ 발견적 사고 확장: 스스로 수학적 문제를 해결하거나 수학적 지식을 이해하려는 노력을 함으로써 능동적인 사고를 기르게 된다.

8.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
문제해결	5	50	분석	장경윤
출제 내용	구광조 외(역), 『수학학습심리학』 (교우사)			
관련자료	G. Polya, How to solve it.			

(1) 난이도 차이가 있다. 이해 단계의 발문

난이도 차이를 가정할 수 있다. 폴리야가 문제해결의 첫 단계(문제의 이해단계)에서

모르는 단어가 있는가?,

도형의 경우에 그림을 그리고 기호를 붙여 보아라.

등이 문제해결을 돕는 질문이나 권고로 제시되고 있다. 이는 문제에 포함된 단어의 뜻을 이해하는 것, 언어로 주어진 문제 상황을 시각적으로 표현하는 것이 문제를 이해하는 데 도움이 될 수 있다는 가정을 전제로 한 것이다.

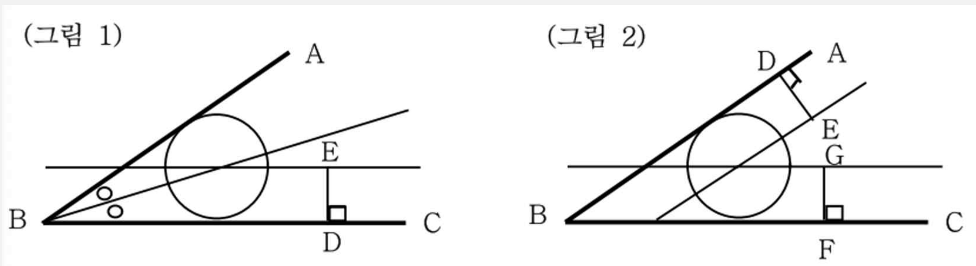
문제 (가)는 언어로 표현하였기 때문에 “임의로”, “예각”이라는 단어가 문제에 들어있고 각이 기호로 $\angle ABC$로 표시된 데 반하여, 문제 (나)는 폴리야의 제안에 따라서 문제 이해의 과정을 어느 정도 이행한 상황으로 제시된 것이기 때문에 폴리야에 따르면, 문제 (나)가 (가)보다 쉬운 문제가 될 수 있다.

(2) 계획 작성 단계의 발문

문제해결의 두 번째 단계는 계획 수립의 단계인데 이 문제를 해결하는데 유용한 질문이나 권고는 다음과 같다.

내접원이 그려진다면 그 원은 주어진 각과 어떤 관계가 있는가?,
선분과 접하는 원 사이에 관련된 정리가 있는가?,
원의 반지름과 각의 관계는 무엇인가?,
원의 중심 또는 반지름과 관련된 특성을 찾을 수 있는가?,
한 점에서 각의 변에 이르는 거리는 무엇인가?
이와 유사한 문제를 본 일이 있는가?
주어진 직선(각의 변)에서 1만큼 떨어진 점들은 어떻게 작도할 수 있는가? … 등.

[참고]



(방법 1) (그림 1)에서:

① $\angle ABC$의 이등분선을 작도한다.
② 변 AC의 적당한 점 D에서 변 AC에 수선을 작도한다.
③ 점 D에서 반지름의 길이 1인 원을 그려 ②에서 작도한 수선과 만나는 점을 E라 한다.
④ 점 E를 지나고 변 AC에 평행인 선과 이등분선이 만나는 점이 구하는 단위원의 중심이다.

(방법 2) (그림 2)에서:

① 변 AB 상의 임의의 점 D에서 변 AB에 수선을 작도한다.
② 점 D에서 반지름의 길이 1인 원을 그려 ①에서 작도한 수선과 만나는 점을 E라 한다.
③ 변 AB에 평행하고 점 E를 지나는 직선을 작도한다.
④ 변 BC 상의 임의의 한 점 F에서 BC에 수선을 작도한다.
⑤ 점 F에서 반지름의 길이 1인 원을 그려 수선과 만나는 점을 G라 한다.
⑥ 변 BC에 평행하고 점 G를 지나는 직선을 그리고 ③의 직선과 만나는 점이 구하는 단위원의 중심이다.

9.

(1) 삼각형의 중점 연결정리 적용,

$\triangle ABD$에서 $\overline{EH}//\overline{BD}$, $\triangle BCD$에서 $\overline{FG}//\overline{BD}$이므로 $\overline{EH}//\overline{FG}$이다.

$\triangle BCA$에서 $\overline{EF}//\overline{CA}$, $\triangle ADC$에서 $\overline{GH}//\overline{CA}$이므로 $\overline{EF}//\overline{GH}$이다.

따라서 $\overline{EH}//\overline{FG}$, $\overline{EF}//\overline{GH}$. 그러므로 사각형 EFGH는 평행사변형이다.

(2) 문제제기의 수학교육적 의미

① 탐구 지향적인 학습 태도 신장: 문제를 제기하는 것은 수학을 창조하는 결정적인 사고단계이며 문제를 제기하고 형식화하는 데 학생들이 직접 참여함으로써 바람직한 과학적 태도를 기르게 된다.
② 문제를 해결하는 수단: 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 원래의 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다.
③ 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현: 문제를 만들어 봄으로써 원래의 문제를 새로운 관점에서 보고 그 의미를 명확하게 이해할 수 있으며 그로부터 새로운 생각을 할 수 있다.
④ 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단
⑤ 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용할 수 있는 기회를 제공한다.
⑥ 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
⑦ 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단

(3) 문제제기 활동의 수리철학적 의미

준-경험주의에서 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가된 결과물이 아니라 증명과 반박에 의해 추측의 부단한 개선을 통해 성장하는 사고 실험과학이다. 문제제기 활동은 주어진 문제를 발전적으로 취급하여 새로운 문제를 만드는 활동이다. 이때 문제해결과정이나 결과에 대해 의심하고 반박하거나 새로운 추측을 제시하는 등의 활동이 이루어진다. 그러므로 문제제기 활동을 통해 학생들은 수학적 지식의 발견과 성장의 과정을 경험할 수 있다.

- **수학 문제해결 교육과 문제제기 활동**

① 수학교사는 학생들 수준에 맞고 흥미로운 **적절한 문제를 선택하여 적절한 방법으로 제시하고 조심성 있고 적절히 도와줌으로써 학생들에게 독자적인 수학적 탐구활동에 가까운 경험을 제공**해야 한다. 그러나 문제해결 교육에서는 주어진 문제만을 다룰 것이 아니라 이를 발전적으로 취급하여 새로운 문제를 제기하는 과정을 함께 다루어야 한다.
② 학생들은 ‘혼자 고안한’ 문제를 풀어보는 수학적 사고경험을 가져야 하며, 어떤 문제를 푸는 데 성공하고 나면 반드시 **반성단계에서 미지인 것과 자료, 조건의 역할을 바꾸거나 일반화, 특수화, 유추 등을 통해 또는 응용상황을 고려하여 발전적으로 새로운 문제를 찾아 해결**해 보아야 한다.
③ 수학적 지식을 학생 스스로 구성해가도록 해야 한다는 ‘구성주의 학습 원리’나 수학은 추측과 반박을 통한 발명의 과정임을 강조하는 ‘준-경험주의 수리철학관’에 따라 학생들은 문제제기를 꾸준히 경험해야 한다.

10.

(1) 교사의 발문은 바람직하지 않다. 교사의 발문에는 문제 해결을 위해 다은이가 스스로 발견해야 하는 제2코사인 법칙을 포함하고 있어 다은이가 해야 할 것을 거의 남겨 두지 않는다. 또한 교사의 발문은 당면한 문제만을 해결할 수 있는 특수한 것이므로 다은이가 문제 해결에 성공했다 하더라도 미래의 다른 문제를 해결하는 데는 별다른 도움을 주지 못한다.

(2) 극단적인 교수 현상인 토파즈 효과가 나타났다.

- 토파즈 효과

교사가 가르쳐야 한다는 '교수학적 계약'의 압박 때문에 풀이에 대한 명백한 힌트를 주거나 유도 질문을 하거나 문제와 함께 해답을 제시함으로써 학생들이 지식을 구성하는 것을 방해하거나 그러한 학습 환경을 일소하게 되는 것을 말한다.

11.

(1) [그림 1]에서 삼각형의 밑변과 높이, [그림 2]에서 삼각뿔의 밑면과 높이라는 두 대상 사이의 유사성에 기초하여 삼각뿔의 부피를 구하는 공식을 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 유사하게 생각하여 삼각뿔의 부피를 추론하고 있다는 점에서 A학생이 유추적 사고를 했다고 판단할 수 있다.

(2) 유추적 사고의 보완을 위한 지도 방법(정당화)

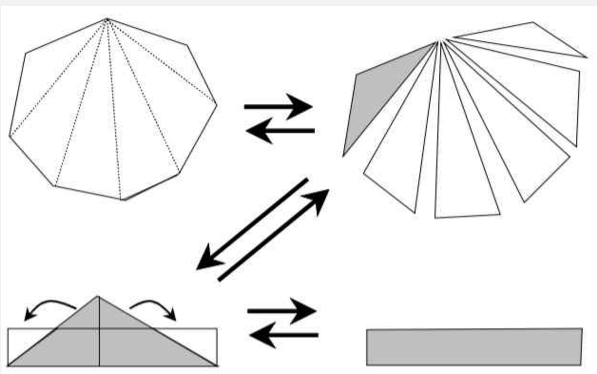
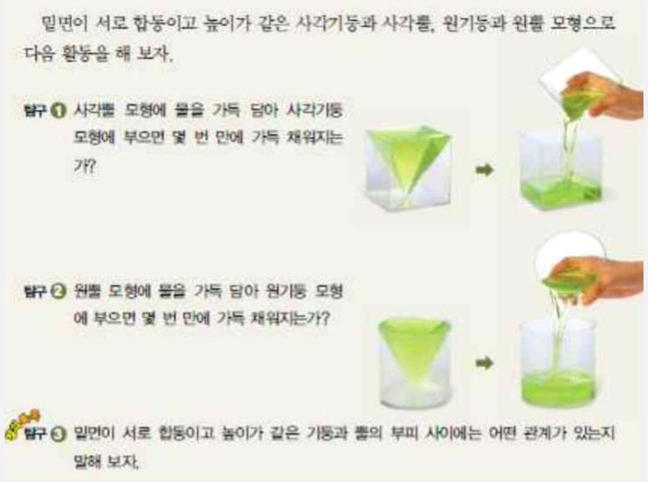
- 지도 방법: 실험을 통해 정당화하는 지도 방법을 사용한다.

> 뿔의 부피를 구하려고 한다. 다음 활동을 해 보고, 물음에 답하여 보자.
> (1) 밑면이 합동이고 높이가 같은 삼각기둥 모양의 그릇과 삼각뿔 모양의 그릇을 준비한다.
> (2) 삼각뿔 모양의 그릇에 물을 가득 채운 다음, 이것을 삼각기둥 모양의 그릇에 붓는다.
> ① 삼각뿔 모양의 그릇에 물을 가득 채워서 몇 번 부으면 삼각기둥 모양의 그릇에 물이 가득 차겠는가?
> ② 삼각뿔의 부피와 삼각기둥의 부피 사이에는 어떤 관계가 있는가?

위 활동에서 삼각뿔의 부피는 밑면이 합동이고 높이가 같은 삼각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$임을 알 수 있다. 따라서 (뿔의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(밑넓이)$\times$(높이).

- 보완할 수 있는 측면: 유추는 개연성이 높은 추론이지만 절대적으로 참인 명제를 이끌어 내지는 못한다. 그러므로 유추에 의해 주장된 성질이 수학적으로 참인가를 확인하도록 지도하면 이를 보완할 수 있다.

* 도종훈 (2015), 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피에 내재된 공리와 힐베르트의 세 번째 문제, 한국학교수학회논문집

> …평면에서 임의의 다각형은 유한개의 삼각형으로 분해되고 임의의 삼각형은 그와 넓이가 같은 직사각형과 합동분해가능하므로 직사각형의 넓이로부터 합동분해를 통해 임의의 다각형의 넓이를 구할 수 있고 이를 토대로 평면에서 다각형의 넓이에 대한 이론을 정립할 수 있다.…
>
> 
>
> [그림 III-1] 합동분해를 이용한 다각형 넓이 구하기
>
> …그렇다면 **평면에서의 다각형 넓이에 대한 이론처럼 합동분해를 통해 다면체의 부피에 대한 이론을 건설할 수 있을 것인가?** 즉, 직사각형으로부터 유한 번의 분할과 재배열의 방법을 통해 임의의 삼각형의 넓이를 구한 것처럼 삼각뿔의 부피를 직육면체로부터 유한 번의 분할과 재배열의 방법을 통해 구할 수 있을 것인가?…
>
> …삼각뿔의 부피 공식은 현행 중학교 수학과 교육과정의 기하 영역에 소개되어 있고, 이를 학습한 학생들은 이 공식을 이용하여 여러 가지 입체도형의 부피를 구할 수 있게 된다. 교과서에 제시되어 있는 뿔의 부피 공식에 대한 설명은 수학적인 설명이라기보다는 물리적인 실험에 가깝다.
>
> 
>
>
> **과학 교과서에서나 제시될 법한 이런 설명을 수학 교과서에서 제시하는 이유는 무엇인가?** 즉, 삼각형이나 사각형의 넓이와는 다른 뿔의 부피에 대한 이와 같은 비형식적, 직관적 설명은 학생들의 인지 발달 수준을 고려한 교수학적 선택의 결과인가? 아니면 불가피한 선택인가? 삼각형의 넓이와 삼각뿔의 부피 사이에는 어떤 차이가 존재하는가? …
>
> …결국 힐베르트의 세 번째 문제는 **평면에서 넓이가 같은 두 다각형이 서로 합동분해가능**한 것과는 달리 **공간에서 부피가 같은 두 다면체는 일반적으로 합동분해가능하지 않음**을 보이는 문제임을 알 수 있다.…
>
> …덴의 증명을 통해 넓이가 같은 삼각형과 정사각형이 서로 합동분해가능한 것과는 달리 부피가 같은 삼각뿔과 정육면체는 일반적으로 서로 합동분해가능하지 않고, 따라서 밑면이 합동이고 높이가 같은 임의의 두 삼각뿔의 부피가 서로 같음을 합동분해를 통해서는 일반적으로 증명할 수 없음이 증명되었다. 즉, **삼각뿔의 부피 공식에 대한 증명은 어떤 식으로든 반드시 무한 과정을 포함해야 하며, 무한 과정 없이 다면체 부피에 대한 이론을 건설하는 것은 불가능하다**는 것이다.…
>
> …중학교 수학교과서에 제시된 뿔의 부피 공식에 대한 독특한 설명 방식은 학생들의 이해나 인지 발달 수준을 고려한 교수학적 선택이라기보다는 극한 개념을 학습하지 않은 학생들에게 극한의 개념 즉, 무한 과정없이 해당 내용을 설명해야 하는 상황에서 비롯된 불가피한 선택이라고 할 수 있다. 그리고 중학교 수학교과서에서의 이런 선택이 불가피할 수밖에 없음을 명시적으로 밝힌 문제가 바로 힐베르트의 세 번째 문제임을 알 수 있다. …
>
> …도형의 넓이와 부피를 포함하여 중학교 기하 교육과정에는 평행선과 각의 관계로부터 시작하여 삼각형의 합동, 닮음, 피타고라스 정리, 원과 직선의 관계 등에 관한 여러 가지 내용들이 결과로서 제시되어 있다. 일부 내용에 대한 논증이 이루어지고 있으나 그 속에 내재되어 있는 공리나 엄밀한 증명은 교육과정에서 부각되지 않는다. 또한 현행 중등학교 기하 내용의 근간인 유클리드 원론의 내용 구성 방식이 공리계를 근간으로 한 직렬적 형태인 반면, 중등학교 기하 교육과정은 평행선 공리와 동치인 평행선에서의 동위각과 엇각의 관계, 삼각형의 합동과 닮음, 피타고라스 정리, 삼각비, 원과 직선의 관계, 도형의 넓이와 부피 측정 등의 몇 가지 주제를 중심으로 한 병렬식 내용 전개 방식을 취하고 있어 내용의 전체적인 구조를 파악하기 쉽지 않다.
>
> **학교수학에 내재되어 있으나 명시적으로 드러나지 않은 기본 가정이나 공리를 파악하고 교과의 전체적인 구조와 흐름에 대한 안목을 갖추는 것**은 교사가 끊임없이 추구해야 할 중요한 과제 중 하나이다. **학교수학은 공리적 방법에 의해 전개되지 않지만, 학교수학에서 사용하는 어떤 개념이나 전개 방식은 그 이면에 있는 공리적인 측면을 고찰할 때 그 교육적 의미가 더욱 명확해 지는 경우가 있다.** 교사들이 이러한 측면을 파악하고 수업에 임하는 것은 학생들에게 보다 명료하고 의미 있는 수학적 설명을 하는데 도움을 줄 것이다.

12. (3), (5), (6)

(1) 좋은 문제란 주변 세계나 다른 사고분야와 관련된 풍부한 배경을 가진 문제이며, 관련된 여러 가지 문제를 암시하는 문제이다.

(2) 전형적인 문제들도 문제제기를 통해 적절히 변형하면 문제해결 지도에 적합한 문제로 활용이 가능하다.

(3) (5) 수학교육의 목적은 수학적으로 사고하도록 가르치는 것이다. 문제를 해결하는 과정에서 기초적인 수학적 지식이나 기능을 보다 확실하게 이해할 수 있고 창의적 사고, 비판적 사고, 의사 결정 능력과 같은 고등 정신 능력을 신장할 수 있다. 그러므로 문제해결력의 신장을 통해 학생들의 사고력과 실생활에의 응용력을 길러주는 것은 결국 수학교육의 궁극적인 목표(수학적으로 사고)가 된다고 볼 수 있다.

(4) 해법이 다양한 문제는 학습자들이 문제를 해결한 후 다른 방법을 찾아봄으로써 문제해결력을 높일 수 있으며 자신과 다른 방법으로 풀이한 학생과 비교하는 과정에서 수학적 의사소통 능력을 기르고 흥미와 동기를 유발하여 태도 및 실천 능력 등도 기를 수 있다.

(6) 정형문제인 연습문제를 해결함으로써 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있으며 이를 바탕으로 다양한 비정형문제를 다룰 수 있다. 따라서 수학 교과서의 연습문제와 같은 정형 문제를 푸는 것은 의미 있다.

13.

- 출발점 선택

$\triangle$ABC가 $\angle \mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형이면 피타고라스 정리 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

- 속성 나열하기

$\angle \mathrm{C}=90^\circ$이다, 삼각형의 세 변의 길이는 a, b, c이다, 세 변의 길이 사이에 $a^2+b^2=c^2$가 성립한다.

- '만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?' 를 이용한 문제설정

$\angle$C가 90°가 아니면 어떻게 될까?

- 문제해결

㉠ $\angle \mathrm{C}<90^\circ$일 때

꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AD}}=b\sin\mathrm{C}$, $\overline{\mathrm{CD}}=b\cos\mathrm{C}$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=a-b\cos\mathrm{C}$. $\triangle$ABD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$c^2=(b\sin\mathrm{C})^2+(a-b\cos\mathrm{C})^2$이며, 이를 정리하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$.

㉡ $\angle \mathrm{C}>90^\circ$일 때

꼭짓점 A에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{AD}}=b\sin(\pi-\mathrm{C})$, $\overline{\mathrm{CD}}=b\cos(\pi-\mathrm{C})=-b\cos\mathrm{C}$이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=a-b\cos\mathrm{C}$.

$\triangle$ABD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$c^2=(b\sin\mathrm{C})^2+(a-b\cos\mathrm{C})^2$이며, 이를 정리하면 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$.

㉢ $\angle \mathrm{C}=90^\circ$일 때

$a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}=a^2+b^2=c^2$, $\angle$C의 크기에 관계없이

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$.

14. ①은 ②의 보조문제가 될 수 있다. ①의 풀이에서

$1+2+\cdots+100=100+99+\cdots+1$이므로 $101\times100=2\times(1+\cdots+100)$,

$1+\cdots+100=\dfrac{101\times100}{2}$를 이끌어낼 수 있다. 이 방법은 ②를 해결하기 위한 실마리를 제공하는 보조문제가 될 수 있다.

15.

- 수학적 추론의 유형: 귀납추론
- 역할: 귀납추론은 문제를 해결하는 수단의 역할을 하였다.
- 보완점: 귀납추론은 개연성이 높은 추론이지만 귀납추론으로 발견한 수학적 추측이 항상 참인 것은 아니다. 따라서 추측이 수학적으로 참이 되는지 확인하는 정당화의 과정이 필요하다. 철수의 풀이에서 보완되어야 할 점을 구체적으로 쓰면 다음과 같다.

1부터 10까지의 합은 55이다.
이때 다섯 개의 수 중 짝수가 $2q$, $2r$, 2개인 경우
그에 대응하는 홀수 2개 $2q-1$, $2r-1$를 빼면 $55-2q-2r+2$이고,
여기서 보이지 않는 짝수 $2s$, $2t$, $2u$를 빼면 $55-2q-2r-2s-2t-2u+2$.
한편 $2q+2r+2s+2t+2u=2+4+6+8+10=30$이므로
$55-2q-2r-2s-2t-2u+2=55-30+2=27$.
그러므로 철수의 추론은 옳다.

* 유비추론(유추)과 귀납추론

㉠ 유비추론: 서로 유사한 두 대상에 대하여, 한 대상에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 다른 대상에서도 성립할 것이라고 주장하는 추론이다.

㉡ 귀납추론: 관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론이다.

16. ①

17. ②

① 개념과 원리를 제대로 이해하고 있다는 부분에서 문제해결을 위한 자원이 있다고 볼 수 있으며, 문제 해결에서 어떤 내용을 적용해야 할지 모르겠다는 부분에서 통제력이 부족하다고 할 수 있다.
② 비슷한 문제 즉, 관련된 문제가 생각나지 않으면 문제 해결에 어려움을 겪는 것은 발견술이 부족한 것이다.
③ 옳은 설명
④ 문제 제기 활동을 통해 변형된 문제를 풀어봄으로써 문제해결력을 높일 수 있다.
⑤ 계산에 시간을 많이 소비하는 학생의 경우 계산기를 보조 수단으로 사용할 수 있다.

* 문제해결 행동의 기본 요소(A. Schoenfeld, 1985)

(1) 자원(resource): 문제 해결을 위해 개인이 사용할 수 있는 수학적 지식, 직관, 알고리즘에 대한 이해
- 관련 영역에 관한 직관과 비형식적인 지식, 사실(facts), 알고리즘 절차
- 틀에 박힌 비알고리즘적인 절차
- 관련 영역을 다루는 데 필요한 법칙에 대한 이해(명시적 지식)

(2) 발견술(heuristic): 문제해결을 위한 경험적인 규칙, 생소하고 비표준적인 문제를 해결하기 위한 전략과 기술
- 그림 그리기, 적당한 표기 도입하기, 관련된 문제 연구하기
- 문제를 재진술하기, 거꾸로 풀기, 절차를 검증하고 확인하기

(cf) 발견술은 문제에 대한 이해를 깊게 하거나 해결로 이르도록 하는 데 도움을 주지만 완전한 해결을 보장하는 것은 아니다.

(3) 통제(control): 문제해결에서 자원과 전략의 선택과 수행에 관한 전반적인 결정 능력
- 계획하기, 모니터하고 평가하기, 의사결정하기, 의식적인 메타인지적 결정

(cf) 통제가 결여되면 자원을 낭비하고 능력에 맞는 문제를 쉽게 풀지 못하게 된다.

(4) 신념체계(belief system): 개인의 '수학적인 세계관', 수학에 대한 가치관이나 선입관

(예) 수학은 소수의 뛰어난 사람만 할 수 있는 과목이다, 수학 문제의 올바른 풀이는 한 가지밖에 없다 등

18. ④

ㄱ. 서로 다른 두 대상은 나타나지 않고 있다.
ㄴ. 몇 가지 사례를 통해 수학적 사실을 추측하고 있다.
ㄷ. 풀이 계획을 찾고 있지 않다.
ㄹ. 학생C가 일반화하였다.
ㅁ. 학생A가 반례를 들었다.

19. 개연적 추론 오류, 학교 수학의 사례와 교수·학습 방법

<민주의 증명>에서 개연적 추론을 사용하여 ㉡이 참이라는 오류를 범하였다. 모든 $x \in \mathbb{Z}_p$에서 $\sigma_p(x) = x^p = x$가 참이라는 사실을 근거로 하여 개연적 추론을 통해 모든 $x \in F$에 대하여 $\sigma_p(x) = x$임을 주장한 것이다. 개연적 추론은 개연성이 높은 추론이지만 절대적으로 참인 명제를 이끌어 내지는 못함에 유의하여야 한다.

* 개연적 추론을 귀납과 유추로 나누어 설명한다.

① 귀납추론과 중·고등학교 사례

사례 $x = 0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$에 대하여 $\sigma_p(x) = x^p = x$임을 근거로 $\mathbb{Z}_p$가 속한 전체 범주의 대상 체 F에 대하여 $\sigma_p(x) = x$임을 주장하고 있다는 점에서 귀납추론이 나타난 것이다. 중·고등학교 사례는 다음과 같다.

원의 둘레 위에 각각 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$개의 점을 찍어 나가면서 이 점들을 이었을 때 분할된 원의 면의 수를 구하면 각각 $F=1,\ 2,\ 4,\ 8$임을 알 수 있고, 귀납 추론에 의해 $F=2^{n-1}$임을 주장할 수 있다. 그러나 $n=6$일 때 $F=30$ 또는 $F=31$이 되어 오류가 생긴다. 귀납추론은 수학적 지식을 발견하는 강력한 도구이지만 귀납추론에 의해 주장된 명제는 항상 참임을 보증하지 않는다. 따라서 이 오류를 교정하기 위해서는 그 명제가 참인지 확인하는 교수·학습이 뒤따라야 한다. 교수·학습 방법으로 탐구 학습, 토의·토론 학습, 매체 및 도구 활용 수업 등을 활용할 수 있다.

② 유추(유비추론)와 중·고등학교 사례

체 $\mathbb{Z}_p$와 F는 같은 표수 p를 갖는다는 유사성이 있다. 이 유사성을 기초로 하여 $\mathbb{Z}_p$에서 성립하는 성질 $\sigma_p(x) = x$가 F에서도 성립할 것이라고 주장하고 있다는 점에서 유추가 나타난 것이다. 중·고등학교 사례는 다음과 같다.

사다리꼴과 각뿔대는 유사한 모양을 가지고 있다. 사다리꼴의 넓이는 {(아랫변의 길이)+(윗변의 길이)}×(높이)×$\frac{1}{2}$이므로 각뿔대의 부피는 {(아랫면의 넓이)+(윗면의 넓이)}×(높이)×$\frac{1}{3}$이라고 주장할 수 있으나 이는 참이 아니다. 유추는 개연성이 높은 추론이지만 절대적으로 참인 명제를 이끌어 내지는 못한다. 그러므로 유추적 사고에 의해 주장된 명제가 참인지 확인하는 교수·학습이 뒤따라야 한다. 교수·학습 방법으로 탐구 학습, 토의·토론 학습, 매체 및 도구 활용 수업 등을 활용할 수 있다.

* 이종희·김선희 (2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사 -수학적 추론 유형 중심으로-, 한국수학교육학회

(개연적 추론으로 유추, 귀납과 시각적 추론을 제시하고 있으나 시각적 추론은 제외하였다.)

…Polya(1957)는 수학에서 사용하는 두 종류의 추론을 논증적 추론과 개연적(plausible) 추론으로 나누고, 수학적 지식은 논증적 추론에 의해 확립되게 되어 수학이 전통적으로 논증 과학으로 여겨지고 있지만 수학적 추측의 생성과 증명에 중요한 역할을 하는 것은 개연적 추론이라고 하였다.

논증적 추론은 수학적 증명에 사용되는 추론으로 연역을 기초로 하며, 전제가 옳다면 결론도 항상 옳으며, 엄밀한 수학을 세우는 역할을 한다. 개연적 추론은 논증적 추론이 아닌 나머지 부류의 추론으로, 본질적으로 새로운 지식을 획득하는데 유용하며 지식의 발견에 있어 필수적인 것이다.

Polya(1973)는 수학이 논증적 추론인 연역적 추론을 배우는데 뛰어난 훌륭한 기회를 제공하지만, 개연적 추론에 있어서도 그 기회를 제공하는 중요한 교과라고 하면서 논증과 더불어 개연적인 수학적 추론 지도의 필요성을 언급하였다. 수학자의 창조적인 연구 결과는 연역적 추론에 의해 확보되지만, 그 증명은 개연적 추론에 의해 발견되는 것이다. 수학 학습이 수학적 지식의 발견과 관련이 있는 것이라면, 학생은 마땅히 개연적 추론을 할 수 있는 기회를 가져야 한다.…

[연역적 추론]

수학에서는 주로 논리적인 증명을 하기 위한 연역적 추론을 강조해 왔다. 연역은 형식적인 체계 속에서 정의, 공리, 정리들을 이용하여 규칙을 따라 결론을 이끌어내는 엄밀한 증명으로 사실을 언급하는데 사용된다.

…연역은 새로운 사실의 발견이나 추측을 하는 과정에서는 적용될 수 없다. 수학을 발견하고 발명하는 측면에서는 연역 논리는 유용하지 못하며, 연역적 추론만 학습하는 것은 수학이라는 학문 체계를 수학자들이 만들어놓은 작품이며 학생들은 그 작품을 인계받아야 한다는 식의 수학관을 심어줄 수 있다.…

…따라서 수학적 추론은 불변의 진리가 모순 없이 공리체계에 의해 증명될 수 있다는 것을 입증하는 것 뿐 아니라 수학적 사실과 명제가 어떻게 발견되고 발견된 사실을 어떻게 입증할 것인지, 수학적 대상을 일상의 경험이나 다른 수학적 대상이나 구조에 비추어 생각하는 것 또한 포함해야 할 것이다.…

[귀납적 추론]

…사례와 사례로부터 나온 결과가 귀납의 전제가 되며, 규칙은 결론이 된다. 귀납적 추론은 결론이 옳다는 것을 전제의 옳음이 보증할 수는 없지만, 관찰된 결과인 전제는 실제로 결론을 이끌어내기 위해서 참인 증거를 찾게 하고 이 증거는 결론의 신뢰도를 높여준다. 즉, 귀납적 추론에서 전제가 결론을 입증하는 힘의 정도는 추가되는 전제가 새로운 증거를 제공함에 따라 증가할 수도 있고 감소할 수도 있다.

귀납적 추론의 결론은 전제가 옳을지라도 그를 수 있기 때문에 결론과 관련이 있는 추가적인 증거는 결론이 참으로 옳은가를 좀 더 확실하게 판정할 수 있게 해준다. 추가적인 증거가 결론이 입증되는 정도에 관여할 수 있다는 사실은 연역에서 찾아볼 수 없는 귀납추론의 일반적인 특징이다(박선화, 1991).…

[유추적 추론]

Polya(1973)는 개연적 추론을 귀납적 추론으로 부르고 여기에 일반화, 특수화, 유추가 포함된다고 하였다. 그 중 유추는 부분적인 유사성을 바탕으로, 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질이나 어떤 관계 체계로부터 그와 유사한 대상의 성질이나 관계 체계를 추측하게 하며, 부분적인 닮음을 근거로 하여 어떤 상황에 대한 개념적 지식이 다른 유사한 상황으로 전이되어 관련된 개념적 지식을 형성하게 하는 형태의 개연적 추론이다(우정호, 1998).

그러나 관찰된 여러 사실로부터 일반적인 규칙을 이끌어내는 추론인 귀납과 유추의 논리는 다르다고 볼 수 있다. 김선희・이종희(2002)는 유추적 추론의 논리가 Peirce의 가추법에 속한다고 보고 유추와 귀납을 구별하기도 했는데, 유추는 이미 알려져 있는 사실을 토대로 관찰된 것에서 알려진 사실과 유사한 점을 파악하여 관찰된 것에 대한 결론을 도출하는 추론이라 할 수 있으며, 이것은 결과와 규칙으로부터 사례를 추론해내는 가추법의 논리를 따른다.

유추는 두 가지 유형으로 나누어볼 수 있다(김영채, 1998). 첫 번째는 비율적 유추로서 A : B = C : ?라는 일반적인 형태로 나타내어진다. 비례식에서 두 번째 항이 첫 번째 항과 관련된 것과 같이, 네 번째 항은 세 번째 항과 관련되는 것이라고 짐작할 수 있다. C라는 결과를 얻었을 때, A : B라는 규칙에 빗대어 ?라는 사례를 추출하는 유추이다.

그리고 또 한 가지 영역 간 유추는 표면적으로 보면 서로 상이한 두 영역을 하나로 접합시켜 주는 추상적인 관계 체계를 지각하는 것으로, 이러한 유추는 이전에 비슷한 문제를 해결해 본 경험을 사용하여 현재의 문제를 해결할 때 사용되는 것으로 볼 수 있다.

* 가추법은 기존의 이론으로 설명할 수 없는 사실이나 현상을 설명하기 위한 새로운 가설을 생성하는 논리이다. Peirce(1958)에 따르면 가추법은 관찰된 결과(또는 놀라운 사실)를 설명하기 위해 관찰되지 않았던 원인을 이끌어 내는 논리적 방법으로, 사실들(facts)을 연구하고 그 사실들을 설명하기 위해 이론을 고안하는 논리라고 정의하였다.

20. ④

④ 귀납보다는 전형적인 예에 의한 예제적 접근을 대표적인 개념 학습 방식으로 제시한 학자는 Freudenthal이다.

* <u>전형적인 예(보기)를 통한 지도(Freudenthal)</u>

㉠ <u>전형적인 보기</u>: 곧바로 그 구조에 대한 깊은 통찰을 제공해 주면서 동형인 다른 상황에 신속하고 정확하게 전이가 가능한 예

㉡ Freudenthal은 귀납은 과학적 인식의 주요 원천은 아니며, 한 두가지 예시만으로 곧바로 일반화를 하게 된다고 주장하여 귀납의 논리를 거부하였다.

㉢ 수학의 원리는 전형적 보기를 통해 곧바로 그 구조를 파악하여 획득된다.

㉣ *귀납적 이해(comprehension)*, <u>각지(覺知, apprehension)</u>

- Polya 수학 학습-지도 원리

활동적 학습의 원리, 최선의 동기 유발의 원리, 비약 없는 단계의 원리

① 학습하는 최선의 길은 스스로 발견해내는 것이다.

② 효과적인 학습을 위해 학습자에게 가능한 한 생각할 시간을 충분히 주어 학습자 스스로 발견하도록 하며 이를 돕는 질문과 권고를 통해 산파역을 해야 한다.

③ 교사는 모든 비밀을 단번에 누설하지 말고 말하기 전에 추측해 보게 한다.

④ 학생들로 하여금 질문하게 하고 대답하게 한다. 아무튼 아무도 묻지 않은 질문에 답하는 것은 피하라.

⑤ 학생의 경험과 관련이 있고 학생에게 의미가 있도록 문제를 선정하고 제시함으로써 학습내용 자체에 대한 지적 호기심을 갖게 하고, 학습 그 자체에서 오는 기쁨과 발견의 희열을 경험하도록 한다.

⑥ 결과를 추측하게 하고 발표하게 하는 것은 학습동기를 유발하고 지속시키는 한 가지 방법이 될 수 있을 것이다.

⑦ 적절한 문제를 선택하도록 노력하고 문제의 제기에 학습자를 참여시키도록 하며, 또한 결과를 추측하고 발표하게 함으로써 학습동기를 유발하고 지속시킬 뿐만 아니라 바람직한 과학적 사고태도를 갖도록 교육한다.

21. ③

ㄱ. 학생 A는 연역적 추론인 수학적 귀납법을 사용하여 연역적 증명을 시도하고 있다.

ㄴ. 학생 A의 풀이에서 $n=k+1$일 때 전제조건($a_{k+1}=2a_k+1$)을 이용해야 한다. 학생 A는 전제조건과 증명해야할 것($a_{k+1}=2^{k+1}-1$)을 혼동하고 있다.

ㄷ. 학생 B의 풀이는 수열의 몇 개의 항을 구해보고 수열 $a_n=2^n-1$일 것이라 추론하고 있다는 점에서 귀납추론을 사용하고 있다. 귀납추론은 개연적 추론으로서 수학적 지식을 발견하는 강력한 수단이지만 귀납추론에 의해 주장된 명제는 확실성을 보장하지 않는다. 확실성을 보장할 수 있는 방식은 연역적 추론으로서, 학생 B의 풀이가 확실성을 보장하기 위해서는 학생 A가 시도한 방법인 수학적 귀납법 즉, 연역적 추론이 뒤따라야 한다.

22. ⑤
① 가을이는 증명의 아이디어를 탐색하고 있다.
② 가을이는 분석법의 한계를 인식하지 못하고 있다.
③ 가을이는 종이접기 활동을 하고 있다.
④ 봄이는 증명의 일반성에 대해 제대로 이해하고 있다.
⑤ 설빈이는 필요조건을 찾아가는 분석법을 구사하여 세 꼭짓점이 한 변에서 만나는 방법을 찾고 있다.

23. ⑤
ㄱ. 선분의 수직이등분선이 작도되었다고 가정하여 필요조건을 찾아나감으로써 수직이등분선의 작도 방법을 찾는 분석법이 포함된 활동이다.
ㄴ. 주어진 활동과 같이 종이를 접고 잘라 펼치면 수직이등분선이 작도되기 위한 필요조건, 즉 선분의 수직이등분선 위의 한 점에서 그 선분의 양 끝점에 이르는 거리가 같음을 알 수 있다. 이때 컴퍼스를 이용하여 양 끝점에서 거리가 같은 두 점을 찾을 수 있다.
ㄷ. 분석법은 풀이 계획을 발견하는 과정이므로 이 활동을 통해 찾아낸 작도 방법이 논리적으로 옳음을 정당화하기 위해서는 연역적 증명 즉, 종합법이 뒤따라야 한다.

24. ③
① (가)의 풀이에서 내분점의 공식이 다루어지지는 않는다.
② (가)의 풀이에서 수직선 위에서의 조작 활동을 통해 내분점을 구하고 있으나 공식을 유도하고 있지는 않다.
③ 옳은 설명
④ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차만 있다.
⑤ (가)와 (나)의 풀이에서 내분점의 공식에 대한 형식화된 개념 정의는 사용되지 않는다.

25. ②
ㄱ, ㄷ은 유추한 결과가 참이다.
ㄴ. 아랫면의 넓이를 A, 윗면의 넓이를 B, 높이를 h라 할 때,
부피는 $(A+B+\sqrt{AB})\cdot h\cdot\frac{1}{3}$이다.

* 박달원 (2017) 분석적 방법을 통한 삼각형의 내접원, 외접원에서 사면체의 내접구, 외접구로의 유추적 발견, 한국학교수학회눈문집

…수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래전부터 사용되어 온 방법은 분석법(analysis)이다. 분석법은 기원전 6세기경에 Pythagoras 학파의 수학자들에 의하여 사용되었으며 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 그리스 수학자 Pappus이다(우정호, 2000).…

…Poincaré는 과학자들이 실험을 통해 과학적 법칙을 발견하듯이, 수학자들은 유추를 통해 수학적 법칙을 발명한다고 설명한다. 이미 오랫동안 알려진 지식이면서도 서로 다른 것처럼, 서로 관련이 없는 것처럼 다루어지다가 유추에 의해 적절히 연결됨으로써 분명한 관계가 드러나고 그것이 곧 수학적인 발견으로 연결된다는 의미이다(이경화, 2009).…

…수학자들은 경험적 판단을 통한 유추, 귀납적 추론의 방법으로 기존의 사실로부터 새로운 사실을 발견하고 이를 정당화하여 올바른 결론을 이끌어 왔다.…

…Polya(1986)는 문제의 제기가 수학을 창조하는 결정적 사고 단계이며 문제를 제기하고 형식화하는데 학생참여가 학습동기를 유발시켜 줌은 물론이고 올바른 과학적 태도를 가르치는 것이라고 강조한다. 그러나 문제를 발견하고 형식화하는 과정은 학교수학에서 대부분 결여되어 있으며 이는 학생들이 주어지는 수학 문제를 수동적으로 받아들이고 단순계산과 반복연습을 통한 답을 구하는 수준에 머무르게 하는 중요한 원인이 되고 있다.…

…Polya는 문제 발견과정의 부재로부터 발생되는 학교수학의 이러한 문제점이 유추를 통해 보완될 수 있음을 보이고 있다(이승우, 2002; 재인용). 수학적 사고과정에서는 귀납, 유추, 추측이 있은 다음 증명이 뒤따른다. 수학적으로 사고한다는 것은 그것이 비록 하찮은 것이라고 하더라도 수학적 발견을 하는 것이고, 그것은 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 문제를 해결하는 것이다.…

…Polya는 귀납과 유추에 의한 ‘사려 있는 추측’을 통한 발견적 사고와 문제해결 교육의 중요성을 강조였으며 발견술은 방법적 지식이며, 이는 시범, 모방과 실행, 질문과 권고로 이루어진 언어의 미묘한 구사법, 곧 대화법에 의한 조력에 의하여 습득될 수 있다(우정호, 2000).…

26.
경규는 유한개 연속함수의 합이 연속이라는 사실에 기초하여, 무한개 연속함수의 합도 연속이 될 것이라고 주장하고 있다. 경규의 추론 유형은 개연적 추론(유추)이다. 폴리아의 문제해결 4단계 이론에 따라 유추를 문제해결 지도에 활용하는 방안은 다음과 같다.

문제 해결 4단계 중에서 마지막 단계인 반성 단계는 문제해결과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 보는 단계이다. 이때 유추를 활용하여 관련된 새로운 문제를 만들어보는 활용 방안을 생각할 수 있다.

‘삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.’는 문제를 제시하여 적절한 발문과 권고를 사용하면서 학생들이 문제를 이해하고 계획을 작성하고 그 계획을 실행하도록 한다. 그리고 반성 단계에서 ‘결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있을까?, 공간에서 생각하면 어떨까?’ 등의 발문을 함으로써 새로운 문제 ‘사면체의 네 중선은 한 점에서 만난다.’를 학생들이 유추하게 한다. 그리고 공학적 도구(Geogebra)를 활용하여 유추한 사실이 참임을 학생들이 확인하도록 한다.

27. ④
ㄱ. 미지인 큰 수와 작은 수를 미지수 x, y로 놓은 것은 문제를 이해하는 것으로 문제 이해단계이다. 계획 수립단계는 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하는 것으로 문제에서 2단계)에 해당한다.
ㄴ. 숀펠드의 통제는 모든 단계에 적용될 수 있다.
ㄷ. 옳은 설명

① 문제 이해 : 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제를 분석
- 미지인 것은 무엇인가?
- 조건은 무엇인가?

② 계획 작성(보조 문제의 활용 단계) : 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악
- 관련된 문제를 알고 있는가?
- 문제를 달리 진술할 수 있을까?, 보다 일반적인(특수한)문제는?

③ 계획 실행 : 해결 계획에 따라 실행
- 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?
- 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?

④ 반성 : 문제해결과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 본다.
- 풀이과정을 점검할 수 있는가?
- 결과를 다른 방법으로 이끌어낼 수 있는가?
- 결과를 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

28. ④

① 원리나 공식을 이해하는 것과는 거리가 멀다.

② 문제의 풀이 방법이 떠오르지 않을 때 관련된 유사한 문제를 먼저 풀어보게 하는 단계는 계획 작성 단계이다.

③ (가), (나)는 문제 이해 단계의 발문에, (다), (라)는 계획 작성 단계의 발문에 가깝다.

④ (다), (라)와 같은 발문은 자칫하면 학생들이 스스로 탐구하거나 시행착오를 거쳐 학습할 수 있는 환경을 방해할 수 있다.

⑤ 형식화된 수학 지식 전달을 하고 있지는 않다.

29. ①

ㄱ. A 학생은 5×5 기하판에서 서로 다른 길이의 선분의 수를 구하는 구체적 조작 활동을 통하여 4가지 사례에 대하여 성립하는 선분의 수의 규칙을 5×5 정사각형에 적용하였다. 즉, 귀납추론을 사용하였다.

ㄴ. 수학적 귀납법은 연역적 추론이며 귀납추론은 개연적 추론이다.

ㄷ. 형식불역의 원리가 나타났다고 하기 위해서는 기존의 체계에서 성립하던 성질이 넓어진 체계에서도 성립해야 한다. 그러나 문제 상황은 그렇지 않으므로 형식불역의 원리와는 관계없다.

30.

2015년 개정 수학과 교육과정의 교수・학습 방법에서 수학적 사고와 추론 능력을 함양하기 위한 유의점은 다음과 같다.

① 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다.

② 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적으로 수행하게 한다.

③ 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성하도록 한다.

〈수업상황 A〉와 〈수업상황 B〉에 공통으로 나타나고 있는 유의점은 ①이며, 이에 근거하여 수업의 특징을 논한다.

〈수업상황 A〉에서 김 교사는 학생들에게 사각형 PQRS는 어떤 사각형인지 학생들 스스로 추측하도록 하는 발문을 하였고, 학생들은 평행사변형일 것이라 추론하였다. 그리고 추측에 대하여 평행사변형이 되기 위한 근거를 찾아나가면서 중점연결정리를 적용하여 사각형 PQRS가 평행사변형임을 정당화하였다.

〈수업상황 B〉에서 최 교사는 종이접기 활동을 통해 학생들이 삼각형의 성질을 직관적으로 탐구하도록 하였다. 학생들은 두 내각의 이등분선의 교점으로부터의 세 변에 이르는 거리가 같을 것이라 추론하였다. 최 교사는 추측을 어떻게 증명할 수 있을지 발문하였고, 학생은 외심의 성질을 증명할 때 사용했던 분석법과 종합법을 비슷하게 적용하여 추측을 정당화할 수 있을 것이라고 하였다.

두 내각의 이등분선의 교점 I라 하고 I에서 각 변 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 이때 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$라고 가정하자. $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$가 성립하기 위해서는 $\triangle ADE\equiv\triangle AFI$, $\triangle BID\equiv\triangle BIE$, $\triangle CIE\equiv\triangle CIF$이어야 한다.

$\triangle ADE\equiv\triangle AFI$ 성립하기 위해서는 $\overline{AE}$공통, $\angle DAI=\angle FAI$, $\angle ADI=90^\circ=\angle AFI$이어야 하고, 이것은 참이라고 인정하고 있는 명제이다. 비슷한 방법으로 $\triangle BID\equiv\triangle BIE$가 성립하기 위해서는 $\overline{BI}$공통, $\angle DBI=\angle EBI$, $\angle BDI=90^\circ=\angle BEI$이어야 하고, 이것은 참이라고 인정하고 있는 명제이다. 마지막으로 $\triangle CIE\equiv\triangle CIF$가 성립하기 위해서는 $\overline{IC}$공통, $\overline{IE}=\overline{IF}$, $\angle CEI=90^\circ=\angle CFI$이어야 하고, 이것은 위의 두 경우가 성립하므로 참인 명제이다.

위의 분석의 과정을 거꾸로 하면, $\triangle ADE\equiv\triangle AFI$, $\triangle BID\equiv\triangle BIE$, $\triangle CIE\equiv\triangle CIF$가 성립하므로 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$이다. 즉, 두 내각의 이등분선의 교점으로부터 세 변에 이르는 거리는 같다.

분석법은 풀이계획을 발견하는 과정이고 종합법은 그 계획을 실행하는 과정으로, 분석법과 종합법은 상호보완적인 의미를 지닌다. 분석법과 종합법을 함께 이용했을 때의 수학교육적 의의는 다음과 같다.

① 수학에 대한 인식 변화이다. 모든 수학적 지식이 이미 존재하는 결과물로 단순히 전달되거나 전수된 지식이 아닌 인간에 의해 발견되고 논의되고 계속적으로 연구된 인간적 대상임을 알게 된다.

② 동기유발이다. 모든 문제는 해결될 수 있는 과정이 있음을 학생 스스로 인식하고 문제해결에 동기유발을 얻게 되며, 스스로 문제를 해결하려고 노력한다.

③ 발견적 사고의 확장이다. 스스로 수학적 문제를 해결하거나 수학적 지식을 이해하려는 노력을 함으로써 능동적인 사고를 하게 된다.

31.

- 문제제기 활동의 중요성

① 탐구 지향적인 학습 태도를 길러준다. 문제를 제기하는 것은 수학을 창조하는 결정적인 사고단계이며, 문제를 제기하고 형식화하는 데 학생들이 직접 참여함으로써 바람직한 과학적 태도를 기르게 된다.

② 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현에 도움을 준다. 새로운 문제를 만들어 봄으로써 원래의 문제를 이전과는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있어 그 의미를 보다 명확하게 이해할 수 있을 뿐 아니라 그로부터 새로운 생각을 하게 된다.

③ 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

- What if not 전략

① 출발점 선택: 주어진 정리는 이차방정식의 근과 계수와의 관계이다.

② 속성 나열하기: 이차방정식의 두 근의 합, 두 근의 곱.

③ 속성 부정하기: '만약 이차방정식이 아니라면 근과 계수와의 관계는 어떻게 될까?'

④ 문제 제기하기: n차 방정식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$의 근을 α_1, α_2, $\cdots$, α_n라 할 때, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n$, $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\alpha_n$과 계수 a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_0와의 관계는 어떻게 되는가?

⑤ 설정된 문제 분석하기: n차 방정식의 근이 주어져 있으므로 다음의 항등식을 얻고, 근과 계수와의 관계를 찾을 수 있다.

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

$$\text{모든 근의 합 } \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\alpha_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\text{모든 근의 곱 } \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\cdots\cdot\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

* 문제제기를 통해 '$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=0$인 무한 차수 방정식은 어떤 조건에서 해를 갖는가?' 라는 문제를 생각할 수 있다. 유한 차수일 때는 대수학 기본정리가 적용가능한데, 무한 차수일 때는 어떠한가?, 더 나아가 일반적인 체 F의 원소를 계수로 갖는 무한 차수 방정식은?

* Picard: "모든 초월 정함수(테일러 급수 전개가능)는 단 한 개의 값을 제외 하고는 다른 여하한 값이라도 꼭 취한다."

⇒ 무한차 방정식도 한 개의 예외는 있을지 모르나 근이 존재한다.

(이덕세・정창훈 (1972) picard 의 정리에 대한 소고, 한국교통대학교 논문집)

* 문제제기 활동의 중요성

- 문제제기는 문제를 해결하는 수단이 될 수 있다. 즉, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 원래의 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단이 된다.
- 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
- 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단이 된다.

32. ③

① 수학 문제해결 과정에서 학생이 교사의 시범을 모방하는 것은 바람직하다.

② Freudenthal에 대한 설명이다.

③ 옳은 설명

④ 수학 문제해결 과정에서 문제와 관련된 요소를 재조직하고 그 요소 사이의 관련성을 파악하게 하는 측면을 강조하였다.

⑤ 문제제기 활동은 해결의 실마리나 단서를 찾고 주의를 집중하는 데 도움이 되므로 문제해결의 계획 단계에서 하는 것이 바람직하다. (보조문제 작성)

33.

- 분석법

① 이해단계: 구하려는 것을 x라 하자.

② <u>계획단계</u>: 방정식 $\sqrt{2x-6}=3-x$이 참이라고 하자.

③ <u>실행단계</u>: 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-3)(x-5)=0,\ x=3 \text{ 또는 } x=5.$$

이때 x는 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.

- 종합법

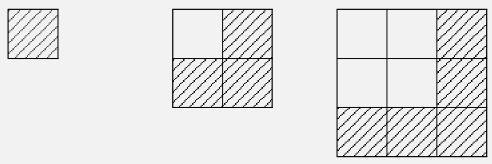
④ 반성단계: $x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다.

34. 개연적 추론과 논증적 추론, 교수・학습사례

귀납추론(관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론)

귀납추론은 수학적 지식을 발견하는 강력한 도구이지만 귀납추론에 의해 주장된 명제는 항상 참임을 보증하지 않는다. 따라서 발견한 명제가 참인지 확인하는 교수・학습이 뒤따라야 한다. 그러므로 ㉠에서 정 교사가 연역적 추론인 수학적 귀납법을 이용하여 수업을 진행한 것이다.

㉡에 해당하는 예



35.

연역적 추론과 개연적 추론(G. Polya),

반힐레의 3수준과 4수준,

수학적 추론 능력 신장을 위한 교수·학습상의 유의점

[서론]

Polya는 추론을 논증적 추론과 개연적 추론으로 나누었다. (나)와 같이 논증적 추론만으로 지도하는 것은 수학이라는 학문 체계를 수학자들이 만들어놓은 작품이며 학생들은 그 작품을 인계받아야 한다는 식의 수학관을 심어줄 수 있다. (학생들의 탐구와 발견의 과정을 어렵게 하고 수학의 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성의 이해에 방해가 되며, 수학의 필요성과 유용성을 인식할 수 없게 된다.)

[본론]

논증적 추론은 수학적 증명에 사용되는 추론으로 연역을 기초로 하며, 전제가 옳다면 결론도 항상 옳으며, 엄밀한 수학을 세우는 역할을 한다. 개연적 추론은 논증적 추론이 아닌 나머지 부류의 추론으로, 본질적으로 새로운 지식을 획득하는 데 유용하며 지식의 발견에 있어 필수적이다.

van Hiele의 기하 학습 수준 이론에서 3수준은 관계적/추상적 인식 수준이다. 관계적/추상적 인식 수준의 학생들은 연역적 추론, 즉 형식적 증명을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계를 전체적으로 파악하는 수준에는 이르지 못한다. 4수준은 형식적 연역 수준이다. 형식적 연역 수준의 학생들은 지켜야 할 제한 조건들을 인식하고 그러한 제한 조건이 형식적 추론에서 어떻게 적용되는지를 알고 증명을 시도한다. 즉, 논증적 추론이 가능하다.

따라서 학생의 기하 학습 수준이 3수준인 경우 (가)와 같은 개연적 추론에 의한 지도 방법을, 4수준인 경우 (나)와 같은 논증적 추론에 의한 지도 방법을 고려할 수 있다. 그러므로 학생들의 수준에서 적절한 정당화 활동을 교사가 선택하여 다룰 수 있다는 시사점이 있다.

[결론]

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에는 수학적 추론 능력을 신장시키기 위한 유의사항을 다음과 같이 명시하고 있다. 첫째, 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다. 둘째, 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적으로 수행하게 한다. 셋째, 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성하도록 한다. 교사는 유의점에 근거하여 학생들의 기하 학습 수준에 따라 정당화의 지도에 있어 개연적 추론에 의한 지도 방법과 논증적 추론에 의한 지도 방법을 고려할 수 있다.

* (2009 교육과정) 기하 영역의 지도: 정당화에 의한 기하 교육

① 정당화란 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도이다. 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 예에 의한 정당화 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 구분된다. 이 때 수학적 증명은 논리적 연역법 즉, 기하 지식을 증거로 하는 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다.

② 정당화를 유도하는 교수 방법으로 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다.

(예) 컴퓨터 상에서 확인하기, 수학적으로 증명하기,
종이접기 활동 이용하기, 모눈종이 위에 그려 보기,
좌표평면 위에 그려 분석하기,
컴퍼스와 자를 가지고 직접 작도하면서 분석하기

* (2015 교육과정) 논증 기하 교육의 방향성 변화 반영

2009 개정 수학과 교육과정에서 ‘증명’이 ‘정당화’로 바뀌었음에도, 현장 교사들은 ‘증명’이라는 용어만 ‘정당화’로 바뀌었을 뿐 관련 내용은 달라지거나 약화되지 않았다고 느끼고 있다(박경미 외, 2014). 성취기준에 쓰이는 ‘이해하고 설명할 수 있다는 것’의 의미를 현장에서 제대로 구현할 수 있는 방안으로, 이번 교육과정에서는 **‘교수·학습 방법 및 유의 사항’에 “도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 관찰이나 실험을 통해 확인하기, 사례나 근거를 제시하며 설명하기, 유사성에 근거하여 추론하기, 연역적으로 논증하기 등과 같은 다양한 정당화 방법을 학생 수준에 맞게 활용할 수 있다.”로 정당화의 형태를 명확하게 기술하였다. 학생들의 정당화 활동을 다양하게 제시하였으므로, 학생들의 수준에서 적절한 정당화 활동을 교사가 선택하여 다룰 수 있을 것이다.** 또한 ‘평가 방법 및 유의 사항’에 “정확한 용어와 기호의 사용, 복잡한 형식 논리 규칙의 이용을 요구하는 연역적 정당화 문제는 다루지 않는다.”를 제시하여 실질적인 학습 부담 경감을 추구하였다.

36. ㉠ 분석법 ㉡ 종합법

37. 개연적 추론의 특성과 지도방안

귀납추론(관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론) 귀납추론은 수학적 지식을 발견하는 강력한 도구이지만 귀납추론에 의해 주장된 명제는 항상 참임을 보증하지 않는다.

2점이다. 일반성을 보장하지 않는 귀납추론을 통해 주어진 등식이 참이라고 주장하고 있다.

수학적 귀납법과 같이 일반성을 보장하는 논증적 추론을 이용하여 지도한다.

38.

원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분한다.

실험이나 관찰을 통해 확인하기, 연역적으로 논증하기.

원의 중심과 현에 관한 성질을 직관적으로 탐구하여 그 성질을 발견하도록 할 때 <자료 1>의 정당화 방법을 활용하고, 발견한 성질을 수학적으로 엄밀하게 보이고자 할 때 <자료 2>의 정당화 방법을 활용한다.

39.

방정식이 풀렸다고 가정해봅시다.

삼각형의 내접원이 작도되었다고 가정해봅시다.

풀이 계획을 발견하는 수단이 될 수 있다.

내접원이 작도되었다고 가정하고 그 필요조건을 찾아가는 과정에서 원의 반지름을 작도해야 함을 찾아내었다. 이를 통해 내접원의 작도하는 법을 추측해내었다.

[수학학습심리학]

<소크라테스>

1. ②

학습의 주도권은 교사가 갖는다.

* 소크라테스의 산파법(대화법)

1) 소크라테스의 수학 교수·학습관

- 수학은 영혼이 순수하게 지성 자체를 이용하여 진리로 향하지 않을 수 없게 하는 학문이며 철인의 교육을 위해 반드시 필요한 학문이다.
- 수학적 개념에 대한 정의와 논의는 덕, 용기, 정의 등의 개념과 비교해 볼 때 개인의 이기심으로부터 자유로워질 수 있기 때문에 대화로써 진리 추구의 본질적인 과정을 실현할 수 있는 대상이다.
- 수학을 지도할 때에는 '의견'의 도출, 논박을 통한 무지의 자각과 탐구의욕의 유발, 지식의 상기를 돕는 조산 과정을 거치는 산파법을 이용해야 한다.

2) 지식 교육 방법 및 수학 학습-지도 방법

- 처음에 학생은 자신이 무지함을 교사의 질문에 답을 하면서 스스로 자각하게 되고, 알고자 하는 강한 동기가 발생하며, 교사의 계속적인 적절한 질문과 교사의 안내에 따라 결국에는 올바르게 답하게 된다.

① 교사의 질문
② 학생의 자신 있는 (틀린) 대답
③ 교사의 반박
④ 학생은 자신의 무지를 자각하고 당혹해함
⑤ 학생의 알고자 하는 강한 동기 유발
⑥ 교사의 질문
⑦ 학생의 올바른 답 상기

- 교사가 산파의 역할을 잘 수행하기 위해서는 가르칠 내용에 대해 잘 알고 있어야 하나, 가르칠 내용이 어떤 상식적 견해에 대비되는 학문적 견해인지를 알고 있어야 한다. 또한 가르칠 내용에 담겨 있는 질문이 무엇인가를 잘 알아야 한다.

3) 사고실험

교사가 지도에 앞서 상상 속에서 강의하고 학생들과 대화하고 토론을 하며 수업을 진행시키는 과정

2. [사고실험]

발생적 원리와 대화와 토론 방법에 따라 수업을 설계하는 과정에서 수행해야 할 교사의 준비 활동은 사고 실험이다. 사고실험은 가르칠 내용과 관련하여 철저하게 사고를 하는 것으로, 지도에 앞서 상상 속에서 강의하고 학생들과 대화하고 토론을 하며 수업을 진행시키는 것이다. 예를 들어 학생들의 반응을 예상하여 발문 목록을 작성한다든가 수학사를 통하여 학생들이 인지장애가 일어날 수 있는 부분에 대하여 이해하고 준비하는 것이 사고 실험이다.

[수업의 주도권]

소크라테스의 산파법에서 학생이 발견할 핵심적인 내용을 교사가 대부분 제시하고 학생에게 확인만 하며, 너무 친절하게 상기를 도와준다. 학생은 교사의 질문에 '네/아니오'로만 대답하고, 학생 자신의 능동적인 진리탐구가 적으며 스스로 탐구하여 발견한다고 보기 어렵다. 따라서 소크라테스의 산파법에서 수업의 주도권은 교사에게 있다.

정 교사는 마름모의 정의와 성질 사이의 관계를 소재로 하여 명제의 필요충분조건을 지도하고 있다. 명제 '두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분하는 사각형은 마름모이다.'를 정 교사가 직접 증명하지 않고 학생이 하도록 하는 수업 장면에서 수업의 주도권은 학생에게 있다.

[추측과 반박]

소크라테스의 산파법에서 가장 효과적인 교수·학습 방법은 부정적 수업으로, 학생들에게 질문을 던져 학생들 자신의 의견을 개진하도록 한 다음 그것을 논박하여 무지와 곤혹감을 야기시켜 알고자 하는 마음을 유발하도록 안내하고 결국 대화를 통해 원리를 발견시키는 방법이다. 즉 추측에 대하여 학생의 사고(추측)를 교사가 반박하는 문답법으로 수업이 진행된다.

추측 '두 대각선이 서로 수직인 사각형은 마름모이다.'에 대하여 한 학생이 두 대각선이 서로 수직이지만 마름모가 아닌 사각형을 반례로 제시하는 수업장면이 있다. 여기서 추측에 대하여 반박을 한 것은 정 교사가 아닌 학생이며, 주어진 반례를 분석하여 개선된 추측을 내놓는 것 또한 학생이 하고 있다. 정 교사는 추측에 대한 반박보다 학생의 사고를 촉진하여 학생들이 추측을 반박하도록 하는 문답법을 사용하고 있다.

<행동주의(손다이크, 스키너, 가네)>

1. ③
- Gagne 인지 학습 8유형

(1) 신호학습(signal learning): 어떤 신호나 자극에 대해 무의식적인 반사적 반응을 보이는 것
(2) 자극-반응학습(stimulus-response learning): 학습자가 식별된 자극에 대하여 어떤 정확한 반응을 보이는 것
(3) 연쇄학습(Chaining): 연쇄란 이전에 학습된 자극-반응 학습 두 개(또는 그 이상)를 차례로 모두 연결시키는 것으로 거의 비교적 단순한 신체적 반응의 연쇄적 연합에 의해 일어나는 학습
(4) 언어적 연합학습: 단어나 언어로 주어지는 자극에 의해 언어적 반응이 일어남으로써 언어와 언어가 연합되어 일어나는 학습
(5) 다중식별(변별학습, multiple discrimination): 일련의 연합들 중 연합과 연합을 구분하고 각각의 연합에 따라 다르게 반응할 때 일어나는 학습
(6) 개념학습(concept learning): 서로 다른 자극에 대한 공통된 반응을 학습하는 것, 일반적으로 개념은 여러 가지 대상에서 공통된 성질을 인식함으로써 학습하는 것
(7) 원리학습(규칙학습, rule learning): 둘 이상의 개념의 연쇄를 의미
(8) 문제해결(problem solving): 이미 알고 있는 원리들을 새로운 원리들로 결합하는 과정을 의미, 이전에 배웠던 원리들을 결합하는 새로운 원리들을 생각해내는 과정

2. ②
- Gagne 과제 분석

과제 분석이란 하나의 학습과제를 구성하고 있는 많은 하위 학습요소들을 분석하고, 이를 위계적인 관계로 조직해 놓는 활동이다.

① 학생들에게 어떠한 행동(지적 또는 기능적 변화)을 육성시키게 될 것인지에 대한 목표 수립이 분명해진다.
② 학습활동을 어떠한 순서로 전개해야 효율적인지를 알 수 있다.
③ 학생들의 능력수준에 비추어 필수적으로 전개해야 하는 학습활동을 취사선택할 수 있다.
④ 학습활동의 결과 또는 숙달수준을 평가할 수 있는 준거를 마련할 수 있다.

(예) ‘직각’과 ‘빗변’을 모르게 되면 ‘직각삼각형’을 학습할 수 없고, 직각삼각형의 개념을 모르면 결국 문제해결 학습능력을 기를 수 없다.

3. ①

* 손다이크(E. L. Thorndike) 연결주의(connectionism)

1) 19세기까지의 교육 주안점
- 특정한 교과 내용에 대한 학습이 일반적인 정신능력의 도야를 가능하게 한다는 형식도야이론이 지배적이었다.
- 반복적인 연습을 통해 도야된 일반적인 정신 능력은 그 능력이 요구되는 모든 내용에 전이된다.

2) 손다이크의 학습 이론
- 형식도야 이론은 옳지 않으며 ‘동일 요소설’이 중요하다.
- 학습은 유기체에 의하여 만들어진 자극-반응 본드(bond)의 형성이며 수학은 이러한 본드들이 연결된 결과물이다.
- 모든 본드는 여러 법칙 즉, 연습의 법칙, 효과의 법칙, 준비의 법칙에 의해 시행착오를 거듭하면서 선택되어 통합되고 패턴화 되어 진다.

(예) 인수분해에서 만들어진 알고리즘은 높은 질의 본드인데 이 본드는 곱셈 공식의 활용, 두 수의 분해 등과 같은 여러 가지 본드들이 발전된 것이다.

3) 학습 법칙

① 연습의 법칙(law of exercise)(사용의 법칙, 빈도의 법칙, 반복의 법칙): 연습의 빈도(계속성)가 높을수록 자극과 반응의 결합이 강해진다.

(예) 이차방정식을 푸는 학습에서 방정식이 제시될 때마다 근의 공식을 알맞게 사용하도록 강조하는 것을 자주 하면 할수록 본드는 강하게 된다. 그리고 후에 근의 공식을 사용하는 장면이 올 때는 유창하게 근의 공식을 활용하게 된다.

② 효과의 법칙(law of effect)(만족의 법칙, 강화의 법칙): 본드를 강화하기 위해 연습을 하는 중에 학습자가 만족한 상태인가 괴로움이 따르는 상태인가에 따라 그 본드는 강화되거나 약해진다.

(예) 학교 수학에서 가장 중요한 것은 학생들의 첫 번째 학습 경험이다. 따라서 교사는 학생들이 문제를 풀었을 때 성공적으로 풀게 되어 결과에 만족할 수 있도록 칭찬과 용기를 북돋아 주어야 한다.

③ 준비의 법칙(law of readiness): 하나의 본드가 행동할 준비가 되어 있을 때 만족한 행동이 뒤따른다. 그러나 본드가 행동할 준비가 되어 있지 않을 때 행동이 만들어졌다면 괴로움이 뒤따른다.

(예) 도함수의 뜻을 배울 때 학생들이 이 개념을 배울 준비가 되어있지 않으면 학생들은 싫증을 낸다. 즉, 함수의 극한의 뜻이 무엇인가를 정확히 이해하지 못하면 도함수를 배울 수 없다. 또, 준비가 되어 있지 않은 상태에서 배웠다 해도 이후의 도함수의 여러 정리, 응용 등에서는 학습의 효과가 감소된다.

4) 수학 학습-지도 방법
- 학생들에게 계산의 부정확성은 그 구성 본드가 약함을 뜻하므로 기본적인 계산에 포함된 본드는 현재보다 더욱 강력하게 형성되어야 한다.
- 곤란, 곧 일시적 실패나 기존 본드의 부적절함이 사고와 학습에 본질적이고 필요한 자극이 된다고 보는 것은 잘못이다. 곤란은 그 자체로 아무 도움도 되지 않으며, 가끔씩이라도 경험하는 괴로운 실패의 경험은 사고와 학습을 방해한다.
- 산술학습 시 학생들이 문제의식을 갖고 산술의 필요성을 느끼며 그 진가를 인식하도록 한다. 따라서 연습 문제는 아동에게 흥미로운 실제적인 문제 상황, 산술을 실제적으로 적용하여 해결할 수 있는 생활 속에서 일어나는 문제여야 한다.
- 산술의 연역적인 설명은 귀납적인 확인으로 대치하거나 절차가 마스터된 훨씬 이후에 습관을 종합하고 이론적으로 설명하는 수단으로 학습해야 한다.
- 추론적 사고 또한 연습의 법칙으로 설명될 수 있으며 훈련을 통해 단련된다.

5) 손다이크 이론에 대한 비판
- 의미나 관련성의 이해 또는 개념·원리·법칙의 발견 및 문제해결보다는 분리된 개별적 사실의 암기를 강조하고 연습에 의한 습관화를 중시한다고 비판을 받고 있다.
- Brownell(형태심리학자)과 Moser의 연구

① 약 1300명의 초등학교 3학년 아동을 대상으로 자연수 뺄셈에 대한 ‘받아 내리는 방법’과 ‘같은 수를 더하는 방법’ 두 경우에 대하여 의미 있는 설명을 통한 수업과 기계적인 절차로 가르친 수업을 진행한 후 비교하였다.
② 결과: 6주 후
㉠ 기계적인 방법으로 지도 받은 학생들보다 의미 있는 방법으로 지도를 받은 학생들의 결과가 우수하게 나왔다.
㉡ ‘받아 내리기 방법’이 ‘같은 수를 더하는 방법’보다 높은 점수를 보였다.

<형태주의(베르타이머)>

1. ⑤

베르타이머는 전체의 구조적 특성에 합치되는 방향으로 부분의 재구조화가 일어남을 강조하였다.

*** 베르타이머 통찰을 이용한 학습**

1) 형태주의 심리학(Gestalt psychology)과 수학 학습

- 학습에 대한 인지적 접근은 1900년대 초반 베르트하이머가 시각에 관한 연구에 몰두하면서 형태주의 심리학을 제창한 것에서 그 기원을 찾아볼 수 있다.
- 형태주의 심리학은 행동을 복합적인 전체로 다루지 않고 단순한 요소들, 즉 S-R 연합의 집합으로 나누어 연구하려는 경향에 반대하면서 ‘전체는 부분의 합 이상’이라고 주장하였다.
- 형태주의 심리학에서 가장 중요한 부분은 문제를 해결할 때 ‘통찰력(insight)’을 사용한다는 것이다.
- 파이(Phi) 현상을 소개한 베르트하이머는 수학수업을 관찰하면서 의미없는(ugly) 수업의 진행방법을 비판적인 시각으로 관찰하고 통찰을 활용한 학습이 효과적임을 주장하였다.
- 형태주의 심리학은 행동주의 심리학으로 설명이 불가능한 문제해결 등의 고차적인 내용의 학습을 설명하는 것이 가능하다.

2) 베르타이머의 연구

- 파이(phi) 현상(=가현운동)

① 1912년 『형태에 관한 실험적 연구』라는 논문에서 소개한 가현운동(apparent movement)을 통해 운동지각이 종래의 요소적 입장으로는 설명될 수 없음을 실증하였다. 이 실험의 결과와 논문은 형태주의 심리학의 출발점이 되었다.

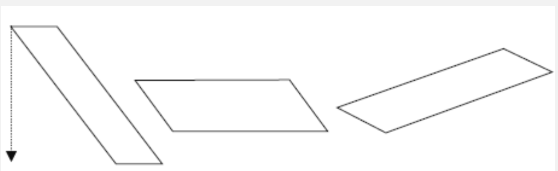
② 파이 현상(정지한 물체에서 운동에 대한 지각): 두 빛이 짧은 간격으로 어두운 방에 작은 구멍으로부터 비추면 이 운동이 한 빛으로 보인다.

실험
암실에서 a, b 두 개의 선분을 보여주고, 이 두 선분을 적당한 간격(약 0.006초)으로 보여주면 a 선분이 점선과 같은 방향으로 움직이는 것처럼 보인다.

③ 실제로 운동이 없는 데도 불구하고, 마치 운동이 있는 것처럼 보인다. 이는 운동이 요소를 초월한 전체적 성질을 가지고 있으며, 하나의 형태(Gestalt)를 이루고 있음을 의미한다.

- 『생산적 사고, 1945』에서 “The Area of Parallelogram”

일반적인 학급의 교사라면 삼각형의 높이에 대하여 윗변의 왼쪽 꼭짓점에서 밑변에 수직인 직선(수선)을 긋는 방법을 보여준다. 그 다음 넓이를 구하기 위해 수직선의 길이를 측정하여 밑변의 길이에 곱하게 한다. 이 표준적인 알고리즘을 사용하여 아동들은 많은 연습문제를 훌륭하게 계산하게 되고 교사도 학생들의 문제해결에 만족한 반응을 보인다. 그러나 다음과 같은 평행사변형을 제공하고 넓이를 구하라고 하면 교실은 혼란스러워진다.



제일 왼쪽의 평행사변형은 좀 전의 교사가 제시한 평행사변형을 거꾸로 세운 것에 불과하지만, 윗변의 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑변 밖에 존재하므로 선생님이 가르쳐준 표준적인 공식을 적용할 수 없어 학생들에게 부담을 주게 된 것이다. 학생들은 ‘이 문제는 배우지 않았습니다. 따라서 틀린 문제입니다’, ‘평행사변형의 높이×밑변의 알고리즘이 적용될 수 없습니다.’ 또는 ‘포기하겠습니다.’라는 반응을 보였다.

이와 같은 학생들의 반응은 학생들이 알고리즘의 기초가 되는 구조적인 원리를 이해하지 못한 채 의미 없는 기계적 학습을 했기 때문이다. 결국 문제해결 방법은 맹목적인 알고리즘을 이용해서가 아닌 문제의 구조에 대한 진정한 이해를 통해 얻어야 한다. …

학생들이 여러 가지 평행사변형의 넓이 구하기에 대한 접근 방법을 시도하는 중에 평행사변형의 중간 부분은 별 문제없이 꽉 채워져 있는데 반해 왼쪽 끝 부분과 오른쪽 끝 부분이 문제가 됨을 알게 된다. 그리고 왼쪽 끝 부분의 남는 부분과 오른쪽 끝 부분에 필요한 부분이 서로 같음을 알게 되고 너무 많은 부분을 잘라 모자라는 부분에 채움으로써 문제를 해결한다.

이러한 과정을 통해 학생들은 직사각형과 평행사변형이 같게 될 수 있다는 전체적인 Good Gestalt를 형성하게 되고 왜 왼쪽과 오른쪽의 끝 부분을 고려해야 하는지를 인식하게 된다.

3) 통찰을 이용한 교수·학습 방법

① 학생의 학습과정을 몇 개의 조작이나 단계에 의한 문제해결 과정의 합으로 보거나 따라 하기 식의 시행착오로 보는 것은 옳지 못하다.

② 교사는 학생들 스스로 시도할 수 있는 다양한 방법의 접근을 제시해주어야 한다.

③ 학생들은 문제해결에 필요한 전체적인 Good Gestalt를 형성하도록 스스로 노력해야 한다.

④ 교사는 학생들을 당혹스럽게 만들 수 있는 문제를 제시함으로써 인지적 갈등 상황을 유발하는 역할을 하며 학생은 인지적 갈등 상황을 해결하기 위해 여러 방면으로 고찰하면서 진정한 수학적 활동을 경험해야 한다.

2. 통찰, 생산적 사고

<Piaget>

1. ③
* Piaget 인지발달(지능발달) 4단계
[1] <u>감각운동 단계(Sensory-motor Stage)</u>
- 가시적 행동으로 나타나는 신체적 행동만을 수행한다.
① 육체적 정신적 활동을 schèmes으로 구성하기 시작한다. 즉, 출생부터 2세까지의 어린이들은 본능적으로 빨기, 쥐기, 울기 등의 schèmes을 배운다.
② 감각과 운동을 조직하는 것을 배운다.
③ 물리적 대상에게 이름을 붙이는 것을 배운다.
④ 시야에서 사라진 물체는 없어진 것이 아님을 배운다.

[2] <u>전조작 단계(Preoperational Stage)</u>
- 감각에 의존하는 행동은 벗어났으나 행동이 직관적이며 아직까지 가역적 사고가 결핍되어 있어 조작 활동이 일어나지 않는다.
① 모방을 잘하며, 모든 사물을 자기중심적으로 바라본다. 따라서 자기와 외부세계를 구분하지 못한다.
② 자기의 생각을 다른 사람들도 다 같이 가지고 있다고 믿는다.
③ 가역적으로 사고하는 것에 대해 어려움을 느끼며, 어떤 행동을 재현하는데 어려워한다. 가역적 사고를 할 수 없기 때문에 사물들 사이의 포함관계를 제대로 인식하지 못한다.
④ 귀납추론(구체에서 일반을 이끄는 추론)과 연역추론(일반에서 구체를 이끄는 추론)은 불가능하며 구체적 사실에서부터 구체적 사실로의 추론만 가능하다.

[3] <u>구체적 조작 단계(Concrete Operational Stage)</u>
- 직관적 사고를 벗어나 논리적 사고 형태인 가역적 사고와 같은 조작적 지능을 보이기 시작한다. 따라서 논리적으로 추론할 수 있는 능력을 갖추게 된다. 그러나 직접 경험할 수 있는 구체적 대상에 한정되어 있다.
① 여러 가지 특성이 있는 대상들을 구체적인 특성에 따라 집합과 부분집합으로 분류할 수 있으며, 한 대상의 여러 가지 특성을 동시에 생각할 수 있다.
② 연산과 절차를 역순으로 할 수 있다.
③ 다른 사람의 견해를 이해하기 시작하며, 이 단계의 말기에서는 구체적인 예를 통하여 귀납추론과 연역추론을 하기 시작한다.
④ 역연산, 대입, 집합의 합집합과 교집합 구하기, 구체물을 크기 순서로 배열하기 등과 같은 계산을 수행할 수 있다. 그러나 이 연산들을 언어로 설명하거나 제시할 수 없다.
⑤ 판단과 논리적 추론 능력이 부족하다.
⑥ 정의를 잘 이해하지 못하며, 몇 개의 구체적 사실로부터 일반화를 할 수 없다.
⑦ 변수를 포함한 수학적 기호 조작을 어려워하며, 대수를 의미의 이해를 통해서 보다는 공식의 암기에 의해 학습한다.

[4] <u>형식적 조작 단계(Formal Operational Stage)</u>
- 자신의 사고내용과 과정을 생각하는 것이 가능하다. 즉, 조작 자체를 반성하는 반영적 추상화가 가능하다.
- 가설-연역적 추론이 가능하다. 즉, 추상적 사고가 가능하기 때문에 어떠한 형식의 가정이나 가설도 받아들일 수 있어, 어떤 문제에 직면할 때 가설을 설정하고 결론을 유도해 낼 수 있다.
  (cf) 수학적 추론 과정으로서의 귀납추론과 유비추론 또한 형식적 조작단계에서부터 가능하다.
① 구체적인 조작에 의존하지 않고 정신적 추상을 표현하거나 설명할 수 있다.
② 자신의 활동을 객관적으로 평가할 수 있으며, 자신의 사고 과정을 반성할 수 있다.
③ 정리를 만들고, 가설을 세우고, 여러 가지 가설을 시험할 수 있다.
④ 적절한 상황에서 정의, 법칙, 공식 등을 이해하고 사용할 수 있다.
⑤ 귀납적 사고, 연역적 사고를 할 수 있다.
⑥ 순열과 조합, 명제, 상관관계, 확률 등의 복잡한 개념을 이해하고 응용할 수 있다.
⑦ 무한대(무한히 큰 수)와 무한소(무한히 작은 수)의 개념을 인식할 수 있다.

2. (a) 장면: 균형 상태 (b) 장면: 불균형 상태
- (a) 장면: 동화의 과정으로 (수학적) 확률의 정의

$$p = \frac{(\text{사건이 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어나는 모든 경우의 수})}$$

  를 문제상황에 적용한 장면으로, 학생은 인지적 균형 상태에 있다.
- (b) 장면: 학생은 자신이 구한 모든 경우의 수와 교사가 구한 경우의 수가 다름을 인식하고 조절이 필요한 인지적 불균형 상태가 된다.

* 균형이론: 새로운 사태에 당면하면 주체가 가지고 있는 schèmes과 그 사태 사이에 어떤 불일치가 포함되어 인지적 불균형 상태에 빠지게 되며, 이를 해소하기 위해 동화와 조절 기능이 작용하면서 schèmes에 변화가 일어나 새로운 schèmes이 구성되고 일시적인 인지적 균형 상태가 된다.

3.
- ‘반사와 반성’이 일어나는 상황 : ③에 판별식을 적용하여 $D=0$일 때 원과 직선이 접하며, 이때 n을 구하여 접선의 방정식을 구한 상황
- 이유: 반사의 과정으로 원과 직선의 방정식(내용)을 연립하여(활동, 조작) 얻은 ③을 내면화하고 판별식을 사고의 대상으로 인식하는 주제화를 통해 원과 직선 사이의 관계를 세 가지로 나타내었다. 반성의 과정으로 원과 접선 사이의 관계는 판별식 $D=0$일 때임을 동화하여 n을 구하고 접선의 방정식을 구하였다(평형화, 새로운 형식).

* 반영적 추상화(reflective abstraction): 인식 주체(학생)의 활동(조작, 탐구)에 대한 일반적 조정(regulation)으로부터 이루어지는 추상화
- 반영적 추상화의 메커니즘: 반사와 반성
① 반사: 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 단계로 옮겨 놓는 과정, 내면화 과정(일련의 행동을 의식하여 표상함)과 주제화 과정(이전 단계의 행동이나 조작을 사고의 대상으로 인식함)으로 구성
② 반성: 전 단계에서 이전된 것을 새로운 면에서 재구성하거나 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전 단계의 요소와 관련 짓는 과정, 동화/조절을 통해 균형화를 이루려 함
③ 반성에 의하여 구성적으로 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사과정에서 보다 세련된 내용으로 기능하여 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어진다.

* 인지기능
㉠ 동화(assimilation)
(i) 이미 학습된 지식과 기능을 이용해, 주어진 환경에 순응하는 과정이다.
(ii) 주어진 정보는 이해되기 전에 현재의 인지구조에 적절하게 조절되는 과정을 거친 다음 인지구조에 통합된다.
(iii) schèmes과 인지구조에 양적 변화를 가져다주는 원인이다.

㉡ 조절(accommodation)
(i) 동화와는 반대로 정보를 통합하기 위해 주어진 정보에 맞추어 기존의 인지구조를 구조적으로 변화시키는 과정이다. 따라서 새로운 사태에 조절한다 함은 이전의 구조가 분화해서 새로운 구조를 만들어 내는 것이다.
(ii) 일반적 구조를 특정 사례에 적용하게 된다.
(iii) schèmes이나 인지구조에 질적 변화를 일으키는 원인이자 과정이다.

4. ③

ㄱ. 조작활동이 나타나지 않았다.

ㄴ. 교사가 조작을 해주고 있다.

ㄷ. 평행사변형(내용)을 다양하게 그림으로써(조작, 행동) 평행사변형의 성질들을 찾아보게 하는 내면화 과정이 나타나고, 그 성질들을 사고의 대상으로 하는 주제화 과정이 이루어진다. 반성의 과정으로 그 성질들을 활용하여 동화와 조절을 통해 평행사변형이 되는 조건을 찾음(새로운 형식의 구성)으로써 평행사변형을 지도하므로 반영적 추상화를 통해 수학적 개념을 지도하고 있다고 판단할 수 있다.

* 수학적 지식의 획득: 반영적 추상화

① **수학적 지식 획득은 반영적 추상화의 반사와 반성에 의해서 가능하다.** 이 때, 반사된 내용은 반성에 의한 새로운 형식의 구성에 이르러 일시적으로 균형 상태가 되지만 곧바로 불균형에 빠지게 되어 보다 높은 균형을 위하여 반사와 반성이 계속 되풀이된다.

② 논리-수학적 개념은 대상으로부터의 경험적 추상화에 의한 정적인 이미지가 아니라, 생물학적 유기체의 구조를 출발점으로 하여, 감각·운동적 구조를 거쳐, 행동의 일반적 조정(regulation)으로부터 '반영적 추상화(reflection abstraction)'에 의해서 구성된 조작과 그것을 바탕으로 구성된 보다 고차원의 조작이다.

③ 수학의 역사적 발생의 메커니즘과 개인에 있어서의 수학의 심리적 발생의 메커니즘 사이에는 평행선이 있으나 그 발생의 순서는 역이다. 왜냐하면 심리적으로 최초에 구성된 것은 논리적·반성적 분석에서는 최후에 나타나기 때문이다.

(예1)

㉠ 기하의 역사적 발달순서: Euclid적 성질 → 사영적 성질 → 위상적 성질

㉡ 아동의 공간 표상 발달 순서: 위상적 성질 → 사영적 성질 → 특수한 대응관계

(예2)

㉠ 함수개념의 역사적 발달순서: 비례관계 → 변수 → 특수한 대응관계

㉡ 아동의 함수개념의 발달순서: 특수한 대응 관계 → 변수 → 비례관계

5. ③

① 구체적인 활동이 내면화, 주제화되고 반성을 통해 덧셈 알고리즘이라는 새로운 형식을 구성

② 대응시키는 활동이 내면화, 주제화되어 반성을 통해 함수의 그래프 전체로 대상화되는 반영적 추상화의 과정

③ 경험적 추상화에 가깝다. 행동(조작, 관찰, 실험, 활동 등)의 내면화와 주제화, 반성의 과정은 나타나지 않는다.

④ 다양한 삼각형(내용)에서 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질을 내면화하고, 이를 사고의 대상으로 하여 주제화가 이루어지고, 반성의 과정 즉, 동화와 조절을 통해 삼각형의 중점연결정리에 대한 가설(새로운 형식)을 설정

⑤ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌(내용)을 시계 방향과 시계 반대방향으로 각각 세어 본 후(조작), 그 결과를 내면화하여, 공깃돌을 세는 순서를 사고의 대상으로 하여(주제화), 반성의 과정, 즉 동화와 조절을 통하여 세는 순서에 관계없이 개수는 일정하다는 새로운 형식을 구성하였다.

6.

반영적 추상화

반사의 과정으로 (1), (2)를 통해 정사각형의 넓이를 내면화하고, (3)에서 이를 사고의 대상으로 하는 주제화가 이루어진다.

반성의 과정으로 탐구 결과를 등식으로 나타내어 인수분해 공식 $x^2+2x+1=(x+1)^2$이 성립함을 이끌어내었다.

<Vygotsky>

1.

비계설정이란 교사가 학생들이 과제를 수행해나가는 데 있어서 도움을 적절히 조절하여 제공하는 것을 말한다.

수업상황에서 학생은 삼각형의 중점연결정리를 삼각형 ACD에 적용할 수 있는 실제적 발달 수준에 머물러 있었다.

㉠에서 교사가 학생에게 비계설정을 해주었다. ㉡에서 학생은 교사의 도움에 힘입어 사각형 PQRS가 평행사변형임을 보일 수 있는 잠재적 발달 수준에 도달하였다.

㉢에서 교사는 학생들이 교사의 방법을 모방하여 학생들 스스로 문제를 해결하도록 발문하고 있다. 학생은 교사가 제시한 문제를 해결하면서 새로운 근접발달영역으로 나아가게 된다.

㉣에서 학생은 교사의 도움 없이 스스로 문제를 해결할 수 있는 새로운 근접발달영역의 실제적 발달 수준에 놓이게 된다. 여기서 교사의 도움은 오히려 부정적인 영향을 줄 수 있으며, 학생은 자기주도적으로 학습을 할 수 있다.

* 비고츠키 수학 학습 심리학

- 근접발달영역(ZPD, Zone of Proximal Development)

① 근접발달영역이란 실제적 발달 수준과 잠재적 발달 수준간의 간격을 의미한다.
  ㉠ <u>실제적 발달 수준(actual development level)</u>: 학생이 다른 사람의 도움 없이 독립적으로 문제를 해결할 수 있는 수준이다.
  ㉡ <u>잠재적 발달 수준(potential development level)</u>: 좀 더 지식이 풍부한 교사, 성인 또는 유능한 또래의 도움을 얻어 문제를 해결할 수 있는 수준이다.

② 학습은 사회적 상호작용을 통해서 이루어져야 하며, 좀 더 효과적인 학습을 위해서는 근접발달영역 내에서의 사회적 상호작용이 중요하다. 또한 모든 학생은 적절한 도움을 받으면 스스로 할 수 있는 것 이상을 할 수 있다.

③ 근접발달영역은 고정적인 것이 아니라 학생이 더 높은 수준의 사고와 지식을 달성함에 따라 역동적으로 변화한다. 어제의 잠재적 발달 수준이 내일의 실제적 발달 수준이 되고, 그에 따라 근접발달영역이 새로운 근접발달영역으로 나아가면서 한 단계 더 높은 수준으로 발달하게 되는 것이다.

2. 비계설정

* 비계(scaffolding) 설정을 통한 발달과 학습

- 성인과 아동, 혹은 보다 유능한 아동과 아동간의 상호작용이 아동의 발달을 선도할 수 있도록 하는 구체적인 교수방법으로 여러 연구자들은 아동의 근접발달영역에서의 비계설정을 제안하였다.
  ㉠ 사전적 의미: 건물을 건축하거나 수리할 때 인부들이 건축 재료를 운반하며 오르내릴 수 있도록 건물 주변에 세우는 장대와 두꺼운 판자로 된 발판을 세우는 것
  ㉡ 교육 분야: 학생의 근접발달영역 내에서의 효과적인 교수・학습을 위해 교사가 학생과의 상호작용 중 도움을 적절히 조절하여 제공하는 것

3. 형식적 고착, 비계설정(실제적/잠재적 발달수준)

형식적 고착(개인화/배경화의 측면을 간과하고 수학적 지식의 형식만을 연습시키는 것.)

(가)에서 교사는 다항식 곱셈 공식을 제시하여 예를 들어 설명하고, 곧바로 공식을 이용하여 학생들이 문제를 해결하도록 하였다. 이는 공식의 의미보다는 공식의 형식적 연습만을 강조하여 형식적 고착이 나타날 수 있다.

(비계설정이란 학생의 근접발달영역 내에서의 효과적인 교수・학습을 위해 교사가 학생과의 상호작용 중 도움을 적절히 조절하여 제공하는 것이다.)

학생의 실제적 발달 수준 ㉠이며, 잠재적 발달 수준 ㉡이다. 교사는 학생이 $(a+b)^3$을 두 다항식의 곱으로 나타내어 다항식의 곱을 생각해 보게 하는 도움을 제공, 즉 비계설정을 활용하였고, 이를 통해 ㉠에서 ㉡으로 수준상승이 나타났다.

* 달프와 갤리모어(Tharp & Gallomore)의 인지발달과정

① 1단계: 더 유능한 타인의 도움을 받아 과제를 수행

학생이 독립적으로 과제를 수행할 수 없기 때문에 좀 더 능력 있는 교사나 동료의 도움을 받아 모방하는 단계이다. 교사는 학생이 과제를 수행하도록 안내하고 도움을 제공하거나, 전이를 위한 새로운 기회를 제공하며 학생이 과제 수행의 책임을 갖도록 한다.

② 2단계: 학생 스스로 과제를 수행

다른 중재자의 도움을 받지 않거나 적은 도움으로 과제를 수행할 수 있게 된다. 하지만 아직 학생 스스로 과제를 수행하는 것이 자동화 또는 내면화될 정도로 완전히 발달되지는 않는다.

③ 3단계: 과제수행이 완전히 발달되어 내면화, 자동화

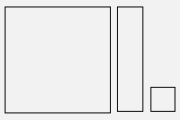
학생은 근접발달영역을 벗어나 과제를 수행하게 되며, 더 이상 다른 중재자로부터 도움을 받지 않고 거의 무의식적으로 과제를 완전하게 수행해 낸다. 이때 다른 중재자의 도움은 오히려 부정적 영향을 줄 수 있다.

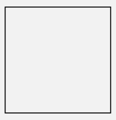
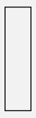
④ 4단계: 수행이 탈-자동화되어 다음 근접발달영역으로 복귀

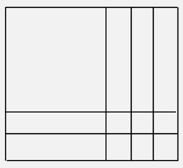
새로운 능력을 발달시키기 위해서는 계속적인 근접발달영역 계열의 순환 과정을 거쳐야 한다. 학생이 과제해결을 수행하다 어려움이 생기면 더 능력 있는 다른 사람의 도움을 필요로 하게 되어 다시 1단계에 놓이게 된다.

<Bruner>

1.

나무판  을 충분히 제시한다.

 $x \times x$ 1개,  $1 \times x$ 5개, 1×1 6개를 활용하여

 와 같이 직사각형꼴로 나타내어 보고,

'$1 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 6 \cdot 1 = (x+3)(x+2)$' 임을 발견하게 한다.

2.

- 세 가지 표현: 활동적 표현, 영상적 표현, 상징적 표현
- 과정

* 활동적 표현: 삼각형 모양의 종이의 각 꼭짓점을 기준으로 이웃하는 두 변이 맞닿도록 접는다. 접힌 부분의 세 선분이 한 점에서 만남을 확인한다.
* 영상적 표현: 활동적 표현에서 경험한 학습 내용을 종이 위에 그려보고 삼각형의 접힌 세 선분이 한 점에서 만남을 표현한다.
* 상징적 표현: 영상적 표현에서 그림으로 나타낸 것을 수학적 기호를 사용하여 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만남을 표현한다.

* Bruner, EIS 이론

지능의 발달은 활동적 표현(Enactive representation), 영상적(Iconic) 표현, 상징적(Symbolic) 표현의 순서로 표현 수단의 증대와 그 사이의 조정 능력의 증대로 본다.

개인에 의한 자주적인 지식의 형성보다 교육적 전달이 중요하며, 그 전달 수단인 언어의 역할이 중요하다.

- E(enactive representation): 활동적 표현

① 구체적인 자료를 직접 다루는 것으로 만지고 조작하고, 실행하는 것
② 초등학교 단계인 구체적 조작단계까지 인지발달에서 행동은 결정적 역할을 하며 구체적 대상과 결부된 행동이 내면화된 구체적 조작이 구성되게 된다. 따라서 초등학교는 활동적 표현이 필수적이다.

- I(iconic representation): 영상적 표현

① 대상의 이미지를 다루는 것으로 시각적 정보, 그림, 화면 등으로 표현하는 것
② 도형을 나타내는 그림, Venn 다이어그램, 통계적 그래프, 함수의 그래프, 대응도, 수형도, flow chart, 여러 가지 도해 등과 같은 그림 표현은 관련된 요소의 공간적인 동시적 표현이 가능하여 사고를 요약해주고 문제해결 과정에서 매우 중요한 수학적 사고 수단이 된다.

- S(symbolic representation): 상징적 표현

① 기호를 엄격하게 다루는 것으로 언어나 기호 등으로 표현하는 것
② 상징적 표현은 수학에서 최종 단계의 개념 표현 방식이다.
③ 지극히 추상화되어 있고 의미가 함축되어 있으므로 상징적 표현을 이해하는 일은 학생들의 개인차에 의해 결정된다.

3. 브루너 EIS 이론, 메타인지이동

학생이 교구를 이용한 활동을 하면서 교구에 대한 충분한 친밀감을 가지고, 세 종류의 교구를 사용하여 직사각형을 구성하고, 칠판에 그리는 수업 장면을 근거로 들 수 있다. 브루너의 EIS이론에 근거할 때 인수분해 공식을 각각 활동적 표현과 영상적 표현으로 나타낸 것이다.

메타인지이동. 나무로 된 교구를 이용하여 인수분해 공식의 원리를 발견하게 하려는 교수학적 의도 보다는 교구 자체를 활용한 활동에 학생들의 사고가 집중되고 있다.

* 지식의 구조(Bruner)

① 각 학문의 기저를 이루고 있는 핵심적인 개념과 원리
② 어떤 영역의 구조든 표현양식(mode of representation), 경제성(economy), 생성력(power)이라는 세 가지 방법으로 최적구조가 결정된다.

- 표현양식: 표현양식들은 피아제의 인지발달단계를 거치면서 발달한다.
- 경제성: 많은 정보를 가지고 있을수록 정보를 처리하는 데 더 많은 단계를 거쳐야 하며 더욱 비경제적이다. 상징적 표현을 활용하는 것이 가장 경제성이 크다.
- 생성력: 특정한 학습자를 위하여 어떤 영역의 지식을 구조화하는 특정한 방식의 효력을 의미한다.

- 지식의 구조를 가르치는 이유와 방법

① 이유: 수학교육의 목적인 '수학적 안목의 형성'을 위해서이다. 교육에서 다루어야 하는 것은 '수학에 대한 것'이 아니라 '수학 그 자체'이고, 수학자들이 하는 일을 학생들이 경험해야 하며, 이를 통해 학생들에게 수학자들이 수학을 통하여 현상을 바라보는 안목을 길러 주어야 한다.
② 방법: 지식의 구조는 아동이 갖고 있는 사고 양식과 아동이 이해할 수 있는 표현 수단에 대응되는 적절한 형태로 전달될 수 있으며, 지식의 구조에 대한 발견을 통하여 궁극적으로 수학적인 안목이 형성된다.

4.

<탐구활동 2>에서 원기둥의 부피와 원뿔의 부피 사이의 관계를 파악하고,
<탐구활동 3>에서 원뿔의 부피와 구의 부피 사이의 관계를 파악한다.
이미 알고 있는 원기둥의 부피로부터 구의 부피 공식을 발견한다.
영상적 표현, 상징적 표현.
구의 부피는 원뿔의 부피의 2배임을 도식으로 나타낸다.
$V_3 = 2V_2$.

<Ausubel>

1.
- 원리: 점진적 분화의 원리
- 해석

일반적인 다항식의 곱셈 공식 ①을 지도한다.
①의 특수한 경우인 완전제곱식 ②를 지도한다.
②의 특수한 경우 $a=100$, $b=1$인 ③을 지도한다.

* 오수벨, 유의미 수용학습

학습은 새로운 지식을 기존의 인지구조와 의미 있게 연결 짓는 과정이며 기존의 인지구조 상에 새로운 아이디어를 포섭하는 인지구조의 변화과정이다.

㉠ 인지구조: 학습자 내부에 위계적으로 조직된 사실・개념・원리의 구성체, 가장 포괄적인 개념이 상위에 있고 아래로 갈수록 특수한 개념이 존재하는 구조

㉡ 포섭(subsumption): 새로운 명제나 아이디어가 학습자의 지적수준에 이미 존재하는 포괄적인 인지구조 속으로 동화 또는 일반화되는 과정

- 점진적 분화(progressive differentiation)의 원리

학습할 새로운 개념이나 원리를 포함하는 가장 포괄적이고 일반적이며 설명력 있는 통합 개념과 원리를 먼저 제시하고 점차로 특수화되고 세분화되는 방안으로 교수・학습 지도를 조직화해야 한다.

- 통합적 조정(integrative reconciliation)의 원리

새로운 학습내용과 이미 학습한 내용 사이의 유사성과 차이점을 분명하게 하여 새로운 학습내용이 인지구조 내에서 의식적으로 조정되고 명확히 분별되어 통합되어야 한다.

- 선행조직자(advance organizer)의 활용

학습을 촉진하기 위하여 학습 이전에 의도적으로 도입시키는 포섭자로서, 수업의 도입 단계에서 주어지는 언어적 설명이다.

* 선행조직자의 역할

㉠ 학습자의 인지구조 내의 적절한 정착 아이디어를 동원하게 하여 새로운 학습 자료에 잠재적 의미를 부여한다.

㉡ 학습될 내용을 기존의 유사한 개념과 통합하고 조정하며 분별력과 기억력을 높여주는 역할을 한다.

2. ④

ㄱ. n각형의 내각의 합을 먼저 지도한 후 삼각형, 사각형, 오각형 등의 내각의 합을 구해보게 해야 한다.

ㄴ. 독립변수 x와 종속변수 $f(x)$의 관계가 합성함수의 일반적인 개념이나 원리라고 보기 어렵다.

ㄷ. 통합적 조정의 원리에 가깝다.

ㄹ. 일반적인 이항연산에서의 역원 개념을 지도하고 특수한 경우인 복소수의 곱셈 역원을 지도한 것은 점진적 분화의 원리를 고려한 지도 방법이다.

3. 관련정착 아이디어, 통합조정의 원리

<van Hiele>

1. ②

2.

- 1단계(영상) : 도형을 그 구성 요소에 대한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 인식하는 수준이다. 도형의 성질을 인식하기 힘들다.
- 2단계(분석) : 관찰과 실험 등을 통하여 구성 요소와 성질을 비형식적인 분석할 수 있는 수준이다. 도형의 성질들 사이의 관계성을 인식하지는 못하고 명확하게 수학적 정의를 이해하지도 못한다.
- 3단계(비형식적 연역) : 이론적 정리 수준으로서 도형의 여러 가지 성질을 서로 관련시키고 이로부터 다른 성질을 국소적으로 연역해낸다. 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이고 이때는 도형의 정의를 비로소 명확히 알 수 있고 도형을 분류할 수도 있다. 즉 도형에서 기하학적인 계통성을 이해할 수 있다. 그러나 이 단계에서는 연역적인 체계나 공리의 역할 등은 인식하기 힘들다.
- 4단계(형식적 연역) : 연역적 추론 수준으로서 공리적인 체계 내에서 정리를 만들어가는 방법으로서의 연역의 의미를 이해할 수 있다. 무정의 용어, 공리, 공준, 정리, 증명의 역할을 이해할 수 있다. 기하학적 논증을 할 수 있으며, 필요 충분 조건이나 다양한 증명 방법이 존재할 수 있으며, 명제와 그 역명제 사이의 관계성을 인식할 수 있다.

[우리 나라 논증 기하 교육의 문제점]

우리나라의 기하교육에서 기하의 학습내용과 실제 학생의 수준의 차가 심하고 그 기반이 미약하다. 실제로 논증기하를 다루는 중학교 학생의 경우 그 기반인 세 번째 단계가 미약하고 그에 따라 논증기하의 학습내용을 학습목표에 맞게 이루어 내기가 힘들다. 따라서 제7차 수학과 교육과정에서는 논증기하의 수준을 조금 약화시키고 있다.

또한 학생들이 논증기하학습에 어려움이 극복되도록 다양한 학습-지도 방법이 개발되어야 하고 그러한 노력으로 공간적 시각화 능력의 향상을 위해서 노력하고 있기도 하나 아직 미약하다.

3.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
학습심리	6	40	적용	장경윤
출제 내용 관련자료	신현성. 『수학교육론』 (경문사)			

(1) 반힐레 수준에서 정의를 올바르게 사용할 수 있는 수준은 세 번째 수준인 "수준3(또는 3수준)"이다.

(2)

반힐레 수준 2의 사고 특징:

- "분석적인(analytic)" 수준이다.
- 도형의 요소(점, 선, 대각선 등)에 주목하여 도형의 성질을 인식할 수 있게 된다. 예를 들면, '직사각형의 대각선은 서로 길이가 같다'는 사실을 인식하는 것이다.
- 도형의 정의는 말할 수 있으나 도형의 정의를 바르게 사용하지 못한다. 예를 들면 직사각형이 평행사변형이라는 사실은 이해하지 못한다.

반힐레 수준 3의 사고 특징:

- "순서적 order(또는 관계적 relational)" 수준이라고도 부른다.
- 정의를 바르게 사용할 수 있기 때문에 도형 사이의 포함관계를 바르게 이해한다. 즉, 직사각형이 평행사변형임을 안다.
- 비형식적인 (연역)추론이 가능하다.

수준 2에서 수준 3으로 이행하도록 하는 **효과적인 교수활동**:

- 어떤 도형의 예인 것과 아닌 것을 구별하기.
- 분류하기(sorting)
  예: 여러 사각형 중에서 평행사변형을 모두 찾아내기,
  여러 평행사변형 중에서 마름모를 모두 찾아내기.

*** 채점기준**

(1) 정의를 올바로 사용할 수 있는 반힐레 수준(2점)

- 2점: 수준3(또는 3수준)을 명시한 경우.
- 0점: 기타

(2) 수준2와 수준3에서의 사고의 특징과 사고 이행을 위한 교수 활동(3점)

① 수준2의 사고의 특징(모범답안 참조) 2가지 이상.

② 수준3의 사고의 특징(모범답안 참조) 2가지 이상.

③ 효과적인 교수활동 1가지 이상.

- 4점: 수준2와 수준3의 사고의 특징을 각각 2가지 이상 바르게 기술하고, 효과적인 교수활동을 제시된 2가지(예인 것과 아닌 것을 구별하기, 도형 분류하기(sorting)) 중 1가지 이상 제시한 경우.
- 3점: 수준2와 수준3의 사고의 특징을 각각 2가지 이상 바르게 기술하였으나 효과적인 교수활동을 바르게 제시하지 않은 경우, 또는 수준2와 수준3의 사고의 특징 중 어느 하나를 1가지만 제시하고, 효과적인 교수활동을 제시된 2가지 중 1가지 이상 바르게 제시한 경우. (①, ② 중 하나만 특징이 2가지를 기술하지 못한 경우)
- 2점: 수준2와 수준3의 사고의 특징을 각각 1가지씩 바르게 기술하고, 효과적인 교수활동을 제시된 2가지(예인 것과 아닌 것을 구별하기, 도형 분류하기(sorting)) 중 1가지 이상 제시한 경우.
- 수준2와 수준3의 사고의 특징을 부분적으로 옳게 제시한 경우. (교수활동 제시와 무관하게 1점)
- 0점: 기타

4. ③

- 기하 학습 수준 이론

① 네덜란드의 Lycée 중학교에서 수학을 가르치던 부부 수학교사 P. M. van Hiele와 그 부인 D. van Hiele-Geldof는 H. Freudenthal의 연구에 동참하면서 1957년 Utrecht 대학에 두 편의 학위논문을 제출하였고 이들 논문을 골격으로 P. M. van Hiele가 발전시켰다.

② 1960년대 초에 구소련의 수학교육학자와 심리학자들의 집중적인 연구와 실험에 의해 타당성이 확인되었으며 기하교육과정 개발에 적용되어 성공적인 결과를 가져왔다.

(1) 제1수준(visualization): 시각화 수준

기본적인 도형을 그 구성요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다.

(2) 제2수준(analysis): 분석 수준

도형이 연구의 대상이 되고 도형의 구성요소와 성질이 고찰의 방법이 되어 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다.

(1) 제3수준(informal deduction): 비형식적 연역 수준

도형의 성질과 도형사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다.

(3) 제4수준(formal deduction): 형식적 연역 수준

명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하고 전체기하(Euclid 기하)의 연역체계를 파악한다. 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지는 못한다.

(4) 제5수준(rigor): 엄밀화 수준

제4수준의 논리가 고찰의 대상이 되고, 추상화(적용)가 고찰의 방법이 되는 단계

① 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고, Hilbert 류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다.

② 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리체계의 성질을 이해한다.

5. ③

ㄱ. 교사가 제공한 과제를 학생들이 수행하므로 안내된 탐구 단계이다.

ㄴ. 해당 분야의 구조 즉, 규칙성 $a^2+b^2=c^2$을 식으로 표현하므로 발전/명료화 단계이다.

ㄷ. 다양한 해결 방법이 아니라 다양한 접근방법이다. 새로운 관련성을 찾고 있지도 않다. 보다 더 복잡한 과제라 판단하기에도 거리가 멀다.

• 기하 수준에 근거한 다섯 가지 교수·학습 단계

① <u>1단계 질의 안내 단계(Inquiry/Information)</u>: 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습주제를 파악하게 된다.

㉠ 교사와 학생들이 학습 목표를 확인하는 단계이다.

(예) 마름모는 무엇인가? 정사각형은? 평행사변형은? 어떻게 그들은 같은가? 정사각형은 마름모가 된다고 생각하는가?

② <u>2단계 안내된(제한된) 탐구단계(Directed Orientation)</u>: 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 주제를 탐구하면서 그 진행방향을 감지하고 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.

㉠ 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동 자료를 보며, 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구한다.

㉡ 교사는 제시하는 자료를 학생들의 수준에 따라 자료를 다르게 제시한다.

(예) 모눈종이를 주면서 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 4개의 각이 같은 마름모를 그리게 한다.

③ <u>3단계 명료화 단계(Explication)</u>: 학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.

㉠ 학생들은 전 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대하여 토론한다.

㉡ 교사는 학생의 토론하는 활동만 지켜보고 어떤 설명도 하지 않는다.

(예) 모눈종이의 마름모의 활용에서 학생들은 자기가 한 활동에서 어떤 도형과 그 도형이 가지는 성질을 토론한다.

④ <u>4단계 자유로운 탐구 단계(Free Orientation)</u>: 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

㉠ 이전 단계보다 복잡한 과제가 제시된다.

㉡ 많은 사고 단계가 들어 있는 과제를 제시하고, 자신이 배운 지식을 종합적으로 적용해보게 된다.

⑤ <u>5단계 통합 단계(Integration)</u>: 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.

㉠ 교사는 학생들 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하게 한다.

㉡ 5단계가 끝나면 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

(예) 마름모의 성질이 학생들에 의하여 종합된다.

6. ③

• 기하학적 사고 수준 이론의 다섯 가지 핵심 특성

① 연속성(Sequence): 학생들이 수학 학습에서 $n-1$ 수준을 통과하지 않고 n 수준에 도달할 수 없으며 수학적 사고는 모든 수준이 순서적으로 발달한다.

② 촉진성(Advancement): 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지는 않으며 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도에 의해 지연될 수도 있다.

③ 인접성(Adjacency): 앞 수준의 사고에서 내적이었던 것이 그 다음 수준에 의식화되어 명확히 인식된다. 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다. 그리고 어느 한 수준에서 경험을 정리하는 ‘수단’이 새로운 학습의 ‘대상’으로 의식되어 그것을 조직화하려는 활동이 점진적으로 이루어지면서부터 그 다음 상위 수준으로의 도약을 하게 되는 과정을 반복하게 된다.

④ 언어성(Linguistics): 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 언어 그리고 그를 연결하는 관계망(Network of Relation)을 갖는다.

⑤ 분리성(Separation): 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다. 수학교육의 주요문제는 서로 다른 수준에서 추리하는 교사와 학생이 서로를 이해하지 못하는 데에서 비롯되므로 학생들의 사고수준을 파악하여 그에 따른 사고교육을 해야 한다.

7. ④

(가) 안내된 탐구 ②

(나) 발전/명료화 ③

(다) 질의/안내 ①

(라) 통합 ⑤

(마) 자유탐구 ④

8. ①

ㄱ. 피타고라스 정리(수학적 아이디어)를 1, 2단계의 구체적 조작과 각 단계들에 대한 탐구활동을 통하여 정당화할 수 있다.

ㄴ. 관찰이나 실험을 통해 피타고라스 정리가 성립함을 정당화하는 활동이므로 비형식적인 증명이 나타난다. 그러므로 관계적/추상적 인식 수준에 가깝다.

ㄷ. 2009 개정 교육과정에서 증명을 정당화 수준으로 약화시켰으며, 학생의 수준에 따라 적절한 정당화 방법을 교사가 선택적으로 적용할 수 있다.

9. (가), (다), (나), (라), (마) / 통합

(가) 질의/안내 ①

(나) 발전/명료화 ③

(다) 안내된 탐구 ②

(라) 자유탐구 ④

(마) 통합 ⑤

<Skemp>

1. ④

㉠, ㉡ 스켐프의 스키마 학습 이론은 동화·조절 기능에 의한 schème의 재구성으로서의 피아제의 학습개념을 바탕으로 한다.

㉢ 스켐프는 개념을 공통 성질에 대한 상징적 표현으로 규정하면서 개념을 형성하는 대표적인 조작으로 추상화와 분류를 들고 있다. 추상화는 공통 성질을 의식하는 활동이고 분류는 이러한 공통 성질에 근거하여 경험들을 모으는 활동을 의미한다.

개념들 간의 수직적 관련성은 개념들 간의 계통성을 일컫는다. 스켐프가 주장한 학습의 준비성과 연결되며 학습의 준비성은 추상화된 상위 개념의 학습은 하위 개념의 형성을 토대로 함을 의미한다. 스켐프에 의하면 개념학습에서 생기는 어려움은 새로운 개념 학습에 필요한 하위 개념이 충분히 형성되지 않은 데서 비롯된다고 한다.

* Skemp, 지능 학습과 스키마 학습

(1) 지능 학습(intelligent learning)

㉠ 지능은 '유용한 정신적 능력의 집합체'이다.

㉡ 지능 학습은 오래 기억할 수 있으며, 적응력이 높고 학습자와 교사와의 관계가 독립적이며 이해의 획득에 보상이 이루어져 자신감을 가지고 이해의 폭을 넓히게 된다는 특징이 있다.

- 지시체계: 다양한 환경 속에서 자신이 선택한 목표를 달성하기 위한 활동을 가능하게 해주는 물리적 또는 정신적 도구로 다음 4가지 요소로 구성된다.

㉠ 감지기(sensor): 사물의 현 상태를 감지하는 부분

㉡ 비교기(comparator): 조작의 현 상태와 목표상태 사이의 차가 표현되는 부분

㉢ 계획: 비교자가 주는 정보에 따라 주체가 목표상태에 있을 때와 있지 않을 때 무엇을 할 것인지 결정하는 계획을 세우는 부분

㉣ 실행: 계획에 따라 실행하는 부분

- 지시체계는 피 작동자의 현 상태와 목표 상태 사이를 비교하여 현 상태가 목표 상태에 일치할 때까지 그 간격을 좁히기 위한 계획된 행동을 결합하게 된다.

㉠ 델타-1: 외부(물리적) 환경으로부터 정보를 수용하여 실제적인 대상에 대하여 행동하게 하는 지시체계

㉡ 델타-2: 델타-1에서의 지시체계가 경제적이고 적응력을 갖고 적용하도록 지식구조(스키마)를 이루는 지시체계

- 지능학습

먼저 목표가 설정되고 그 목표를 달성하기 위해 지시체계가 작동하여 정보를 수집하고 계획을 세운 다음, 보다 효율적인 정보를 채택하고 효과적인 계획을 세울 수 있도록 지시체계를 변화시키는 과정이다.

(2) 스키마 학습(schematic learning)

- 스키마(schemas)

㉠ 피아제의 쉠(schèmes)과 같이 인간의 행동이나 사고를 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지구조이다.

㉡ 서로 관련 있는 개념들의 구조를 말하여, 적응 곧, 동화·조절 기능과 조직기능을 갖고 재조직되어 가는 것이다.

- 스키마 학습

① 기존의 스키마를 새로운 지식 획득을 위한 수단으로 사용하는 학습이다.

② 수학교육의 목표는 관계적 이해가 가능하게 하는 것이며 이는 곧, 관계망을 형성하는 것이다.

③ 새로운 개념을 지도할 때 동화나 조절이 잘 이루어지도록 기존의 스키마를 잘 활용하는 것은 '관계적 이해'를 가능하게 하는 것이다. 어떤 개념을 이해하려면 관계망의 형성을 필요로 하고 이것이 이해 활동이다.

④ 스키마 학습을 위해 첫째, 아동의 마음 가운데 적절한 예비 schema가 존재하는 '학습의 준비성'과 둘째, 자료에 대한 적절한 배열에 대한 '자료 제시'가 반드시 준비되어야 한다.

⑤ 스키마 학습에서 기존 스키마가 잘못 형성되어 있는 경우 관련된 스키마를 형성하는 과정에서 잘못된 스키마를 형성할 가능성이 높아질 수 있다.

2.

(1) A, 반영적 지능(반성적 지능 체계)

(2) (가) 수학문제(외부에서 얻은 자료)

(다) 학생의 문제해결 과정(감각기관을 통해 인식한 자료)

* Skemp, 지능: 반영적 지능과 직관적 지능

① 반영적 지능: 수학 학습을 할 수 있는 능력

㉠ 개념이나 개념 사이의 관계를 인식하는 능력으로, 중재 사고 활동이 자기 반성적 인식의 대상이 된다. 의식의 대상은 델타1 내에 있고 의식은 델타2에 집중된다.

㉡ 자신이 알고 있는 개념과 스키마를 인식

㉢ 내면적 활동을 통제하는 능력

② 직관적 지능: 실제적인 산술만을 하는 능력

㉠ 지각된 실제적 대상 사이의 관계나 아동 자신의 행동 사이의 관계를 인식하는 능력으로, 외부에서 얻은 자료를 수용기를 통하여 인식하고 자료는 개념 구조에 의해 자동적으로 분류되고 다른 자료와 연결된다.

㉡ 물리적 환경 내에 있는 대상을 인식하고 지각된 실제적 대상 사이의 관계를 인식

㉢ 아동 자신의 행동사이의 관계를 인식

(예) 아동이 때때로 산수 문제에서 바른 해답을 찾을 수가 있음에도 불구하고, 그 해결 방법의 논리적 기술 혹은 이유의 설명을 할 수 없는 것은 산술이 반영적 지능에 의한 것이 아니고, 직관적 지능에 의한 것이기 때문이다.

- 직관적 지능에 의한 사고와 반영적 지능에 의한 사고를 구분하여 설명하고 있으나 두 지능은 서로 보완적인 역할을 한다. 직관적 지능에 의한 사고는 즉각적인 일반화를 위해 필요하며 반영적 지능에 의한 사고는 법칙을 이끌어내는 활동을 위해 필요하다.

3.

(1) 도구적 이해의 장점

① 어느 누구나 즉시 쉽게 이해되므로 훨씬 빠르게 목표를 달성할 수 있다.

② 보상이 곧바로 분명히 확인되므로 수학에 대한 자신감을 회복하는 데 유리하다.

③ 지식이 덜 포함되어 있어 즉각적인 일반화나 문제해결이 가능하다.

(2) 관계적 이해의 장점

① 새로운 과제에 더 잘 적응된다.

② 기억이 더 잘 되며, 오래 지속된다.

③ 교육의 목적 그 자체이다. 즉, 도구적 이해를 지도하는 과정에서 유발될 수 있는 외적인 보상과 벌에 대한 요구가 크게 줄어들고 동기 부여가 더욱 쉬워진다.

④ 질적으로 유기적이다. 지식은 관련된 지식끼리 관계를 맺으면서 성장하며 새로운 지식이 지속적으로 파생된다. 더불어 새로운 지식에 대한 만족감을 얻게 되어 새로운 자료를 더욱 관계적으로 이해하려 노력할 뿐 아니라 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하려는 자세를 갖게 된다.

* Skemp, 수학적 개념의 이해

(1) 도구적 이해(instrumental understanding)

적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 그것을 문제해결에 적용할 수 있다.

(2) 관계적 이해(relational understanding)

무엇을 해야 하는지 그리고 왜 그런지를 알고, 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 이끌어낼 수 있다.

4.
- 학생 A의 설명 : 왼쪽에 있는 7을 오른쪽으로 옮기면 $3x=19-7$이다.
- 학생 B의 설명 : 등식의 양변에 같은 것을 더하거나 빼도 등식은 성립하기 때문에 양변에 7을 빼면 $3x=19-7$이다.

5. ①

초등학교 때 그렇게 배운 것으로 기억하고 있다는 점에서 평행사변형의 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다는 규칙을 기억하고 있다. 그러나 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 있으므로 도구적 이해와 관련이 깊다.

6. ④

ㄱ. 앞면과 뒷면이 일어날 가능성이 같은 공정한 동전에 대하여 $a=b$이다. 답지 반응률에 근거할 때, 학생들은 선행 사건의 결과가 후행 사건에 영향을 준다고 생각하는 경향이 있다고 볼 수 있다. 따라서 사건의 독립성에 대한 이해가 부족한 경향이 있다고 판단할 수 있다.

ㄴ. 곡선의 한 점에서 미분계수는 그 점에 접하는 직선의 기울기라는 기하학적 의미를 갖는다. 답지 반응률에 근거할 때, 학생들은 미분계수의 기하학적 의미에 대한 이해가 부족하다고 판단할 수 있다.

ㄷ. 답지 반응률에 근거할 때 학생들은 정적분에 대한 규칙을 적당히 기억하고 있으나, 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 있음을 알 수 있다. 따라서 스켐프의 관점에서 학생들은 정적분에 대한 도구적 이해에 머물러 있다고 보는 것이 적절하다.

7. ②

관계적 이해를 했을 때의 기억의 지속력이 더 강하다.

8.

직각 XOY의 삼등분선이 작도되었다고 가정하고 이로부터 필요한 도형은 직각을 삼등분하는 두 반직선 위의 두 점이라는 명제를 찾고 다시 이로부터 [그림 2]와 같이 두 삼각형이 정삼각형이 되도록 하는 두 점을 작도하면 된다는 것을 찾은 장면에서 분석법이 사용되었다.

도구적 이해의 관점에서 즉각적인 일반화가 가능해진다는 점, 관계적 이해의 관점에서 작도 방법이라는 수학적 법칙을 도출한다는 점에서 각각 수학교육적 의의가 있다.

(다른 설명)

작도 문제 해결 교육에서 분석법을 이용할 때 도구적 이해의 관점에서는 작도 절차를 암기하고 이를 그대로 적용하여 작도를 할 수 있으며, 관계적 이해의 관점에서는 작도 과정에서 무엇을 해야 하는지 그리고 왜 그런지를 파악할 수 있다는 의의가 있다.

<Dienes>

1. ②

(i) 자유놀이 단계: $f(x)$에 x값을 넣어보고 계산

(ii) 게임 단계: 함숫값 사이의 규칙성이 있음을 착안

(iii) 공통성 탐구 단계: 여러 함숫값의 공통 구조를 파악

(iv) 표현 단계: x가 1증가하면 함숫값은 2감소한다.

(v) 기호화 단계: $f(x) = -2x+10$

(vi) 형식화 단계: 일차함수의 성질 등을 파악

- Dienes, 교수・학습 과정 6단계

[1단계] 자유놀이

구체적인 소재를 처음으로 자유롭게 대하는 시기이다.

[2단계] 게임

아동이 주어진 상황 가운데 어떤 규칙성이 있다는 것을 착안하게 되는 시기이다.

[3단계] 공통성 탐구

여러 게임에서 발견되는 공통적인 구조를 파악하는 시기이다.

[4단계] 표현

① 아동이 추상화 과정을 통하여 파악한 개념의 공통성을 스스로 인식할 수 있는 적절한 방법으로 표현하는 시기이다.

② 이때 사용하는 표현 방법은 간단한 그림의 형태나 언어적인 방법, 전형적이거나 포괄적인 예 등 다양한 방법이 가능하다.

[5단계] 기호화

아동이 자신만의 적절한 수단으로 표현한 개념을 수학적인 기호를 이용하여 표현하는 시기이다.

[6단계] 형식화

아동이 추상한 개념의 수학적인 구조를 파악하고 이 개념이 갖고 있는 여러 성질을 체계화한다.

2.

[구성주의의 핵심사항]

구성주의는 모든 지식이 인식의 주체인 학생의 내면 세계에서 교사의 안내에 의한 자주적으로 구성되어지는 것이라는 견해로서 수학교육은 수학 교수-학습의 과정에서 구체적인 조작 활동을 통하여 학생 개개인이 가능한 한 스스로 지식을 구성할 수 있게 하는 것이다. 교사중심적 전통적인 수학교육에서 벗어나 학생 중심적인 수학교육으로서 수학지식은 교사의 도움을 받아 학생 스스로 구성하는 것이다.

교사는 적절한 환경을 구축하도록 해야 하고 학생 개개인의 사고 과정을 분석하여 학생 스스로 자신의 사고 과정에서 발생하는 오류를 반성할 수 있도록 해야 한다.

교사는 수학에 대한 학생의 이해가 어떻게 이루어지는지 그 모델을 구축해 보아야 하고 교수-학습은 본래가 상호작용적이므로 학생들의 교과 내용에 대한 지식을 고려하면서 학생들과의 상호작용을 통하여 학생이 수학적 아이디어를 구성하게 해야 한다. 궁극적으로 학생들이 스스로 자기 자신에 대한 지식구성의 타당성을 결정하도록 도와야 한다.

[Dienes의 수학적 다양성의 원리 및 지각적 다양성의 원리]

- 수학적 다양성의 원리: 수학적 개념을 지도할 때 개념의 정의와 관련이 없는 비본질적인 수학적 변수들을 다양하게 변화시키는 경험을 하도록 하는 것을 말한다.
- 지각적 다양성의 원리: 수학적 개념 형성에 있어서 그 개념을 가능한 한 다양한 구체물을 통해서 제시하여 학습자들에게 먼저 직관적 이해를 유도하는 경험 활동이 이루어져야 한다는 것을 의미한다.

3.

하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
수학교육(수학학습심리학)	6	30	수학교육학 개론 (김응태 외) p. 143

수학적 다양성의 원리란 개념을 지도할 때 개념의 정의와 관련이 없는 비본질적인 수학적 변수 (또는 요소)들을 다양하게 변화시키는 경험을 하도록 하는 것을 말한다. (이는 개념의 정의에 관련이 없는 요소들을 분리해낼 수 있게 하는 것이다.)

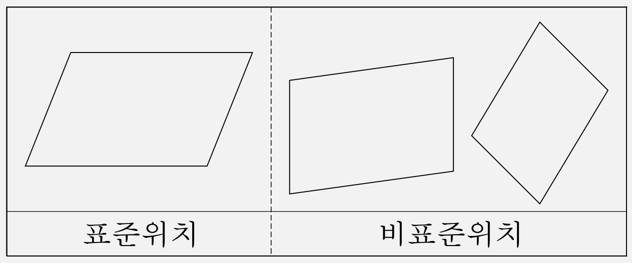
"두 쌍의 대변이 평행한 사각형"을 평행사변형의 정의로 택하면 본질적인 변수(또는 요소)는 대변의 평행성이다. 그러므로 변의 길이, 각의 크기, 위치 등이 평행사변형의 정의와 관련이 없는 비본질적인 요소이다.

따라서 비본질적인 요소들을 다음과 같이 다양하게 변화시켜 지도할 수 있다.

1) 이웃한 두 변의 길이가 같은 것과 같지 않은 것
(즉, 마름모와 마름모가 아닌 평행사변형).

2) 이웃한 두 각의 크기가 같은 것과 같지 않은 것
(즉, 직사각형과 직사각형이 아닌 것.)

3) 한 변이 수평 방향인 것과 그렇지 않은 것.
(표준위치에 있는 것과 그렇지 않은 것)



위의 3가지가 두 개 이상 복합된 예(표준위치에 있지 않은 직사각형, 정사각형 등)를 통하여 지도할 수 있다.

*** 채점 기준**

<원리 서술 : 2점>

- 2점: '수학적 요소 (또는 변수)'를 언급하고, 전반적인 의미가 통하는 경우.
- 1점: '수학적 요소 (또는 변수)'에 대한 언급은 하였으나, 불완전하게 서술한 경우.
- 0점: 전혀 손을 못대었거나, '수학적 요소(또는 변수)'에 대하여 언급하지 않은 경우.

<예와 설명 : 4점>

- 4점: 평행사변형의 정의를 언급하고, 3가지 다른 종류의 예를 제시한 경우.
- 3점: 평행사변성의 정의를 언급하지 않고 3가지 다른 종류의 예를 제시하였거나, 평행사변형의 정의를 언급하고 2가지 다른 종류의 예를 제시한 경우.
- 2점: 평행사변형의 정의를 언급하지 않고 2가지 다른 종류의 예를 제시하였거나, 평행사변형의 정의를 언급하고 예를 1가지만 제시한 경우.
- 1점: 예를 한 가지만 제시한 경우.
- 0점: 전혀 예를 못들었거나, 관계없는 예를 제시한 경우.

* Dienes 이론을 적용하는 수학 교수・학습에서 유의점

① 수학은 수 및 도형과 관련된 개념 사이의 구조적 관계와 실세계에서 일어나는 문제에의 적용을 다루는 분야이므로, 수학적 구조가 내포되어 있는 놀이를 통한 수학 학습이 조직되어야 한다.

② 수학 학습은 심리 역학적인 과정을 통하여 개인적인 경험으로부터의 일련의 수학적 개념이 구성되는 과정이다.

③ 딘즈의 개념 학습 원리를 이용할 때 학생들이 놀이 대상이 갖는 성질만을 추상화하는 경험적 추상화 수준에 머물지 않도록 반성의 과정을 반드시 포함시켜 반영적 추상화 수준이 될 수 있도록 해야 한다.

4.

수학적 다양성의 원리는 수학적 개념의 성장을 도와 구조화된 경험을 제시하기 위해서는 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다는 것이다.

최 교사의 수업 계획은 수학적 다양성의 원리를 반영하고 있다.

본질적인 요소는 일차함수의 기울기이므로 활동①에서 a의 값을 고정하였다. 비본질적인 요소는 y절편인 b값이므로 활동②, ③, ④를 통해 가능한 한 많은 변화를 주고 있다.

5. ⑤

① 알고리즘을 자유롭게 대하거나 친밀감을 갖는다는 상황이 드러나지 않는다. 〈1단계〉는 알고리즘에 대한 규칙성을 점진적으로 파악해 나가는 게임단계, 〈2단계〉는 여러 게임에서 발견되는 알고리즘에 대한 공통 구조를 파악하고 이를 적절한 방법으로 표현하는 활동으로 공통성 탐구, 표현 단계로 생각할 수 있다.

② 다양한 수단을 사용하여 동일한 개념적 주제를 지각적으로 다양하게 제시하는 것은 수학 교수·학습에 효과적이다.

③ 통합 조정의 원리는 나타나지 않는다.

④ 알고리즘을 설명하고 적용하는 활동은 관계적 이해를 의도하는 것으로 보인다. 도구적 이해를 의도했다면 알고리즘의 계산에 초점을 두어야 한다.

⑤ [가]에서 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘이 사고의 수단이었다면 [나]에서는 평가의 대상(사고의 대상)이 되었다고 볼 수 있다.

6. ③

ㄱ. [나]의 답안지를 근거로 예은이는 알고리즘에 대해 도구적 이해를 하고 있는 것으로 판단할 수 있다. 따라서 [나] 2번의 (5)에 대한 답으로 $10011_{(2)}$라고 답할 가능성이 높다.

ㄴ. 도구적 이해에서 관계적 이해로 나아가도록 하기 위해서는 〈2단계〉의 활동에 대한 반성이 더 필요하다.

ㄷ. 17을 2로 나눈 나머지가 1이라는 수의 특성에 기인한 것으로 볼 수 있다.

7. ②

8. 지각적 다양성의 원리

정사면체라는 동일한 개념적 주제에 대하여 다양한 수단을 활용하여 지각적으로 다양하게 제시하는 수업은 지각적 다양성의 원리를 적용한 것이다.

9. 딘즈 개념 형성 이론, 수학적 구조가 내포된 놀이

일반화된 식: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

1단계에서 정사각형 조각의 개수를 구하였다. 2단계에서 조각들을 재배치하여 한 변의 길이가 $1+2+3+4=10$인 정사각형을 만들고 사용된 조각의 개수와 정사각형의 넓이를 비교하여 $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=\left(\dfrac{4\times5}{2}\right)^2$을 유도하였다.

수학적 구조.

(딘즈의 개념 형성 이론에서 수학적 개념은 수학적 구조가 내포된 놀이를 통하여 형성된다. 따라서 수학 학습을 위해 고안된 교구에는 수학적 구조가 내포되어 있어야 한다.)

10.

구성의 원리는 아동은 분석적 사고를 하기 이전에 구성적 사고를 발달시키므로, 아동에게 제시하는 수학적 상황은 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 한다는 것이다.

종이접기를 통해 직관적으로 확인하는 활동1은 구성을, 현에 관한 성질을 정당화하는 활동2는 분석을 요구하기 때문이다.

활동2에서는 활동1에서 수행한 것을 반사하고, 그 수학적 의미를 정리하고 성질을 재구성 및 정당화하는 반성의 과정을 통해 논리-수학적 개념을 구성하게 된다.

활동2 과정 없이 수업을 진행하는 것은 반영적 추상화의 과정을 생략하고 논리-수학적 개념을 학생들에게 일방적으로 부과하는 것이다.

11.

(수학적 다양성의 원리는 수학적 개념의 성장을 도와 구조화된 경험을 제공하기 위해서는 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 많은 변인을 변화시켜야 한다는 원리이다.)

(가)에서 '원주각의 성질, 중심각과 원주각의 크기 사이의 관계'라는 개념은 유지하면서 변인에 해당하는 '점 P의 위치'를 다양하게 변화시키고 있다.

구성의 원리.

(가)에서 탐구형 소프트웨어를 사용하여 직접 관찰하면서 원주각의 성질, 중심각과 원주각의 크기 사이의 관계를 우선적으로 구성하고 있다. 이후 성질을 문장으로 나타내어 학생이 발표하도록 하여 분석이 이루어지고 있다. (즉, 학생에게 제시하는 수학적 상황이 분석보다는 구성이 우선되었으므로 구성의 원리가 적용되었다.)

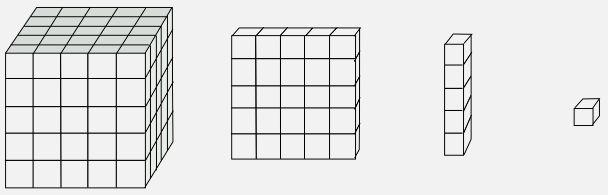
<수와연산>

1.

좌표평면에서 반지름 r인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 시초선이 이루는 각 θ라 하자. 이때, θ의 값에 따라 $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}(x\neq 0)$는 반지름의 길이 r에 관계없이 하나로 결정된다. 그러므로 임의의 실수 θ(라디안)에 이들 값을 대응시키는 함수 $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0)$를 각각 코사인 함수, 사인함수, 탄젠트함수라 한다. 이 함수들을 삼각함수라 한다.

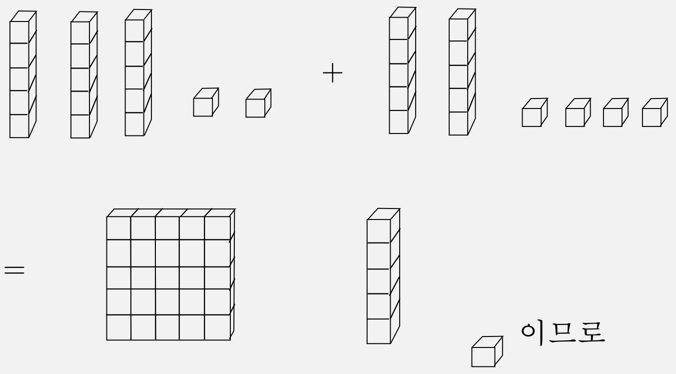
2.

(1) 5진법 모델



5^3 5^2 5^1 5^0

(2) 그림으로 설명



이므로

$32_{(5)}+24_{(5)}=1\times 5^2+1\times 5^1+1\times 5^0=111_{(5)}$

3.

(1) $\triangle\mathrm{AED}\backsim\triangle\mathrm{DEB}$이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{ab}$이다. $\overline{\mathrm{DE}}$와 반지름의 길이 $\overline{\mathrm{CO}}=\frac{a+b}{2}$를 비교하면 $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$.

(2) 지수가 자연수일 때 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$이 성립한다. 지수가 정수일 때도 성립한다고 가정하면 $a\neq 0$일 때 $a^1a^0=a^{1+0}=a$에서 $a^0=1$이고 $a^n\cdot a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$에서 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. 즉, $a\neq 0$이고 지수가 정수일 때 $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

- 지수의 확장(유리수 범위까지)

> m, n이 자연수일 때, 지수법칙 $a^ma^n=a^{m+n}$ $(a\neq 0)$이 $m=1$, $n=0$일 때에도 성립한다고 하면 $a^1a^0=a^{1+0}=a$이고 양변을 a로 나누면 $a^0=1$이다.
> 또, 위의 지수법칙이 $n=-m$인 경우에도 성립한다고 하면
> $$a^na^{-m}=a^{m+(-m)}=a^0=1$$
> 이고 양변을 a^m으로 나누면 $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.
> 또한, 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$이 지수가 유리수일 때에도 성립한다고 하면
> $$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a^1=a$$
> 이다. 따라서 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$이다. 지수가 유리수일 때에도 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}(a>0)$이 성립한다고 하면 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}n}=a^m$이며 $a^m>0$이므로 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다.

- 형식불역의 원리의 발생에 대한 역사적 배경과 정의

① 19세기, 음수와 복소수에 대한 이해를 위한 핵심 아이디어로의 수 체계 확장을 가능하게 한 것이 형식불역의 원리이다.
  ㉠ 음수와 허수는 18세기(그 이전)에도 자유롭게 사용되었으며 모든 종류의 대수적 결과를 얻는데 필요한 것으로 간주되었다. 하지만 수학자들은 물리적 세계에서 실제적인 모델로 그 의미를 설명하려 하였다.
  ㉡ 그러나 19세기 독일의 수학자 한켈(Hankel)은 음수를 실제적인 것을 나타내는 개념이 아닌 형식적인 구조를 이루는 개념으로 보았다. 즉, 한켈은 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수 체계를 연구하여 음수의 구조가 대수적으로 모순이 없음을 보였다.

② 형식불역의 원리란 '기본적인 성질이 유지되도록 대수적인 구조를 확장하는 것'으로 프로이덴탈은 대수적 원리라고 부르고 있다.

- 형식불역의 원리 활용

1) 귀납적 외삽법

① 귀납적 외삽법은 수의 연산을 확장하기 위해 이미 확립된 연산의 결과 속에서 패턴을 발견하고, 발견된 패턴이 새롭게 확장된 체계 속에서 계속 이루어질 것이라고 가정하여 적용하는 것이다.

② 귀납적 외삽법은 음수의 도입과 더불어 계산을 하고 추론을 하여 그 결과를 검토하는 것을 포함하므로, 구체적 모델인 수직선을 수동적으로 학습하는 것에 대한 활동적인 보완물이 된다(Freudenthal, 1973, p.282).

③ 다른 음수 지도를 돕는 모델(수직선, 셈돌, 우체부 등)을 사용하지 않고 귀납적 외삽법으로만 음수의 연산을 지도한다면 음수가 물리적 세계를 다양하게 해석하게 하는 풍요한 개념이라는 것을 학생들에게 인식시키기 어려울 수도 있다.

2) 형식적(공리적) 외삽법

① 새로운 수를 '방정식의 해'로 형식적(공리적)으로 도입하여 새로운 기호를 붙이고 확장하는 방식을 프로이덴탈(Freudenthal, 1973, p.231)은 형식적(공리적) 외삽법이라 하였다.

② 방정식의 해로 도입한 새로운 수가 기존 체계의 특성을 만족한다고 가정한 다음 그 연산 규칙이 어떻게 이루어질 것인지 찾아보는 것이다.

③ 새로운 수를 방정식의 해로 도입하는 방식은 $\sqrt{2}$와 같은 무리수를 도입할 때와 실수에서 복소수를 확장할 때 사용되며 역사적으로도 동일한 방식으로 발전되어 왔다.

3) 음수의 덧셈과 곱셈 지도

① 자연수 a에 대하여 방정식 $x+a=0$의 해로 음수 $-a$를 정의하고, 자연수에서 성립하는 계산 법칙이 음수에서도 성립하도록 음수의 덧셈과 곱셈을 정의한다.

② 음수가 대수적 필요성에서 출현된 개념이라는 역사발생적 의미를 잘 반영하고 있다.

4) '기하학적-대수학적 형식불역의 원리'

① Descartes에 의해 해석기하학이 탄생하면서 음수와 그 연산은 기하에서 필수불가결한 것임이 분명해졌다.

② 음수는 평면 전체를 좌표로 기술하고 직선이나 이차곡선 등과 같은 평면 도형을 전체적으로 방정식으로 기술하는 데 반드시 필요하다.

4.

- ①의 예
  (i) 작은 수에서 큰 수를 빼는 것이 어떻게 가능한가?
  (ii) 작은 수의 제곱이 어떻게 큰 수의 제곱보다 클 수 있는가?
  (iii) $(-4)(-5)=20$임을 받아들이면 $1:-4=-5:20$이 된다. 더 큰 수와 더 작은 수의 관계가 어떻게 더 작은 수와 더 큰 수의 관계와 같을 수 있는가?
- ②의 예: 셈돌 모델, 우체부 모델, 수직선 모델

5.

- 귀납적 외삽법에 근거한 음수의 곱셈 지도

$2\times4=8$, $2\times3=6$, $2\times2=4$, $2\times1=2$, $2\times0=0$을 통해 규칙성을 발견하고 다음 식 $2\times(-1)=?$에서 $2\times(-1)=-2$임을 지도한다.

- 형식불역의 원리에 근거한 -1의 정의

-1은 $1+(-1)=0$이 되는 1의 덧셈에 대한 역원이다.
(방정식 $x+1=0$의 해)

- 음수 개념 이해의 어려움
  (i) 디오판토스(3세기): 음수는 존재하지 않는 불가능한 것이다.
  (ii) 브라마굽타(7세기): 양수와 음수의 계산 법칙, 음수를 해로 인정하지 않았다.
  (iii) 카르다노(16세기): 음수를 사용, $ax+b=0$의 일반해
  (iv) 데카르트: 음의 근은 거짓 근이다.
  (v) 파스칼: 0보다 작은 수는 존재하지 않는다.

<u>수 개념을 크기, 개수, 길이, 넓이 등 양적인 관념과 연관 짓는 것은 자연수를 학습하는 상황에서는 유용한 방법</u>이었지만 <u>음수를 학습하게 될 때에는</u> 오히려 이 방법이 수 개념을 확장하는 <u>학습에 방해</u>가 되어 학생들이 음수를 이해하는데 어려움을 겪을 수 있다.

- 음수의 역사

① 방정식 $x+a=0$ ($a\in\mathbb{N}$)를 만족하는 근이 필요하였다. 그러나 음수를 설명할 실제적인 모델을 찾을 수 없어 음수를 역사상에서 수로 인정하지 않았다.
② 17세기 Descartes의 해석기하학의 탄생 이후, 그리고 19세기 독일의 수학자 Hankel이 구체적인 모델 없이 음수를 인정하고 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수체계를 연구함에 의해 인정되고 활용 가능해졌다.
③ 음수는 역사상 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로 시각이 변화하였다.

- 학교에서 효과적인 정수(음수) 지도

학생들이 자연수를 구체적인 크기 개념과 관련지어 학습했기 때문에 정수(음수)도 구체적이고 직관적인 대상을 통하여 파악하려 하며 따라서 수학사의 흐름과 같이 음수에 대한 혼란이 시작된다. 따라서 <u>형식적인 접근(형식적인 분석적 접근방법)과 다양한 직관적 해석(모델을 통한 직관적인 지도 방법)을 함께 고려하여 지도</u>해야 한다는 주장이 있다.

- 음수의 지도 방법

▶ **<u>직관적 해석 : 수직선 모델, 셈돌 모델, 우체부 모델</u>**

① 수직선 모델(가장 많이 사용하는 모델)
$+a$은 0에서 오른쪽 방향으로 a만큼 이동한 화살표, $-a$는 왼쪽 방향으로 a만큼 이동한 화살표로 약속하여 음수와 그 연산을 지도한다.
② 셈돌 모델(Gattengno)
$+a$는 검은돌 a개, $-a$는 흰돌 a개 그리고 $+a$와 $-a$가 만나면 상쇄되어 0이 되는 방법을 이용해 음수와 그 연산을 지도한다.
③ 우체부 모델
어음(양수)과 고지서(음수)가 배달되고(+) 잘못 배달된 것은 되가져 가기(−) 상황을 이용해 음수와 그 연산을 지도한다.

▶ **<u>형식적인 접근 : 귀납적 외삽법, 형식불역의 원리</u>**

① 귀납적 외삽법
자연수 연산에서 정수 연산에로의 귀납적 확장을 통해 정수의 연산을 지도한다.

$3+2=5$	$3\times2=6$
$3+1=4$	$3\times1=3$
$3+0=3$	$3\times0=0$
$3+(-1)=\cdots$	$3\times(-1)=\cdots$
$3+(-2)=\cdots$	$3\times(-2)=\cdots$

② 형식불역의 원리
기존의 기본적인 성질이 유지되면서 대수적인 구조를 확장하는 원리

▶ **<u>각 모델 활용 가능성 및 특징</u>**

① 수직선 모델: 덧셈・뺄셈・곱셈 설명 가능, 나눗셈 설명 어려움
- 정수=수직선 위의 점, 정수=벡터

② 셈돌 모델: 덧셈・뺄셈 설명 가능, 곱셈・나눗셈 설명 어려움
- 정수=자연수의 순서쌍, 덧셈과 뺄셈에 서로 역연산임을 명확히 제시

③ 우체부 모델: 덧셈・뺄셈・곱셈 설명 가능, 나눗셈 설명 어려움
- 소득과 손실 모델을 바탕, 재미있는 이야기나 극화로 활용

④ 귀납적 외삽법: 사칙연산 가능
- 직관적 모델을 이용한 지도 후 계산 연습으로 활용

⑤ 형식불역의 원리: 사칙연산 가능
- 음수가 대수적 필요성에서 출현되었음을 보여줌
- 기하(좌표)에서 음수의 필요성 확인
- 음수 인정의 당위성 제시

6.

6-1. 지수의 확장: 실수

- 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S:=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$라 하면 $S\neq\varnothing$. $\{a_n\}$은 위로 유계이므로 완비성 공리에 의해 $\sup S=\alpha$있다. 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\alpha-\varepsilon<a_N\le\alpha$인 $N\in\mathbb{N}$있다. $\{a_n\}$은 단조증가수열이므로 $n\ge N$일 때 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ 즉, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$.

- 수열 (*)은 상한을 $3^{\sqrt{2}}$로 가지며 증가하므로 수렴한다.

- (가)의 설명

  $a^x=\alpha$, β라 하자. $r<x$인 임의의 $r\in\mathbb{Q}$에 대하여 $a^r\le\alpha$, $a^r\le\beta$이므로 $\beta\le\alpha$, $\alpha\le\beta$에서 $\alpha=\beta$.

- (나)의 설명

  유리수의 조밀성 활용.

  $t<x+y$, $t-x<y$이므로 $t-x<s<y$인 $s\in\mathbb{Q}$있다.

  $t-s<x$이므로 $t-s<r<x$인 $r\in\mathbb{Q}$있다.

  따라서 $t<r+s$, $r<x$, $s<y$이다. (역도 성립해서 필요충분조건임)

- <정의 2>에 따라 $a^x a^y=a^{x+y}$ 설명

  상한의 성질과 (나)에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}a^x a^y &= \sup\{a^r \mid r<x, r\in\mathbb{Q}\}\sup\{a^s \mid s<y, s\in\mathbb{Q}\}\\ &=\sup\{a^r a^s \mid r<x, s<y,\ r,s\in\mathbb{Q}\}\\ &=\sup\{a^{r+s} \mid r+s<x+y,\ r,s\in\mathbb{Q}\}\\ &=\sup\{a^t \mid t<x+y,\ t\in\mathbb{Q}\}\\ &=a^{x+y}\end{aligned}$$

  (밑의 범위가 $0<a<1$일 때는 하한을 이용한다.)

6-2. 지수의 확장: 복소수

- b가 정수일 때 1개
- b가 유리수 $\dfrac{n}{m}$(기약분수)일 때 m개
- b가 무리수, 허수인 경우 무한히 많다.
- 로그의 한 분지에서 $a^b a^c=a^{b+c}$

  $a^b a^c=e^{b\mathrm{Log}\,a}e^{c\mathrm{Log}\,a}=e^{(b+c)\mathrm{Log}\,a}=a^{b+c}$

7. ①

① 표현 방식의 변화가 있으나 체계의 확장이 나타난 것으로 보기는 어렵다.
② 형식불역의 원리를 통해 지수를 확장한다.
③ 기하학적-대수학적 형식불역의 원리가 적용된다.
④ 형식불역의 원리를 통해 음수의 연산을 지도한다.
⑤ 기하학적-대수학적 형식불역의 원리가 적용된다.

* <u>수의 종류</u>

① 내용 상: 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수, 대수적수, 초월수
② 관점 상: 셈수(counting number), 개수(numerosity number), 기수(cardinal number), 서수(ordinal number), 측정수, 작용소, 계산수 등
③ 발달사 상

                                        분수
자연수 → 범자연수 ↗   ↘ 유리수
                              ↘   ↗   ↘
                                        정수   실수
                                                      *무리수 ↗

*무리수의 도입 "유리수 집합의 절단"을 이용한 Dedekind의 방법
"유리수의 Cauchy 수열"을 이용하는 Cantor의 방법

* <u>자연수의 지도: Dewey와 Piaget</u>

① Dewey: 사물을 다루는 인간의 '활동으로부터' 수 개념이 발생한다. 따라서 수 개념을 처음부터 완전히 추상화된 수학적 대상으로 제시하는 것이 아니라 측정 '활동'을 통하여 반성하고 성장하는 것으로 지도해야 한다.
② Piaget: 수학적 개념은 '행동의 일반적 조정에 대한 반영적 추상화의 결과로 구성되는 조작'이다. 즉 '조작(내면화된 가역적 행동)을 구성'함으로써 수가 지도되어야 한다.

* <u>정수의 지도</u>

① 자연수에 '+' 부호를 붙인 수를 양의 정수, '−'를 붙인 수를 음의 정수라고 하며 0과 양의 정수, 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.
② 정수란 두 자연수의 차(差), 즉 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{N}\}$이다.
(예) $+3=\{(4,1),(5,2),(6,3),\cdots\}$, $0=\{(1,1),(2,2),(3,3),\cdots\}$,
$-3=\{(1,4),(2,5),(3,6),\cdots\}$

8. ⑤

① 유추적 모델을 가지고 있는 경우 문제 해결에서 틀린 답을 할 가능성이 높다.

② 유리수의 조밀성을 이해하면 장애를 극복하기 더 어려울 수 있다.

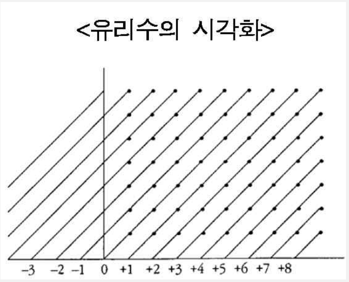
③ 극복이 안 된다. 장애를 더 고착화시킨다.

④ 직관적인 탐구 활동으로는 극복할 수 없다.

⑤ 직관은 수학적 탐구, 발견에 중요한 도구이지만 문제와 같이 수학적 사고에 방해가 될 수도 있다.

* <u>유리수의 지도</u>

- 유리수의 내포적 정의: 분모, 분자가 자연수인 분수에 $+$와 $-$를 붙인 수 및 0
- 유리수의 외연적 정의: 정수의 순서쌍의 동치류



좌표평면 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$에서 원점과 한 정수 격자점을 지나는 직선 위의 모임=대등한 분수의 동치류

(cf) 무리수: 어느 격자점도 지나지 않는 원점을 지나는 직선

- 유리수 지도의 다양한 문맥
  ① 등분할 된 전체량과 부분의 관계(포함제)
  (예) $1/5$=사과 1개를 다섯 조각으로 나누었을 때 한 조각
  ② 나눈 결과의 몫(등분제), $ax+b=0$
  (예) $1/5$=사과 1개를 다섯 명이 나눠먹을 때 한 명이 먹을 량
  ③ 비율$a:b$(유리수의 본질)
  ④ 곱셈의 작용소
  ⑤ 측정수: 듀이의 측정 활동

* 강미광 (2000) 연분수와 무리수에 관한 고찰, 한국수학사학회

학생들에게 무한 개념을 지도하다 보면 매번 부딪치는 문제 중 하나는 유리수 집합과 무리수 집합의 농도 비교이다. 유리수 집합의 무리절단이 생길 대마다 하나씩 정의되는 무리수이지만 무리수 집합은 유리수들의 집합보다 훨씬 큰 무한집합이라는 것을 직관적으로 이해시키기는 쉽지 않다.

유리수와 무리수를 벨기에 수학자 스테빈(Stevin, 1548-1620)이 발명한 소수로 나타내면 유리수는 유한소수이거나 순환 무한소수 그리고 무리수는 비순환 무한소수로 특징지어진다. 그러나 순환하긴 하지만 무한소수인 유리수도 많이 존재하므로 유리수와 무리수의 이같은 특징이 두 집합의 농도 차를 구별하기에는 미진한 감이 있다.

연분수에 의한 실수의 분류법은 유리수는 유한 개념과 무리수는 무한 개념과 연관되도록 각각 특징짓는다. 모든 수는 단순 연분수로 표현될 뿐 아니라 유리수는 바로 유한 개의 항을 가지는 단순 연분수와 일대일 대응되므로 자연히 무리수는 무한 연분수와 일대일 대응이 이루어지기 때문이다.

[연분수의 역사]

연분수는 지난 2000년 간 수학에서 하나의 예로서 등장하곤 했으므로 그 기원이 언제인가를 정확히 말하기는 힘들지만 인도 수학자 아리아바타(Aryabhata)가 그의 저서에서 부정방정식(indeterminate equation)을 풀기 위해 연분수를 사용했으므로 적어도 서기 550년경으로는 거슬러 올라간다.

유리수 p/q를 연분수로 나타내는 방법은 p와 q의 최대공약수를 구하는 유클리드의 알고리즘과 맞물려있는 관계이기 때문에, 기원전 300년의 유클리드 알고리즘과 연분수의 기원을 동일하게 보는 사람들도 있다.

아리아바타가 부정방정식의 해를 구하는 특정한 예에서 연분수를 사용했을 뿐 이 방법을 일반화하지는 않았듯이, 그리스와 아랍의 수학 책에 나타나는 연분수도 특정한 예에 한정되어 있다.

150년 이탈리아 수학자 봄벨리(Bombelli)가 $\sqrt{13}$을 순환 연분수로 표현하고, 카탈디(Cataldi, 1548-1625)도 $\sqrt{18}$을 순환 연분수로 나타냈지만 둘 다 연분수의 성질에 관해서 연구하지는 않았다.

1655년 월리스(John Wallis, 1616-1703)는 그의 저서 「무한의 수론(Arithemetica Infinitorium)」에서 그의 이름을 딴 다음과 같은 유명한 공식을 유도해내어 π를 최초로 유리수 연산만 포함하는 무한수열의 형태로 나타내었다.

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\cdots$$

영국 학사원의 초대 총재인 윌리엄 브렁커(William Brouncker, 1620-1684)는 월리스의 공식을 연분수의 형태로 다음과 같이 표현하였다.

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{\cdots}}}}$$

브렁커는 더 이상 연분수를 연구하지 않았지만 월리스는 이에 자극을 받아 본격적으로 연분수에 관한 이론을 일반화시키기 시작했으며, 저서 「Opera Mathematica(1695)」에서 연분수의 기본 이론과 성질에 관해 기술해 놓았다. 그러므로 실질적인 수학의 한 분야로서 연분수를 개척한 사람은 월리스라고 할 수 있으며 현재 사용하고 있는 연분수라는 용어도 이때 처음 사용되었다.

연분수를 실질적인 응용에 처음 사용한 사람은 독일의 수학자이자 천문학자인 호이겐스(Huygens, 1629-1695)로 천문관을 지을 때 필요한 기어의 톱니수의 비에서 최상의 근사 유리수를 얻기 위해 연분수를 이용하는 방법에 대해 연구했다.

오일러(Euler, 1707-1783), 람베르트(Lambert, 1728-1777), 그리고 라그랑주(Lagrange, 1736-1813)에 의해 연분수에 관한 이론들이 연구되고 발표되면서부터 연분수는 수학의 한 분야로서 인정받기 시작하였다.

오일러는 월리스와 브렁커의 결과가 같다는 것을 수렴하는 급수를 이용해서 증명하였다(1775). 수학적 귀납법에 의해 수렴하는 급수 S는 다음과 같이 연분수로 표현된다.

$$S=a_0+\cfrac{a_1}{1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{1+a_3-\cfrac{a_4}{1+a_4-\cfrac{a_5}{\cdots}}}}}$$

이를 다음의 그레고리 급수에 적용하면 다음을 얻는다.

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3-x^2+\cfrac{9x^2}{5-3x^2+\cfrac{25x^2}{7-5x^2+\cfrac{49}{\cdots}}}}}$$

여기서 x를 1로 두면 브렁커의 결과가 나온다. 오일러는 "모든 유리수는 유한한 단순 연분수로 표현할 수 있다."는 정리를 증명하고 e와 $\tan x$를 다음과 같이 연분수로 나타내었다.

$$\frac{1}{2}(e-1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

$$\tan x=\cfrac{1}{\frac{1}{x}+\cfrac{1}{\frac{3}{x}+\cfrac{1}{\frac{5}{x}+\cfrac{1}{\frac{7}{x}+\cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

이러한 연분수는 람베르트와 르장드르의 연구의 시작점이 되었고, 람베르트는 "x가 유리수이면 e^x와 $\tan x$는 무리수이다."라는 사실을 밝혔다. 또한, 라그랑주는 "계수가 정수인 이차방정식의 모든 실근은 반복적 주기 형태를 가지는 연분수이다."라는 연분수 정리를 증명했다.

19세기는 연분수의 황금시대라고 표현될 정도로 연분수라는 분야를 모든 수학자들이 인지하는 분야가 되었으며, 연분수 이론에 관한 결과들이 폭발적으로 쏟아져 나왔다. 특히, 야코비(Jacobi), 페론(Perron), 에르미트(Hermite), 가우스(Gauss), 코시(Cauchy)와 같은 뛰어난 수학자들의 기여에 힘입어 많은 결과들을 지닌 수학의 한 분야로 크게 성장하였다.

20세기 초 이후부터 연분수는 다른 분야에서 그 모습을 나타내고 있는데 한 예로 푸앵카레(Poincaré), 버코프(Birkhoff)로부터 시작 연구한 카오스적 동력 시스템(chaotic dynamic system) 이론에서 연분수의 이론이 사용되고 있다.

[연분수의 성질]

실수는 단순 연분수로 표현할 수 있으므로 이를 유리수에 적용하면 유리수는 유한인 단순 연분수로 표현되고 유한인 단순 연분수는 유리수라는 사실을 이끌어낼 수 있다.

무리수도 단순 연분수에 의해 특징지어질 수 있다. 즉 어떤 실수가 무리수일 필요충분조건은 그것이 무한 단순 연분수의 형태로 표현될 수 있는 것이다.

[연분수의 활용]

① 태양력에서의 치윤법

태양력이란 지구가 해를 한 바퀴 도는 동안을 일년으로 하는 달력으로 1태양년은 365.242196일이다. 1년을 365일로 정한다면 1년에 0.242196일이 남으므로 이것이 누적되면 계절과 맞지 않게 된다. 그러므로 일정한 간격마다 윤일을 두어 실제의 태양년과 오차가 생기지 않도록 조절해야 하는데, 몇 년에 몇 번의 윤달을 두어야 하는가 하는 문제를 해결하기 위해 0.242196을 연분수로 표현하면 다음과 같다.

$$0.242196=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}$$

여기서 k번째 수렴항 $[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}]$은 유리수이므로 $\frac{n}{m}$으로 표현하면 m년 동안 윤일을 n일 두어야 함을 의미한다. k항이 클수록 실제값에 더 가까운 정확한 값이 되지만 윤일을 두는 방법이 복잡해지므로 현재 우리가 쓰고 있는 그레고리력은 400년에 97번의 윤일을 두고 있다.

② 이차방정식과 연분수

이차방정식에서 계수가 정수인 이차방정식의 무리근은 순환하는 무한 연분수이다(라그랑주의 연분수 정리). 양의 무리근은 이차방정식을 다른 방법으로 풀면 연분수로 나타낼 수 있다. $x^2=ax+1$에서 $x=a+\frac{1}{x}=[a;a,a,a,\cdots]$로부터

$$x=\frac{1+\sqrt{a^2+4}}{2}=[a;a,a,a,\cdots]$$

이다.

③ 황금비와 피보나치 수열

무한 연분수는 모두 무리수이므로 유리수에 의해 근사되지 않는 무리수를 찾기 위해 가장 간단한 무한 연분수 $[1;1,1,1,\cdots]:=\phi$를 생각할 수 있다. 이때 $\phi=1+\frac{1}{\phi}$이므로 $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 즉, ϕ는 황금비이다. 여기서 ϕ에 수렴하는 유리수 근사 수열은 $[1]$, $[1;1]$, $[1;1,1]$, $\cdots$ 즉, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\cdots$인 피보나치 수열이다. 무한을 최적의 상태로 추구하는 자연에서는 피보나치 수열과 황금비가 나타나기 마련인 것 같다.

연분수들의 사칙연산은 까다롭기 때문에 계산하기에는 부적당하나 정수가 아닌 실수의 성질을 알아볼 때 연분수 표현법은 많은 정보를 제공해 준다. 중·고등학교 교육 과정에서 다루는 무리수는 다항식의 무리근이거나, 원주율 π, e, 황금비 ϕ등으로 한정되어 있을 뿐 아니라, 이러한 것들도 문제를 푸는 과정에서 수라기보다는 기호 정도로 인식하고 있다. 그러나 비순환 무한 소수로 표현되는 무리수들을 연분수로 표현하면 다음과 같이 이 수가 본래 지니고 있는 패턴의 아름다움을 감상할 기회를 제공해 준다.

$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\cdots]$

$\phi=[1;1,1,1,\cdots]$

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2.414213}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{414213}}=\cdots$$

해석학의 “모든 실수는 수렴하는 유리수 수열을 가지고 있다.”라는 정리에서 이 실수에 대한 연분수 표현법은 구체적으로 수렴하는 수열의 예를 보여줄 수 있다.

또한 연분수는 자연에서 무리수인 황금비와 이에 수렴하는 유리수 수열인 피보나치 수열이 매우 자주 나타나는 현상을 설명 가능하게 한다. 무한을 추구하는 자연계는 유리수보다는 무한 개념에 더 적당한 무리수를 선호하기 마련이고 그 중에서도 가장 간단한 형태의 무리수인 황금비를 선택하므로 그 과정에서 피보나치 수열이 나타날 수밖에 없는 것이다.

나름대로의 효용가치를 지닌 연분수를 사장할 것이 아니라 학생들에게 적당한 학습 제재로 개발하여 수학적 아름다움을 느낄 수 있는 기회가 되도록 하면 좋을 것 같다.

9.

9-1.

- 추가해야 할 설명: $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$

부호가 다른 두 정수의 나눗셈은 두 정수의 절댓값의 나눗셈의 몫에 음의 부호를 붙인 것과 같으므로 $(-2)\div 3=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$, $2\div(-3)=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$.

따라서 $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$이다.

- 계산 과정

$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{-2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{(-2)\times 4}{3\times 5}=\frac{-8}{15}=-\frac{8}{15}$이고,

$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{2}{-3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{(-3)\times 5}=\frac{8}{-15}=-\frac{8}{15}$이므로

$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{4}{5}=-\frac{8}{15}$임을 알 수 있다.

9-2.

① 형식불역의 원리의 상세한 의미

형식불역의 원리는 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때는 기존의 체계에서 성립하는 성질이 유지되도록 해야 한다는 것이다. 자연수 구조에서 성립하는 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 정수/유리수 구조에서 성립하도록 확장하는 것이 그 예이다.

② 추가로 정의해야 할 수학적 대상에 대한 설명

$-\frac{b}{a}$는 일차방정식 $x+\frac{b}{a}=0$의 해이다.

양변에 a를 곱하면 $ax+b=0$, b를 이항하면 $ax=-b$이므로 유리수 $\frac{-b}{a}$는 $ax+b=0$의 해이다. 즉, $-\frac{b}{a}=\frac{-b}{a}$. 비슷한방법으로 $-\frac{b}{a}=\frac{-b}{a}=\frac{b}{-a}$.

③ $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+a\times d}{a\times c}$의 유도 (단, a, b, c, d는 정수이고 $a\neq 0$, $c\neq 0$)

유리수 $\frac{b}{a}$는 $ax=b$의 해이고, 유리수 $\frac{d}{c}$는 $cy=d$의 해이다.

$ax=b$의 양변에 c 곱하면 $c\times(ax)=c\times b$이므로

결합법칙에 따라 $(c\times a)x=c\times b$, 교환법칙에 따라 $(a\times c)x=b\times c$.

$cy=d$의 양변에 a 곱하면 $a\times(cy)=a\times d$이므로

결합법칙에 따라 $(a\times c)y=a\times d$.

두 방정식을 변끼리 더하면 $(a\times c)x+(a\times c)y=b\times c+a\times d$이므로

분배법칙에 따라 $(a\times c)(x+y)=b\times c+a\times d$.

방정식의 해 $x+y=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{b\times c+a\times d}{a\times c}$.

③ $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$의 유도 (단, a, b, c, d는 정수이고 $a\neq 0$, $c\neq 0$)

유리수 $\frac{b}{a}$는 $ax=b$의 해이고, 유리수 $\frac{d}{c}$는 $cy=d$의 해이다.

두 방정식을 변끼리 곱하면 $(ax)\times(cy)=b\times d$이므로

결합법칙에 따라 $(ax)\times(cy)=\{(ax)\times c\}\times y=(a\times x\times c)\times y$,

교환법칙에 따라 $(ax)\times(cy)=(a\times c\times x)\times y$,

결합법칙에 따라 $(ax)\times(cy)=(a\times c)\times(x\times y)=b\times d$.

방정식의 해 $x\times y=\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$.

④ $\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{7}$와 $\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{7}$의 상세한 계산 과정

앞서 유도한 성질에 의해

$\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{5}{7}=\frac{-3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{(-3)\times 7+4\times 5}{4\times 7}=\frac{-1}{28}=-\frac{1}{28}$.

$\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{7}=\frac{-3}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{(-3)\times 5}{4\times 7}=\frac{-15}{28}=-\frac{15}{28}$.

10. ②

① 음의 부호는 (ⅰ) 왼쪽 방향, (ⅱ) 반대 방향(곱셈/나눗셈), (ⅲ) 뺄셈(덧셈의 반대)이라는 다중적인 의미를 갖는다. **음수 개념은 없는 것보다 작은 실체적인 현상을 확인할 수 없기 때문에 실제로 존재한다는 관념과 부합하지 않는 반직관적인 개념**이다. 따라서 음의 부호가 다중적인 의미를 갖는 것은 음수 개념 자체가 갖는 본질이라고 할 수 있다.

② 수직선 모델에서 음수의 나눗셈은 '유향성분의 반복'으로 설명은 가능하다.

③ 구체적 모델을 통해 음수의 연산을 이해했다면, 이후에는 음수의 연산을 구조적으로 이해하기 위한 훈련이 뒤따라야 한다.

④ 귀납적 외삽법에 근거한 지도 방법으로, 형식불역의 원리를 따른 것이다.

⑤ 기하학적-대수학적 형식불역의 원리의 설명이다.

* 음수를 의미 있는 수학적 실체로서 수용하기 어려운 것은 첫째, **음수의 모든 대수적 성질을 일관되게 만족하는 직관적이고 친근하며 훌륭한 모델을 확인하기 어렵기 때문이다.** 둘째, 본질적인 직관적인 장애가 있다. 수의 개념은 실제적인 양과 관련되지만 **없는 것보다 작은 양은 존재하지 않기 때문이다.**

* Freudenthal(1983)은 음수는 처음부터 형식적으로 취급되어야 한다고 주장했으며, 수직선 모델조차도 포기하고 '귀납적 외삽법'을 사용할 것을 제안하였다.

11. ③

① 프로이덴탈은 음수의 연산은 형식적으로 지도하여야 한다고 주장하였다.

② 수직선 모델에서 음의 부호는 다중적인 의미가 있다.

③ 단위를 적절하게 선택하고 변화시키는 과정을 반복하면서 전체량을 다시 재구성하는 측정활동을 통해 자연수를 지도해야 한다고 주장하였다. 고정 단위는 옳지 못하다.

* Dewey 구성적 활동의 방법

모호한 전체 → 전체를 구성하는 데 도움이 되는 부분(단위)

→ 명확한 전체를 구성하는 측정의 과정

④ 자연수는 집합의 포함관계와 비대칭적 추이 관계 군성체에 의한 것이므로 집합의 분류 활동과 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 강조하였다. 학생들은 구체적인 대상에 대한 분류 활동이나 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 통해 수 개념을 구성해야 한다.

⑤ 기수(cardinal number)는 대등하다(equipotent)라는 개념에 근거하여, 대등이라는 동치 관계의 동치류로서 자연수를 정의하는 정적인 관점의 정의이다.

$(1=\{\{\ \}\}=\{\varnothing\},\ 2=\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \cdots)$

* 서수(ordinal number)는 페아노(Peano)의 공리계에 근거하여 자연수를 정의하는 동적인 관점의 정의이다. ($1\in\mathbb{N}$, 1의 후자(successor) $1^{+}=2$, $2^{+}=3$, $\cdots$)

12.

셈돌 모델에서 흰돌×흰돌=검은돌이라고 설명한다. 이는 음수×음수=양수가 됨을 약속한 것처럼 선언해버리는 것으로, 학생들이 이를 그대로 받아들이는 것과 다를 바가 없다는 약점이 있다.

수직선 모델은 음수×음수=양수임을 지도할 때 음수를 곱하는 것은 방향을 바꾸는 것이라는 설명을 통하여 셈돌 모델의 약점을 보완할 수 있다는 장점이 있다.

수직선 모델에서 음의 부호는 왼쪽 방향, 반대 방향, 뺄셈이라는 다중적인 의미를 갖고 있어 학생들이 혼란을 겪을 수 있다는 약점이 있다.

귀납적 외삽법에 근거하여 음수를 지도하면 음수는 0보다 작은 수라는 하나의 의미를 갖게 되어 수직선 모델이 갖는 약점을 보완할 수 있다.

13. 정수의 사칙계산 지도

$(+3)-(-2)$=●●●−○○

=●●●(●●○○)−○○

=●●●●●

귀납적 외삽법에 근거하여 다음과 같이 지도한다.

$$3-2=1,\ 3-1=2,\ 3-0=3,\ 3-(-1)=4,\ 3-(-2)=5$$

$a※b=ab+1$일 때 $3※(-2)$를 구하시오.

* 음수 지도에 관한 한 가지 견해

학생들이 자연수를 구체적인 크기 개념과 관련지어 학습했기 때문에 정수(음수)도 구체적이고 직관적인 대상을 통하여 파악하려 하며 따라서 수학사의 흐름과 같이 음수에 대한 혼란이 시작된다. 따라서 형식적인 접근(형식적인 분석적 접근방법)과 다양한 직관적 해석(모델을 통한 직관적인 지도 방법)을 함께 고려하여 지도할 수 있다.

<대수>

1.

수학적 모델링 과정의 네 단계는 다음과 같다.

- 1단계 : 실세계의 문제 상황 파악(단순화/형식화)

  실세계의 (어떤 현상을 관찰하여 그 현상에서 나타나는)문제 상황을 파악하고 그 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 이해한다.

- 2단계 : 수학적 모델 설정(수학화)

  요인들의 관계를 추측하고 그 관계들을 수학적으로 해석하여 그 현상에 대한 수학적 모델을 세운다.

- 3단계 : 수학적 결과 또는 모델 내에서의 해(변환/분석)

  그 모델 내에서 수학적으로 문제를 분석하여 결과를 얻는다.

- 4단계 : 결론 추측 및 판단(타당화/적용)

  본 현상의 상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다.

[대수교육의 문제점]

학교 수학에서 수학을 학습-지도하는 목적은 문제해결력을 기르고 이를 실생활에서 활용하는 수학적인 힘을 기르는 것이다. 따라서 수학 학습-지도 과정에서 실생활의 여러 가지 소재를 활용하는 것이 바람직하다. 이와 함께 수학적 모델링의 과정을 경험하는 활동을 해야 한다.

그러나 일반적으로 행해지는 대수교육은 모델링 과정의 세 번째 단계에 초점을 두고 있어 단지 수식변환기능의 향상에 역점을 두고 있다. 따라서 대수교육이 모델링의 전과정을 통한 수학학습-지도의 취지에 맞게 학습-지도가 이루어져야 한다. 그리고 대수식 그 자체가 뿐만 아니라 그것을 해석하는 능력 즉, 학습자들이 실생활 현상에서 수학을 활용하는 수학적 힘을 기르게 하여야 한다.

2.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
교육평가 및 대수교육	5	40	적용	장경윤
출제 내용	제 7차 수학과 교육과정 (교육부)			
관련자료	우정호. 학교수학의 교육적 기초(서울대학교출판부)			

(1) 오류 분석을 위해 사용할 수 있는 방법

① 관찰: 문제를 풀게 하고 풀이 과정을 관찰한다.

② 면담(또는 면접): 문제 풀이 과정을 학생에게 직접 물어본다.

③ 소리내어 생각하기: 사고하는 과정을 소리내어 말하면서 문제를 풀게 한다.

④ 부가적인 방법

지필 검사: 같은 유형의 다른 문제들을 풀어 보게 한다.

(2) 이 학생은 '+' 기호를 행동(계산)을 하라는 일종의 명령어, 즉 삽입된 '+' 기호를 과정(Process)을 요구하는 것으로 이해한 것이다. 이는 산술에서 사용되는 '+' 기호의 의미이다. 이 학생은 $500a+1200b$이 아직도 계산이 끝나지 않은 것으로 생각하고 500과 1200을 더하여 1700을 쓰고 a와 b를 연이어 ab일 것이다로 본 것이다.

대수 학습을 성공적으로 하기 위해서는 '+' 기호를 달리 인식할 수 있어야 한다. '+' 기호를 과정으로서가 아닌 결과(또는 대상)(process-product)를 생성하는 기호로 새롭게 인식하는 것이 필요하다. $500a+1200b$를 하나의 대상으로 인식하여야 $200\times(500a+1200b)$ 등이 의미를 갖게 되어 대수 연산을 계속할 수 있게 된다.

*** 채점기준**

(1) 오류를 발견하기 위한 다양한 평가 방법 (2점)

① 2점: 제시된 평가 방법에 관찰, 면담, 소리내어 생각하기 중 2가지 이상이 포함된 경우.

② 1점: 관찰, 면담, 소리내어 생각하기 중 1가지가 포함된 경우.

③ 0점: 관찰, 면담, 소리내어 생각하기 중 어느 것도 언급하지 않은 경우.
(유사문제에 대한 지필 검사라고 답한 경우도 0점 처리함.)
(이 문제는 오류분석이 가능한 평가방법을 묻는 문항으로 일상적인 지필검사는 적절하지 않음.)

(2) '+' 기호에 대한 두 가지 인식 (3점)

① 이 학생의 '+' 기호 인식을 바르게 서술한 경우, 즉 '+' 기호를 행동(또는 계산)을 요구하는 명령어 또는 과정(process)이라는 뜻으로 기술한 경우(산술에서의 '+' 기호 인식)

② 대수 학습을 위해서 필요한 '+' 기호 인식을 바르게 기술한 경우, 즉 '+' 기호를 새로운 대상(또는 결과)을 생성하라는 기호라는 의미로 기술한 경우

③ $1700ab$를 답으로 쓴 과정을 설명한 경우(+기호를 남기지 않기 위하여 계수끼리 더하고 a와 b를 연이어 쓴 것.)

- 3점: ①, ②, ③이 모두 포함된 경우
- 2점: ①, ②, ③ 중 2가지가 포함된 경우
- 1점: ①, ②, ③ 중 1가지만 포함된 경우
- 0점: 기타 ①, ②, ③ 중 어느 것도 포함되지 않은 경우

※(주의) 이 학생의 오류는 체계적인 것이고 덧셈 기호 인식에서 비롯된 것임을 문제 지문에 명시하고 있다. 따라서 '동류항을 잘못 이해하고 있다', '문자식에서는 동류항끼리만 더할 수 있다', '문자를 잘못 보았다'는 식의 설명은 이 문제에서 답으로 수용될 여지가 없다.

3. ②
①, ③, ④, ⑤에서 변수는 정적인 개념의 측면이 강하다.
② 수업에 반영된 변수 개념은 변화 관계를 표현하는 동적인 개념의 측면이 나타난다.

4. ②
ㄱ. 가영이가 수와 연산에 관한 스키마를 갖고 있지 않으면 $2ab$를 234라고도 쓸 수 없다. 스켐프에 근거할 때 가영이는 수와 연산에 관한 잘못된 스키마를 가지고 있다.
ㄴ. 나현이의 오류는 문자 선택의 자유성을 이해하지 못한 것으로 해석될 수 있다.
ㄷ. 다은이는 문자 앞에 +나 +가 생략되어 있는 경우 그 문자는 양수라고 생각하여 문자가 나타내는 대상을 자연수 범위에서만 생각하는 것을 볼 수 있다.
ㄹ. 갈등상황(초과부하과제) 등을 제공하여 나현이와 다은이가 산술적 사고에서 대수적 사고로 이행하는 데 도움을 줄 수 있다.

5.
디오판토스는 미지수를 표현하기 위해 문자를 도입하였다. 비에트 시대에는 문자를 미지의 양 뿐만 아니라 주어진 양을 나타내는 데에도 사용하였다. 이와 같이 미지수 뿐만 아니라 임의의 상수까지 문자를 사용하여 나타내게 되면서 해법을 공식화하여 방정식의 일반해를 나타내는 것이 가능해졌다.
역사발생적원리.
학생들에게 수학사를 학습자의 현실적 상황에 맞게 재발명하도록 해야 한다.

6.
$(-4)\div 2=(-2)$.
기하적 측면에서 1사분면에서만 정의되었던 반직선이 $x<0$인 범위인 3사분면으로 확장된다.
대수적 측면에서 음수를 처음부터 형식적으로 취급하여 기존 체계에서 성립하는 나눗셈 연산에 대한 성질이 그대로 유지되도록 수 체계를 확장한다.
연결.

<기하(측정 포함)>

1.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
기하 및 위상	5	70	지식 및 적용	방승진
출제 내용 관련자료	자작			

(본래 정다면체의 면의 모양)
=(본래 정다면체의 한 면에 이웃하는 면의 개수)
=(쌍대 정다면체의 한 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수)
이므로 다음과 같은 보조표를 생각한다.
그리고 표에서 면의 모양과 한 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수가 정다면체의 모양을 결정하므로 쌍대 정다면체를 구할 수 있다.

정다면체	면의 모양	한 꼭지점에 모이는 모서리의 개수	쌍대 정다면체의 면의 모양	쌍대 정다면체	쌍대 정다면체의 한 꼭짓점에 모이는 모서리의 개수
정4면체	정3각형	3	정(3)각형	정(4)면체	3
정6면체	정4각형	3	정(3)각형	정(8)면체	4
정8면체	정3각형	4	정(4)각형	정(6)면체	3
정12면체	정5각형	3	정(3)각형	정(20)면체	5
정20면체	정3각형	5	정(3)각형	정(12)면체	3

* 채점기준
각 정다면체에 대하여 1점씩 배점하고, 한 행에서 둘 다 맞은 것만 1점을 준다.

2.
2-1. 증명에 대한 학생들의 생각과 증명 지도 방안

- 학생 갑은 증명 방법의 발견을 위한 탐색에 어려움을 겪는다. 분석적 방식의 지도 없이 종합적 방식으로만 증명을 지도받았기 때문이다.
- 학생 을은 삼각형과 관련된 증명 방법의 발견을 삼각형의 합동 조건으로만 간주하고 있다. 이는 다양한 발견의 맥락을 고려하지 않고 합동 조건을 형식적으로 고착시키는 지도에 기인한 것이다.
- 학생 병은 이미 참으로 알고 있는 익숙한 사실에 대한 증명의 필요성을 느끼지 못하고 있다. 이는 조직화 수단으로서의 증명보다 정당화 수단으로서의 증명만을 강조하였기 때문이다.
- 학생 정은 증명의 일반성을 이해하지 못하고 있다. 이는 증명에서 삼각형은 임의의 기하적 대상을 나타내는 다가이름이라는 사실을 강조하지 않았기 때문이다.

- 증명 지도 개선 방안

① 증명 지도에서 분석적 방법과 종합적 방법을 활용한다. 분석적 방법을 통해 증명 아이디어를 탐색・발견하고 종합적 방법을 활용하여 증명을 완성하는 것이다.
② 다양한 발견의 맥락을 제공한다. 증명해야 할 완전한 명제를 제시하기보다 가정에 해당하는 조건만을 제시하여 이를 분석하게 한다.
③ 조직화 수단으로서의 증명을 도입한다. 정의가 아닌 정의하기, 증명이 아닌 증명하기, 즉 국소적 조직화 활동을 통해 증명을 지도한다.
④ 증명과정에서 나타나는 삼각형은 특정한 삼각형이 아니라 임의의 삼각형을 나타내고 있음을 설명한다.

2-2. (나)의 지도 방안

① 가정에 해당하는 조건을 찾아보게 하고 그 조건을 분석하게 함으로써 증명에서 사용되는 다양한 발견의 맥락을 경험하게 한다.
② 분석법을 활용한다. $\overline{PO}=\overline{QO}$가 성립한다고 가정하고 이로부터 유도될 수 있는 명제를 유도하고 다시 이로부터 유도될 수 있는 명제를 유도하기를 반복하여, 이미 참인 명제 $\triangle OPA \equiv \triangle OQC$에 도달하게 한다. 이때 학생들의 수준에서 참으로 인정되는 사실을 국소적으로 조직하는 국소적 조직화를 활용한다.
③ 분석의 과정을 거꾸로 하여 $\triangle OPA \equiv \triangle OQC$로부터 출발하여 $\overline{PO}=\overline{QO}$를 증명하도록 지도한다. 이때 평행사변형 ABCD는 임의의 평행사변형(기하학적 대상, 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형)임을 설명한다.

3.

- <u>㉠에서 개선이 필요한 부분</u>

추론 능력 신장을 위한 유의점으로 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 것을 명시하고 있다. 교사는 ㉠에서 명백한 힌트를 제공하여 학생들이 학습할 수 있는 환경을 제거하고 있으므로 개선이 필요하다.

교사는 학생들이 선분 AB, AD를 늘이거나 줄여보면서 탐구하고 개연적 추론을 통해 삼각형의 결정조건에 대해 추론하고 이에 대하여 적절한 근거를 설명하도록 지도하여야 한다.

- <u>㉡의 장점</u>

의사소통 능력 신장을 위한 유의점으로 수학 학습 과정과 결과를 말, 글, 그림, 기호, 표, 그래프 등을 사용하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 것을 명시하고 있다.

㉡에서 교사는 나영이가 한 말을 다른 학생들이 이해할 수 있도록 자세히 설명해보도록 하고 있다. 이후 나영이는 자신의 수학 학습 과정과 결과를 말과 글, 그림 등을 사용하여 다른 학생들과 효율적으로 의사소통하려고 시도하고 있다.

4. ②

ㄱ. 국소적 조직화는 관계적/추상적 인식 수준(비형식적 연역 수준)에 해당하는 활동

ㄴ. 조직화 수단으로서의 증명(정당화)

ㄷ. 원론의 조직화 방식은 전반적 조직화이다.

5.

5-1.

2015년 개정 수학과 교육과정의 교수・학습 방법에서 태도 및 실천 능력을 함양하기 위한 유의점은 다음과 같다.

① 수학을 생활 주변과 사회 및 자연 현상과 관련지어 지도하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하고, 수학의 역할과 가치를 인식할 수 있게 한다.

② 수학에 대한 관심과 흥미, 호기심과 자신감을 갖고 수학 학습에 적극적으로 참여하게 하며, 끈기 있게 도전하도록 격려하고 학습 동기와 의욕을 유발한다.

③ 학생 스스로 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 평가하는 자주적 학습 습관과 태도를 갖게 한다.

④ 수학적 활동을 통하여 정직하고 공정하며 책임감 있게 행동하고 어려움을 극복하기 위해 도전하는 용기 있는 태도, 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사 결정하는 태도를 갖고 이를 실천하게 한다.

㉠에 반영하고 있는 유의사항은 ④이다. 정다면체의 정의에 대한 토론 수업에서 교사는 ㉠에서 학생 2가 제시한 입체도형이 정다면체가 될 수 없는 이유를 이야기해 보도록 하고 있다. 이는 학생들이 수학적 활동을 통하여 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사 결정하는 태도를 갖게 하려는 의도로 볼 수 있다.

5-2.

- 수학화 과정으로서 국소적 조직화

국소적 조직화는 학습자가 접하고 있는 영역에서 참이라고 인정되는 사실, 즉 학습자의 실제로부터 시작하여 부분적으로 조직화하는 것이다.

학생 1이 정다면체는 모든 면이 합동인 정다각형으로 이루어져 있는 입체도형이라고 약속하면 될 것이라 하였다. 이후 학생들의 대화와 토론이 이루어지면서 정다면체의 정의를 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 모두 같은 입체도형으로 약속하였다. 이는 정다면체 개념에 대한 국소적 조직화가 나타난 것으로서 정의하기 활동이 나타난 것으로 볼 수 있다.

- 사회적 구성주의에 따른 수학적 지식의 구성 과정에서의 사회적 합의

사회적 구성주의에서 수학적 지식은 주관적인 수학적 지식이 공표되고 공표된 지식이 사회에서 공적인 비평과 재형성과정을 거쳐 사회적 합의를 통해 객관적인 수학적 지식이 된다.

학생 1이 정다면체의 정의에 대한 주관적인 수학적 지식을 공표하였다. 이후 학생들의 공적인 비평과 재형성을 거쳐 학생 1, 2가 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 모두 같은 입체도형으로 정다면체를 정의할 것을 약속하여 정다면체의 정의를 합의하였다.

6.

정의하기.

평행사변형의 여러 성질 중 하나를 기본 성질로 설정하여 다른 성질을 이끌어내고 있다.

2수준.

학생은 평행사변형의 성질에 주목하고, 이를 사고의 수단으로 삼아 도형인 평행사변형을 사고의 대상으로 하기 때문이다. 성질 사이의 관계는 인식하지 못하고 있으므로 3수준에 이르지는 못하였다.

<함수(미적분 포함)>

1. 안내된 재발명에 따른 함수 개념 지도

- 1단계를 반영한 학습활동

함수와 관련된 다양한 현상을 제공한다. 증가와 감소에 관련된 현상, 포물선 운동과 관련된 현상, 주기적 변화와 관련된 현상, 지수적 성장과 관련된 현상 등을 제공하고, 직관적으로 탐구하게 하여 함수의 종속성을 인식하게 한다.

- 2단계를 반영한 학습활동

1단계의 학습 경험을 내면화하고 대상화하여 규칙성을 발견하고 이를 언어적 표현, 대응표, 화살표 도해, 관계식, 그래프, 대수식 등 다양한 표현 사이의 번역을 통해 함수 관계의 다양성과 임의성을 인식시켜 수학화 과정을 경험하게 한다.

- 함수 개념의 역사발생을 고려하지 않은 지도의 문제점

(가)를 고려하지 않고 (나)를 지도하는 것은 수학화 과정에 대한 경험은 생략한 채 이미 완성된 기성의 수학을 학생들에게 그대로 부과하는 것이다. 이러한 지도는 진정한 함수적 안목과 함수적 사고의 발달을 어렵게 한다.

▶ 안내된 재발명(guided reinvention): 학생들에게 수학화의 과정을 경험시킬 수 있는 최선의 방법

① 학생들은 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험할 기회를 가져야 한다. 즉 학습 과정은 학생들이 스스로 결과를 찾을 수 있도록 계획되어야 한다.

② 이를 위해 수학사나 학생들의 비형식적 지식과 전략이 교육과정 설계를 위한 근원이 되어야 한다.

㉠ 수학사는 어떤 개념의 발달 또는 수학적 구조의 형성에서 그것들의 발생 맥락을 알려주며, 수학 과정의 하나의 패러다임 역할을 할 수 있다(=역사발생적 원리).

㉡ 학생들은 자신의 비형식적 지식과 전략을 바탕으로 이와 유사한 과정을 밟아 나갈 수 있을 것이다.

(예) 수학사 속의 수 계산의 단축화 과정을 하나의 전형적인 예로 삼아, 학생들이 그 순서와 방법을 그대로 따르도록 안내하는 것이 아닌 자신의 비형식적 지식과 전략을 바탕으로 한 새로운 방법으로 단축화 과정을 발명해 나갈 수 있도록 지도할 수 있다.

③ 수학 교사나 교육과정 개발자는 이러한 것들을 근원으로 한 사고 실험을 바탕으로 학생들이 스스로 답에 이르는 경로를 상상하는 것이 중요하다.

▶ 함수 개념의 역사발생

① 전 함수 단계: 바빌로니아, 그리스

자연의 변화를 관찰하기 위해 함수표를 사용하였으며 함수가 무엇인가에 대한 논의는 없었다. 그리스에서는 함수를 비례관계를 이용하여 기술하였다.

② 기하적 함수 단계(17C): Oresme, Galilei

함수가 의식화되어 정의되고 발달하기 시작하였다. 운동을 그래프로 표현하고 그 결과로 나타나는 곡선들과 관련하여 변량 사이의 관계로 나타내었으며, 곡선과 관련된 함수의 정의는 대부분 다가 대응이었다.

③ 대수적 함수 단계(18C): Bernoulli, Euler

오일러는 $f(x)$라는 용어를 처음 사용하였으며 변량 사이의 관계를 나타내는 해석적인 표현(식)을 함수라 정의하였다. 함수는 일가 대응으로 정의되었으며 함수의 정의에서 변수를 제거하려는 시도가 나타났다.

④ 논리적 함수 단계(19C): Dirichlet, Hankel

함수에서 변수 개념을 없애고 일가성과 임의성을 강조

⑤ 집합적 함수 단계(20C): Bourbaki

▶ 함수 지도 방법(Freudenthal)

① 함수 교육은 함수로서 조직될 필요가 있는, '종속적인' 관련성을 갖는, 학습자 주변의 다양한 현실적인 변화 현상으로부터 출발하여 종속관계에 대한 심상의 구성을 바탕으로 점진적인 수학화 경험을 거쳐 최종적으로 집합 사이의 대응 관계로서의 현대적인 함수 개념에 이르도록 해야 한다.

② 실제적인 물리적, 사회적인 변화 현상을 기술하고 해석하는 경험으로부터 출발하여 점진적으로 함수 개념을 재발명하도록 지도해야 한다.

③ 그래프를 통한 함수의 시각적 측면을 보다 강조하고, 함수와 관련된 내용은 가능한 한 그래프와 결부시켜 생각하도록 지도함으로써 함수적 감각을 발달시켜야 한다.

④ 함수를 다룰 때 함수를 이야기로, 대응표로, 화살표 기호로, 수직선 위에서 함수기계로 경험시키고 여러 가지 함수 경험의 동형성을 강조하며 이러한 함수 경험을 통해 함수적인 관계에 대한 심상이 구성되게 한 다음 이를 기호화, 대수화하는 교수학적 계열이 자연스럽다.

(예) 화살표 기호 $x \rightarrow x+2$, $x \rightarrow x-2$

2.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
수학사	5	60	지식 및 이해	방승진
출제 내용 관련자료	김용운/김용국. 『수학사대전』 pp.270-279, pp.318-356 이우영/신항균. 『수학사』 pp.358-361, pp.370-373, pp.376-379			

- 뉴턴의 업적

'프린키피아'(자연철학의 수학적 원리)를 통하여 미적분학에 관한 논문 출판하였다.

'생성변량'은 '항', '모멘트'는 '무한소의 증분'을 뜻하는데 뉴턴은 A, B의 모멘트를 각각 a, b라 하면 AB의 모멘트는 $aB+Ab$, A^n의 모멘트는 naA^{n-1}, $\dfrac{1}{A}$의 모멘트는 $-\dfrac{a}{A^2}$임을 유도하고 있다. 이 후 연속적으로 변화하는 양을 '유량(流量)', 유량의 순간적인 증가 또는 감소를 나타내는 모멘트를 뜻하는 '유율'이 등장한다, 따라서 어떤 양의 유율을 구하는 것은 미분법, 유율을 알고 그 유량을 구하는 것을 적분으로 생각했다.

- 라이프니츠의 업적

1684년 '학술기요'에서 dx, dy가 도입되었고, 함수의 미분 dy는 등식 $dy=ydx/S_t$로 정의되어 있다. 기호법을 도입하였으며 업적을 다음과 같이 정리할 수 있다.

(1) 무한소 기하학을 무한소 해석학이라는 일종의 수학기호로 전환

(2) 무한소를 취급하는 방법으로서 '고유삼각형'의 개념 확립

(3) 해석학의 중심 개념으로서 '함수' 개념 형성

(4) '차분', '미분' 등의 개념 확립

- 페르마의 업적

1631년쯤 쓰여진 논문 '극대와 극소를 구하는 방법'에서 다항식의 그래프 $y=f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하는 방법을 설명하였다. [극댓값 또는 극솟값의 양측에서는 아주 작은 차이에도 함숫값은 같아야 한다]는 케플러의 법칙에 의해 다음과 같이 $y=x(a-x)$의 극댓값을 구하였다.

x에 아주 가까운 값 $x-\varepsilon$을 취하면 $x(a-x)$는 $(x-\varepsilon)(a-x+\varepsilon)$와 같으므로 $x(a-x)=(x-\varepsilon)(a-x+\varepsilon)$에서 $0=-\varepsilon(a-x)+\varepsilon x-\varepsilon^2$이고 $0=x-a+x-\varepsilon$이므로 $\varepsilon=0$라 두면 $x=\dfrac{a}{2}$이다.

접선의 경우는 $x=a+\varepsilon$, $y=f(a+\varepsilon)$인 곡선 상의 근방점은 접선에 아주 가깝기 때문에 접선 위의 점으로도 간주하여도 된다 등을 이용하여 취급하였다. 구적에 대해서는 '고차의 포물선이나 쌍곡선의 넓이를 구하는 문제', '간단한 평면 또는 회전 포물면체의 중심을 구하는 문제' 등을 다루었다.

* 채점기준

한 인물의 서술(정도에 따라) ……………………………………2점

두 인물의 서술(정도에 따라) ……………………………………4점

세 인물의 서술(정도에 따라) ……………………………………5점

뉴턴 – 유율, 유량 등이나 생성변량, 모멘트 등의 용어가 나오는 등 역학 연구의 일환으로 미적분학을 연구하였음. ($\dot{x}$, $\dot{y}$ 또는 운동이라는 말을 언급해도 고려하여야 함.)

라이프니츠 – 기본적인 미분공식을 유도. 무한소 기하학을 무한소 해석학이라는 일종의 기호수학으로 전환, 해석학의 중심 개념으로서 '함수' 개념 형성, '차분', '미분' 등의 개념 확립.

페르마 – 케플러 법칙에 의해 극대와 극소를 구하는 법을 연구, 접선의 경우도 비슷하게 연구함. 구적에 대해서는 '고차의 포물선이나 쌍곡선의 넓이를 구하는 문제', '간단한 평면 또는 회전 포물면체의 중심을 구하는 문제' 등을 다루었음.

3.

- 무한 수열의 수렴의 정의

① 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라 수열의 일반항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

③ $\alpha \in \mathbb{R}$이고, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $N \in \mathbb{N}$이 존재해서 $n \geq N$일 때 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$이면 수열 $\{a_n\}$는 α에 수렴한다.

- 판단 근거

③의 정의는 종속변수 a_n이 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$을 만족하도록 독립변수 n을 결정한다는 점에서 논리적 전개 순서가 결과→원인의 역순서이다. 따라서 ③의 정의는 논리적인 반전이 뒤따라야 하므로 자연스러운 사고에 역행한다고 판단한 것이다.

- 오개념의 원인

'한없이 커짐에 따라 한없이 가까워진다.' 라는 일상어를 사용하여 수학적 개념을 정의하는 ①의 방식은 ②에서 제시된 상수수열은 한없이 가까워지는 것이 아니므로, 상수수열은 수렴하지 않는다는 오개념이 나타날 수 있다.

* <u>수열의 극한에 대한 직관적 정의와 형식적 정의의 비교</u>

▶ <u>직관적 정의</u>

① 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라, 수열의 일반항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

② n이 변화함에 따라 a_n이 변화하는 함수의 <u>종속적 관점</u>

③ 독립변수 n이 커질 때, 종속변수 a_n이 일정한 값에 가까워지는 <u>동적인 특성</u>

④ '한없이 커지면 한없이 가까워진다' 는 표현에서 알 수 있듯이 항이 끝없이 계속된다는 <u>가능적 무한을 기초</u>

⑤ n의 변화에 따른 a_n의 <u>변화 '과정'</u>에 초점을 맞춤

⑥ 극한값을 '발견' 하는데 초점을 둠, 따라서 <u>극한값을 계산하는 데 유용</u>

⑦ n이 커지는 원인에 의해 종속변수 a_n이 α에 가까워지는 결과를 생각하므로, <u>논리적 전개 순서가 '원인→결과'</u>

▶ <u>형식적 정의</u>

① 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 적당한 $\alpha \in \mathbb{R}$가 존재하여, 명제 "임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $K(\varepsilon) \in \mathbb{R}$이 존재하여 $n > K$인 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$이다." 를 만족하면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

② 각 n에 대해 정해진 조건을 만족시키는 a_n이 존재한다는 식으로 함수의 <u>대응적 관점</u>

③ 수열의 항들이 이미 존재한다고 가정하고 항들과 극한 사이의 관계를 보는 <u>정적인 특성</u>

④ 수열이 무한히 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다고 생각하는 <u>'실무한' 개념을 바탕</u>

⑤ $|a_n - \alpha| < \varepsilon$을 만족하는 <u>'결과' 로서의 극한값</u> α에 주목

⑥ 발견된 수가 극한값임을 '보증' 하는데 초점을 둠, 따라서 <u>극한값을 정당화하는 데 유용</u>

⑦ 종속변수가 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$을 만족할 수 있도록 독립변수 n을 결정한다는 점에서 <u>'결과→원인' 의 역순서</u>임. <u>수열을 $\varepsilon - N$ 방법으로 정의할 경우 자연스러운 사고 방향을 역행하는 논리적인 반전이 뒤따름</u>

4.

- 방식

① 정렬알고리즘(임의의 나열되어 있는 데이터들을 주어진 항목에 따라 크기 순서대로 오름차순 또는 내림차순으로 늘어놓는다. 또 다른 종류는 탐색 알고리즘)

② 반복형은 판단 기호에서 유한 횟수를 반복하여 계산 처리되는 것을 말한다. 이것은 수열의 귀납적 정의에서도 사용되는 방식이다.

③ 위의 순서도에서는 주어진 조건을 만족할 때까지 같은 처리를 반복하는 과정을 반영하고 있다. 이와 같은 처리나 판단이 반복되는 부분을 루프라고 한다.

- 출력값: a를 b로 나눈 나머지
- 지도의 의의

① a를 b로 나눈 나머지를 구할 때 연역적인 접근이 아닌 귀납적인 방법으로 다루어 효과적이다.

② 단순한 경우부터 시작하여 규칙성이 발견되고 자연스럽게 알고리즘 관계로 쉽게 파악된다.

③ 두 항 또는 세 항 사이의 관계는 반복의 수학으로 자연스럽게 발전시킬 수가 있고 계산기나 컴퓨터의 사용을 요구하여 수학이 역동적인 대상이라는 시각을 학생이 갖도록 할 수 있다.

5. ③

* 함수 개념은 (가)에서 식과 표로, (나)에서 식으로 지도하는 것으로 함수의 종속적 측면이 나타난 것이다. (다)에서는 집합 사이의 대응으로 지도하는 것으로 함수의 대응적 측면이 나타난 것이다.

ㄱ. 함수 개념은 종속적 관점에서 대응적 관점으로 발전해왔으므로 역사 발생적 원리에 근거할 때 (가), (나)에서 (다)로 지도하는 것이 바람직하다.

ㄴ. 수학교육현대화운동의 입장으로 옳은 설명이다.

ㄷ. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 중학교에서 지도하고, 함수 개념은 종속과 대응의 두 가지 맥락을 통합하여 지도하게 하였다.

* <u>함수의 정의: 종속관계/대응관계/순서쌍으로서의 함수</u>

① <u>종속관계로서의 함수</u>: x와 y사이의 관계식을 바탕으로 x의 값 하나 정해지면 그에 따라 y의 값이 하나씩 정해지고 이 관계를 y는 x의 함수라 한다.

② <u>대응관계로서의 함수</u>: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x에 어떤 규칙에 의하여 Y의 원소 y가 단 하나 정해질 때, 이 대응 규칙을 함수라 한다.

③ <u>순서쌍으로서의 함수</u>: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x와 집합 Y의 원소 중, x에 대응하는 오직 하나의 원소 y를 택하여 만든 순서쌍 (x, y)들의 집합을 함수라고 한다. 즉,

(F1) $\forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in f$

(F2) $(x, y),\ (x, z) \in f$이면 $y = z$

를 만족하면 f를 X에서 Y로의 함수라고 한다.

* <u>함수 개념의 발달사와 교육사</u>

▶ <u>함수 개념의 발달사</u>

① 전 함수 단계: 바빌로니아, 그리스

② 기하적 함수 단계(17C): Oresme, Galilei

③ 대수적 함수 단계(18C): Bernoulli, Euler

$\Downarrow$ (*)

④ 논리적 함수 단계(19C): Dirichlet, Hankel

⑤ 집합적 함수 단계(20C): Bourbaki

(*)은 달랑베르의 진동현, 푸리에 급수, 디리클레 함수 등 이전 함수 개념으로 설명하기 어려운 상황들을 접하게 되는 과정에서 임의의 대응이라는 개념으로 전환하게 되었고, 변수 개념을 없애고 일가성과 임의성을 강조하게 된다.

㉠ 일가성: 정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 대응된다는 조건, 함수와 함수가 아닌 것을 구분하는 기준

㉡ 임의성: 함수는 어떤 특별한 표현에 의해 기술되거나 또는 어떤 규칙성을 따르거나 또는 어떤 특별한 형태를 가진 그래프에 의해 묘사될 필요가 없다는 조건

▶ <u>함수 개념의 교육사</u>

① 20세기 초 독일의 Klein이 수학교육 개혁에서 ‘함수적 사고(functional thinking)’ 교육의 중요성을 강조하여 이에 따라 ‘메란 교육과정’을 제정하였다.

② Meran 교육과정 이후 「변수 사이의 변화 관계라는 전통적인 고전적인 함수 개념」을 바탕으로 다항함수와 초월함수의 성질과 그 미분법과 적분법에 대한 논의가 중심을 이루었다.

③ 1960년 ‘새수학’ 이후(우리나라는 제3차 교육과정 이후) 집합 사이의 일가성을 갖는 임의적인 대응관계라는 Dirichlet-Bourbaki 식의 현대적인 함수 개념과 일차·이차 함수를 중심으로 한 다항함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 특별한 규칙을 갖는 함수만을 다루는데 중점을 두었다.

* <u>우리나라 교육과정에서 함수 개념의 도입</u>

① 종속 함수 개념: 교수요목기부터 제2차 교육과정

② 대응 함수 개념: 제3차 교육과정부터 제6차 교육과정

③ 종속 함수 개념: 제7차 교육과정, 고등학교에서 대응관계로 함수가 정의

④ 종속관계에 대한 대응관계의 개념: 이후부터 현재까지

* <u>대응관계로서의 함수개념의 교수학적 문제점</u>

① <u>메타인지적 이동</u>이 일어난다. 즉 학습의 초점이 함수 개념 자체에서 함수를 지도하기 위한 ‘함수 기계’나 인위적인 집합 사이의 대응표와 대응도 등으로 옮겨진다.

② 특정한 함수 기호 $y = f(x)$로 고착되는 <u>형식적 고착</u>이 이루어진다.

6. ②

* <u>APOS 이론(Dubinsky 외, 2005)에 따른 실무한 지도</u>

▶ <u>행동(Action)</u>: 어떤 개념을 익히기 위해서는 우선 대상에 대한 변환을 적용해 보게 되는데, 이러한 낱낱의 변환을 ‘행동’이라고 한다.

▶ <u>과정(Process)</u>: 대상에 대한 행동을 반복하면서 반성하는 가운데 그 행동이 내면화되어 하나의 정신적인 ‘과정’이 된다, ‘과정’이란 행동이 <u>**내면화(interiorization)**</u>되면서 동일한 조작을 할 수 있는 정신적 구조가 생긴 상태를 말한다. 과정의 상태에서는 각 단계를 명시적으로 의식하지 않고도 변환시킬 수 있다.

▶ <u>대상(Object)</u>: 과정을 전체적으로 인식하기 시작하면서 과정은 <u>**대상화(encapsulation)**</u>되어 하나의 ‘대상’이 된다. 어떤 것을 캡슐에 싸기 위해서는 그것에서 벗어나서 객관적으로 대상화하는 것이 필요하다.

▶ <u>스키마(Schema)</u>: 행동, 과정, 대상이 조직화되고 연결됨으로써 하나의 일관성 있는 구조가 되면 ‘스키마’가 된다.

• <u>무한 개념에 대한 APOS 이론 적용</u>

① A: 자연수를 1, 2, 3에서 시작하여 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$으로 구성

② P: 행동이 내면화된 가능성 무한의 단계

③ O: 도달할 수 없는 가능적 무한이 대상화되어 도달할 수 있는 무한의 개념인 실무한이 되는 단계

④ S: 실무한이 그 자체로 완결된 전체성(totality)이 됨

• <u>함수 개념에 대한 APOS 이론 적용</u>

① A: 함수식의 <u>**변수에 값을 대입**</u>해 보는 것, 혹은 정의역의 원소를 공역의 원소로 대응시키는 것

② P: 특정한 값을 입력하고 그에 따라 출력값을 생각하는 각 절차에 얽매이지 않고 함수를 <u>**입력과 출력의 상태로 인식**</u>

③ O: 앞의 ‘과정’을 대상화하여 함수를 하나의 집합으로 간주하면서 <u>**집합에 대한 조작**</u>을 하는 것

④ S: 궁극적으로 함수 <u>**개념에 대한 체계적인 구조**</u>가 됨

7. ④

① 전체적 접근만 나타나고 있다.
② 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 번역 활동은 나타나고 있으나, 유리함수 개념을 활용하는 문제의 해결은 나타나지 않는다.
③ 여러 비본질적인 요소(변인)를 변화시키는 것은 나타나지 않는다.
④ 유리함수에 대한 학생들이 추측하게 하고, 공학적 도구를 활용하여 이를 확인하는 경험적 정당화를 시도하고 있다.
⑤ 대수식 조작의 의미에 대한 반성활동은 나타나지 않는다.

* Krabbendam, 질적 접근에 따른 함수 그래프 지도

▶ 그래프 지도의 두 가지 방식

• 점별 접근, 국소적 접근, 전체적 접근

① 점별 접근(한 점에 초점을 두고 그래프를 해석)
(예) 점에 해당하는 독립 변수에 대한 종속 변수의 값 읽기, 종속 변수에 해당하는 독립 변수의 값 읽기 등
② 국소적 접근(한 점의 근방에서 그래프의 변화를 해석)
(예) 증가와 감소, 양수와 음수, 극대와 극소, 기울기의 정도, 불연속인 점, 오목과 볼록
③ 전체적 접근(전체 구간에서 그래프를 해석)
(예) 양의 구간, 음의 구간, 증가와 감소 구간, 연속인 구간, 극대와 극소, 최대와 최소, 단조성, 주기성

• 양적 접근, 질적 접근

① 양적 접근: 정확한 수치적 자료를 이용하여 좌표평면(공간)에 그래프를 정확히 그려 변화의 특징을 설명하고 예측하는 것
② 질적 접근: 어떤 상황을 수량화되지 않은 상태로 개략적으로 표현하고 설명하는 것
㉠ 개략적으로 전체적인 변화를 파악하는 데 유용
㉡ 그래프를 처음 다룰 때 좌표평면이나 모눈종이 등의 고정된 틀이 제시되기 전 비수치적이고 개략적인 형태의 그래프를 그려보고 해석하는 활동에 주목하는 질적 접근으로 시작하고 이후 수치적이고 정확한 표현을 사용하는 양적 접근으로 전환하는 것이 바람직하다.

* Janvier의 번역 활동에 따른 함수 지도

① 함수의 표현 양식: 상황·언어적 표현, 표, 그래프, 공식
② 번역 과정

	상황·언어적 표현	표	그래프	공식
상황·언어적 표현		측정하기	그래프 개형 그리기	모델링
표	읽기		점 찍기	공식 알아내기
그래프	해석하기	점의 좌표 읽기		곡선 알아내기
공식	매개변수 인식하기	계산하기	그래프 개형 그리기	

• 그래프 개형 그리기, 해석하기

㉠ 함수에 대한 기본적 이해가 시작되는 지점이다.
㉡ 주어진 공식에 수를 대입하여 표 만들기(공식→표) → 적당한 축적을 통해 점을 찍어 부드러운 곡선으로 만들기(표→그래프)
㉢ 그래프의 증가 구간, 불연속과 같은 전반적인 특성을 개관하고, 그래프에 맞는 상황을 찾아 의미를 부여하게 한다(그래프→상황·언어적 표현).

• 측정하기, 식 알아내기, 곡선 알아내기

㉠ 측정하기, 식 알아내기: 문제 상황에서 측정한 결과를 표로 나타내고 그에 적합한 대수식을 찾는 과정
㉡ 곡선 알아내기: 함수의 대수식과 그래프를 연결하는 과정

• 매개변수 인식하기

식에서 변수가 여러 개 있는 경우 매개변수를 가려내고 매개변수에 따른 함수의 변화를 이해하는 과정(예: 원의 극좌표 표현)

• 대수적 모델링

주어진 상황 또는 언어적 진술에서 변수를 인식하여 기호화하고, 변수 사이의 함수 관계를 찾아 문제를 해결하고 문제 상황에 적합하게 해석하는 것이다.

8. ②

① <A>는 실수체를 엄밀하게 정의되어야 한다는 필요에서 출발한 해석학의 산술화의 결과로 만들어진 정의이다.
② <B>는 함수의 연속을 지도하기 위해 학문 수학을 학교 수학으로 변환하는 과정에서 학생의 사고와 상황을 고려한 개인화와 배경화가 나타난 결과이다.
③ 교수학적 변환론의 관점에서 삼원적 관계를 강조
④ <B>는 함수의 종속의 관점을 취한다.
⑤ 한 점에서 “가까우면” 그 점에서의 함숫값들도 “가까워야 한다.”라는 한 점 근방의 근접성을 보존한다는 수학적 아이디어를 개념화한 것이다.

* 해석학의 산술화(Arithemetrization of Analysis)

① 연산을 사용할 수 있는 범위를 모르고 적용하는 데서 오류가 발생
② 달랑베르: 해석학의 기초에 대한 실제적인 방안 제시
③ 라그랑주: <함수 해석학론>
④ 가우스: 수학적 엄밀성의 새롭고 수준 높은 표준 제시
⑤ 코시: 연속, 미분가능, 정적분을 극한 개념으로 정의
⑥ 리만: 모든 유리수에서 연속이지만 모든 무리수에서 불연속인 함수
⑦ 바이어슈트라스: 모든 점에서 연속, 모든 점에서 미분불능 함수
㉠ 실수가 엄밀하게 유도되어야 한다.
㉡ 유클리드 기하도 해석적 표현으로 실수계에 기초를 둘 수 있다.
㉢ 유클리드 기하에 모순이 없다면 다른 기하학에도 모순이 없다.
㉣ 실수계가 무모순성의 특징을 가지면 수학에는 모순이 없다.

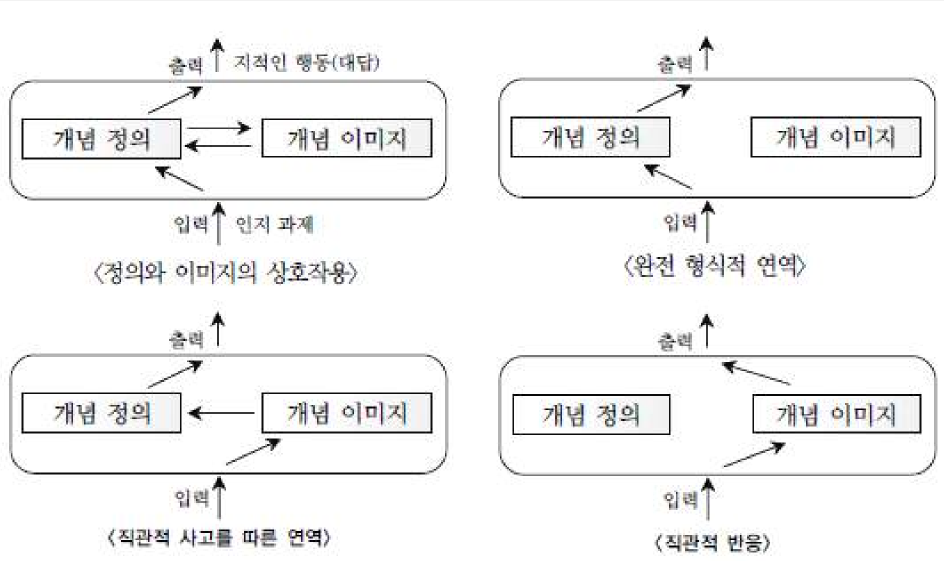
9. ①

① 수열 그래프를 수학적 수단으로 사용하여 문제에서 구한 극한값이 참인지 확인해보게 하는 활동이다.
② 즉각적인 피드백을 제공하여 수열 수렴의 개념의 이해를 돕는다.
③ 학교수학에서 수열의 수렴의 정의는 일상어적인 표현으로 되어 있다. 개념 정의를 이해할 때 개념 이미지를 동원하는 것이 효과적일 수 있으나 수학적 개념과 일상어가 뒤섞여 수학적 개념에 대한 부적절한 개념이미지를 갖게 되어 오개념을 유발할 수 있다.
④ 옳은 설명
⑤ 옳은 설명

* <u>개념 이미지와 개념 정의</u>

- 개념 이미지(concept image): 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조
- 개념 정의(concept definition): 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의

① 공식적인 개념 정의가 학생의 인지구조에 동화 또는 조절을 거쳐 적절한 개념 이미지로 형성되지 않으면 그 개념은 오래 지나지 않아 잊혀질 수 있으므로 개념 정의를 이해할 때 개념 이미지를 동원하는 것이 효과적이다. 그러나 개념 이미지를 거치는 과정에서 여러 가지 오류가 나타날 수 있다.(개념 정의와 개념 이미지 사이의 마찰)



〈개념 정의와 개념 이미지가 상호 작용하는 방식, Vinner, 1991〉

② 개념 정의보다 직관적인 개념 이미지에 의존했을 때의 예

㉠ $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$과 같은 교대수열은 0에 수렴하지만, 진동하는 수열의 개념 이미지를 먼저 떠올리게 되면서 '교대 수열은 극한값이 없다'고 잘못 판단한다.

㉡ 수열 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n}$ 등을 좌표평면에 나타내면서 수열은 끊임없이 진행하면서 변화한다는 생각을 갖게 되어, 상수수열의 극한값은 존재하지 않는다고 잘못 판단한다.

㉢ 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있으면 연속이고 끊어져 있으면 불연속이라고 판단한다.

10. ⑤

뉴턴의 관점이다.

11. ③

ㄱ. '1에 아주 가까이 가기는 하지만 1은 아닐 것'이라는 학생의 의견에 근거할 때 이 학생은 순환소수에 대한 가능적 무한의 관점을 취하고 있다.
ㄴ. 교사가 지도하는 극한 개념은 학생의 극한 개념이 '대상화'된 수준에 가깝다.
ㄷ. 수렴하지 않는 무한급수에서는 급수의 값이 유일하지 않은 경우가 있다(리만 재배열 정리). 유한에서 성립하는 성질이 무한에서도 성립할 것이라는 개연적 추론은 항상 참인 명제를 도출하지는 않는다.

- <u>Sfard(1991), '내면화', '압축', '실재화' 단계</u>

① 계산적인 조작이 추상적인 대상으로 전이되기 위해 내면화, 압축, 실재화의 세 단계를 거쳐야 한다.
② 세 단계는 위계적인 특성을 가지고 있으며, 실재화된 개념이 새로운 조작 대상이 되면 세 단계가 다시 반복되면서 이미 형성된 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달된다.

▶ 해석학에서 다루는 ε 개념을 엄밀한 설명으로 전환하는 단계

㉠ <u>내면화 단계</u>
$\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|=0.01,\ \cdots$을 만족하는 n을 구하고,
$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<0.01,\ \cdots$을 만족하는 n을 구해봄으로써 n이 커짐에 따라 <u>각각 대응되는 $\frac{1}{n}$의 값의 상황을 추정</u>

㉡ <u>압축 단계</u>
$\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|=0.01,\ \cdots$의 우변을 특정한 수가 아니라 임의의 작은 양수 m이 되도록 하며 이러한 과정을 통해 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<m$과 같이 <u>더 일반화된 경우를 추정</u>

㉢ <u>실재화 단계</u>
'<u>임의의 양수</u> ε에 대하여 $0 \le a \le \varepsilon$이 성립하면 $a=0$이다'라고 이해

- <u>실무한의 정의와 예</u>

① 실무한이란 무한을 존재하는 실체로 여기는 것이다.
(예)
㉠ 자연수 전체, 정수 전체, 유리수 전체, 실수 전체, 복소수 전체의 집합을 각각 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$로 나타냄
㉡ $0.666\cdots = 2/3$
㉢ $\sqrt{2}=1.4142\cdots$
㉣ x_0에서의 미분계수를 $f'(x_0)$와 같이 나타내기
㉤ 넓이를 구분구적법이나 정적분으로 구하기
⇒ 위 예들은 모두 자연수 전체나 실수 전체, 무한소수를 완결된 것으로, 순간변화율과 극한을 현실적인 존재로 본 경우이다.

- <u>실무한 지도 방법</u>

① 실무한이 학생들에게 어려운 이유
㉠ 학생들에게는 잠재적, 역동적 무한이 자연스럽다.
㉡ 잠재적 무한을 나타내는 수직선, 함수 $y=x,\ y=\frac{1}{x}$ 그래프가 일찍부터 도입되었다.
㉢ 그래프에 $\infty,\ -\infty$가 함께 교수되기 때문이다.
② 실무한의 극복방법
㉠ 무한 관념을 다룰 때의 인간의 일반적인 심리적 어려움을 의식화시켜야 한다.(반영적 추상화 과정 이용)
㉡ 우리의 정신적 양식의 유한성과 실무한 사이를 연결해줄 수 있는 타협적인 모델을 준비할 수 있다.
㉢ 새로운 개념의 논리적 구조와 보다 높은 내적인 일관성과 포괄성을 갖는 이차적 직관을 구성할 수 있도록 지도한다. 즉 새로운 논리적 근거가 있는 해석이 새로운 이차적 직관을 생성하도록 지도해야 한다.

* 박임숙 (2000) 교사의 무한개념 이해도 조사 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A 〈수학교육〉

학생들은 학교에 입학하기 전부터 이미 수와 더불어 생활하며 초등학교에서 셈수로부터 수를 다루게 된다. 셈수란 자연수의 수열로 수세기와 계산활동의 기초(우정호, 1997)가 되는데 이 과정에서 수의 무한을 경험하게 된다.

중학교 수학 교과서에서는 양의 유리수를 확장하여 유리수 개념을 도입하고, 유리수의 소수 표현을 통해 수의 무한 표현을 보이며, 무리수 개념을 도입하여 유리수와 더불어 실수 개념을 완성하고 그것을 수직선 위에 나타내어 실수의 무한 개념을 제시한다.

<u>아리스토텔레스는 무한을</u> '완성감으로 존재하는 것'이지 '현실태로 존재하는 것'이 아니라 하여 <u>가능한 무한</u>(potential infinity)의 출발점이 되었다.

<u>16세기 갈릴레이는</u> 유한적인 개념이 무한의 경우에는 통하지 않는다는 것을 알고 '같다', '더 작다', '더 크다'라는 말은 무한에는 적용시킬 수 없고 유한한 양에만 사용할 수 있다고 주장하였다. 이는 <u>실무한(actual infinity)을 최초로 다루었다</u>는 역사적인 의미를 지닌다. 그러나 갈릴레이는 <u>실무한에 대한 생각을 거부</u>하였다(박세희 역, 1984).

칸토르는 무한집합을 실무한의 개념으로 생각하여 무한집합에서의 크기 개념을 유한집합에서의 그것과 구별하여 집합론을 전개하였다. 두 집합의 원소가 일대일대응이 되면 두 집합의 크기는 같다고 한다(equipotent). 이러한 개념에 근거하여 무한집합의 크기를 비교하는 것은 우리의 직관과 잘 맞지 않는 경우가 많다.

무한 개념의 역사를 통해서 알 수 있는 것은 **무한 개념은** 자연스러운 논리적인 귀결도 아니고 현실 세계에 모델을 가진 개념도 아닌 **순수한 인간정신의 창조물**이며, 다른 어떤 개념보다도 수학적 개념의 기본 특징인 **추상성과 논리성이 강한 인간의 적극적인 의지의 산물**이라는 것이다.

실수의 무한 개념의 기초가 되는 Cantor의 초한기수, 실수의 연속성, 수직선 표현, 실무한과 잠재적 무한 등에 대하여 간단히 살펴본다.

[초한기수]

기수적 관점의 자연수는 Cantor의 접근법이다. Cantor는 무한(infinite)이라는 표현 대신에 초한(transfinite)이라는 개념을 도입하여 무한집합을 더 자세히 분류하였으며, 이와 같은 개념으로 **유리수의 집합은** 조밀하지만 자연수의 집합과 같이 **셀 수 있는 집합**이며, **실수 전체의 집합**은 조밀하지만 유리수의 집합과는 달리 **셀 수 없는 집합**이라는 것을 보였다.

[실수의 연속성]

실수의 연속성은 유리수와 실수를 구분하는 중요한 성질이다. 교과서에서 수의 집합을 확장할 때 자연수로부터 정수, 유리수를 차례로 구성한다. 그리고 유리수를 확장하여 실수 체계를 구성한다. 그리고 유리수를 확장하여 실수 체계를 구성한다. 이때 유리수가 조밀함에도 불구하고 수직선을 채울 수 없음을 알고 그것을 메우기 위해 무리수를 도입한다.

실수의 연속성을 설명하기 위해 도입하는 방법은 유리수 집합의 Dedekind Cut(허민 역, 1995)을 이용하거나 유계인 단조수열의 수렴을 이용하는 것이다.

[실수와 수직선]

수직선은 학교 수학에서 중요한 도구이자 모델이다. 수직선은 초등학교 수학 교육의 초기부터 사용되어 자연수, 분수, 소수, 음수, 무리수 등의 순으로 수를 채워가며 실수와 일대일대응이 됨을 보이게 된다. 실제로 수직선은 실수체계와 동형이다.

[잠재적 무한과 실무한]

실무한이란 집합은 집합의 원소들이 모두 실제로 존재한다고 생각하는 경우이고, 잠재적 무한이란 집합은 계속 커질 수 있으나 그 총체를 가지지 않는 생각이다. Cantor에 의한 집합론은 수집합을 실무한으로 다루었으므로 가능했다.

교과서에서 자연수의 집합을 $\{1, 2, \cdots\}$과 같이 표현하는 것은 잠재적 무한으로 생각한 것이고, $\{x \mid x$는 자연수$\}$와 같이 조건제시법으로 표현함은 집합을 실제로 완결되어 존재하는 것으로 생각하는 것이다.

중학교 2학년 과정에서 나오는 순환소수를 보면 $\frac{2}{3}=0.666\cdots$이라는 표현에서 끝없이 숫자가 반복하여 나오는 수를 완결된 것으로 간주하여 $\frac{2}{3}=0.\dot{6}$과 같이 실무한의 개념으로 취급하였다.

무리수 $\sqrt{2}$도 소수 표현에 의하면 $1.4142135623\cdots$와 같이 무한히 수가 확장되어 가는 경우가 되지만 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이가 되는 수로써 완결되어 존재하는 실무한(박세희 역, 1984)으로 취급되어지고 있다. 이와 같이 수에 관한 개념은 수학을 배워감에 따라 잠재적 무한에서 실무한으로 옮겨갈 수 있다.

교사는 학습상황에서 의사소통을 통하여 학생들에게 지식을 전달한다. 그 의사소통의 수단은 수학적 언어일 수도 있고 우리의 일상언어일 수도 있다. 어떤 사람이 실수의 무한개념을 수학적으로 엄밀하게 배웠을지라도 그것을 일상의 언어로 이해하지 못하는 경우가 있으며, 이러한 상황은 그가 교사가 되었다 할지라도 달라지지 않음을 알 수 있다.

12. ⑤

① 17세기 무렵 의식적으로 사용되기 시작하였으나 동적인 맥락이 강조되었다. 정적인 맥락이 강조된 것은 18세기 대수적 함수개념부터이다.

② 함수 기호 $f(x)$는 오일러와 달랑베르가 사용하였다. 라이프니츠(G. W. Leibniz)와 베르누이(J. Bernoulli)의 서신 교환에서 용어가 처음으로 등장하였다.

③ 오일러(L. Euler)가 함수를 ‘어떤 양이 다른 양에 종속된다면 후자의 함수’라고 표현한 것은 맞으나, ‘변하는 것과 어떤 상수가 결합된 크기’는 베르누이의 정의이다.

④ 19세기 디리클레(Dirichlet) 함수의 출현은 함수에서 변수 개념을 없애고 일가성과 임의성을 강조하게 된다. 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해진 것은 18세기 대수적 함수개념이다.

⑤ 옳은 설명

* 함수 지도

- 함수는 현실 세계의 상황을 이해하기 위해 중요하다.

① 현실 세계의 상황을 함수로 표현하여 문제를 수학적으로 접근하고 상황에 맞게 재해석하는 모델링이 가능하다.

(예) 물체의 운동, 인구 증가, 속도 변화, 주식 변화, 건축 설계, 환경오염, 사물에 이름을 부여, 휴대폰에 번호를 부여

② 변화하는 현상을 관찰하고 설명하며 예측하는 데 도움을 준다.

- 수학의 발전이나 통합에 핵심적인 역할을 하였다.

① 대수와 기하의 통합을 가능하게 한다.

② 미적분과 연계, 연산, 도형의 넓이, 변환, 벡터의 덧셈, 정규분포, 두 집합의 농도 등

- 함수 지도의 방향

① 현실 세계의 현상 속에서 변화를 인식하고, 변하는 대상 간의 연관성이나 종속성을 기술, 해석, 예측하는 능력을 길러주어야 한다.

② 함수의 수학적 본질을 인식하고 그 본질에 따라 수학적 내용을 다룰 수 있는 능력을 길러주어야 한다.

13.

역사 발생적 원리에 근거한 삼각함수 지도

수학의 역사적 발달 과정을 통해 수학적 사고의 인간적인 모습을 접함으로써, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 수 있다는 의의가 있다.

4단계-2단계-3단계-1단계 또는 4단계-3단계-2단계-1단계

삼각함수는 현실의 필요에 의해서 발생하였으며 sin값을 표와 그래프로 나타내는 과정을 거쳐 삼각함수라는 형식적인 수학적 개념으로 발달해 왔다. 따라서 지도 내용은 $\sin x$와 관련된 응용문제를 다루는 4단계에서 출발하여 sin값을 표와 그래프로 나타내는 2단계와 3단계를 거쳐, 마지막으로 삼각함수 $\sin x$를 정의하는 1단계로 재구성하는 것이 적절하다.

* 역사 발생적 원리

① 1960년대 새수학 운동의 결과로는 영재교육에 관심이 많아지고 수학교육의 내용이 풍부해지고 교수법이 개발되며 일부 우수한 학생들의 학업 성취도가 높아졌다. 그러나 많은 학생들의 계산능력이 떨어지고 성적이 하락하여 실패하였다는 평가와 비판을 받게 되었다. 결국 〈새수학 운동〉의 반성으로 〈기초로 돌아가기 운동(Back to Basics)〉이 나왔고, 발생적 원리의 활용이 부각되었다.

② 형식적인 수학교육이 가진 학습의 결함을 반성하고 이를 극복하기 위하여 수학의 발달과정에 따라 수학의 개념을 폭넓게 이해할 수 있도록 교재를 재구성하는 학습지도방법이 역사발생적 원리이다.

③ 역사 발생적 원리는 수학을 완성된 생산품으로써가 아니라 역사적 발생 과정 곧, '수학화' 과정을 되밟게 함으로써 바르게 이해하고 적용할 수 있다는 생각을 바탕으로 출발하였다.

④ 역사 발생적 원리란 수학의 역사적 발달 과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재구성하여 학생들이 수학화 과정을 재발명할 수 있도록 하려는 교재구성 원리이다.

- 역사 발생적 원리의 수학 교수·학습 의의

1) 수학의 유용성 강조

수학은 외적인 필요에 의해 개발되고 연구되었을 뿐만 아니라, 수학 내적인 요구에 의해서 발전했다는 수학의 유용성을 강조할 수 있다.

(예) Geometry(기하학)이라는 단어는 '땅의 측정'을 의미하듯이, 고대 문명 사회의 측량술로부터 기하학이 싹트기 시작했고, 이집트 사람들은 피라미드를 건설할 때 직각을 얻기 위해 3-4-5 직각 삼각형을 사용했다.

(예) 산술은 공학, 농업, 상업, 종교 의식 등을 보조하기 위한 실용적인 도구로 개발되었다.

(예) 삼각법은 천문학과 관련해서 연구되었고, 로그의 발명은 천문학 등에서 발생하는 거대한 계산 문제를 쉬운 문제로 전환시켰다.

(예) 인도-아라비아 수 체계는 그 이전의 수 체계에서 대단히 번거롭던 계산 문제를 간단한 계산 알고리즘을 통해 매우 쉽게 처리할 수 있게 했다.

(예) Descartes의 해석 기하학은 유클리드 기하학에서 마주치는 당혹스러운 문제를 단계적으로 풀 수 있는 방법을 제공했다.

2) 수학의 인간화 도모

세련된 형태의 수학출판물은 마지막 결과를 얻을 때까지의 노력과 인내 및 성공과 실패의 경험 등과 같은 인간적인 면을 숨기고 있다. 그러나 현재의 수학은 인간의 엄청난 노력이 투여된 뒤에야 발견되었으며 수학사를 이용하면 이런 인간적인 요소를 가미함으로써 실제로 더 생동감 있게 수학을 가르칠 수 있다.

3) 수학의 문화적 가치 인식

수천 년 전에 발견된 수학적 사실은 오늘날에도 여전히 유효하다. 서로 다른 시기와 문명사회에서 똑같은 수학적 사실이 발견되고 이용되었음을 수학사를 통하여 알아볼 수 있다.

(예) 피타고라스 정리는 모든 사회에서 가치 있게 사용되었다. 이런 사실을 학생들에게 제시해서 비교하도록 할 수 있으며, 이런 사실의 고려는 학생들에게 수학개념의 보편성을 보여주고, 어떤 수학 이론이 한 사람 또는 한 지역에서만 발견되었다는 잘못된 생각을 없앨 수 있다.

4) 수학 학습의 어려움 이해

현재 우리가 가르치고 배우는 수학은 인류의 역사에 비하면 매우 최신의 지식이며, 수천 년 동안 인류의 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재한다. 짧은 시간 내에 많은 수학을 배워야 하는 학생들에게 어려움이 없을 수 없다.

(예) 음수 개념의 역사: 6세기 인도 수학자들은 음수에 대한 모든 연산 규칙을 활용했다. 그러나 3세기 뒤 아랍 수학자들은 인도수학을 알고 있지만, 그들의 연구에서 이런 것을 찾아볼 수 없다. 17세기 프랑스 수학자 파스칼은 음수의 도입 필요성을 전혀 느끼지 못했으며, 19세기 영국 수학자 드 모르간은 0보다 작은 수를 상상할 수 없다고 생각했다. 음수는 복소수와 함께 16세기에 약간 받아들여졌으며, 19세기에 이르러서야 수로서의 확고한 위치를 차지하게 된다.

5) 교수·학습방법 개선

헤켈의 '재현의 원리'에 따라 인류의 대역적인 과정(어떤 개념에 이르기까지의 과정과 배경)을 수업의 과정으로 활용하는 수업방법이 가능하다.

6) 수학에 대한 흥미 유도

수학교육의 목표에 지적인 영역과 함께 정의적 영역이 강조되고 있다. 수학에 대한 흥미와 긍정적인 자세가 없다면 지적인 영역의 목표를 달성할 수 있다.

(예) 수업 중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있다. 수 체계의 강의 중에 중국, 바빌로니아, 로마의 수 체계를 소개하고, 이를 통해 인도-아라비아 수 체계의 장점과 유용성을 강조할 수 있다. 특히 수 0의 도입에 수천 년이 걸렸고 현재 사용되고 있는 수 체계의 발달에도 수천 년이 걸렸지만, 짧은 시간에 이 모든 것을 배울 수 있다는 사실에 학생들은 경탄할 것이다.

* 정해남 (2012) 예비수학교사를 위한 수학사 활용 방안, 한국수학사학회지

고전적 역사발생적 원리는 생물학자 Haeckel의 개체 발생은 계통 발생을 반복한다는 재현의 법칙에 근거한다. 20세기 Smith, Poincare, Klein 등은 재현의 법칙을 토대로 역사발생적 순서에 따라 수학을 지도해야 한다고 주장하였고, La Cour, Banford, Toeplitz 등은 역사발생적 원리에 따라 수학 교재를 저술하였다. 수학적 개념의 발생이 단절 없이 연속적으로 이루어진다고 보는 것이 고전적 역사발생적 원리의 특징이다.

현대적 역사발생적 원리는 수학의 발달과 개인의 학습과정이 불연속적으로 이루어진다고 본다. 수학적 개념의 발달과 개인의 학습에 대한 완전한 평행성을 수용하지 않으며, 20세기 중반 이후 수리철학의 변화를 반영하고 있다.

Lakatos는 수학을 오류 가능한 인간의 활동으로 보고 연역적 양식이 아닌 추측과 반박에 따른 재구성이라는 새로운 양식을 제안하면서 학생들도 이러한 형태로 학습해야 한다고 주장하였다. 수학적 개념의 역사발생 순서가 아니라 수학적 발견의 논리에 따라 수학 교재를 구성해야 한다고 주장하였다.

Brousseau는 Bachelard의 인식론적장애 개념을 수학교육에 도입하여 교수학적 상황론을 제시하였다. 교수학적 상황론에서는 수학적 개념을 지식의 본질과 관련하여 그 역사발생적 과정을 분석함으로써 학생 스스로 장애를 극복할 수 있는 상황을 제시한다.

우정호는 Freudenthal의 이론을 토대로 현대적 역사발생적 원리를 활용하는 교수·학습의 의의를 다음과 같이 제시하였다.

첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성하여 개념적 사고를 고취하는데 이용할 수 있다.

둘째, 교육과정의 구성에서 자연스러운 내용 배열의 준거가 되며, 수학적 아이디어의 역사적 발달 과정을 따라 자연스럽게 그 이해를 도울 수 있다.

셋째, 수학의 역사적 발달 과정을 통해 수학적 사고의 인간적인 모습을 접함으로써, 학습 동기를 유발하고 수학 학습에 생기를 불어넣을 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명의 발달에서의 수학의 중심적인 역할과 수학의 문화적인 역할을 이해함으로써 수학에 대한 학생의 기존 인식을 바꿀 수 있다.

* 민세영 (2002) 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구, 박사학위논문, 서울대학교

Freudenthal(1991)은 재발명(reinvention)이라는 용어를 선택한 이유에 관하여 말하면서, 발생적 방법은 학습자의 활동에 대해 아무런 언급도 하지 않기 때문에, 발생적 방법이라는 용어를 택하지 않았다고 말한다.

수학의 역사는 점진적인 도식화(schematising)의 학습과정이었다. 아

동들이 인류의 역사를 반복할 필요는 없겠지만, 선조가 멈춘 바로 그 지점으로부터 아동들이 시작해야 한다고 기대해도 역시 안 된다. 어떤 의미에서 아동들은 실제로 일어났던 역사를 반복해야 하는 것이 아니라, 현재 우리가 충분히 운이 좋아서 알고 있는 그런 사실을 우리의 선조들이 알고 있었다면, 그때 일어났었을 그 역사를 반복해야 한다 (Freudenthal, 1983)

Freudenthal은 단지 발생적 방법(generic method)이라고 말하고 있지만 여기서의 발생은 심리발생이 아닌 역사발생을 말하는 것이므로 역사발생적 원리라는 용어를 사용할 수 있다.

14. 크라벤담, 폴리아, 극단적인 교수 현상, 유의점(2015)

- 크라벤담의 질적 접근과 양적 접근의 관점

(가)는 시간에 따라 변하는 물의 높이를 수량화되지 않은 상태로 개략적으로 표현하고 설명하는 것으로 질적 접근에 따른 그래프 지도 방식이다. (나)는 표를 작성하여 그래프를 그리는 활동이다. 이는 정확한 수치적 자료를 이용하여 좌표평면에 그래프를 정확히 그리고 그 변화의 특징을 설명하는 것으로 양적 접근에 따른 그래프 지도 방식이다.

- Polya 공통 발문

Polya의 문제해결 이론에서 반성 단계는 문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 생각해 보는 단계이다.

(가)와 (나)의 문제를 해결하는 반성 단계에서 적절한 교사의 공통 발문은 '결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?' 이다. (가)의 질적 접근을 양적 접근으로, (나)의 양적 접근을 질적 접근으로 생각해 보게 함으로써 함수 그래프에 대한 이해를 높일 수 있다.

('결과를 점검할 수 있는가?' : 문제 해결 과정을 검토하여 오류를 발견하고 수정하거나, 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 이해를 높일 수 있다.)

- 극단적인 교수학적 현상

(가)에서 주의해야 할 극단적인 교수학적 현상은 메타인지 이동이다. 함수 그래프 지도를 위해 도입된 교수학적 보조수단인 용기에 물을 채우는 활동에 학생들의 사고가 집중되어 학습목표를 달성하는 데 어려움이 생길 수 있다.

(나)에서 주의해야 할 극단적인 교수학적 현상은 토파즈 효과이다. 학생들에게 그래프를 보고 물의 양의 변화를 설명하도록 했을 때 교사가 명백한 힌트나 정답을 제시하여 학생이 학습할 수 있는 환경을 제거할 수 있다.

- 함수 그래프에 대한 교수·학습 상의 유의점

2015 개정 수학과 교육과정의 함수 그래프 지도에 대한 교수·학습 방법 및 유의 사항은 다음과 같다. 그래프는 증가와 감소, 주기적 변화 등을 쉽게 파악할 수 있게 해 준다는 점을 인식하게 한다.

* 중학교 (3) 함수 [1] 좌표평면과 그래프, 변화된 내용

함수 영역에서 학생들은 대수적 접근 방식을 선호하는 경향이 뚜렷하나 각 절차의 의미와 그 관계에 대한 이해는 부족하며 그래프를 전체적인 변화의 관점에서 접근하지 못한다. 설혹 그래프를 변화의 관점으로 접근하는 경우라도 변화의 인식은 선형적인 수준에 머무르고 있다(박선화 외, 2011).

중학교 1학년에서 현실 세계의 다양한 상황을 표, 식, 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석하고 설명하는 과정을 충분히 거친 후, 중학교 2학년에서 함수의 개념을 도입하도록 성취기준이 변경되었다.

중학교 1학년의 '좌표평면과 그래프' 에 "[9수03-02] 다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다." 는 성취기준으로 기존의 성취기준이 변형되었다. 이에 따라 '학습 요소' 에서도 '함수의 그래프' 대신 '그래프' 용어가 제시되었다.

같은 맥락에서 '교수·학습 방법 및 유의 사항' 에도 몇 가지 변화된 내용이 있는데, "**실생활에서 좌표가 사용되는 예를 찾아보고 이를 수직선과 좌표평면 위에 표현해보며, 그 유용성과 편리함을 인식하게 한다.**" 와 "**그래프는 증가와 감소, 주기적 변화 등을 쉽게 파악할 수 있게 해 준다는 점을 인식하게 한다.**" 는 유의 사항이 추가되었다. 좌표를 수직선과 좌표평면에서 다루어 그 유용성을 인식하게 하고, 그래프 표현의 장점이 무엇인지를 파악하여 현상을 그래프로 자연스럽게 표현하고 해석할 수 있도록 하라는 것이다.

15. (가), (라), (나), (마), (다)

16. APOS 이론 적용
행동과 관련하여, 민수는 다항식을 각각의 단항식으로 나눌 수 있다.
과정과 관련하여, 민수의 친구는 계산 과정을 설명할 수 있다.
과정과 관련하여, 재희는 함수에 x값을 넣으면 y의 값이 나온다고 하고 있다.
대상과 관련하여, 교사는 함수를 대상화하여 수와 같이 다룰 수 있다고 하였다.

17.
각 단계가 진행됨에 따라 기부금이 적립되는 양을 수량화되지 않은 상태로 개략적으로 그래프로 표현하고 설명하도록 한다. 그 결과 기부금이 적립되는 양이 지수적으로 증가한다는 것을 파악하도록 한다.
각 단계마다 적립된 기부금을 직접 계산하기, 식과 표로 나타내기, 좌표평면에 정확하게 그래프를 그리고 변화의 특징을 설명하기.
$2^{n+1}-1 \geq 3000$
(또는 $10000(1+2+2^2+\cdots+2^n)=10000\left(\dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)\geq 30000000$)
치료비 30,000,000원을 모으기 위해서는 최소 11단계까지 미션을 수행해야 한다.

1.

1-1.

- **<u>오개념: '상대도수의 안정성, 충분히 많은 시행'</u>**

  '상대도수가 일정한 값에 가까워지면' : 던진 횟수를 아무리 크게 해도 앞면이 나온 상대도수는 0.5 근방을 진동하므로 상대도수가 0.5에 가까워지기는 하지만 확률이 0.5가 될 수는 없다고 판단

  '실험이나 관찰을 여러 번 되풀이할 때' : 표에서 100회 시행의 상대도수 0.5600을 확률이라고 판단

- **<u>큰수의 법칙, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계</u>**

  큰수의 법칙은 n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X, 사건 A의 수학적 확률을 p라 할 때, 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $N\in\mathbb{N}$이 존재해서 $n\geq N$일 때 $\mathrm{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$이라는 것이다. 임의의 양수가 주어질 때, 충분히 많은 시행을 하면 통계적 확률과 수학적 확률의 차가 그 양수보다 작을 확률이 1이므로, A의 상대도수 $\frac{X}{n}$를 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$로 간주할 수 있다는 것이다.

1-2.

- **<u>오개념 분석: '각 사건이 일어날 가능성이 다르다.'</u>**

  수학적 확률, 즉 경우의 수의 비율로서 확률은 각 경우가 일어날 가능성이 같다는 가정이 필요하다. 학생 갑은 주사위 1이 눈이 나오는 경우와 그렇지 않은 경우가 일어날 가능성이 같다고 판단하여 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이라고 잘못 판단하였다.

  공학적 도구를 활용하여 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 던져보는 실험을 하여 각 눈이 나오는 횟수와 그 상대도수를 표로 나타내게 한다.

  정육면체 주사위의 경우 각 경우가 일어날 가능성이 같으므로, 경우의 수의 비율로서의 확률이 상대도수가 가까워지는 $\frac{1}{6}$과 같음을 지도한다.

  직육면체 주사위의 경우 각 경우가 일어날 가능성이 같지 않으므로, 경우의 수의 비율로서의 확률을 적용할 수 없고, 충분히 많은 시행을 통해 상대도수가 가까워지는 값, 즉 통계적 확률을 사용해야 함을 지도한다. 이때, 충분히 많은 시행으로 상대도수가 가까워지는 값은 수학적 근거가 있음(큰수의 법칙)을 설명한다.

* 신보미 · 이경화 (2008) 확률 오개념의 극복을 위한 시뮬레이션의 활용, 교육과정 평가연구

> 시뮬레이션을 활용하여 확률에 대한 오개념을 극복하고자 할 때 빈도적 관점에서 정의되는 통계적 확률이 주요한 역할을 한다. 통계적 확률은 충분히 많은 시행 결과 얻어진 상대도수에 의해 추정된다. **<u>통계적 확률은 충분히 많은 시행과 상대도수의 안정성을 선험적으로 가정하였다는 측면에서 비판</u>**을 받아왔다.
>
> Shaughnessy(1992)는 충분히 많은 시행이 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 가능해졌으며, **<u>상대도수의 안정성은 큰 수의 법칙에 의해 설명될 수 있다</u>**고 주장하였다. 즉 **<u>통계적 확률은 컴퓨터 시뮬레이션과 큰 수의 법칙을 통해 적절히 지도될 수 있다.</u>**
>
> | |
> |---|
> | 다음 중 일어날 가능성이 보다 높은 경우는?
① 10명의 아이 중 8명 이상이 남자아이일 경우
② 100명의 아이 중 80명 이상이 남자 아이일 경우
③ 두 경우가 발생할 가능성은 같다. |
>
> Fischbein & Schnarch(1997)는 위 문제 상황에 대해 표본 크기 효과(effect of sample size)를 고려하지 않는 오개념에 의해 학생들이 ①과 ②의 비율이 같다는 점에만 주목하고 표본의 크기가 다르다는 사실은 간과함으로써 ③을 정답으로 택하는 경향이 있다고 지적하였다. **<u>이러한 오개념은 표본의 크기가 증가함에 따라 상대도수가 수학적 확률에 가까워지는 경향이 있음을 설명해 주는 큰 수의 법칙을 고려함으로써 극복될 수 있다.</u>** 특히, Biehler(1991)는 큰 수의 법칙이 컴퓨터 시뮬레이션을 통해서만 적절하게 지도될 수 있다고 설명하였다.
>
> Dooren 등(2002)은 주사위를 여러 번 던졌을 때 5의 눈이 6번 중 2번 나올 가능성과 3번 중 1번 나올 가능성이 같은지를 묻는 질문에서 대부분의 학생들이 '같다'는 잘못된 응답을 하였다고 지적하였다. 이러한 오개념은 시뮬레이션을 도입하여 **<u>각 사건이 일어날 가능성이 다르다는 것을 실제 경험하게 함으로써 교정할 수 있다.</u>**
>
> Shaughnessy 등(2003)에 의하면 확률 문제 상황을 수학적인 맥락에서만 다루게 되면 오히려 변이성을 고려하지 않는 오개념, 결과적 접근 판단 전략에 의한 오개념 등이 강화될 수 있으므로 **<u>확률 개념에 대한 여러 관점으로 보강된 새로운 모델이 필요하다.</u>** 확률 지식에 대한 이해가 지나치게 이론적 맥락에서만 진행되면 확률 오개념 극복을 위해 시뮬레이션을 활용하는 과정이 의미있게 진행되지 않을 수도 있다.

* **Shaughnessy, 확률적 사고 수준**

확률적 사고는 비확률적 사고, 원시 확률적 사고, 발생 단계의 확률적 사고, 실제적인 확률적 사고라는 네 가지 수준을 거쳐 발달한다. 하지만 네 가지 수준은 반드시 선형적이고 배타적으로 존재하는 것은 아니다.

① <u>비확률적 사고</u>: 수학적 판단이 아닌 신념에 근거하여 판단하거나 단일한 결과만을 예측하고 확인한다. 우연한 현상이나 무작위 사건에 대해 주목하지 않으며, 주목하더라도 잘 이해하지 못한다.

② <u>원시 확률적 사고</u>: 확률 판단 전략을 초보적이고 직관적으로 사용하는 수준, 과거 경험에 기초하여 판단하고, 우연이나 무작위 사건의 의미를 불완전하게 이해한다.

③ <u>발생 단계의 확률적 사고</u>: 간단한 문제 상황에서 수학적 확률이나 통계적 확률의 개념을 적용하는 수준, 신념과 수학적 모델 사이에 차이가 있음을 인식한다. 확률 교육은 받은 초기 단계의 수준이다.

④ <u>실제적인 확률적 사고</u>: 우연에 대한 여러 수학적인 관점(통계적 · 수학적 확률 등)의 이해하고 그들 사이의 차이점을 알고 적절하게 적용할 수 있다. 불확실한 상황에서 수학적인 확률 개념을 적용하여 판단하고 그 판단의 전제조건과 제한점도 이해할 수 있다.

* <u>확률 지도</u>

- <u>확률의 역사</u>

① 확률은 16세기에 이르러서야 수학화 되기 시작하였으며 19세기 초에 Laplace에 의해 확률 이론의 집대성이 이루어졌고 많은 패러독스가 제기되면서 20세기 들어와 확률론의 공리화가 확립되었다.

② 1654년 Pascal과 Fermat 서신 왕래(1679년 내용 공표)

㉠ de Mèrè의 문제: 첫 번째 게임에서는 주사위 한 개를 네 번 던질 때 적어도 한 번 6이 나오면 이기는 것으로 한다. 두 번째 게임에서는 주사

위 두 개를 24번 던질 때 $(6, 6)$이 적어도 한 번 나오면 이기는 것으로 한다. 어느 쪽이 유리한가?

㉡ 상금의 분배 문제: 게임을 시작할 때 A, B 두 사람은 같은 내기돈을 건다. 정해진 횟수만큼을 먼저 이기는 사람이 내기돈을 모두 가지기로 한다. 그러나 두 사람 중의 누구도 필요한 횟수만큼 이기기 전에 게임이 중단될 수밖에 없는 상황이 일어났다. 만일 승자가 되기 위해서 5게임을 먼저 이겨야 하고, 게임이 중단된 상태에서 A가 $4:3$으로 유리한 상황이라고 하면 내기돈을 어떻게 나누어야 공정한가?

㉢ Pascal과 Fermat의 방법은 가능한 경우를 모두 고려한다는 생각 제시. 가능한 경우를 모두 고려하는 것이 실제적인 우연 현상을 구조화하는 편리하고 이해하기 쉬운 도구로서, 그리고 확률 직관을 보다 명확화하는 도구로서 처음으로 사용되었다는 점에서 역사적인 의의를 갖는다.

- 확률의 여러 가지 정의

▶ 수학적 확률(Laplace의 고전적인 확률)

어떤 사건 A의 확률 $P(A)$는 시행에서 가능한 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비와 같다(개개의 경우가 일어날 가능성이 같다는 가정('이유불충분의 원리')이 암묵적으로 전제되어 있다.)

① 시행을 하기 전에 확률값을 계산할 수 있다.(확률에 대한 일종의 선험적인 접근)

② 적용 상황에서 일어날 가능성이 같은 근원사건이 어느 것인가를 결정하는 문제가 발생한다.

③ 개개의 경우가 일어날 가능성이 다를 경우 문제가 된다.

(예) 압정, 윷, 찌그러진 주사위 등

④ 시행에서 가능한 수가 무한한 경우 적용이 어렵다.

▶ 통계적 확률(도수적 관점으로의 확률)

① 시행의 반복을 통하여 나타나는 규칙성에 의해 확률을 구하는 방법이다.

② 반복 시행에서 한 사건이 일어나는 횟수의 전체 시행 횟수에 대한 상대도수로부터 확률이 추정되고 실제적인 시행이 이루어진 후에 관찰된 정보에 근거하여 귀납적으로 확률값을 결정한다.

③ 확률의 상대도수의 극한이다.

④ '경험적 확률'이라고도 한다.

▶ 주관적 확률(우연 상황에 대한 주체의 평가라고 보는 관점으로의 확률)

① 주체는 자신의 마음 가운데 있는 사전 정보와 반복 시험에서 얻어지는 도수에 대한 경험적인 자료라는 두 가지 정보를 결합하여 당면한 사건의 확률을 그때그때 새롭게 결정한다.

② 경험으로부터 학습한 결과가 확률이다.

③ 주체의 신념의 정도에 따라 서로 다른 값으로 제시될 수 있다.

④ 해당 분야의 전문적인 지식수준이 향상되면 일정한 값으로 수렴한다.

▶ 공리적 확률(구조적 접근으로의 확률)

① 확률론의 공리 체계 및 이로부터 연역되는 정리에 의해 암묵적으로 정의되는 개념이다. (단, 확률론의 구조가 확률에 대한 가능한 해석을 암시해 주지만 확률 자체의 본질을 분명히 해주지는 못함)

② 확률론에서 Kolmogorov의 공리체계 위에 건설된 구조적인 확률 이론은 고전적인 관점, 도수적 관점 그리고 주관적 관점 모두를 옹호하는 입장이다.

* Kolmogorov의 공리

(1) 임의의 사건 E에 대해, $P(E) \geq 0$

(2) 전체 표본공간 S에 대해, $P(S) = 1$

(3) $E_1, E_2, \cdots$가 서로 배반사건일 때, $P(\bigcup_i E_i) = \sum_i P(E_i)$

- 효과적인 확률 지도

▶ 확률 지도 시 배경적인 문제점

① 반직관적이고 오류 가능성을 포함하므로 제한된 지도 내용을 갖는다.

② 확률의 의미에 대해 여러 가지 관점이 병존하므로 가르치는 각도가 비통일적이다.

▶ 현행 학교수학에서의 확률 지도

① 확률 개념의 지도보다 계산 패턴에 따라 여러 가지 복잡한 사건의 확률을 구하는 형식적인 알고리즘의 지도를 강조하고 있다.

② 확률 지도 후 학생들은 여전히 우연현상과 확률에 대한 실제적인 의식 변화가 부족하며, 주관적 확률을 유지하고 있다.

③ 수학적 확률이나 통계적 확률이라는 수학적인 정의와 여러 가지 유형의 사건에 대한 확률 계산 방법을 직접 가르치고 이를 익히는 연습만을 강조하고 있다.

④ 수학적인 확률 이론만으로는 확률개념의 애매한 특성을 해명하기 어렵다는 점을 교사가 이해 못하고 있다.

▶ 효과적인 확률 지도

① 확률 지도의 여러 특성을 교사가 충분히 숙지하고 학생들 스스로 동화와 조절에 의해서 확률적 사고를 구성할 수 있도록 지도해야 한다.

② 학습자의 확률적 직관으로부터 출발하여 그것을 점진적으로 변화시켜야 한다.

(예) 생활 장면을 소재로 다양하고 풍부한 확률적 경험을 도입함으로써 우연 현상에 대한 원시적 직관을 수정할 수 있다.

③ 확률 본질의 이해를 강조하고 확률개념의 특성을 보다 폭넓고 구체적으로 논의하는 과정을 이용해야 한다.

④ 확률적 사고의 오류를 수정하고 다각적인 의미가 자연스럽게 파악되도록 지도해야 한다.

(예) 베르트란트 현의 패러독스, St. Petersburg 패러독스

⑤ 주관적인 확률 직관과 무작위 상황 및 그에 대한 수학적 모델 사이의 관계를 고려한다. 이 때, 무작위 상황에 대하여 개인적인 판단으로 시작하여 의도된 수학적 모델과 비교하는 교수가 필요하다.

⑥ 확률 교재는

㉠ 고전적 관점·도수적 관점·주관적 관점을 문제 상황에 따라 선택적으로 적용·조정·통합함으로써 확률의 이론적 실제적 의미를 살려낼 수 있는 내용을 포함해야 한다.

㉡ 구체적인 실험이나 모의실험을 포함해야 한다.

㉢ 개개 학생을 위한 과제보다 공통으로 해결할 수 있는 문제해결을 지향하는 내용이 포함되어야 한다.

㉣ 어떤 판단과 결정을 요하는 상황을 포함해야 한다.

㉤ 주사위, Galton 판, 난수표, 치우친 주사위, 실제적인 확률 상황 등 다양한 무작위 수 발생자를 사용하고 이를 비교하여 공통 성질과 차이점을 분석하도록 제시되어 있어야 한다.

2. ⑤
① [나]를 통해 볼 때 [가]는 의사소통 능력 신장을 위한 문제로도 적합하다.
② 정보가 부족하지는 않다.
③ 산포도를 구하고 있지는 않다.
④ 조르단 효과는 아니다.
⑤ 예리의 경우 최빈값은 없으며, 효진의 경우 최빈값은 학생 수가 아니라 해당 점수이다. 예리와 효진 모두 최빈값에 대한 오개념을 드러내고 있다.

3. ④
ㄱ. 제시문 상황만으로는 학생들이 중심극한정리를 이해했다고 할 수 없다. 따라서 교사가 '공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.'를 근거로 극단적인 교수 현상인 조르단 효과가 나타났다고 할 수 있다.
ㄴ. 모의실험 프로그램은 공의 개수가 따르는 분포가 시행횟수가 충분히 클 때 정규분포를 따른다는 중심극한정리를 학습할 수 있는 환경을 제공하고 있다.
ㄷ. 모의실험 프로그램은 학생의 사고 과정을 대신하고 학습을 안내하는 교사의 보조 수단의 역할을 하고 있다.

4. ⑤
ㄱ. 라플라스의 고전적 확률 정의는 각 사건이 일어날 가능성이 같다는 가정이 전제되어 있으므로, 압정이나 윷은 이러한 정의가 적용되지 않는 상황이 있음을 이해시키는 소재로 이용될 수 있다.
ㄴ. 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 의하면, 확률은 실험이나 관찰을 통해 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.
ㄷ. 작은 수의 법칙(law of small numbers): 도수에 대한 절대적인 안정성이 존재한다고 생각하여 표본의 크기에 따라 변이성에 차등이 있음을 느끼지 못하는 오개념

* <u>확률 판단 전략</u>

▶ <u>대표성 전략</u>
표본이 모집단과 유사하거나 무작위성을 반영하기를 기대하는 것이다.
(예) 성공확률이 10%인 경우 열 번 중 한 번은 성공할 것으로 생각
(예) 동전 6개를 던질 때 HHHTTT보다 HTTHHT가 나타날 가능성이 낮다고 생각

▶ <u>정보의 이용 가능성 전략</u>
판단을 내릴 때 개인적으로 이용할 수 있는 정보에 영향을 받는 것
(예) 최근에 교통사고를 목격한 사람은 교통사고를 당할 확률을 더 높게 추측

▶ <u>조정과 고정 전략</u>
초기값을 정한 후 그 값을 조정하여 답을 얻게 되면서 초기값을 어떻게 정했는가에 따라 다른 값을 얻는 것
(예) $8\times7\times\cdots\times1$의 어림값을 $1\times2\times\cdots\times8$의 어림값보다 크게 예상

▶ <u>결과 중심 판단 전략</u>
사건이 일어날 가능성이 아닌 사건이 실제로 일어날 것인가의 여부를 결정하는 것
(예) 발생 가능성이 50% 초과이면 일어나는 것으로, 미만이면 일어나지 않는 것으로, 50%이면 판단할 수 없는 것으로 생각

▶ <u>인과적 정보에 의한 판단</u>
도수에 관한 정보보다는 인과적 정보에 주목하여 판단하는 것
(예) 주사위의 확률을 구할 때 모양이나 던지는 모습에 근거하여 판단

* 판단 전략은 교정이 쉽지 않으며, 이를 거부하거나 배제하는 것이 아니라, 드러내어 적극적으로 교정할 기회를 주어야 한다.

5.
• <u>확률과 통계 영역의 교수·학습의 유의점</u>
2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 확률과 통계 영역 교수·학습 상의 유의점은 다음과 같다.
① 확률은 실험이나 관찰을 통해 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.
② 경우의 수의 비율로 확률을 다룰 때, 각 경우가 발생할 가능성이 동등하다는 것을 가정한다는 점에 유의한다.
김 교사의 수업에서 30회, 60회, 360회의 상대도수를 나타낸 표를 완성하는 모둠활동 부분, 이후 전체 경우의 수에 대한 해당 사건이 포함된 경우를 세어 11가지 사건이 일어날 가능성을 설명하는 부분에 ①이 적용되어 있다.
김 교사의 수업에서 ㉠에서 각 경우가 발생할 가능성이 동등해야 하는가 하는 학생들의 질문에 대하여 교사는 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 예로 들어 설명하면서 ②를 적용하고 있다.

• <u>피슈베인 확률 직관의 특성과 확률 직관의 발달적 특성</u>
피슈베인은 일차적 직관과 이차적 직관이라는 용어에 의하여, 자연발생적인 확률 직관과 교육의 결과로 형성한 확률 직관을 구분하였다.
학생이 확률을 배우기 이전부터 가지고 있던 확률 직관 즉, 일차직관은 오류 가능성이 높고 주관적 측면과 객관적 측면이 혼합되어 있어 확률 개념을 이해하는 데 방해가 될 수 있다.
확률 직관의 발달은 학생의 인지 발달에 따라 자연스럽게 발달하지 않고 확률교육을 통해 발달한다. 학교 수학의 교수학적 중재를 통해 원시확률직관(일차직관, 확률에 대한 자연스러운 직관)을 거부하고 가능성에 대한 이차직관이 발달한다.
이때 확률 지도는 연역적 사고 방법 뿐만 아니라 귀납적 사고의 가치와 역할을 이해할 수 있도록 지도해야 하며, 일차직관의 한계를 이해하고 수정하여 균형을 추구하도록 하는 것이 중요하다.

• <u>피슈베인 이론의 적용</u>
㉠은 교사의 교수학적 중재를 받기 전의 학생들의 일차 직관에 의한 것으로 볼 수 있다. ㉡은 학생들이 일차직관을 거부하고 이차직관으로 발달하도록 하기 위하여 실험을 통한 귀납적 설명이 이루어지는 상황으로, 교사의 교수학적 중재가 이루어지고 있다.

6. 투키, 탐색적 자료 분석

(탐색적 자료 분석이란 간단한 계산과 그림에 대한 해석에 기초하여 자료 이면에 들어 있는 의미를 파악하는 시도이다. 자료를 표로 정리하고 자료의 추세와 분포에 주목한다.)

㉠ 그래프(줄기와 잎 그림)

수치로 나타내는 방법 외에도 자료를 나타내어 자료의 특징을 파악할 수 있는 지도 내용이다. 탐색적 자료 분석의 관점에서는 현시성을 강조한 지도이다.

㉡ 중앙값

극단적인 값이 포함되어 있는 경우 중앙값은 큰 영향을 받지 않으므로 자료의 특징을 올바르게 파악할 수 있다. 탐색적 자료 분석의 관점에서는 저항성을 강조한 것이다.

* <u>통계 지도</u>

▶ <u>효과적인 통계 지도</u>

① 문제가 제시되면 그 해결을 위해 이용 가능한 자료 찾기
② 표본추출하기(신뢰할만한 자료 찾기)
③ 자료분석하기
④ 확률 모델 찾기
⑤ 확률 모델의 타당성 검토
⑥ 자료분석과 확률모델에 의해 성취될 수 있는 것 논의

㉠ 계산기, 컴퓨터, 그래픽 계산기, Web 등을 통계지도에 적극적으로 이용한다.

(i) 그래프 기법: 자료의 패턴, 구조, 규칙성을 확인하는 주요 관찰도구
(ii) 통계 그래프: 자료의 패턴과 함께 자료의 예기치 않은 특성을 쉽게 드러내주기 때문에 통계적 모델의 적절성을 진단하고 특별한 영향을 주는 극단적인 자료를 확인하는데 이상적인 도구
(iii) 시뮬레이션: 통계적 원리나 절차를 예시하고 입증하는 조정된 경험을 학생들에게 제공
(예) 중심극한정리

㉡ 통계의 입문과정은 자료를 그래프로 나타내고 해석하기, 무작위성, 실험 설계, 추정 등과 같은 폭넓은 개념과 원리에 초점을 맞추어 제시해야 한다.

㉢ <u>초·중·고에 걸쳐 실제적인 탐색적 자료 분석</u>이 보다 적극적으로 도입되어야 하며 통계 실제에서 요구되는 기본적인 개념 중심으로 교재를 구성해야 한다.

㉣ 통계에 대한 평가의 방향: 학생이 학습해야 할 가장 중요한 통계 내용을 반영해야 하며, 통계 학습을 향상시키고 훌륭한 지도를 뒷받침해야 한다.

▶ <u>통계적 추론의 지도</u>

① 통계적 추론에 들어가기 전, 자료 분석에 관한 실제적인 경험을 강조한다.
② 도수분포표로부터 그리고 실제적인 우연현상과 컴퓨터 시뮬레이션에 대한 경험을 통하여, 확률분포 개념을 직관적으로 이해하도록 강조한다.
③ 자료를 살펴보는 경험을 통해 우연 현상이 반복되어 얻어지는 결과의 무작위성과 표본 분포 개념 등을 직관적으로 이해하도록 이끌어 통계적 추론의 아이디어를 직관적으로 이해시킨다.
④ 동전 던지기, 상자로부터 구슬 추출하기 등의 구체적인 시행, 컴퓨터 시뮬레이션, 사고 실험 등과 같은 실제 상황을 통해 표본 통계치의 확률분포인 표본분포를 이해시킨다.
⑤ '이것을 여러 번 하면 무슨 일이 일어날까' 와 같은 질문을 통해 표본분포 개념과 통계적 추론의 논리를 직관적으로 터득하도록 안내한다.
⑥ 실제적인 자료와 관련되는 자료 분석 과정을 확률분포 이론과 통합되도록 구성한다.

7.

첫째, 현실의 맥락을 활용한다는 점이다. 김 교사는 통계가 현실과 단절된 수량적인 자료의 계산 체계가 아님을 알려주고자 실세계의 문제 상황을 제시하였다.

둘째, 통계 개념 지도에서 학생들의 사고를 자극할 수 있는 수학사의 활용을 가능하게 한다는 점이다. 학생들은 교사가 제시한 과제를 해결하면서 평균의 역사적 발생 맥락인 큰 수를 대략적으로 추정하는 문제 상황을 탐구하게 된다.

(a)는 묶음을 만들고 일일이 양의 수를 세어 합을 구하고 있으므로 평균 개념을 제대로 활용하고 있지 않다.

(d)는 〈자료〉의 내용과 비슷하게 양의 수를 구하고 있으므로 평균 개념을 활용하고 있다.

8.

'각각의 경우가 일어날 가능성이 같다고 할 때'

확률의 뜻을 적용하기 위해 만족해야 하는 조건인 곱해서 나올 수 있는 값 1, 2, 4의 각 경우에 대해 일어날 가능성이 같은지 확인하지 않았기 때문이다.

'카드 2장을 뽑는 횟수에 100, 500, 1000⋯을 입력하여 횟수가 많아질수록 어떤 값에 가까워지는지 알아보세요.'

결과를 다른 방법으로 이끌어 내도록 하여 학습한 방법 이외에 보다 다양한 방법을 탐색하도록 한다는 데 의의가 있다. (공학적 도구를 활용하여 직접 구한 결과를 점검하게 한다.)

<Brousseau>

1.

조르단 효과, 학생이 우연히 직각삼각형이 아닌 삼각형을 작도하여 제이코사인법칙을 도출하였다. 문제의 조건에 따르면 학생이 제이코사인법칙을 발견한 것은 아니다. 교사는 학생의 행동을 보고 수학적 지식을 발견하였다고 잘못 판단하였다.

2. ①

① 수학적 지식의 개인화, 배경화 과정을 용이하게 하기 위해 도입된 교수학적 보조수단에 학생들의 사고가 집중되는 것이다.

② 옳은 설명

③ 문제해결력 향상이라는 지도 목적이 교수학적 보조수단인 발견술 자체로 이동하는 것은 메타-인지적 이동이라 할 수 있다.

④ 교수학적 보조 수단의 규약이 늘어날수록 이러한 규약에 학생들의 사고가 집중되기 쉬우며, 그 결과 문제가 발생하기 쉽다.

⑤ 학생의 개인화, 배경화 과정을 간과하고 도입부와 같은 활동 없이 곧바로 전개 부분에서 수학적 개념의 정의를 곧바로 제시하는 것은 형식적 고착이 일어날 가능성을 높일 수 있다.

* 극단적인 수학 교수 현상

▶ 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)

진정한 수학적 지식을 가르치기 어려운 경우 교수학적 고안물이나 발견적 수단 자체를 지도의 목적으로 삼게 되는데 이 때, 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식으로부터 그가 고안한 교수학적 수단으로 이동하는 현상을 의미한다.

▶ 형식적 고착(formal abidance)

① '메타인지적 이동'과 반대로 논리적·형식적으로 표현된 수학적 지식을 곧바로 제시하는 현상이다.

② 메타인지적 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려고 시도하는 교사의 모습이다.

③ 형식적 고착은 학생들로 하여금 수학적 활동이 가진 귀납적 성격을 이해하는 데 도움이 되지 않을 수 있으나, 탈개인화/탈배경화의 과정에서의 어려움을 줄여줄 수는 있다.

▶ 토파즈 효과(Topaze effect)

교사가 가르쳐야 한다는 '교수학적 계약'의 압박 때문에 풀이에 대한 명백한 힌트를 주거나 유도 질문을 하거나 문제와 함께 해답을 제시함으로써 학생들이 지식을 구성하는 것을 방해하거나 그러한 학습 환경을 일소하게 되는 것을 말한다. 상호작용의 깔때기 패턴(funnel pattern of interaction, Bauersfeld, 1988)이라고도 한다.

▶ 조르단 효과(Jourdain effect)

토파즈 효과의 심각한 퇴행이다. 학생과 가르치고자 하는 지식에 대해 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없다는 것을 인정하기도 어려운 상황에서 학생의 행동이나 대답이 사실은 사소하고 평범한 단서나 의미로부터 야기된 것임에도 불구하고 교사는 학생의 그러한 반응을 어떤 특정한 수학적 지식이 형성되었음을 보여주고 있다고 인정해버리는 것을 말한다.

3. ③

ㄱ. 일상어, 과도한 일반화, 은유 등의 영향으로 인식론적 장애가 발생한다.

ㄴ. 인식론적 장애를 극복하는 학습으로부터 형성된 신념으로 이차 직관을 형성하게 된다.

ㄷ. 위와 같은 유형의 인식론적 장애가 나타나게 된 것은 구체적인 활동을 통하여 수학적 지식을 직관적으로 지도하는 데 기인한 것이다. 학생은 인식론적 장애가 느껴지는 지식을 피할 것이 아니라 자신이 성공했던 지식과 새로운 상황에서의 지식의 활용을 비교 분석하여 스스로 반성함으로써 능력을 개발시켜야 한다. 즉, **교사가 수정해주거나 고쳐줄 수 없다.**

* 수학의 인식론적 장애(Epistemological obstacle)

- 인식론적 장애의 정의(Bachelard)

① Bachelard(1884~1962)는 인간의 인식을, '소박한 경험'으로부터 단절(rupture)되어 어떤 이론적 틀(예를 들어, 수학적 이데아)에 흡수됨으로써 이루어지는 불연속적인 과정으로 설명하였다.

② 이러한 '인식론적 단절'을 방해하는 요소를 설명하는 개념이 '인식론적 장애'이다.

- 장애의 기원: 개체발생적/교수학적/인식론적 기원

① 개체 발생적 기원을 가진 장애: 개체의 각 발달기의 한계(특히, 신경생리학적인 한계) 때문에 생기는 장애

(예) 개념이미지(관련된 관념의 집합체): 관련된 다양한 경험을 통해서 오랜 기간에 걸쳐 형성된다.

→ 개념 정의와 갈등을 일으킬 수 있는 잠재적 요인

② 교수학적 기원을 가진 장애: 교육체계 내에서의 어떤 선택이나 행위에 기인하는 듯이 보이는 장애

(예) 소수: '단위가 바뀐 자연수', '소수점이 있는 자연수', '측정수'와 관련 지어주고 연습으로 자동화시킴

③ 인식론적 기원을 가진 장애: 탐구되어야 할 지식에서의 그 형성적 역할 때문에 피할 수도 없고 피해서도 안 되는 장애

- Brousseau, Sierpinska 등의 정의(수학교육의 맥락에 도입)

① 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용한 지식으로서 학생의 인지구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식이다.

② 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이므로 피할 수도 없고, 새로운 지식이 성장 발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다.

- 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인

① 일상어: '집합, 극한, 무한 등'이 일상어로 사용되지만 수학에서 사용될 때는 일상어와 똑같은 의미로 사용되지 않으므로 이러한 일상어가 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학 학습의 장애로 전환된다.

② 직관: 무한 개념이나 극한 개념은 직관적으로 받아들이는데 어려움이 있다.

③ 과도한 일반화: 유한에서 성립하는 성질이 무한과 극한에서도 성립한다고 할 경우 그렇지 못한 경우에 대해 인지적 장애가 발생한다.

④ 은유: 함수와 수열의 극한에서 '화살표', '수렴한다', '발산한다', '증가한다' 등과 같은 운동 은유로 인해 $\varepsilon-\delta$식 정의로 엄밀하게 전개하기까지 오랜 시간이 걸린다.

- 인식론적 장애에 대한 긍정적 시각과 수학 학습-지도

(1) 긍정적 시각: 인식론적 장애는 새로운 지식의 구성을 방해하는 부정적인 측면이 있는 반면에 이를 깨닫게 되면서 그것을 토대로 새로운 방식으로의 앎이 시작되며 그 극복을 통해 보다 높은 수준의 이해가 가능해진다는 긍정적인 측면이 있다.

(2) 인식론적 장애와 수학 학습-지도

① 학교 수학과 관련된 인식론적 장애를 밝히고 이를 극복하는 방안에 대해 연구한다.

② 역사를 연구해서 개념의 발생에 대한 장애를 확인한 후에 학생들의 행동 속에서 대응하는 장애 지식의 흔적을 학생의 관점을 고려하면서 찾아본다.

4. ⑤

ㄱ. 공학적 도구는 교사 주도의 보조도구로 사용되고 있다. 학생의 활동에 대한 일반적 조정 즉, 반영적 추상화도 드러나지 않는다.

ㄴ. 교사는 가르쳐야 한다는 교수학적 계약 때문에 유도 질문을 하여 학생들이 수학적 지식을 형성할 수 있는 환경을 교사가 제거하고 있다.

ㄷ. 자영이 유추를 하였고 이에 대하여 교사는 기하 소프트웨어를 사용하여 반례를 제시하였다.

5.

인식론적 장애, 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용한 지식으로서 학생의 인지구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식이다.

중학교에서 마름모의 정의와 성질을 구분하여 학습하여 승호의 인지구조의 일부가 되었다.

명제의 필요충분조건을 학습하는 수업 상황에서 마름모의 성질이 마름모의 정의가 될 수 있다는 새로운 문제 상황이 제시된다.

이러한 새로운 문제 상황에서 승호의 지식은 부적합해진 지식이 되어 승호는 혼란을 느끼게 되었다.

* <u>수학 교수학적 상황론(Brousseau)</u>

▶ <u>수학 교수학적 상황</u>

① 학생이 어떤 수학적 지식을 학습하도록 하는 것을 목표로 하는 교사, 학생, 환경 사이의 관계상황이다.

② 교사가 교수학적 의도가 담긴 문제 상황 속에서 학생과 상호 작용하는 상황이다.

* 수학 교수학적 상황론: 목표로 하는 수학적 개념의 본질을 터득할 수 있는 구체적인 교수 상황, 수학적 개념의 본질이 실제로 기능하는 교수 상황을 어떻게 정교하게 구성할 것인가를 논의하는 이론이다.

* 교수 상황 구성 단계

① 수학적·인식론적·교수학적 분석을 통해 수학적 지식의 본질을 밝힌다.

② 본질의 배경인 역사-발생적 상황에 대한 분석을 한다.

③ 역사-발생적 상황을 고려하여 수학적 개념이 실제로 기능하는 교수 상황을 구성한다.

▶ <u>교수의도적 측면에서 본 교수 상황</u>

교수학적 상황에서 좋은 상황이란 궁극적으로 비교수학적 상황을 의미한다.

① 교수학적 상황

㉠ 교사가 학생들에게 제시할 문제를 사려 깊게 선택하여 학생들에게 인지적 불균형을 야기시키고 기대했던 적응을 이끌어내려고 시도

㉡ 문제는 점차 학생들 스스로 동기화되어 행동하고 발전시켜 가도록 해야 함

㉢ 교사가 정보를 제공하고 발견술적인 질문을 하여 조심스럽게 도와주던 상황에서 학생들 스스로 탐구하는 상황으로 이행

② 비교수학적 상황

㉠ 교사의 중재 없이도 수학적 지식이 문제해결의 도구로 구성되고 기능할 수 있는 상황(교수가 없는 상황)

⇒ 학생들은 교수학적 상황에서 비교수학적 상황으로 이행되어 교사가 존재하지 않는 상황에서도 지식을 적용할 수 있는 능력을 갖도록 해야 한다.

• <u>수학적 개념의 발전과정</u>

① <u>원형 수학적 개념(무의식적인 사용)</u>: 수학자들의 <u>불완전하지만 일관된 관념이 무의식적·암묵적으로 문제해결에 사용</u>되는 단계

② <u>의사 수학적 개념(연구의 도구)</u>: 개념이 아직은 <u>조직화되지도 않고 이론화되지도 않은 친숙한 용어</u>로 나타내어지는 상태로, 수학자들은 그것들이 이론적인 개념의 자격을 갖고 있지는 않지만 그것들을 잘 알고 있고, 수학화를 필요로 하는 어떤 모순도 발생하지 않기 때문에 의미론적으로 조종하며 도구로 사용하는 단계

③ <u>이론 수학적 개념(연구의 대상)</u>: <u>개념 자체가 분석의 대상으로 인식되고 연구</u>되어 이론적인 수학적 개념으로서의 위치가 부여되는 단계

• <u>교수학적 상황 발전 4단계</u>

① <u>행동 상황</u>

㉠ 규칙을 규칙으로 의식하지 못한 상태에서 규칙을 행동하는 데 사용할 수 있는 단계

② <u>형식화 상황</u>

㉠ 행동 상황 속에서 암묵적으로 사용했던 규칙을 의식하고 표현하는 단계

㉡ 학생들 간의 상호작용이 행동 상황보다 더 활발히 이루어지며 학생들은 활발한 피드백을 받으면서 더 효율적인 의사소통을 하려고 노력한다.

③ <u>타당화 상황</u>

㉠ 형식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지 확인하고 증명하는 단계

㉡ 타당화 상황에서 초점은 추측을 받아들이거나 거부하는 근거가 무엇인가 하는 것으로 근거와 이유를 제시해야 하며 이런 절차를 여러 번 거친 후 대부분의 학생들이 추측을 인정하게 되고 적용할 수 있는 단계가 되면 추측은 정리의 위치를 확보하게 된다.

④ <u>제도화 상황</u>

㉠ 교사의 중요한 임무는 마지막 단계인 제도화 상황 단계에서 수행되어야 한다.

㉡ 제도화를 통해 교사는 본질적인 지식이 무엇인지 명확히 해주고, 학생들의 자유로운 행동이나 결과를 이전의 지식과 연결될 수 있도록 해준다.

㉢ 교사가 학습 결과를 확인하고 중요한 것들을 정리하여 수학적인 공식이나 알고리즘과 같은 형태로 제시해 주는 것만이 아니라, 행동-형식-타당화 상황에서 발생했던 과정에 지위를 부여하고 학생들이 산출해 낸 것에 힘을 불어넣어 하나의 지식으로 승인하는 과정이다.

▶ <u>수학적 지식의 교수학적 변환론(didactic transposition theory)</u>

• <u>교수학적 변환론(쉐바르, Yves Chevallard, 1988)</u>

① 교육적 의도에 의해 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것을 지식의 교수학적 변환이라 한다.

② 교수학적 변환이란 교육적 의도와 <u>교수학적 계약</u>(교사와 학생이 문제가 되는 지식에 관하여 명확하게 혹은 암묵적으로 서로에게 부과하는 의미와 인가(=교사는 가르쳐야 하고 학생은 배워야 한다))<u>의 요구에 따라 교사가 지식을 수정하고 지식의 조직, 상대적인 중요성, 그 지식의 제시 방식 등을 바꾸는 과정</u>이다.

④ 교수학적으로 변환하는 과정에서 첫째, <u>교사·학생·지식 사이의 삼원적 관계 속에서 교수 상황을 고려</u>해야 하며 둘째, 가르치려는 의도에 따라 지식이 변형될 때 지식의 의미가 손상되지 않도록, <u>지식의 파손성을 고려</u>해야 한다.

* 김은경 (2008) Brousseau의 교수학적 상황론에 따른 미분 교수-학습과정 설계, 서강대학교 석사 학위 논문

① 쉐바르는 교육 활동을 통하여 지식이 다루어지는 동안 그 본질에 있어 어떤 변화가 일어나는가를 신중하게 관찰·분석하는 것이 매우 중요함에도 실제로는 간과되고 있음을 지적한다.

② <u>쉐바르가 보기에 수학교육의 문제점</u>은 수학교사의 고민과 수학을 배우는 학생의 어려움에 치중한 나머지 <u>가르치고 배우기 어려운 특성을 보이는 수학적 지식을 가르치고 배우기 쉬운 것으로 만드는 것에 치중한다</u>는 것이다.

③ <u>수학적 지식은</u> 학생들의 일상과 거리가 멀고 고도로 추상적인 내용을 담고 있기 때문에 <u>본래 가르치고 배우기 어려우며 그 이면에 들어 있는 광범위한 아이디어를 살려내기가 쉽지 않다</u>는 것이다.

④ 본래 가르치고 배우기 어려운 지식을 마치 <u>가르치고 배우기 쉬운 것처럼 다루는 동안 수학적인 의미가 왜곡되고, 실제로 가르치고 배우는 내용은 수학이라고 보기 어려운 것이 되는 경우가 적지 않다</u>는 것을 지적하였다.

⑤ 수학을 가르치려는 수학교사로서 어려운 교과과정을 짧은 시간동안 개념설명에서 문제풀이로 넘어가려다보면 불가피하게 가르치려는 지식의 재문맥화와 재 탈문맥화 과정을 생략하고 지식의 기록을 곧바로 학습하게 하자는 커다란 유혹을 받게 되며 교사에 의한 지식의 변형은 보다 자유롭게 이뤄지는 대신 극단적인 현상을 낳을 수도 있다.

6. ③

ㄱ. [가]에서 교사는 함수의 극대와 극소 개념에 들어 있는 이면의 아이디어를 살려내어 놀이 공원의 궤도 열차를 소재로 하여 극대, 극소 개념을 가르치고 있다. 옳은 설명이다.

ㄴ. [나]에서 학생 B는 개념 정의를 고려하지 않고 개념 이미지에 근거하여 극값의 여부를 판정하고 있다. Vinner에 따르면 직관적 반응을 보인 것이다. 옳은 설명이다.

ㄷ. 토파즈 효과에 가깝다. [나]의 어떤 부분에서도 교사가 학생이 특정 수학적 지식을 형성하였다고 판단하는 부분이 나타나지 않는다.

7. 토파즈 효과, 교수학적 계약

▶ **교수학적 계약: 교사와 학생 관계**

브루소는 단순 훈련과 교육의 차이를 **교수학적 계약**으로 설명하였다.

① 교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.

② 교수학적 상황의 중요한 요소로 교사의 기대와 그것을 목표로 하는 교사의 활동에 대한 학생의 수용 사이에 존재하는 합의이며, 교사와 학생이 조정을 위해 어떤 책임을 져야 할지와 해야 할 의무가 무엇인지를 결정하는 관계

③ 교수-학습의 상황에서 교사는 학생이 새로운 지식을 잘 획득할 수 있도록 적절한 조건을 제공해야만 한다. 즉 이 조건과 학생이 이전에 획득한 지식이 합쳐지면 학생은 새로운 지식을 획득할 수 있을 것이라고 교사가 보장해준다는 것을 의미한다.

④ 적절한 조건을 제공하는 것은 교사의 학생에 대한 의무라 볼 수 있으며 학생은 교사가 제공한 조건을 만족시켜야 한다. 이는 학생의 교사에 대한 의미라 볼 수 있다.

⑤ 교수-학습에서 교사와 학생 사이에는 묵시적인 계약이 존재한다고 볼 수 있으며 이 계약을 교수학적 계약이라 한다.

⇒ 암묵적으로 존재하면서 교사와 학생을 압박하고 그들의 행동을 통제한다.

(예) 교수학적 계약에 대한 학생의 잘못된 이해

㉠ 과정에 주목하지 않고 정답을 구하는 활동에 집중

㉡ 교사의 설명을 통한 형식적 지식의 전수: 학생들로부터 진정한 이해에 필요한 조건을 빼앗는 것

8. 음수의 역사발생적 측면에서의 도입, 극단적 교수현상

인식론적 장애, **역사 발생적 측면에서** 음수의 정의는 방정식 해를 구하는 문제 상황에서 도입되었으므로 자연수 a에 대하여 $\square+a=0$이 되는 $\square$의 값을 $-a$로 정의하여 음수를 도입할 수 있다.

토파즈효과, 교사는 교수학적 계약의 압박 때문에 학생이 학습할 수 있는 환경을 방해하거나 제거할 수 있다.

9. 수와 연산 지도, 공학적 도구 활용, 극단적인 교수 현상

계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있다.

메타인지이동.

무리수가 순환하지 않는 무한소수라는 수업 목표에 도달하기 위하여 교사가 고안한 교수학적 보조 수단인 스프레드시트의 사용 방법에 학생들의 사고가 집중되었다.

10.

지식은 주의 깊게 다루지 않으면 본래의 의미가 손상되기 쉽다. 가르치려는 의도에 따라 지식이 변형될 때에도 지식의 의미가 상당히 손상될 수 있기 때문에 지식의 변환 과정에서 주의해야 한다.

$[0,2]$에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

$F(b)-F(a)$

급수의 합을 이용한 정적분의 정의는 다루지 않도록 하고 있으며 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 정의하되, 그 도입 및 설명 방법은 다를 수 있음을 명시하고 있다. 이에 따라 정적분의 정의는 임 교사와 같이 넓이와 무관하게 부정적분의 함숫값을 이용하여 도입하거나 정 교사와 같이 넓이 측정과 관련하여 도입하는 것과 같이 다양한 방법으로 도입할 수 있다.

11.

형식적 고착.

교사는 인수분해 공식의 원리나 의미를 지도하기 보다 곧바로 공식을 제시하여 적용하는 것을 보여준 뒤 공식을 암기하고 문제를 통해 연습해 보도록 하였다. (공식화된 지식의 논리적 표현에만 의존하여 개인화/배경화 과정을 간과하고 수학적 지식의 형식만을 연습시키는 것이다.)

도구적 이해.

공식에서 a, b가 a, a가 될 수도 있다는 것을 이해하지 못하는 학생B는 변수를 표시하는 기호가 변화하면 변수를 나타내는 대상도 변화하는 것으로 생각하는 오개념을 갖고 있다. (일반화된 공식에서 수를 나타내기 위해 사용된 문자인 변수 기호를 임의로 선택할 수 있다는 것을 이해하지 못하고 있다.)

12.

연속이라는 용어가 사용되는 실생활의 예를 들어보게 하고 있다.

$x=a$에서 함수 $f(x)$가 연속일 조건을 말해볼까요?

개념이미지.

함수는 하나의 대수식으로 나타나야 한다고 생각한다.

<Freudenthal>

1.

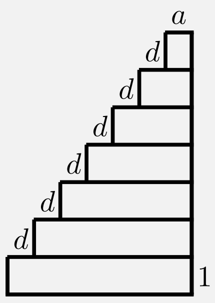
하위 영역	배점	예상 정답율(%)	출제근거 (이유)
수학교육(교수학습방법)	5	60	김도상 외 3인 수학과 교재론 pp. 78-80

언어 논리적 형태로 주어진 수학적 개념에 다양한 변화를 주기 위해서는 시각적 형태로 변화를 주는 것이 효과적이다. 이것은 직관과 논리의 상보적 관계 때문이다. 또한 시각적 모형을 제시하는 것은 대수적 개념과 기하학적 개념을 연관짓는 학습 활동이라고 할 수 있으므로, 수학적 개념이 다양하게 발전할 수 있도록 하는 데 도움이 된다.

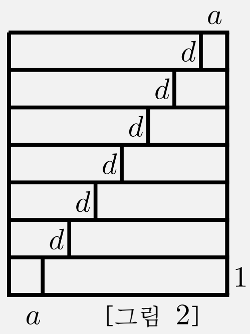
초항이 a 공차가 d인 등차수열의 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = a + (a+d) + \cdots + (a + (n-1)d)$$

는 다음 [그림 1]과 같이 세로의 길이가 1, 가로의 길이가 $a+(k-1)d$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$인 직사각형의 넓이의 합으로 생각할 수 있다.



[그림 1]



[그림 2]

이 도형과 합동인 것 하나를 180° 회전하여 [그림 2]와 같이 붙이면 그 넓이는 $2S_n$이다. 또, 그 모양은 세로의 길이가 n, 가로의 길이가 $a+a+(n-1)d$인 직사각형이므로

$$2S_n = n \times \{a + [a+(n-1)d]\} = n[2a+(n-1)d]$$

따라서 $S_n = \dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$.

*** 채점 기준**

<이유설명 : 3점>

- 3점: 직관과 논리의 상보관계, 수학적 연관성, 지각적 다양성의 원리 등 타당한 이론적 근거를 제시하여 논리적으로 설명한 경우.
- 2점: 동기유발, 흥미, 개인차 등의 2차적 근거를 제시하여 설명한 경우.
- 1점: 불합리한 근거를 바탕으로 설명하였으나, 논리적으로 설명하려고 시도한 경우.
- 0점: 설명을 완성하지 못했거나 시도하지 않은 경우.

<모형 제시 및 설명 : 2점>

제시된 모형이 일반적인 n개항을 취급한 것은 물론, 구체적인 경우 (예를 들어 7개 또는 10개 등)를 취급한 것, 또는 $1+2+3+\cdots+n$만을 취급한 경우도 감점 없이 인정함.

- 2점: 타당한 시각적 모형을 제시하고, 합리적으로 설명한 경우.
- 1점: 타당한 시각적 모형을 제시하였으나, 설명이 없거나 불완전한 경우.
- 0점: 모형을 제시하지 않았거나, 제시된 모형이 타당하지 않은 경우.

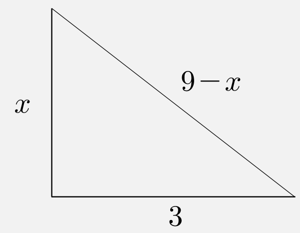
2.

[1단계] 실세계 상황에서 문제 구성(단순화/형식화): 실세계의 (어떤 현상을 관찰하여 그 현상에서 나타나는) 문제 상황을 파악하고, 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 이해한다.

대나무의 높이, 밑동에서부터의 거리, 대나무가 부러진 높이 등을 파악한다.

[2단계] 수학적 모델 설정(수학화): 요인들의 관계를 추측하고, 그 관계들을 수학적으로 해석하여 현상에 대한 수학적 모델을 세운다.

부러진 높이를 x라 놓으면, 다음과 같이 직각삼각형의 그림으로 나타낼 수 있다.



[3단계] 모델 내에서 수학적 결과 및 해 도출(변환/분석): 모델 내에서 수학적으로 문제를 분석하여 결과를 얻는다.

직각삼각형의 높이 x를 구하기 위해 피타고라스의 정리를 이용한다.

$(9-x)^2 = x^2 + 9$에서 $18x = 72,\ x = 4$

따라서 직각삼각형의 높이 $x = 4$이다.

[4단계] 결론 추측 및 판단(타당화/적용): 본 현상의 상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다.

대나무는 4m 높이에서 부러졌다.

▶ <u>수학적 모델</u>

① 모델이란 다른 어떤 것을 나타내는 데 사용되는 대상이나 개념으로 현실을 이해할 수 있는 형식으로 축소시킨 것이다.

② 수학적 모델이란 수학적 대상(집합, 수, 도형, 함수 등)과 이들 대상을 연관 짓는 표현(방정식, 부등식, 그래프, 변환, 도표 등)이다.

▶ <u>수학적 모델링의 정의와 특징</u>

수학적 모델링이란 수학적 모델을 구성하여 실세계 상황 문제를 해결하는 전체 과정이다.

① 수학적 모델링은 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 하므로 일반적인 문제해결과 다르다.

② 수학적 모델링은 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악하고 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 돕는 활동 과정이다.

③ 수학적 모델링에서 '수학화 활동' 즉, 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 활동, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 조정하는 수학적 구조나 이론을 세우는 활동, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하고 번안하는 활동 등이 중요하다.

▶ <u>NCTM 수학적 모델링 과정</u>

<u>[1단계] 실세계 상황에서 문제 구성(단순화/형식화)</u>

실세계의 (어떤 현상을 관찰하여 그 현상에서 나타나는) 문제 상황을 파악하고, 그 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 이해한다.

<u>[2단계] 수학적 모델 설정(수학화)</u>

요인들의 관계를 추측하고, 그 관계들을 수학적으로 해석하여 그 현상에 대한 수학적 모델을 세운다.

<u>[3단계] 모델 내에서 수학적 결과 및 해 도출(변환/분석)</u>

그 모델 내에서 수학적으로 문제를 분석하여 결과를 얻는다.

<u>[4단계] 결론 추측 및 판단 (타당화/적용)</u>

본 현상의 상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다.

▶ <u>수학적 모델링의 필요성과 유용성</u>

① 새로운 수학적 개념과 방법을 이해할 수 있다.
② 실생활 또는 다른 교과에서 수학이 응용됨을 알고 그 필요성을 인식하게 된다.
③ 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동 및 능력이 신장된다.
④ 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기를 수 있다.
⑤ 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해하게 된다.

3.

- 롤의 정리와 실세계 상황

롤의 정리는 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능한 함수 f에 대하여 양 끝점의 함숫값 $f(a)=f(b)=0$이면 순간변화율 $f'(c)=0$이 되는 c가 a와 b사이에 있다는 것이다.

주어진 상황은 시간에 따른 위치에 관한 함수에 대하여 물체를 쏘아올린 시각과 땅에 떨어진 시각의 위치가 0으로 같으므로 순간변화율 즉, 물체의 속도가 0이 되는 시각이 0과 a 사이에 있다.

이렇게 수학적 지식을 지도하기에 앞서 상황을 먼저 제시하면 학생들로 하여금 심상(mental object)을 구성하게 하고 현실과의 관련성이 적재된 충분한 의미를 갖게 되어 적용 가능성이 높아지게 된다.

- 상황과 관련 짓는 교수・학습의 장점 세 가지

① 추상적이고 형식적인 수학적 개념을 물리적 경험에 바탕을 둔 실물자료나 공학 도구를 활용하여 제시함으로써 직관적인 이해를 이끌어 수학과 실세계 사이의 연결성을 갖게 한다.
② 추상적이고 형식적인 수학적 개념을 컴퓨터를 통하여 구현함으로써 수학적 대상을 시각적으로 보다 구체화 할 수 있다.
③ 추상적이고 형식적인 수학적 개념을 공학 도구를 활용하여 표현함으로서 직관력을 향상하고 반성활동을 유도할 수 있으며 동기부여와 흥미를 유발할 수 있다.

▶ <u>문맥(situation) 수학</u>

① 수학을 학습하게 하려면 학생들이 관심과 흥미를 갖고 상상력을 발휘할 수 있는 <u>현실적인 풍부한 문맥</u>(주변 생활 뿐만 아니라 학습자의 물리적・사회적・정신적인 세계를 총칭하는 것으로, 수학화의 진전과 함께 점차 확대되어간다)<u>에서부터 출발하여 수학화하는 경험과 반성적 사고를 통해 점진적으로 수학 학습을 하는 것</u>이 바람직하다.
 (예) 공간적인 형태를 도형으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이고, 도형을 정의하는 것은 그 개념적인 분야를 수학화하는 것이며, 기하학적인 정리를 연역적으로 전개하는 것은 기하를 수학화하는 것이다.
② 실세계는 수학화를 가르치는 출발점이 되는 수학적인 문제를 포함하는 의미 있는 문맥이며, 이렇게 <u>수학을 구체적인 문맥을 통해 수학화로 지도하게 되면 현실과의 관련성이 적재된 충분한 의미를 갖게 되어 그 적용 가능성이 높아진다.</u>
③ 처음에 <u>현실세계에서 출발</u>하여 <u>수학화 과정</u>을 거치고 <u>다시 현실세계</u>에 돌아올 수 있도록 구체적인 문맥을 제공하는 것이 중요하다.

관계가 풍부한 문맥의 선택과 교사의 충실한 안내 그리고 무엇보다도 학생들의 자발적인 탐구활동을 통해 수학적 도구를 발견하도록 하고, 그 개념적 분석과 형식화, 반성적 논의와 응용을 통한 내적 바탕의 인식과 정신적 안목으로의 동화단계를 거치도록 해야 한다.

4.

학생들은 미분계수 개념을 곡선의 한 점을 지나는 직선이라는 개념이미지로 이해하여 미분계수의 기하학적 의미 즉, 두 점 사이의 할선의 극한이라는 의미를 이해하지 못하고 있는 것으로 볼 수 있다. 박 교사가 지도한 미분계수의 개념이 새로운 문제 상황에서 부적합해진 것으로 인식론적 장애가 나타난 것이다.

5.

① 주어진 곡선의 한 점을 지나는 접선을 긋는 방법을 학생들이 직관적으로 탐구하게 한다.
② 곡선의 두 점을 지나는 직선의 기울기를 구한다. 즉 함수 $y=f(x)$에서 평균변화율 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$를 구한다.
③ 평균변화율을 사고의 대상으로 하여, 한 점에서의 접선을 구하기 위한 조건을 탐구하여 Δx가 0에 가까워질 때, 즉 할선의 극한이 접선이 됨을 이해한다.

* 김은경 (2008) Brousseau의 교수학적 상황론에 따른 미분 교수-학습과정 설계, 서강대학교 석사 학위 논문

미분법은 곡선에 접선을 그리는 문제와 함수의 극대・극솟값을 구하는 데서 유래되었다고 전해지기도 한다. 이러한 고찰은 고대 그리스까지 거슬러 올라갈 수 있으나 미분법을 최초로 명확하게 예상한 것은 1629년 페르마(Fermat;1601~1665)가 설명한 착상에서 찾을 수 있다. 케플러(Kepler;1571~1665)는 함수의 증분은 보통의 극댓값 또는 극솟값의 근방에서는 무한소가 된다는 것을 알고 있었다. 페르마는 이 사실을 극댓값과 극솟값을 결정하는 방법으로 변형시켰다. 페르마의 설명은 그 논리가 완벽하지 않지만 그의 방법은 $f(x)$의 도함수가 0이 되게 놓는 것과 같다는 사실이 밝혀졌다. 페르마는 $f(x)$의 도함수가 0에 접근하는 것이 극댓값과 극솟값을 구하기 위한 충분조건이 아니고 필요조건일 뿐이라는 것을 알지 못했으며 극댓값과 극솟값을 구별하지 못했다. 미분법의 발전에 중요한 공헌을 한 사람으로 영국의 수학자 배로(Barrow, L.;1630~1677)가 있다. 「기하학 강의」에서 일반적으로 미분법과 적분법이 역연산이라는 사실을 소개하고 증명하였다. 미분법의 발전 과정에서 체계적인 해석적 방법과 더불어 일반적인 기호를 만든 것은 뉴턴(Newton, L.;1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W.;1646~1716)였으며, 코시(Cauchy, A.;1789~1857)를 거쳐서 현재와 같은 형태가 갖추어졌다. 뉴턴은 「유율법」에서 곡선을 점의 연속적인 운동에 의하여 생성되는 자취로 고찰하였다. 변화하는 양을 유량(fluent)이라 하고, 유량을 독립변수의 함수로 보면서, 유량의 변화 비율을 유율(fluxion)이라 하였다. 유량을 x, y로 나타내고 유율을 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 등으로 나타내었으며 유율을 계산하기 위해 무한히 작은 변화를 생각하여 이를 모멘트(moment)라고 하였다. 뉴턴은 유율법을 응용하여 극대와 극소, 곡선의 접선, 곡률, 변곡점, 곡선의 오목・볼록 등을 결정하고, 구적법과 곡선의 길이를 구하는 문제에 적용하였으며, ‘만유인력의 법칙’을 확립하였다. 라이프니츠의 이론은 뉴턴의 역학적인 방법과는 달리 기하학적, 대수적 이론으로 접선을 긋는 문제나 적분법의 합리화에 주력하였다. 기호의 선택에 큰 비중을 두어 두 이웃하는 x의 차를 dx로 나타내었다. 오늘날 미분법에 관한 많은 기본 법칙은 그에 의하여 유도되었으며, 두 함수의 곱의 n계 도함수를 구하는 공식은 여전히 라이프니츠의 공식으로 언급된다. <u>미적분의 역사적 발달 단계</u>에서 보여주듯이 현재 교과서의 미적분 단원에서 응용문제로 제시되는 것들 즉 <u>접선, 순간속도 등은 처음에 미적분을 발전시킨 문제</u>였다. 미적분학의 이론적 토대가 되는 <u>극한 개념의 논리적 엄밀성</u>은 학생들이 이해하기에 무리가 있어 개념 지도에서 <u>직관에만 의존</u>하게 되었고, 개념의 이해보다는 <u>극한값 계산에만 치중</u>하게 되면서 <u>실제 응용문제에서 그 개념을 사용하지 못하는 문제점</u>이 발생하게 되었다. 많은 연구에서 대부분의 학생들이 미적분학을 정상적으로 끝내지 못하고 있으며, 미적분학의 지식이 피상적인 경우가 많고, <u>정형화된 계산 문제를 해결하는 기능만을 습득하고 있다</u>는 점을 지적하였다(Douglas, 1986; Steen, 1987; Tall, 1986).

- <u>미적분의 도입 방법</u>

▶ <u>극한 방법</u>

① 우리나라 고등학교에서 다루어지고 있는 미적분 지도

$$h \to 0, \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (= \frac{\Delta y}{\Delta x}) \to f'(x)$$

'어떤 극한값에 접근할 경우 그 극한값을 $f'(x)$' 로 택한다.

② 극한 방법을 이용한 미적분 함수의 어려움

㉠ 함수의 증분 Δx, Δy의 극한이 dx, dy인 듯한 암시를 준다.

㉡ 합성함수의 도함수를 구하는 공식 $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$에서 미분을 약분하듯이 다룬다.

㉢ 치환적분 시 계산의 편의상 $\int f(x)dx$에서 $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$로 놓고 계산하도록 지도한다.

㉣ 미분 도입 후 $dy = f'(x)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$와 같이 다룬다.

① 실수의 기초 위에서 극한 개념에 의해 함수의 연속성, 미분가능성, 적분, 무한급수의 수렴 등 미적분법의 기본 개념을 정의

② 무한소를 함수로 보며 0에 무한히 접근하는 변수로 간주한다.

③ $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$과 같은 함수의 '비정상적인' 무한소를 다루게 될 경우 오류가 발생

④ $\varepsilon - \delta$ 방법의 자연스러운 도입이 가능하다.

▶ <u>Leibniz 식의 전통적인 무한소 방법</u>

① 함수 $y = f(x)$에서 $f(x) = \frac{dy}{dx}$를 미분상으로 보고 무한소량은 결과에서 무시한다.

(예) $f(x) = x^3$에서 $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{dx}$

$$= 3x^2 + 3xdx + dx^2$$

따라서, $f'(x) = 3x^2$이다.

② dx로 분자와 분모를 모두 나누면 dx는 0이 아닌 무한소로 취급하다가 동시에 dx가 무시할 수 있을 정도로 작아 0이라고 취급하고 있다. 즉, 편의에 따라 dx를 0이 아닌 것으로 또는 0인 것으로 이중적인 취급이 이루어지고 있다(Struik, 1987).

③ Leibniz와 그의 제자들이 무한소 개념의 논리적 기초 문제를 유보한 채 무한소 계산법만을 발전시킨 이유는

㉠ 자연과학 연구에 이용함으로써 유용한 <u>생산적인 결과</u>를 얻을 수 있었고 수학적인 <u>문제를 통합적으로 해결</u>해 주는 일관성 있는 강력한 도구를 제공해 주었기 때문이다.

(예) 곡선의 접선과 법선 구하기, 최대・최솟값 구하기, 면적・부피・길이 구하기 등

㉡ 우주는 신이 조화롭게 창조하였으므로 <u>언젠가는</u> 무한소의 기초문제가 <u>밝혀질 것</u>이라는 철학적인 신념이 있었기 때문이다.

㉢ (의의) 엄밀성의 지나친 추구를 유보한 채 <u>계산법의 개발을 추구</u>하였기 때문이다.

① 기하학적으로 단순하고 직관적이며, 발견적 가치가 크다.

② 18세기 이후 논리적 결함 때문에 포기된 방법이다.

③ Newton: 무한소 '계산법'을 개발하여 역학연구에서 적극적으로 활용

④ Liebniz: 무한소 계산법 확립

⑤ 근원

㉠ Archimedes: 구의 부피를 무한소인 단면의 부피의 총합으로 생각

㉡ Galileo: 원은 무한히 작은 무한히 많은 변을 갖는 다각형으로 생각

▶ <u>미적분 지도의 여러 가지 방법</u>

① 도입 시부터 현실과 연관되어야 하며, 기본적인 개념이 현실적인 문맥에서 학습되도록 지도해야 한다.

② 미분법을 도입하는 극한방법은 컴퓨터를 이용한 수치적 방법과 컴퓨터 그래픽 기능을 이용한 방법을 보충하면 효과적(단, 메타인지적 사고전환 주의)

③ 현실과 관계가 풍부한 내용을 다루기 위해 무한소 방법이 활발히 활용되도록 지도한다.

(예) 넓이나 부피의 무한소량의 합 → 적분법 지도

속도와 곡선의 접선 → 미분법 지도

④ <u>역사발생적 원리</u>를 이용한다. 역사적인 문제 상황에 대한 제시와 <u>무한소 방법</u>이나 <u>극한 방법</u>에 의한 미적분 교재를 지도할 수 있다(수학 교사는 미적분의 역사적 발달에 대한 분석을 통한 그 관점의 변화 과정을 명확히 이해해야 한다).

⑤ Freudenthal의 미적분 지도

㉠ 함수 $f(x)$가 x에서 미분 가능할 때, $f'(x)$를 미분계수라고 부르는 것은 미분식 $dy = f'(x)dx$에서 연유한 것이며, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$이므로 $f'(x)$를 미분상이라고 부른다는 사실에 따를 때, 극한에 의한 미분법 지도는 옳지 않다.

(예) 물리, 순간 속력 $V = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 미분상으로 지도

㉡ Δx, Δy가 서로 대응하며 $\frac{\Delta x}{\Delta y}$가 $\frac{dy}{dx}$에 수렴한다는 말 대신 무한소 변화 dy, dx와 그 몫 $\frac{dy}{dx}$로 제시하는 것이 효과적이다(물리학의 표현방법을 활용한다).

6.

- 수학적 모델

① 정육각형에서 6개의 꼭짓점을 잇는 선분의 개수

② 수형도를 이용하여 문자 A, B, C, D, E, F에서 2개를 짝짓는 경우의 수

- 모델 내에서의 해: 15
- 결론 추측 및 판단: 악수는 모두 15번 이루어진다.

7. ③

① 수학교육 현대화 운동의 관점이므로 옳다.

② 어떤 수준의 학생에게도 그 학생의 수준에 맞는 지식의 표현을 제시하면 어떤 내용이라도 가르칠 수 있으며, 이러한 활동은 수학자가 하는 일과 근본적으로 같다.

③ 안내된 재발명에 근거한 지도는 (나)의 입장이다. (가)의 입장을 따른다면 최신의 수학을 학생들에게 초등화하여 가르치는 방식의 지도가 적절하다.

④ (나)의 입장에서 (가)의 지도는 기성수학을 학생들에게 그대로 부과하여 반교수학적 전도가 일어날 수 있다. 이러한 문제에 대한 대안으로 수학화 경험을 학생들이 경험하게 하는 방법이 있다.

⑤ 프로이덴탈은 안내된 재발명을 통한 수학화의 경험을 제공함으로써 수학에 대한 진정한 이해와 안목을 가질 수 있다고 보았다.

- <u>함수의 지도: 교수학적 현상학, 구조주의적 관점</u>

▶ <u>교수학적 현상학 관점에 따른 함수 지도(Freudenthal)</u>

① 현상에 대한 직관적 경험을 제공한다.

② 현상에서 나타나는 종속성의 특성을 인식한다.(증가와 감소, 비례적 변화, 주기적 변화, 지수적 변화, 대응적 관계 등)

③ 표, 그래프, 식 등과 연결하여 특성을 명확히 이해하고 구체적, 분석적으로 다룬다.

④ 구체적 함수의 이름을 알게 하고(정비례와 반비례, 일차함수, 이차함수, 삼각함수, 지수함수, 임의의 대응) 구체적 특성을 파악한다.

⑤ 함수에 대한 여러 경험을 바탕으로 함수가 무엇인지에 대한 논의를 통해 함수 개념을 도입하고 미적분을 위한 기초를 제공한다.

▶ <u>구조주의적 관점에 따른 함수 지도(Bruner)</u>

① 대응을 통해 함수를 정의한다.

② 정의역, 치역, 공역 등을 지도한다.

③ 함수의 예로 여러 함수를 다룬다.

④ 응용문제로 함수의 여러 현상을 다룬다.

8. ③

* 함수 개념은 (가)에서 식과 표로, (나)에서 식으로 지도하는 것으로 함수의 종속적 측면이 나타난 것이다. (다)에서는 집합 사이의 대응으로 지도하는 것으로 함수의 대응적 측면이 나타난 것이다.

ㄱ. 함수 개념은 종속적 관점에서 대응적 관점으로 발전해왔으므로 역사발생적 원리에 근거할 때 (가), (나)에서 (다)로 지도하는 것이 바람직하다.

ㄴ. 수학교육현대화운동의 입장으로 옳은 설명이다.

ㄷ. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 중학교에서 지도하고, 함수 개념은 종속과 대응의 두 가지 맥락을 통합하여 지도하게 하였다.

* <u>함수의 정의: 종속관계/대응관계/순서쌍으로서의 함수</u>

① <u>종속관계로서의 함수</u>: x와 y사이의 관계식을 바탕으로 x의 값 하나 정해지면 그에 따라 y의 값이 하나씩 정해지고 이 관계를 y는 x의 함수라 한다.

② <u>대응관계로서의 함수</u>: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x에 어떤 규칙에 의하여 Y의 원소 y가 단 하나 정해질 때, 이 대응 규칙을 함수라 한다.

③ <u>순서쌍으로서의 함수</u>: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x와 집합 Y의 원소 중, x에 대응하는 오직 하나의 원소 y를 택하여 만든 순서쌍 (x, y)들의 집합을 함수라고 한다. 즉,

(F1) $\forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ (x, y) \in f$

(F2) $(x, y),\ (x, z) \in f$이면 $y = z$

를 만족하면 f를 X에서 Y로의 함수라고 한다.

* <u>함수 개념의 발달사와 교육사</u>

▶ <u>함수 개념의 발달사</u>

① 전 함수 단계: 바빌로니아, 그리스

② 기하적 함수 단계(17C): Oresme, Galilei

③ 대수적 함수 단계(18C): Bernoulli, Euler

$\Downarrow$ (*)

④ 논리적 함수 단계(19C): Dirichlet, Hankel

⑤ 집합적 함수 단계(20C): Bourbaki

(*)은 달랑베르의 진동현, 푸리에 급수, 디리클레 함수 등 이전 함수 개념으로 설명하기 어려운 상황들을 접하게 되는 과정에서 임의의 대응이라는 개념으로 전환하게 되었고, 변수 개념을 없애고 일가성과 임의성을 강조하게 된다.

㉠ 일가성: 정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 대응된다는 조건, 함수와 함수가 아닌 것을 구분하는 기준

㉡ 임의성: 함수는 어떤 특별한 표현에 의해 기술되거나 또는 어떤 규칙성을 따르거나 또는 어떤 특별한 형태를 가진 그래프에 의해 묘사될 필요가 없다는 조건

▶ <u>함수 개념의 교육사</u>

① 20세기 초 독일의 Klein이 수학교육 개혁에서 ‘함수적 사고(functional thinking)’ 교육의 중요성을 강조하여 이에 따라 ‘메란 교육과정’을 제정하였다.

② Meran 교육과정 이후 「변수 사이의 변화 관계라는 전통적인 고전적인 함수 개념」을 바탕으로 다항함수와 초월함수의 성질과 그 미분법과 적분법에 대한 논의가 중심을 이루었다.

③ 1960년 ‘새수학’ 이후(우리나라는 제3차 교육과정 이후) 집합 사이의 일가성을 갖는 임의적인 대응관계라는 Dirichlet-Bourbaki 식의 현대적인 함수 개념과 일차·이차 함수를 중심으로 한 다항함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 특별한 규칙을 갖는 함수만을 다루는데 중점을 두었다.

* <u>우리나라 교육과정에서 함수 개념의 도입</u>

① 종속 함수 개념: 교수요목기부터 제2차 교육과정

② 대응 함수 개념: 제3차 교육과정부터 제6차 교육과정

③ 종속 함수 개념: 제7차 교육과정, 고등학교에서 대응관계로 함수가 정의

④ 종속관계에 대한 대응관계의 개념: 이후부터 현재까지

* <u>대응관계로서의 함수개념의 교수학적 문제점</u>

① <u>메타인지적 이동</u>이 일어난다. 즉 학습의 초점이 함수 개념 자체에서 함수를 지도하기 위한 ‘함수 기계’나 인위적인 집합 사이의 대응표와 대응도 등으로 옮겨진다.

② 특정한 함수 기호 $y = f(x)$로 고착되는 <u>형식적 고착</u>이 이루어진다.

9. ⑤

① 상호작용 교수법은 수학화 학습원리이다. <A>에 대한 토론 활동에 교사가 개입하는 것은 적절하다.

② <A>는 사잇값 정리라는 본질로 정리되어야 할 현상들이다. <B>를 먼저 제공할 때 반교수학적 전도가 일어난다.

③ 프로이덴탈은 귀납을 거부하고 전형적인 예에 의한 개념 획득을 강조하였다. 많은 예를 제시하는 것은 적절하지 않다.

④ <B>가 <A>에서 주어진 현상을 정리할 수단이므로 <A>가 먼저 제시되어야 한다.

⑤ <B>가 더 높은 수준에서 정리되어야 할 현상으로 다루어지는 것은 수직적 수학화에 해당한다.

- Freudenthal(1905-1990) 수학화 교수·학습 이론

▶ 반교수학적 전도

① 전통적인 수학교육에서와 같이 기성의 '닫힌' 지식체계에 따른 수학의 지도

② 기성수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것

③ 구체화를 통한 개념 형성을 위한 지도

④ 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

⑤ '새수학'의 EIS 방법론

▶ 대안

① 현상의 정리수단으로서의 수학과 **'실행하는 수학'의 경험**

② 심상(mental object)의 구성과 그 점진적인 형식화

③ 수학 학습과정의 관찰과 수준의 비약을 통한 수학화 경험을 골격으로 하는 **안내된 재발명 방법**

④ <수학적 구조의 **교수학적 현상학**> 제시

▶ Freudenthal의 수학관

① **수학은 인간이 확실성을 추구해 가는 정신적 활동**으로, 상식에 바탕을 두고 더 높은 차원으로 상식화되면서 발전해 나아가는 과정이다(대중 수학교육의 중요성 강조, 인간주의 수학교육을 강조).

② 실행하는수학(acted-out mathematics, 프로이덴탈은 수학적 활동의 결과로서의 기성수학과 수학화 활동에 초점을 둔 실행수학으로 구분하였다. 유사하게 인간 활동으로서의 수학의 측면을 폴리아는 '발생 상태로서의 수학', 라카토스는 '비형식적 수학'이라 표현한다.), 학습자의 현실 속에서 수학화를 통한 수학 재창조 경험만이 수학을 학습자의 인격으로 통합하는 길이요, 수학적 안목과 사고 방법을 기르고 수학을 응용하는 힘과 태도를 길러줄 수 있다.

③ 수학은 전통적인 플라톤적인 관념(절대적으로 확실한 객관적으로 존재하는 완전한 지식체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 되는 결과물)에 따르는 것이 아니라 Brouwer의 직관주의 수리철학적 관념(직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어가는 결과물)에 따른다.

▶ 수학화(mathematising)

① 수학화란 수학적 수단에 의해 현상(Reality)을 정리하고 조직하는 활동이다. 즉 현상에 질서를 부여하는 활동.

② 수학은 물리적, 사회적, 정신적 세계들의 현상을 조직하는 도구이고, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 사고 수준의 상승과정이다. 수학적 사고 활동의 가장 본질적인 특성은 반성적 사고에 의한 끊임없는 '재조직화'이다.

③ 수학화는 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분하고, 처음에는 국소적으로 시도되다 점차적으로 총체적인 수학화가 시도된다.

④ 수학화 활동에는 형식화, 국소적 조직화, 공리화 뿐만 아니라, 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 도식화, 추상화, 기호화, 정의, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등의 활동도 모두 포함된다.

▶ 수학화 과정에서 교사가 유의해야 할 사항

① 학생들 스스로 활동할 기회를 우선적으로, 그리고 충분히 제공해야 한다.

② 적절한 순간에 적절한 발문을 통해 학생들의 사고 활동을 촉진시켜야 한다.

③ 학생들이 자신의 활동을 반성하고 종합할 수 있도록 안내해야 한다.

10. ②

ㄱ. 실세계 상황이 이미 단순화되어 제시되고 있다.

ㄴ. 수학적 모델 내에서 찾은 해 4를 문제 상황에 맞게 해석하고 있다.

ㄷ. 수학적 모델을 탐색하거나 수정하고 있지는 않다.

11. ④

① 등가속도 운동 상황이라는 현상을 정리하는 수단인 그래프 표현과 오렘의 아이디어는 이후 미적분학의 기본 정리 등에 의해 정리되는 현상으로 나타났다. 이러한 과정은 수학화의 과정으로 볼 수 있으며 수학화 과정을 학생들이 경험하게 해야 한다.

② 옳은 설명

③ 옳은 설명

④ 안내된 재발명에 따른 수업은 〈A〉와 같은 수학화 과정을 먼저 경험하고 미적분을 지도하는 것이다. 김 교사의 수업은 이와 반대된다.

⑤ 수학화 결과 형성된 미적분에 대한 지식을 학생들이 이해하게 한 후 수학화 활동이 내재되어 있는 〈A〉를 제시하였으므로 옳은 설명이다.

12. ④

ㄱ. 수평적 수학화에 더 가깝다.

ㄴ. 문제 상황에 영향을 미치는 요인들, 즉 x, y의 관계를 $y=4x+100$로 나타내어 수학적으로 해석하였다. 이는 주어진 문제 상황에 적합한 모델이다.

ㄷ. [가], [나], [다]를 통해 얻은 결과에서 사진의 가로의 길이와 세로의 길이, 액자의 폭의 길이 그리고 필요한 재료의 길이를 문자로 놓고 일반적인 관계식을 유도하였다.

- 수학화의 종류와 그 예시

수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작한다. 그 후 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화인 수직적 수학화가 시작되며, 처음에는 국소적으로, 점차적으로 공리적 이론체계의 구성으로 총체적인 수학화가 시도된다.

▶ Treffers, 수평적·수직적 수학화(1987)

트레퍼스가 수평적·수직적 수학화를 처음으로 논문에 소개하였다.

① 수평적 수학화

㉠ 문제를 수학적으로 처리할 수 있게 하는 것을 의미한다.

㉡ 실생활의 세계에서 기호의 세계로 나아가는 것을 의미한다.

㉢ 관찰, 실험, 귀납추론, 유추, 분류하기 등 구체적인 활동을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 단계이다.

② 수직적 수학화

㉠ 수학적 처리를 더욱 세련되게 하는 것을 의미한다.

㉡ 수학적 경험이 축적되면서 수학 자체의 수학화가 이루어지는 단계이다.

③ 응용적 수학화

㉠ 추상화된 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 현실적 문제에 응용하여 수학 본질의 가치를 인식하고 활용가능성을 확장한다.

▶ '현실'

단순한 일상생활을 의미하기 보다는 그것을 포함하는 더 광범위한 세계로 학습자가 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미한다.

▶ De Lange & Verhage(1987, p.244)의 수학화 단계

① 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계, 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 단계이다.

② 학생들 간의 상호 작용, 학생들과 교사와의 상호 작용 그리고 학생들의 형식화·추상화 능력과 같은 요인에 의존해서 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 수평적 수학화의 단계, 수학화 단계에 대한 반성이 필수적이다.

③ 형식화와 추상화가 중심인 수직적 수학화 단계, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 획득됨

④ 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 응용적 수학화 단계, 해결된 문제는 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 된다.

13. 반교수학적 전도 (수학교육현대화 운동 비판)

- Freudenthal 교수・학습 원리(안내된 재발명, 반성적 사고, 교수학적 현상학, 문맥수학)

▶ 안내된 재발명(guided reinvention)

① 실행수학으로서 기존 수학을 학습시키려는 것이며 활동을 배우는 최선의 방법은 그것을 직접 수행해 보는 것이라는 관점을 바탕으로 한다.

② 재발명을 위한 방법: '사고실험'

㉠ 수업장면과 관련된 사고 실험: 교사나 교과서 저자가 한 학생 또는 한 그룹의 가상적인 학생들과 그들의 반응을 생각하면서 그에 따라 가르치거나 저술하는 태도

㉡ 수업내용과 관련된 사고 실험: 수학적 개념을 발명했거나 수학적 방법을 개선한 개인 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해 추측하는 것

⇒ 교사의 입장에서 학생들의 재발명을 돕기 위해서 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 자신의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 것

③ 재발명을 위해서는 학습자들이 현실적으로 받아들일 수 있는 직관적인 탐구 문맥이 제시되어야 하며, 학습자의 현실에서 출발하여 교사의 안내하에 수학화 경험으로 연결되어야 한다.

④ 재발명이 이루어지려면 그 필요성이 인식되어야 하는데, 이것은 학생들이 낮은 수준에서 행한 행동에 대한 반성이 이루어질 때, 즉 자신이 어떻게 그렇게 했는지에 대해 깊이 생각하고 자신의 행동에 대한 반성이 이루어질 때 나타난다. (반성적 사고)

▶ 학습수준이론: 반성적 사고

① 수학화는 현실을 수학적 수단인 본질로 조직하는 과정이며, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승의 불연속적 과정이다.

② 수준의 비약이 이루어지기 위해서는 학생들이 스스로 수행한 활동에 대한 반성이 이루어져야 한다.

(예) 실수의 학습수준: 수를 조직하는 수준 → 수의 조작 법칙에 주목하고 그것을 문자를 사용하여 정식화하는 수준 → 논리적 관련성에 따라 그러한 법칙을 국소적으로 조직하는 수준 → 연역적 체계로의 대역적 조직화 수준

③ 당연하다고 생각했던 부분에 대해 의문을 제기하게 함으로써 학습자 자신의 사고와 행동을 의식하고 확실성을 추구하는 수학적 태도를 기르게 하는 것이 중요하다.

㉠ 바닥수준: 수학의 개념, 구조, 아이디어를 포함하는 대상을 조작하지만 자신이 무엇을 하는지 알지 못하는 수준, 바닥 수준의 활동은 비수학적 활동이 아닌 탐구 수준에서의 수학적 활동을 준비하는 예비 수학적 활동으로 파악해야 한다.

㉡ 탐구수준: 의식적인 실제 수학화 수준, 바닥수준의 활동에 탐구 수준에서 반성됨으로써 학습 과정에서 수학이 시작된다. 요구되는 수준에 도달하지 못하면 그 수준의 사고를 이해할 수 없으며, 지적 책임감을 갖고 사고활동을 할 수 없다.

▶ 교수학적 현상학

① 역사적으로나 개인적으로나 수학적 개념, 아이디어, 구조의 형성은 많은 현상을 다루어 봄으로써 심상을 구성하고 나중에 이론화할 수 있는 기반을 만드는 과정을 통해서 이루어졌다.

② 학습자들이 수학의 완성된 구조를 접하는 것이 아니라 학습자의 현실에서 출발하여 수학적 대상에 대한 심상을 구성하는 것이 먼저 선행되어야 하며, 이를 점진적으로 반성적 사고에 의해서 의식화시키고 수학적으로 세련시켜야 한다는 것이다.

* 심상(mental object)이란 현상을 경험하는 와중에 마음에 느껴지는 잠정적인 것이다. 개념 이미지, 개인화・배경화, 자발적 관념, 일차 직관 등이다. ① 현상에서 출발해 그 현상을 조직하는 수단인 본질로서 수학이 도입될 때 그 바탕에 깔린 직관적 의미에 대한 통찰이 가능하고, 직관적 의미에 대한 통찰을 바탕으로 점진적 수학화를 통해 수학적 지식의 진정한 이해가 가능하다. ② 직관적 인식(심상)이 결여된 형식적 접근은 기억에 의존하는 명목적 지식이 되기 쉽다.

▶ 문맥(situation)수학

① 수학을 학습하게 하려면 학생들이 관심과 흥미를 갖고 상상력을 발휘할 수 있는 현실적인 풍부한 문맥(주변 생활뿐만 아니라 학습자의 물리적・사회적・정식적인 세계를 총칭하는 것으로, 수학화의 진전과 함께 점차 확대되어간다)에서부터 출발하여 수학화하는 경험과 반성적 사고를 통해 점진적으로 수학 학습을 하는 것이 바람직하다.

(예) 공간적인 형태를 도형으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이고, 도형을 정의하는 것은 그 개념적인 분야를 수학화하는 것이며, 기하학적인 정리를 연역적으로 전개하는 것은 기하를 수학화하는 것이다.

② 실세계는 수학화를 가르치는 출발점이 되는 수학적인 문제를 포함하는 의미있는 문맥이며, 이렇게 수학을 구체적인 문맥을 통해 수학화로 지도하게 되면 현실과의 관련성이 적재된 충분한 의미를 갖게 되어 그 적용 가능성이 높아진다.

③ 처음에 현실세계에서 출발하여 수학화 과정을 거치고 다시 현실세계에 돌아올 수 있도록 구체적인 문맥을 제공하는 것이 중요하다.

관계가 풍부한 문맥의 선택과 교사의 충실한 안내 그리고 무엇보다도 학생들의 자발적인 탐구활동을 통해 수학적 도구를 발견하도록 하고, 그 개념적 분석과 형식화, 반성적 논의와 응용을 통한 내적 바탕의 인식과 정신적 안목으로의 동화단계를 거치도록 해야 한다.

14. 로그, 역사발생적원리

▶ 로그(logarithm)의 역사발생

① 네이피어(Napier)에 의해서 발명(1614)
② 그리스어의 Logos(비(比))와 Arithmos(수)의 복합어
③ 그리스 아르키메데스는 지수 공식을 설명하고 다루었다.
④ 오렘(Oresme)은 등비급수와 등차급수의 비교로 분수지수의 개념을 일반화하였다.
⑤ 슈티펠(Stifel)은 <산술총서, 1544>에서 등차수열에서 덧셈이 등비수열의 곱셈에 대응한다는 이점을 지적하였다. 등비수열의 항이 지수로 표현이 되며 분수의 지수와 음의 지수를 도입하였다. 그 후 계산을 간단히 하기 위해서 지수와 어떤 수에 대한 거듭 제곱의 수열을 대비한 수표를 작성하였다.
⑥ 스테빈의 복리계산표, 뷔르기는 등차 및 등비수열의 수표를 만들어 케플러의 천문계산을 도와주었다.
⑦ 네이피어의 로그의 발견은 삼각함수의 곱의 공식에 착상하여 기하학적으로 얻은 계산에서 곱셈을 덧셈으로 바꿀 수 있는 계산을 생각해 낸 것이다.
⑧ 이듬해(1615)에 브리그즈(Briggs)는 네이피어와 함께 상용로그를 만들었다. 그 후 브리그즈는 상용로그표를 출판하였다.
⑨ 그 당시 천문학, 항해, 무역, 전쟁 등에서 수치계산이 좀 더 빠르고 정확하게 수행되어야 하는 분야가 많아졌다. 이러한 계산의 필요성에 따른 로그의 창안으로 로그를 활발히 연구하게 되었다.
⑩ 라플라스(Laplace)는 "로그의 발명으로 일거리가 줄어서 천문학자의 수명이 배로 연장되었다"라고 말했던 것처럼 아주 중요한 수학적 성과였다.
⑪ 자연로그는 네이피어의 <Descriptio, 1618>의 부록에서 최초로 나타났으며 보간법의 설명이 있었다.
⑫ 스페이델은 <새로운 로그, 1622>에서 1에서 1000까지 수의 자연로그의 수표를 발표했다.

15. 사고실험의 역할과 의의, Freudenthal

• 사고 실험의 역할

사고 실험은 학생의 재발명을 돕기 위해서 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 교사의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 것이다. 이 때 사고실험은 학생들이 거칠만한 모든 사고과정을 미리 예측하는 역할을 한다.

• 수업 장면과 관련된 사고 실험(수학교사-학생)

최 교사는 삼각함수의 덧셈정리를 지도할 때 학생들에게 적절한 질문을 하지 못했고, 예상치 못한 학생들의 궁금증에 충분한 답을 주지 못하였다.

사고실험은 교사가 학생들에게 적절한 순간에 적절한 질문을 하도록 하고, 예상치 못한 학생들의 궁금증에 대해서도 충분한 해답을 제시하는 데 도움을 줄 수 있다.

• 수업 내용과 관련된 사고 실험(수학교사-수학자)

김 교사는 좌표를 이용하지 않는 삼각함수의 덧셈정리에 대한 수학자의 접근 방법을 최 교사와 함께 논의하였다.

사고실험은 교사 자신의 수업을 반성하고 개선하며, 수업을 준비하고 설계하는 데 도움을 줄 수 있다.

▶ '사고실험'

① 수업장면과 관련된 사고 실험: 교사나 교과서 저자가 한 학생 또는 한 그룹의 가상적인 학생들과 그들의 반응을 생각하면서 그에 따라 가르치거나 저술하는 태도
② 수업내용과 관련된 사고 실험: 수학적 개념을 발명했거나 수학적 방법을 개선한 개인 수학자의 마음속에 어떤 일이 일어났는지에 대해 추측하는 것

⇒ 교사의 입장에서 학생들의 재발명을 돕기 위해서 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 자신의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 것

③ 사고실험의 필요성: 학생의 재발명, 직관적 이해에 도움이 되고 반성적 사고를 유도

* 이경화 (2013) 수학수업의 이해와 설명, 대한민국 수학교육관련 학회 연합 학술대회

소크라테스가 수학학습 경험이 없는 사동에게 수학을 지도한 장면은, 플라톤이 저술한 대화편 「메논(Menon)」에 상세하게 제시되어 있다. 많은 교육학자들이 이 장면을 분석함으로써, 가르치고 배우는 일의 의미와 성격, 그리고 원리를 논의했다.

김응태·박한식·우정호(2007)는 이른바, '발생적 원리'의 근원이 바로 소크라테스가 수학을 지도한 장면에 있다고 보았다. 소크라테스는 '수학의 창조와 적용의 자연스런 인식론적 과정'에 따라 사동이 '스스로' 학습하도록 돕고 있다는 것이다.

소크라테스는 정교한 **'사고실험'을 통해 학생들이 거칠만한 모든 사고과정을 미리 예측**했을 것이다. 특히, 사동이 **잘못된 추측에 이를 것을 예측하고 적절히 대처**함으로서, '교사' 소크라테스는 가르치는 기회를 얻게 된다고 보았다.

프로이덴탈 역시 **'발생적 원리'에 따른 수학 지도와 '사고실험'에 의한 수업 준비의 전형**으로 소크라테스의 '수업'을 이해하고 설명했다(Freudenthal, 1978: 99-108).

프로이덴탈은 소크라테스가 **'적절한 순간(the right moment)'에 '적절한 질문(the right question)'을 함으로써 수학을 지도**했다고 보았다. 그는 이 방법이, 이른바, '새수학' 운동 당시에 강조되었던 학문중심 교육과정에 따른 지도 원리, 곧, 엄격한 논리를 강조하는 지도 방법과는 대조적이라고 해석했다.

소크라테스는 사동이 어떤 지식을 '상기' 해야 하는지 뿐만 아니라, **'상기하는 방법', 곧, 메타 지식에 대한 명확한 해석에 기초**하여 수업을 이끌었다. 그러나 **지식과 그 메타 지식을 학생 '대신' 발견했다는 점에서 보완의 여지가 있다.**

프로이덴탈이 어떻게 보완을 시도했는지에 대한 흥미로운 일화가 있다(Goffree, 1993: 40).

프로이덴탈은 손수건을 꺼내어 책상 위에 펼쳐놓았다. 그리고는 그 손수건의 넓이가 절반이 되도록 접어보라고 했다. **넓이를 2배로 하는 대신 절반으로, 그러니까 밖으로 정사각형 그림을 확장하는 대신에 정사각형 안에 어떤 도형을 그려서 넓이가 절반이 되게 하는 방법**을 찾도록 했다. 손수건을 보자마자 쉽게 넓이가 절반이 되게 접는 방법을 생각할 수 있고, 실제로 접기도 쉬웠다. 학생들은 **아무런 도움 없이** 손수건을 적절히 접어서 넓이가 절반이 되도록 만들었다.

16. (가) 수학화 (나) 수학적 모델링

- 수학화 학습 지도 원리(Treffers)

▶ 구체적인 현상의 탐구 원리

① 수학화 수업의 첫 단계는 구체적인 문맥으로 시작한다. 문맥이란 어떤 구체적인 수업 과정에서 학습자들에게 열려 있는 수학화되어야 할 현실의 영역을 의미한다.

② 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 여기서 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념 또는 비형식적 지식과 전략을 개발하는 것이 중요하다.

③ 구체적이라는 의미는 학습자들이 조작할 수 있는 블록과 같은 구체물과는 전혀 다른 것으로 이는 '현실적'이라는 것을 의미하며 학습자가 상상하고 그 자신의 경험을 활용하며 자신의 비형식적 전략들이 표출될 수 있는 상황을 의미한다.

④ '현실'이란 개념, 아이디어, 연산 및 구조의 근원으로서도 또한 응용하는 영역으로서도 공헌한다. 현실과 관련된 맥락을 제공하는 방법에는 장면, 이야기, 테마, 신문발췌, 게임 등이 있다.

▶ 수직적 도구에 의한 수준 상승 원리

① 수학화 수업에서는 학습자의 비형식적 지식과 전략에 기초하여 문제 상황에서 모델, 도식, 기호 등과 같은 다양한 수직적 도구를 개발하고 탐구를 통해 비형식적인 것을 형식화하는 과정이 이루어지도록 한다.

② 수직적 도구들은 학습자 스스로 문제 해결과정에서 개발한 것으로, 처음 수준에서 현실적인 문맥과 결합된 조작(수평적 수학화)과 반성적, 추상적, 형식적, 체계적 조작(수직적 수학화)을 연결하는데 도움이 되도록 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램 등과 같은 수학적 수단들을 제공하거나 학습자들이 탐구하고 개발하도록 해야 한다.

③ 여기서 구체적 또는 추상적이라는 의미는 고정적인 것이 아니라 상대적인 것으로 파악되어야 한다. 저학년에서 추상적이었던 것이 고학년에서는 구체적인 것이 될 수도 있다. 수학적 수단들이 그대로 부과되기보다는 학습자들이 그 문맥에 맞는 자신의 생각을 표현할 수 있는 수단을 만들어보는 기회가 있어야 한다.

▶ 학생들 자신의 구성과 산물을 통한 반성적 사고의 촉진 원리

① 수준상승은 반성적 사고에 의해서 촉진되고 갈등이나 학습자들 자신의 활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는데 도움이 될 수 있다.

② 반성적 사고를 가능하게 하고 학습자들의 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 좀 더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다.

▶ 상호작용원리

① 탐구 수업은 학생들 자신의 구성 활동뿐만 아니라 상호작용 수업 즉, 서로 상의하고 참여하고 타협하고 협동하고 개관할 기회가 주어지며 교사는 설명 위주가 아니라 조력자로서의 역할을 담당할 때 효율적으로 이루어질 수 있다.

② 학습자는 개인적으로 연구할 기회를 갖고 그룹과 분리되지 않은 상태에서 자기 자신의 탐구 경로를 구성할 기회를 가져야 한다.

③ 학습자들은 여러 아이디어들을 비교하고 교환하며 서로 다른 수학화 수준에서 문제의 해결책에 관해 논의할 것이고 때로는 인지적 갈등 상황을 경험하면서 더 나은 수준상승을 위한 최선의 방법을 협의할 것이다.

▶ 학습영역의 연결

① 수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 따라서 교사는 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 충분히 제공해야 한다.

② 수학의 다양한 영역들이 횡적·종적으로 연결되어 전체적인 구조화가 이루어질 때 수학을 여러 복합적인 상황에 응용할 수 있다.

③ 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이 되도록 지도되어야 한다. 여러 가지 학습 가닥을 포함하고 있는 맥락을 찾아내는 것이 중요하다.

17. 수학적 다양성의 원리, 국소적 조직화

(수학적 다양성의 원리는 수학적 개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제시하기 위해서는 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 많은 변인을 변화시켜야 한다는 것이다.)

교수·학습 활동 순서에서 탐구형 소프트웨어를 사용하는 부분에서 삼각형의 외심이라는 본질은 변하지 않게 유지하면서 삼각형의 모양(예각. 둔각, 직각삼각형)이라는 비본질적인 요소를 다양하게 변화시키고 있으므로 수학적 다양성의 원리가 적용되고 있다.

(국소적 조직화란 학생이 참이라고 인정하는 부분에서 출발하여 부분적으로 조직화하는 것이다.)

교수·학습 활동 순서에서 이전에 학습한 수직이등분선의 성질에서 출발하여 삼각형의 외심의 성질을 정당화하도록 하고 있다. 이를 통해 학생은 (삼각형의 외심의 성질에 대한) 증명(정당화)의 필요성을 인식하고 증명의 의미를 이해할 수 있게 된다.

(전반적 조직화에 따른 '증명'과 비교할 때, 국소적 조직화에 따른 '증명하기' 활동의 수학 교수·학습의 의의)

* 국소적 조직화의 다른 의의: 국소적 조직화를 통해 수학은 인간과 관계없는 객관적인 산물이 아닌, 인간 활동의 결과로 만들어진 인간적인 대상임을 학생이 이해할 수 있고, 수학에 대한 진정한 이해와 안목을 갖게 되며 궁극적으로, 수학은 학생의 인격의 일부가 될 수 있다.

18.

원주각의 성질 지도, 사회적 구성주의와 급진적 구성주의

현실주의적 수학교육에서 수학화,

수학과 교육과정: 문제해결능력 의사소통 능력

[서론]

- 사회적 구성주의와 급진적 구성주의의 차이점

사회적 구성주의에서 지식은 사회적 합의를 통해 객관적인 지식이 된다. 급진적 구성주의에서 객관화된 존재론적 실재는 없으며, 따라서 객관적인 지식은 존재할 수 없고 개인이 구성하는 지식은 독립적이고 주관적이다.

- 현실주의적 수학교육에서 수학화

현실주의 수학교육에서 수학화는 현상을 직관적으로 탐구하고 현상이 그것을 정리하는 수단이 본질로 조직되고 그 본질은 다시 현상이 되어 본질로 재조직되는, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 불연속적인 수준의 비약의 과정으로 설명된다.

(수학화 경험을 제공하면 수학에 대한 풍부한 구조를 갖게 되며 수학에 대한 진정한 이해와 안목을 기를 수 있게 되고, 수학은 학생의 인격의 일부가 될 수 있으며, 민주시민으로서 올바른 가치관을 갖게 된다.)

[본론]

- 〈자료1〉 객관화된 수학 지식을 얻기까지 거쳐야 할 과정

(개인의 주관적인 수학적 지식이 공표되고 공적인 비평과 재형성을 거치는 사회적 합의과정을 통해 객관적인 수학적 지식이 된다.)

학생 A가 원주각의 성질에 대한 주관적인 지식을 발표하였다. 학생 B는 [그림 2], [그림 3]과 같은 경우에는 성립하지 않을 것이라 반박하고, 학생 A는 이에 대해 위치에 관계없다고 재반박하였으며, 학생 B는 다시 이에 대하여 성립하지 않을 것이라고 반박하였다. 그리고 학생 A가 [그림 4]를 설명하면서 자신의 의견을 설명하였고 다른 학생들도 이에 동의하면서 객관적인 수학적 지식, 즉 원주각의 성질을 이끌어내었다.

- 〈자료2〉 수학화 과정의 관점에서 분석

도입부분에서 실세계의 현상을 기초로 하는 비수학적 문제 상황을 학생들이 직관적으로 탐구하도록 하였다.

전개 부분 1, 2단계에서 문제를 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 수평적 수학화가 나타나며, 3단계에서 이를 좀 더 세련된 수학적 처리 즉, 수직적 수학화를 통해 문제를 해결하도록 하였다.

[결론]

- 수학과 교육과정에서 의사소통, 문제해결 능력

2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교수·학습 방법에서는 다음과 같은 사항을 명시하고 있다.

‘다양한 관점을 존중하면서 다른 사람의 생각을 이해하고 수학적 아이디어를 표현하며 토론하게 한다.’

‘수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화 하게 한다.’

〈자료1〉에서 의사소통 역량이 강조되는 이유는 원주각의 성질에 대하여 다른 학생의 생각을 이해하고 수학적 아이디어를 표현하며 토론하고 있기 때문이다.

〈자료2〉에서 문제해결 역량이 강조되는 이유는 실세계 현상을 기초로 하는 비수학적 문제를 해결하면서 수학적 지식을 활용하고 있기 때문이다.

19.

수평적 수학화는 문제를 수학적으로 처리할 수 있게 하는 수학화이다.

수직적 수학화는 수학적 처리를 더욱 세련되게 하는 수학화를 의미한다.

(1)에서 직선 l을 x축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하는 것은 수평적 수학화이다.

(2)에서 나타낸 원과 직선의 위치관계를 (3)에서 판별식을 이용하여 설명하도록 하는 것은 수직적 수학화이다.

20.

교사의 입장에서 학생들의 재발명을 돕기 위해서, 학생의 입장과 반응을 고려함과 동시에 교사 자신의 입장에서 개인 수학자의 마음에 대해 추측하는 것을 의미한다.

직육면체의 밑면의 가로와 세로, 높이의 길이를 각각 a, b, c라 하자.

a, b, c가 모두 유리수인 경우 부피 공식이 성립한다.

a, b, c 중 하나 이상이 순환하지 않는 무한 소수인 경우를 생각하자.

a, b는 유리수, $c=\sqrt{2}=1.4142\cdots$라 하자.

$a\times b\times 1.4 < V < a\times b\times 1.5$,

$a\times b\times 1.41 < V < a\times b\times 1.42$,

$a\times b\times 1.414 < V < a\times b\times 1.415\ \cdots$

와 같이 생각하면 V는 $a\times b\times\sqrt{2}$에 한없이 가까워지므로 $V=abc$라 할 수 있다. a 또는 b가 무리수인 경우에도 비슷하게 생각할 수 있으므로 모서리의 길이가 실수인 경우에도 공식 $V=Sh$이 성립함을 알 수 있다.

21.

수학적 모델링은 비수학적 문제 상황에서 시작하여 수학적 모델을 설정하여 수학적 결론을 도출하고 이를 다시 원래의 문제상황에 맞게 재해석하는 과정이다.

수학화는 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정이다.

(가)는 비수학적 문제 상황, 즉 본질로 조직될 필요가 있는 현상이므로 (나)와 (다)의 [1단계]가 될 수 있다.

수학적 모델을 설정한다.

네 귀퉁이에서 잘라낼 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하자.

[공학적 도구 및 교구]

1.

LOGO와 BASIC과 같은 프로그래밍언어는 흥미유발과 수학적 개념의 직관적 이해와 그에 따라 개념이 더욱 공고히 되고 여러 가지 문제 상황에서 활용될 수 있는 문제해결력을 향상시킬 수 있다. 프로그래밍의 과정을 문제해결과정으로 보고 다음과 같은 절차를 갖는다.

목표인식 → 설계 → 실행 → 오류수정

이러한 과정은 Polya의 문제해결과정과 같이 절차적이고 체계적이라고 할 수 있다.

오류수정과정은 Polya의 반성과정과 같이 메타인지적 효과를 줄 수 있고, 이러한 과정을 통해서 수학적 사고력을 향상시키는데 절대적인 역할을 한다.

프로그래밍의 과정에서 학생들에게 알고리즘적 사고력을 기를 수 있고 구조적으로 사고하는 것을 학습하며 프로그래밍의 전후과정을 통하여 종합적으로 분석적인 사고방법을 기른다. 탐구학습을 통하여 사고를 형성할 수 있고, 오류수정을 통하여 메타인지능력을 기른다.

2.

(1) 각A, 각B, 각C의 합이 180° 인지 확인한다.

(2) REPEAT N 〔 FD :SIDE RT 360/N 〕

3.

하위 영역	배점	예상정답율(%)	관련사고영역	출제자
교육과정 및 교육공학	5	60	이해	장경윤
출제 내용 관련자료	제 7차 수학과 교육과정 (교육부) 수학 교과학 연구 (한국교육개발원)			

(1) 제 7차 교육과정은 **"<u>계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는</u>**, 복잡한 계산, 수학적 개념·원리·법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여" **<u>가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 권장</u>**한다.

(2) 수학적 지식을 교육하기 위한 교수학적 변환 과정에서 계산기나 컴퓨터의 사용할 때, 가장 우려되는 교수학적 현상은 **<u>'교수학적 노력의 초점이 수학적 지식에서 교수학적 고안(또는 모델)로 옮아가는' 메타인지적 이동(meta-cognitive shift)</u>**이다. 즉 수학의 의미보다도 컴퓨터 프로그램이나 계산기 사용 기법이 더욱 주목을 받게 되는 경우이다.

계산기나 컴퓨터를 사용하였을 때 가장 우려되는 메타인지적 이동의 사례는 다음과 같다.

ㄱ. 수학보다 계산기 자체의 기능이나 기계적인 작동 방법이 크게 부각되는 경우
- 내용이 수학 외에 부가적인 장식이나 기능이 크게 부각됨 (애니메이션 기능, 윈도우 범위 조정 방법, 자료 입력 방법 등)

ㄴ. 기계 사용으로 수학 지식의 본질이 변형되는 경우
- 도형 작도 소프트웨어(예: SketchPad나 Cabri 기하) 사용 시 시각적 효과를 위해 원의 내부를 색으로 칠하는 경우
- 계산기의 알고리즘이 다른 경우 사용한 근 구하기

*** 채점기준**

(1) 계산기나 컴퓨터 활용에 관한 교육과정의 입장 (2점)

① 2점: (계산능력 배양이 목적이 아닌 경우라는) <u>전제 조건</u>을 쓰고, <u>가능하면</u> 계산기나 컴퓨터의 사용을 <u>적극 권장</u>한다고 했을 경우.
- 모범답안 내용 중에 포함되어 있는 '복잡한 계산, 수학적 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등'에 사용하라는 언급은 빼도 무방함.)
- 문구가 완전히 일치하지 않아도 중심단어 3개(계산능력, 가능하면, 적극 권장)가 들어있으면 정답으로 함.

② 1점: (계산능력 배양이 목적이 아닌 경우라는) <u>전제 조건</u>을 쓰고, 계산기나 컴퓨터나 사용을 <u>권장(또는 허용)</u>한다고 했을 경우, ('가능하면', '적극' 중의 하나 또는 모두 누락된 경우)

③ 0점: 기타. 계산능력 배양이 목적이 아닌 경우라는) <u>전제 조건</u>을 언급하지 않은 경우, 계산기나 컴퓨터 사용 여부에 관한 입장에 관계없이 0점으로 함.

(2) 계산기나 컴퓨터의 사용으로 우려되는 교수학적 현상의 유형과 사례 (3점)

① <u>'메타인지적 이동'</u>(meta-cognitive shift 또는 <u>초인지</u>)이라는 용어를 명시한 경우

② 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식에서 교수학적 고안(또는 모델)로 옮아가는 것이라는 의미의 설명이 있는 경우

③ <u>컴퓨터나 계산기를 이용할 때</u> 지식의 변형이나 기계(또는 프로그램) 자체로 관심이 옮겨가는 구체적인 사례를 한 가지라도 제시한 경우

- 3점: ①, ②, ③이 모두 포함된 경우
- 2점: ①, ②, ③ 중 2가지가 포함된 경우
- 1점: ①, ②, ③ 중 1가지만 포함된 경우
- 0점: 기타 ①, ②, ③ 중 어느 것도 포함되지 않은 경우

4.
① 정n각형은 명령어 반복 n을 시행하면 처음 위치로 돌아온다.
② 명령어 돌자 y에서 y는 정n각형의 한 외각의 크기이다.

5. ⑤
ㄱ. 사칙계산을 배우는 초기 단계에서 계산기를 이용하는 것은 학생들이 연산의 의미는 물론 구조에 대한 지식을 이해하는 데 방해가 된다.
ㄴ. 학생들이 소수를 사용하는 것에 더 익숙하다고 판단할 근거가 부족하다.
ㄷ. 일차함수의 그래프라는 수학적 대상을 계산기를 사용하여 여러 가지 그래프의 모양으로 구체화하면, 그래프의 성질을 발견하는 데 도움이 될 수 있다.
ㄹ. $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 탐구하는 과정에서 산술적인 계산의 처리를 계산기가 신속히 수행해 주므로 본질적인 사고력 중심의 교수・학습 활동에 전념할 수 있다.

* <u>2015 교육과정에서 공학적 도구</u>
▶ 매체 및 도구 활용 수업: 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수・학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.
▶ 정보 처리 능력: 다양한 자료와 정보를 수집・정리・분석・활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택・이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력
- 실생활 및 수학적 문제 상황에서 적절한 자료를 탐색하여 수집하고, 목적에 맞게 정리, 분석, 평가하며, 분석한 정보를 문제 상황에 적합하게 활용할 수 있게 한다.
- 교수・학습 과정에서 적절한 교구를 활용한 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하도록 한다.
- 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수・학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다.
- 평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다. (평가 방법)

6.
- ③의 지도 방안과 근거

Geogbra를 사용하여 함수 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x>-1)$의 그래프를 그리고 학생들이 극한값 $\lim_{x\to 0}f(x)$이 존재하는지 생각해 보게 한다. 그리고 계산기를 사용하여 $x=0.01,\ 0.001,\ 0.0001,\ \cdots,\ -0.00001,\ -0.0001,\ -0.001,\ \cdots$에 대하여 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값을 계산해 보게 한다. 그리고 이 결과를 이용하여 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 e임을 직관적으로 이해시킨다.

2015년 개정 수학과 교육과정에서는 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수・학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있도록 권고하였다. 이러한 사항에 근거할 때 위의 지도 방안은 적절한 지도 방안이라고 할 수 있다.

1. ①

2.

- 문제 풀이와 답안

작년의 남학생 수 x, 여학생 수 y.

$x+y=1050$ $\frac{4x}{100}-\frac{2y}{100}=9$에서 $x=500$, $y=550$.

금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명).

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명).

- 채점 기준: 10점 만점

채점영역	채점요소	배점
문제이해	작년의 남학생 수를 x ……………………① 작년의 여학생 수를 y ……………………②	① 1점 ② 1점
계획실행	$x+y=1050$ ……………………………………③ $\frac{4x}{100}-\frac{2y}{100}=9$ ………………………………④ $\therefore$ $x=500$, $y=550$ ……………………⑤, ⑥	③ 1점 ④ 1점 ⑤ 1점 ⑥ 1점
답 구하기	금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명) …………⑦ 금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명) …………⑧	⑦ 2점 ⑧ 2점
총점		총 10점

- 문제해결력 평가: 분석적 채점법, 총체적 채점법

㉠ <u>분석적 채점법</u>: 문제해결의 과정을 몇 개의 단계로 나누고 각 단계에 점수를 할당하여 이를 기준으로 채점하고 점수를 부여하는 방법

㉡ <u>총체적 채점법</u>: 풀이 전체를 몇 개의 수준으로 나누고 각 수준에 도달하기 위한 구체적인 기준을 마련한 다음 학생의 풀이가 어느 수준에 속하는지를 평가하는 방법

0 – 아무것도 하지 않았음 1 – 문제해결을 시도하였음 2 – 아이디어는 옳으나 실행은 미약함 3 – 계산 실수를 제외하고는 거의 맞음 4 – 완벽함

3. 수학과 평가 절차 6단계

① 평가목적 선정
② 평가영역 및 목표 선정
③ 평가틀 개발 및 평가 방법 선정
④ 평가도구개발
⑤ 평가실시
⑥ 채점 및 결과 보고

* <u>수학과 평가 절차 6단계</u>

▶ <u>평가목적 선정</u>: 어떤 목적으로 평가를 할 것인가를 결정한다.

▶ <u>평가영역 및 목표 선정</u>: 평가목적에 따라 평가하고자 하는 영역을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육목표가 무엇인지 확인한다.

▶ <u>평가틀 개발 및 평가 방법 선정</u>

① 평가틀이란 평가도구개발 및 평가의 전 과정에서 평가의 방향과 평가 관련 항목을 선택 또는 결정할 때 판단의 준거가 되는 지침이다.

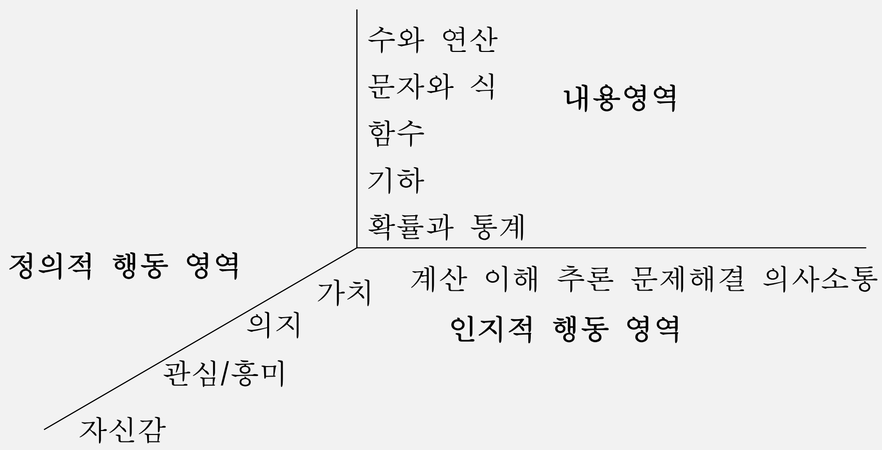
② 평가영역의 교육목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동영역과 내용영역, 평가 목표, 평가문항유형 그리고 각 요소별 문항 출제비율 등을 포괄적으로 포함한다.

* <u>평가틀의 예</u>

㉠ 2차원의 평가틀

행동영역 / 내용영역		계산	이해	추론	문제해결	의사소통
기하						

㉡ 3차원의 평가틀



* <u>평가 방법선정</u>

평가영역	평가 방법		주체자	기록법
인지적	선택형검사		학생	답안지
	서답형검사	단답형	학생	답안지
		서술형	학생	답안지
	프로젝트	예상답안작성	학생	답안지
정의적		학생자기평가	학생	자기평가기록지
	관찰・면담		교사	일화기록법 평정척도법 체크리스트
인지・정의적	포트폴리오		학생	기록지 모음

▶ <u>평가도구개발</u>: 평가틀에 부합하는 평가도구를 개발한다.

① 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발한다.

② 모범답안 및 채점기준을 개발한다.

▶ <u>평가실시(가채점)</u>: 최종채점 전에 가채점을 실시하여 채점기준을 검토하고 수정한다.

* 채점기준(안) 계획 ⇒ 평가실시 ⇒ 가채점 실시 ⇒ 채점기준(안) 검토 및 수정 ⇒ 평가(최종채점)

▶ <u>채점 및 결과 보고</u>: 평가실시 후, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 수정, 보완한 후 채점한다. 평가목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고한다.

4.

5개월 후의 토끼의 쌍의 수는 $a_5 = 12$가 아니라 13이다.

학생은 문제의 몇 가지 사례, 즉 1개월부터 4개월까지의 토끼의 쌍의 수를 관찰하고 그 수가 제1계차가 1, 2, 3, …인 등차수열임을 귀납추론하였다.

2점. 문제이해는 충분하고 정확한 수학적 표현을 사용하였으므로 1점을 줄 수 없으며, 귀납추론은 명확한 추론이 아니므로 3점을 줄 수 없다. 그러므로 2점이 적절하다.

* <u>귀납추론</u>: 관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론이다.

* 피보나치수열:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

5.

수학적 의사소통 능력의 평가(말하기/쓰기 능력)

① 조별 발표 관찰: 말로 표현하기, 수학적 아이디어를 상대방이 이해할 수 있도록 적절하고 정확하게 전달할 수 있다.

② 보고서 검토: 기록으로 표현하기, 수학적 아이디어를 다른 사람이 이해할 수 있도록 글로 표현할 수 있다.

▶ <u>수학적 의사소통능력 평가</u>

① 수학적 의사소통능력은 수학적 지식을 발전시키고 활용하기 위해 탐구하고, 토론하고, 기술하고, 실제로 해 보는 활동을 의미한다.

② 수학적 아이디어들을 말로 표현할 수 있으며, 기록으로 표현할 수 있으며, 시각적으로 묘사할 수도 있어야 한다.

㉠ 말로 표현하기: 수학적 아이디어를 상대방이 이해할 수 있도록 적절하고도 정확하게 전달할 수 있는지를 평가한다.

㉡ 기록으로 표현하기: 수학적 아이디어를 다른 사람이 이해할 수 있도록 글로 표현해보게 한다. 또, 학생들의 수학 학습에 대하여 기록한 일지(수학 학습일지)를 분석함으로써 문장을 통한 수학적 의사소통능력을 평가할 수 있다.

③ 기록으로, 구술로, 또는 시각적 형태로 제시된 수학적 아이디어를 이해하고, 해석하고, 평가할 수 있어야 한다.

(예) 신문, TV, 영화 또는 인터넷 속의 무수히 많은 수학적 지식이나 정보를 찾아보게 하고 이들을 바르게 이해하고 있는지를 평가한다.

④ 수학적 아이디어를 표현하고 관련성을 기술하고 상황을 모델로 나타내기 위해 수학적 언어와 기호 및 구조를 사용할 수 있어야 한다.

㉠ 학습과제의 결과를 분석한다.

㉡ 학생들과 어떤 수학적 주제에 대해 면담하거나 학생의 수학적 활동을 관찰한다.

㉢ 학생들이 작성한 수학 학습일지(journal)를 분석한다.

* 수학 학습일지(Journal): 그 시간에 학습한 수학내용, 중요한 개념의 뜻과 표시 방법, 가정 학습 과제와 그 풀이 등을 나타낸 공책을 의미한다.

6.

- 수학과 평가 목적(2015)
  ① 학생: 학생의 수학 학습과 전인적 성장을 돕는다.
  ② 교사: 교사의 수업 방법을 개선한다.
- 다양한 평가 방법의 장점

① 인지적 영역: 학생의 수학적 지식을 종합적이고 지속적으로 평가할 수 있으며, 문제해결의 과정 및 결과를 평가할 수 있다.

② 정의적 영역: 학생의 수학에 대한 자신감, 태도, 성향을 평가할 수 있다.

▶ <u>수학적 성향의 평가: 일화기록지, 체크리스트, 평정척도법</u>

① 수학적 성향은 정의적 영역이며, 수학에 대한 전형적인 태도 및 감정 표현의 방식과 관련된 특성이다.

② 주관식 지필검사나 설문지조사보다는 관찰 및 면접법이 더 바람직하다.

㉠ <u>관찰 기록지(일화 기록지)</u>: 각 학생에 대한 관찰 기록 카드를 만들고 적절한 수학적 성향을 보일 때마다 날짜와 구체적인 관찰 사실 등을 기록한다.

㉡ <u>체크리스트</u>: 행으로는 학생의 이름을 열로는 수학적 성향의 요소를 기술한 관찰표를 만들고 관찰된 결과를 해당하는 칸에 체크하는 방법이다.

㉢ <u>평정척도법</u>: 행으로는 척도를 열로는 수학적 성향의 요소를 기술한 관찰기록표를 만들고 관찰된 결과를 해당하는 칸에 체크하는 방법이다.

7.

히스토그램을 구하는 절차적 지식을 평가할 수 없다.

면담 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고 방법, 수행 과정 등을 평가하는 방법이므로 의사소통, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 수 있다.

히스토그램을 나타내는 방법을 예를 들어 간략히 설명하시오.

* 2015 교육과정 [교수・학습 및 평가의 방향] (4) 평가 방법

<u>관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가</u>: 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고 방법, 수행 과정 등을 평가하는 방법으로, 의사소통, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

8.

- 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$는 x절편과 y절편을 갖는지 설명하시오.
- ①의 관점: 학생의 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 이해와 그 표현 능력, 수학적 사고능력, 문제해결능력 등을 향상시켜 학생의 수학 학습을 도울 수 있다.
- ②의 관점: 학생의 문제해결과정과 결과를 파악할 수 있다. 이를 근거로 교사 자신의 교수 방법을 반성하고 개선할 수 있다.

9. ③

세 수를 더한 뒤 여러 가지 수를 더하여 4로 나누고 있는 부분에서 평균을 부정확하게 구하고 있으므로 평균의 의미를 부분적으로 이해하고 있다.

- 사용한 전략은 적절하지만 전략 사용에서 계산 실수가 발생하여 답이 틀렸다.

* 2015 교육과정 [교수・학습 및 평가의 방향] (4) 평가 방법

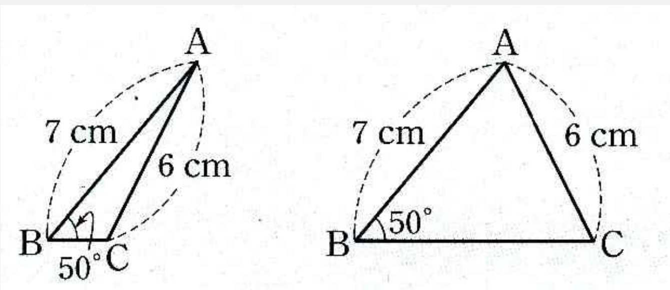
① 지필 평가: 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력과 문제해결, 추론, 창의・융합, 의사소통 능력 등을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서・논술형 등의 다양한 문항 형태를 활용한다.

10. ⑤
① 과제 3번
② 과제 1, 2, 3, 4번
③ 과제 2번, 3번
④ 과제 2번, 3번, 4번
⑤ 없음

11. ②
▶ <u>수학과 평가 방법</u>

평가영역	평가 방법		주체자	기록법
인지적	선택형검사		학생	답안지
	서답형검사	단답형	학생	답안지
		서술형	학생	답안지
	프로젝트	예상답안작성	학생	답안지
정의적		학생자기평가	학생	자기평가기록지
	관찰・면담		교사	일화기록법 평정척도법 체크리스트
인지・정의적	포트폴리오		학생	기록지 모음

12.
• <u>[문제]에 대한 모범답안</u>
두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 다른 한 각의 크기가 주어진 경우 삼각형이 하나로 결정되지 않는다. 다음과 같은 두 가지 경우를 생각할 수 있다.



• <u><조건>에 따른 채점기준(분석적 채점)과 평가 결과</u>
▶ <u>문제해결</u>

채점 영역		채점 요소
문제해결	문제 이해	① 두 변의 길이와 그 끼인각이 아닌 한 각이라는 조건을 파악한다. ② 조건에 맞게 기호를 붙인다.
	계획 작성 및 실행	① 조건에 맞는 삼각형을 작도한다. ② 삼각형이 하나로 결정되지 않음을 판단하고 그 이유를 설명한다.
	반성	① 조건에 맞는 삼각형을 제대로 작도했는지 점검한다. ② 삼각형이 하나로 결정되기 위해서 어떤 조건이 필요한지 탐구한다.
수학적 추론과 정당화		① 결정조건에 대해 올바르게 판단하고, 그 반례를 제시한다. ② 결정조건에 대한 판단은 틀렸으나 이를 정당화하려고 시도한다.

① 주어진 조건을 파악하고 있다. 조건에 맞게 기호를 붙이고 있다.
② 컴퓨터 프로그램을 이용하여 조건에 맞는 삼각형을 작도하고 있다. 삼각형이 하나로 결정된다고 판단하고 그 이유를 설명하였다.
③ 작도 과정을 점검하고 있지 않다. 삼각형이 하나로 결정되기 위한 조건을 탐구하고 있지 않다.
④ 결정조건에 대한 판단은 틀렸으나 이를 정당화하려고 시도하고 있다.

13. ④
ㄱ. 정의적 태도 항목별 세부 관찰 항목을 제공하여 기록한 자료 분석의 처리가 용이하다.
ㄴ. 발견술에 관한 지식은 인지적 영역에 가깝다.
ㄷ. 자기 평가의 항목으로도 적절하다.

• <u>관찰 및 면담의 기록 방법(수학적 성향의 평가)</u>
① <u>일화기록법</u>: 한 개인을 대상으로 구체적인 행동 사례를 간략히 기술
㉠ 장점: 별다른 준비 없이 관찰하고자 하는 행동을 기록할 수 있고, 경우에 따라 예상하지 못한 행동이나 사건이 발생하면 이를 포착할 수 있다.
㉡ 단점: 기록 내용을 해석하고 분석하는 데 시간과 노력이 추가적으로 요구된다.

② <u>체크리스트</u>: 관찰(면담)하려는 행동 단위를 미리 분류하고, 이를 기초로 그러한 행동이 나타났을 때 표시하는 방법
㉠ 장점: 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다.
㉡ 단점: 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구된다. 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못한 행동이 나타나는 경우 적절한 기록을 수행하기 어렵다.

③ <u>평정척도법</u>: 관찰 또는 면담 대상을 일정한 척도에 따라 분류하고 측정하는 방법
㉠ 장점: 기록자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다.
㉡ 단점: 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구된다. 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못한 행동이 나타나는 경우 적절한 기록을 수행하기 어렵다.

14. ①
ㄱ. 평가 문항은 로그의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 이를 실세계 문맥에 적용하는 능력이 요구된다.
ㄴ. 평가문항에는 의사소통 능력 평가를 위한 항목이 명시되어 있지 않다.
ㄷ. 로그에 관한 지식과 기능을 활용하여 타당한 결과를 도출하는 연역적 추론 능력을 평가할 수 있다.
ㄹ. 평가 문항은 이미 수학적으로 관찰, 분석, 조직되어 있다.

15. ⑤
ㄱ. 중학교 3학년에서 다뤄질 수 있다.
ㄴ. 이유를 설명하게 하므로 수학적 용어를 사용하여 수학적으로 표현하는 의사소통 능력을 기르는 데 도움을 줄 수 있다.
ㄷ. 해결 결과뿐만 아니라 해결의 과정을 설명하게 하는 문항이므로 해결 과정도 중시한다.

16. ④
ㄱ. 공장에서 제품 생산과 최대 이익을 산출하는 수학 외적 상황과 부등식의 영역에서 최대, 최소를 구하는 수학 내용의 관련성을 파악하여 문제를 해결한다는 측면에서 문제해결로 분류하는 것이 적절하다.
ㄴ. 답이 정해져 있으므로 개방형 문제는 아니다.
ㄷ. 채점 기준은 분석적 채점에 따른 것이다.

17. **서술형 평가 장점, 분석점 채점**

<자료1>에서 선택형 문항은 학생의 풀이 결과만을 파악할 수 있다. <자료1>에서 서술형 평가와 <자료2>는 학생의 풀이 결과뿐만 아니라 풀이 과정을 평가할 수 있으며, 이를 바탕으로 교사는 자신의 수업을 반성하여 수학 교수·학습 방법을 개선할 수 있다.

5점이다. 제곱근의 성질을 이해하고 있으므로 2점, $\sqrt{28x}$를 $2\sqrt{7x}$로 고쳤으므로 3점이다. $2\sqrt{7x}$를 이용하여 만족하는 모든 수를 구하지는 못하였으므로 더 이상의 점수 부여는 어렵다.

18.

프로젝트 평가는 학생의 수학 학습 결과뿐만 아니라 학습의 과정에서 자료를 수집하고 분석하고 종합하고 해결하는 과정과 문제 해결, 창의·융합, 정보처리 능력 등을 평가할 수 있으므로 박 교사의 수업의 평가 방법으로 적절하다.

음의 상관관계가 있으므로 자료를 옳게 분석하였다.

상관관계는 인과관계를 의미하지 않으므로 결론은 적절하지 않다.

19.

포트폴리오 평가, 동료평가.

수학과의 평가는 학생의 인지적 영역에 대한 유용한 정보를 수집·활용하여 학생의 수학 학습 개선과 전인적 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선할 것을 목적으로 한다.

포트폴리오 평가는 일정 기간 동안 학생의 학습 결과물을 수집·활용하여 학생의 학습 내용 이해라는 인지적 영역에 대한 유용한 정보를 수집하고 학생의 학습을 돕고 전인적으로 성장하도록 도울 수 있다는 장점이 있다.

20.

2점, 2점.

방정식을 이용하고 있으므로 1점,

방정식 $x^2+4x-n=0$을 제시하였으므로 1점,

모든 n의 값을 구하고 그 값의 합을 정확하게 구하지 못하였으므로 더 이상의 점수 부여는 어렵다.

총체적 채점법과 달리 B와 같은 분석적 채점법은 채점 영역을 나누어 채점 요소를 구체화하여 점수를 부여하므로, 채점자 간 편차를 줄일 수 있다는 장점이 있다.

[수학사]

1. ①

'각각의 다리를 정확히 한 번씩만 지나 모든 다리를 건널 수 있을까?'

이 문제는 '쾨니히스베르크 다리건너기' 문제로 회자되며 오일러에 의해 수학적인 문제(한붓그리기 문제)로 바뀌었다. 이를 해결하는 오일러의 방식은 현대위상수학이 탄생하는 데 큰 공헌을 하였다.

2. ③

3. ②

4. ③

5.

유클리드의 [원론]의 제5공준인 '평행선 공준'이 당시의 수학자들에게 많은 의심을 불러 일으켰고 당시의 수학에 대한 관점에서 이러한 평행선 공준의 증명이 여러 각도로 시도되어 심지어 약 2000년동안 끌어왔다. 그러한 과정을 거치는 동안 차츰 평행선 공준의 증명보다는 다양한 관점의 전환이 시도되었고 사케리(Saccheri)의 사변형이나 람베르트(Lambert)의 사변형과 같은 획기적인 도형을 생각하게 되었다.

그러나 이러한 도형들은 이론적으로 뒷받침할 내용을 제시하지는 못하였고 로바체프스키(Lobachevsky)가 드디어 한 직선 밖에있는 한 점을 지나는 주어진 직선이 평행한 직선이 적어도 두 개 존재한다는 것을 이론적으로 뒷받침하였고 이로써 완전한 관점의 전환이 이루어졌다. 이것은 '쌍곡기하학'이라고 하고, 그 후 리만(Riemann)의 타원기하학이 발표되었다.

타원기하학의 평행선 공준은 '임의의 두 직선은 반드시 만난다'는 것이고 이를 구면기하학이라고도 한다. 이후로 많은 수학자들에 의해서 이를 뒷받침하는 이론과 모델이 구축되었다.

이러한 비유클리드 기하학의 발견은 수학이 절대불변의 진리라는 플라톤주의적 관점을 포함하여 인간의 수학적 활동에 의한 창조물이라는 관점도 자리를 잡게 되었고 수학의 형식화를 위한 힐베르트의 계획까지 나오게 되었다.

수학에서 이러한 관점의 전환이 얼마나 중요한 것인가는 수학사에서 여러 가지로 입증되었다. 예를 들면 데카르트의 해석기하학도 하나의 관점의 전환에 의한 결과물이다.

* 박창균 (2011) 로바체프스키의 수학철학과 비유클리드 기하, 한국수학사학회

로바체프스키의 비유클리드 기하는 그가 살아있을 때는 인정을 받지 못했지만 그의 사후 벨트라미, 캐일리, 클라인, 푸앵카레 등의 작업에 의해 인정을 받게 되었다. 클라인은 1871년 로바체프스키가 발견한 기하를 '쌍곡기하학'이라 명명했다.

평행선 공준이 다른 공준과 독립이라는 것을 보이는 것은 비유클리드 기하의 정당성을 확보하기 위한 핵심과제인데, 위의 사람들은 비유클리드 기하의 상대적 무모순성을 보였다. 즉 삼차원 유클리드공간의 곡면이 이차원 비유클리드 기하학의 모델임을 밝힘으로써 유클리드기하가 무모순이면 비유클리드 기하도 무모순임을 보였다.

유클리드기하 자체의 무모순성은 힐버트에 의해 제기되었고 그 자신이 좌표쌍 전체의 집합이 유클리드 평면에 대한 모델이 된다는 것을 보임으로써 해결했다. 이로써 유클리드 기하의 무모순성은 초등대수학의 무모순성으로부터 상대적으로 확립되었다.

많은 수학자들이 처음에는 공리와 나머지 공준들로부터 평행선 공준의 유도를 시도했으나 실패했다. 이런 직접적 방법의 실패는 간접적 방법으로 선회하게 했다. 즉 제 5공준을 부정하고 모순을 유도하는 귀류법이 그것이다. 사케리와 람베르트가 대표적 인물들이다.

사케리는 그의 사변형에서 둔각가정과 예각가정이 직관에 반한다는 것에 결국 호소함으로써 논리적 오류를 범하고 비유클리드 기하의 발견자의 지위에 오르지 못한다. 람베르트도 사케리와 같이 세 가지(직각, 예각, 둔각)를 가정하고 특히 예각을 가정하면 '삼각형의 면적은 그 내각의 합으로부터 2직각을 뺀 것에 비례한다.'는 보다 진전된 결과를 제시하였다. 그러나 이러한 결과에도 불구하고 비유클리드 기하를 발견한 영예는 로바체프스키에게 돌아간다.

로바체프스키는 비유클리드 기하를 허기하학(imaginary geometry)라고 했는데, 가우스는 처음에는 반유클리드 기하(anti-Euclidean geometry)라고 불렀고, 그 후에 별의 기하학(astral geometry)을 거쳐 최종적으로 비유클리드 기하라고 했다. 당시 사람들은 이 새로운 기하에 대해 극단적인 주장이라고 생각하고 거부감을 가졌던 것으로 보인다.

왜 사케리나 가우스는 그들의 작업이 비유클리드 기하에 근접했으면서도 한 걸음 더 내딛지 못했거나 발표를 꺼렸을까? 그것은 당시의 패러다임에 반했기 때문이다. 사케리와 가우스는 당시 지배적인 패러다임의 장벽을 극복하지 못한 셈이다.

로바체프스키는 평행선 공준의 문제를 해결하려는 역사적으로 앞선 학자들의 시도로부터 자양분을 받은 것으로 추정되고, 그가 가진 수학철학은 비유클리드 기하의 출현에 가장 중요한 변수로 보인다. 그러나 그를 둘러싸고 있었던 환경은 객관적으로 결코 좋았다고 볼 수는 없었을 것 같다. 유럽의 학문의 중심지가 아닌 곳 러시아에서 그것도 수도가 아닌 변방의 조그만 도시 카잔의 대학에 있었기 때문에 불리하다고 할 수도 있는 환경이었다. 그럼에도 불구하고 나름대로 확립된 수학철학과 이를 관철할 수 있는 강인한 열정과 의지는 수학에서 가장 혁명적인 장의 하나를 열었던 것이다.

6.

피보나치의 저서 「산반서(Liber Abaci)」에 다음과 같은 문제가 있다.

한 사람이 암, 수 한 쌍의 토끼를 기르는데 한 달에 한 번씩 한 쌍의 새끼(암, 수)를 출산한다고 합니다. 새로 출산된 새끼 한 쌍은 한 달이면 다 자라고, 두 달 후부터는 매달 한 쌍의 새끼를 출산한 일 년 후에는 모두 몇 쌍의 토끼를 출산하겠습니까?

이 문제의 풀이에 나오는 수열을 Lucas가 피보나치 수열이라고 이름 붙였다.

① $x_n = f_{n+1}\,f_{n-1} - f_n^2$라 하면

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_{n+2}\,f_n - f_{n+1}^2 \\ &= (f_{n+1}+f_n)f_n - (f_n+f_{n-1})f_{n+1} \\ &= f_n^2 - f_{n-1}\,f_{n+1} \\ &= -x_n. \end{aligned}$$

② $x_2 = f_3 f_1 - f_2^2 = 2\cdot 1 - 1^2 = 1$이므로 $n \ge 2$일 때 $\{x_n\}$은 공비 -1인 등비수열이다. 따라서 $x_n = 1\cdot(-1)^n$ $(n \ge 2)$.

③ $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$에서 $f_{n+1}f_{n-1} = f_n^2 + (-1)^n$ $(n \ge 2)$.

7. 비유클리드 기하학 평행선 공준과 그림 모델

(1) 비유클리드 기하에서 평행선 공준

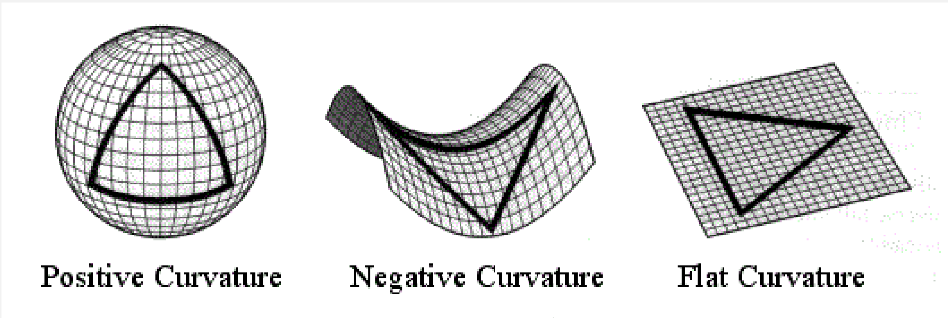
- <u>쌍곡기하 평행선 공준</u>

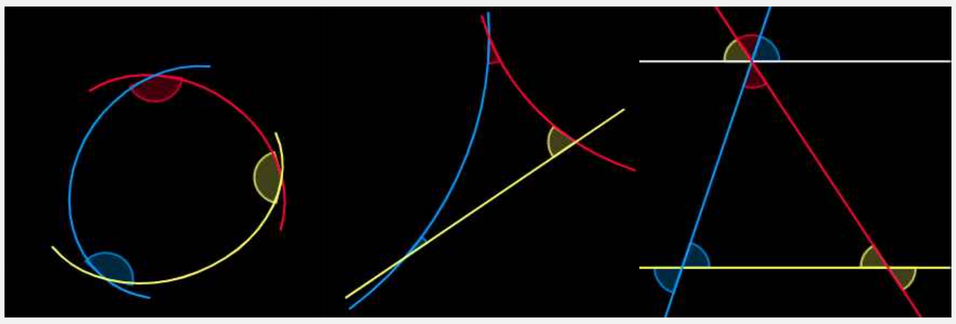
직선 l과 그 위에 있지 않은 점 P가 있을 때, P를 지나며 l과 만나지 않는 직선은 적어도 2개 존재한다.

- <u>타원기하 평행선 공준</u>

평면상의 두 직선은 반드시 만난다.

(2) 비유클리드 기하의 모델(과 유클리드 기하의 모델)





[수학자 주요 업적 연대표]

수 학 자	주 요 업 적
아메스 Ahmes B.C1700년경 이집트	• 이집트의 왕실 서기로, 저서 『아메스 파피루스』에 산술, 기하, 대수 등이 기록 • 단위분수 사용 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\frac{1}{6}(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$을 의미) • 일차 방정식: 가법, 감법, 항등을 표시한 기호사용 • 넓이의 계산 정사각형, 직사각형, 이등변삼각형, 등변 사다리꼴, 원 $(=\frac{256}{81}\times r^2)$
탈레스 Thales B.C640? ~ 546 그리스	• 그리스 기하학의 시조 • 비례식을 최초로 생각 • 원은 지름에 의해서 이등분된다 • 이등변삼각형의 두 밑각은 같다 • 맞꼭지각은 같다 • 삼각형의 내각의 합은 $2\angle R$이다.
피타고라스 Pythagoras B.C572? ~ 492? 그리스	• 수에 관한 연구 : 홀수, 짝수, 완전수, 삼각수, 사각수, 피타고라스수 • 피타고라스의 정리 • 황금분할 방법 연구 • 비례와 평균의 연구: 산술평균, 조화평균 • 정다면체의 연구 • 무리수의 발견
제논 Zenon B.C490? ~ 429? 그리스	• 제논의 역설 주장 (아킬레스는 거북을 앞지를 수 없다, 날아가는 화살은 정지되어 있다)
에우독소스 Eudoxos B.C408? ~ 355? 그리스	• 구의 체적은 반지름의 세제곱에 비례한다. • (각뿔(원뿔)의 부피)$=\frac{1}{3}\times$(각기둥(원기둥)의 부피)
히포크라테스 Hippocrates B.C460? ~ 77? 그리스	• 입방 배적 문제 연구 • 비례중항을 고안하여 델로스의 문제 해결 시도
플라톤 Platon B.C427? ~ 347? 그리스	• 진리를 알기 위하여 수학의 중요성을 역설 • 신은 끊임없이 기하학화한다. • '점은 선의 시작'
아리스토텔레스 Aristoteles B.C384 ~ 322 그리스	• 연역 논리를 조직화 • 기하학적 전개 방법 확립 • '점, 선, 면은 각각 선, 면, 체의 한계이고, 체는 3방면의 방향을 가진 것이다'
유클리드 Euclid B.C330? ~ 275? 그리스	• 『기학학 원론』 13권 • 논증의 체계 확립 • 호제법으로 최대공약수 구함 • 평행선의 성질 • 삼각형의 합동 조건
아르키메데스 Archimedes B.C287? ~ 212 그리스	• 정96각형을 이용하여 π의 값을 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$로 계산 • 구분구적법에 의하여 넓이, 부피 구함 • 부력의 원리로 비중을 측정 • 지렛대의 원리 • (원의 넓이)=(원주의 $\frac{1}{2}$)×(반지름) • 수의 무한성에 관한 연구
에라토스테네스 Eratosthenes B.C275 ~ 194 그리스	• 지구의 둘레를 산정함 • 에라토스테네스의 체를 만듦 • 태양, 달까지의 거리 측정
아폴로니우스 Apollonios B.C262? ~ 200? 그리스	• 원추곡선의 성질 연구 • 『원뿔곡선론』 8권 • 타원, 쌍곡선, 포물선의 명칭을 사용
히파르코스 Hipparchos B.C190? ~ 125? 그리스	• 구면삼각법의 창안자

수 학 자	주 요 업 적
헤론 Heron B.C130 ~ 75? 그리스	• 측량기구 제조 • 헤론의 공식(삼각형의 넓이) 발견 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$
니코마코스 Nicomachos B.C50 ~ 150? 그리스	• 『산술입문』 • 세제곱수는 연속되는 홀수의 합으로 나타낼 수 있다. $1^3=1,\ 2^3=3+5,\ 3^3=7+9+11,\ \cdots$
프톨레마이오스 Ptolemaeos B.C85? ~ 165? 그리스	• 3각법의 연구가: 삼각법의 가법정리, 반각공식 • 저서 『Almagest』에 sin표와 같은 수표 작성 • 원주를 360˚로 나누고 60진법에 의하여 도, 분, 초로서 호와 현의 길이 측정 • 평행선 공준을 증명하려고 시도
디오판토스 Diophantos B.C246? ~ 330? 그리스	• 『산학』13권 : 대수적 수론을 해석적 논법으로 씀 • 부정방정식 연구 • 생략속기법의 대수적 표기를 이용: 지수법칙 생각
파푸스 Pappos 300년경 그리스	• 『수학집성』 8권: 그리스 기하학을 집대성 • ·파푸스의 정리 발견
조충지 祖沖之 430 ~ 501 중국	• 원주율의 근사값으로 $\frac{22}{7}$와 $\frac{355}{113}$를 사용
브라마굽타 Brahmagupta 598 ~ 660? 인도	• 원에 내접하는 사각형의 넓이 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (단, $s=(a+b+c+d)/2$) • 원주율의 근삿값으로 $\sqrt{10}$ 사용
알콰리즈미 Alkhwarizmi 780 ~ 850 아라비아	• 분수의 횡선 도입 • 'algebra'란 용어를 이항이란 뜻으로 씀 • 이차방정식을 기하학적으로 씀 • alkwarizmi → algoritmi → algorithm (어떤 특별한 방법으로 계산하는 기술)
카얌 Khayyam 1140 ~ 1123 아라비아	• 삼차방정식의 근을 원뿔곡선을 이용하여 구함
바스카라 Bhaskara,A 1114 ~ 1185 인도	• 이차방정식에 두 근의 존재를 인정 • $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$을 증명 • 『vija-ganita(代數)』 • 원의 반지름은 원주의 $\frac{3438}{21600}$로 계산
피보나치 Fibonacci 1180? ~ 1250? 이탈리아	• 피보나치 수열을 생각 • 『산반서(算盤書)』 • 인도-아라비아 숫자를 유럽에 소개 • 『실용기하학』
주세걸 1300년경 중국	• 『산학계몽(算學啓蒙)』 • 한국 및 일본 수학에 영향을 줌
봉필 Bonfil, I. 1350년경 프랑스	• 소수(小數)의 기호를 최초로 사용
파촐리 Pacioli, L. 1450? ~ 1520 이탈리아	• 1, 2차 방정식 해법의 표준형을 다룸 • 확률론을 연구 • 복식부기를 시작 • 산술서 『Summa de Arithmetica』
페로 Ferro 1465? ~ 1526 이탈리아	• 삼차방정식의 해법 연구 • $x^3+mx=n$을 대수적으로 풀었으나 미발표
슈티펠 Stifel, M. 1487 ~ 1567 독일	• 로그개념의 선구자 • 17제곱 이하의 모든 이항계수를 구함 • 음수, 거듭제곱, 거듭제곱근을 다룸
비트만 Widmann, J. 1462 ~ 1498 보헤미아	• 모든 상거래에서 +, −를 사용하기 시작함 • 『상업상술』

수 학 자	주 요 업 적
타르탈리아 Tartaglia, N. 1500? ~ 1557 이탈리아	• 삼차방정식의 해법 발견
카르다노 Cardano, G. 1501 ~ 1576 이탈리아	• 『위대한 술법』: 3, 4차 방정식의 해법 • 확률문제 다룬 도박사의 안내서 씀 • 허수발견
레코드 Recorde, R. 1510 ~ 1558 영국	• 등호 ‘=’를 처음 사용
페라리 Ferrari, L. 1522 ~ 1565 이탈리아	• 사차방정식 해법을 최초로 발견하여 스승 카르다노의 『위대한 술법』에 실음
비에트 Viete, F. 1540 ~ 1603 프랑스	• 대수학의 체계화에 노력(기호대수학) • 방정식을 일반적인 형태로 표현(문자사용) • 『해석학 입문』
스테빈 Stevin, S. 1548 ~ 1620 네델란드	• 10진 소수의 발명(단, 소수점은 사용하지 않음) (5⓪9①1②2③=5.912)
네이피어 Napier, J. 1550 ~ 1617 영국	• 산술, 대수, 삼각법 등의 단순화·계열화 시도 • 로그를 발견하고 최초로 로그표 발간 • 소숫점 도입
뷔르기 Burgi 1552 ~ 1632 스위스	• 현재 사용하는 소수 표시법 사용 • 로그표 작성 및 자연로그를 생각
해리엇 Harriot, T. 1560 ~ 1621 영국	• 방정식을 최초로 인수로 분해 • 부등호(>, <)를 사용함
브리그스 Briggs, H. 1556 ~ 1631 영국	• 상용로그표 작성 • 1도(度)를 100등분
케플러 Kepler, J. 1571 ~ 1630 독일	• 무한소의 계산 • 적분학의 시초(회전체의 부피 구하는 법 연구) • 행성운동의 3법칙 발견
오트레드 Oughtred, W. 1574 ~ 1660 영국	• 승법(乘法) 기호로 ×를 사용 • 비례의 기호로 :를 사용 • 차(差)의 기호로 ~를 사용 • 계산자 발명
건터 Guanter, F. 1581 ~ 1626 영국	• cosine과 cotangent라는 말을 사용 • 로그자를 처음 만듦
스넬리우스 Snellius, R.W 1591 ~ 1626 네덜란드	• 삼각측량법을 발전시킴 • 삼각법으로 지구의 크기를 측정
데자르그 Desargues, G. 1593 ~ 1662 프랑스	• 사영기하학의 창시 • 데자르그의 정리발견
지라르 Girard, A. 1595 ~ 1632 프랑스	• 허근을 생각해냄 • 근과 계수와의 관계를 증명 • 방정식은 그 차수만큼 근을 가진다는 것을 귀납적으로 추론
데카르트 Descartes, R 1596 ~ 1650 프랑스	• 기하학에 대수적 해법을 적용한 해석기하학 창시 • 『방법서설』: 기하학 해설 • ‘나는 생각한다. 그러므로 나는 존재한다.’
카발리에리 Cavalieri, F. B. 1598 ~ 1647 이탈리아	• ‘카발리에리의 원리’ 발견 • ‘불가분량의 연속기하학’ : 무한소에 관한 논문

수 학 자	주 요 업 적
페르마 Fermat, P. 1601 ~ 1665 프랑스	• 확률의 수학적 이론의 창시자 • 기하학을 대수적으로 취급 • 좌표와 방정식을 이용한 도형성질 연구 • 아폴로니우스의 원뿔곡선 연구 • 페르마의 원리(최단시간의 원리) 발견 • ‘페르마 대정리’
스파이델 Speidell, J. 1619년경 영국	• e를 사용한 로그표를 만듦
그랜트 Graunt, J. 1620 ~ 1674 영국	• 『사망표에 관한 자연적 및 정치적 제관찰』 • 근대 통계학의 발전에 기여
파스칼 Pascal, B. 1623 ~ 1662 프랑스	• 파스칼의 정리 • ‘파스칼 삼각형’(수삼각형) • 사이클로이드에 관한 문제 해결 • 미분, 적분의 선구적 업적을 남김 • 계산기 제작
배로 Barrow, I. 1630 ~ 1677 영국	• 접선을 통한 미분연구 • 미분법과 적분법이 역연산임을 증명
그레고리 Gregory, J. 1638 ~ 1675 영국	• 기하학적 도형의 면적측정에 관한 독자적 방법 발표 • 원주율을 무한급수로 표시함 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$
뉴턴 Newton, I. 1642 ~ 1727 영국	• 미적분학 발견(유율법〈流率法〉) • 만유인력의 법칙을 발견하여 천체 역학의 원리 완성 • 스펙트럼 분석 연구
최석정 崔錫鼎 1646 ~ 1715 조선	• 마방진 연구 • 『구수략(九數略)』
라이프니츠 Leibniz, G.W. 1646 ~ 1716 독일	• 라이프니츠 계산기 만듦 • 미적분법의 창시자 • 미분기호, 적분기호 창안 : $\frac{dy}{dx}$, $\int$ • 두 함수의 곱의 n계 도함수 구하는 공식 발견 • ‘기호주의(記號主義)’의 선구자
롤 Rolle, M. 1652 ~ 1719 프랑스	• 롤의 정리 발견 • 초등 미적분학 연구
로피탈 L'Hospital, F.A. 1661 ~ 1704 프랑스	• 로피탈의 정리 발견 • 행렬식 연구
베르누이 Bernoulli ,J. 1667 ~ 1748 스위스	• 미분방정식 연구 • 개연적 기댓값의 개념을 고안 • 극좌표 최초 사용 • 변분법을 최초로 연구 • ‘베르누이 분포’, ‘베르누이 정리’
드무아브르 De Moivre, A. 1667 ~ 1754 프랑스	• ·확률론 및 보험학에 많은 공헌 • 『우연설』, 『수명에 따른 연금』, 『해석기요』 • ‘드무아브르의 정리’ 발견
테일러 Taylor, B. 1685 ~ 1731 영국	• ‘테일러 급수’ 발견 • 미적분학 연구
심슨 Simson, R. 1687 ~ 1768 영국	• 초등기하학(유클리드원론) 연구 • 심슨선 연구
매클로린 Maclaurin, C. 1698 ~ 1746 영국	• 매클로린 정리로 곡선 연구 • 『미적분학』 • 『기하학의 기본』

수 학 자	주 요 업 적
크라머 Cramer, G. 1704 ~ 1752 스위스	• 행렬식 발견 • 크라머의 공식 발견
오일러 Euler, L. 1707 ~ 1783 스위스	• 허수기호 i 사용 • 무한급수의 수렴, 발산 개척 • $f(x)$기호 사용 • 함수를 해석적인 식으로 정의 • 삼각함수의 기호 도입(sin, cos, tan) • ‘오일러의 정리’ : $v-e+f=2$ • 선형 미분 방정식의 체계적인 해법을 제시 • 복소수에 대한 삼각함수의 개념 도입
심프슨 Simpson, T. 1710 ~ 1761 영국	• 심프슨공식 발견 • 삼각함수의 약호, 기호 도입 (오일러와 동시 사용)
달랑베르 D’Alembert, J.L. 1717? ~ 1783 프랑스	• 편미분방정식 연구 • ‘역학이론’ 발표 • 달랑베르의 정리 발견
람베르트 Lambert, J.H. 1728 ~ 1777 독일	• 원주율 π가 무리수임을 증명 • 평면도법이론에 공헌
라그랑주 Lagrange, J.L 1736 ~ 1813 프랑스	• 극한의 개념 및 미적분 연구 • ‘해석학(analysis)’ 이란 용어 사용 • 변분법에 관한 일반적인 방법 제시 • 도함수 기호 $f'(x)$, $f''(x)$ 사용 • ‘라그랑주의 정리’ 발견
몽주 Monge, G. 1746 ~ 1818 프랑스	• ‘화법기하학’ 창시 • 미분기하학의 선구적 역할을 함
라플라스 Laplace, P.S. 1749 ~ 1827 프랑스	• ‘정적분’ 용어 사용 • ‘라플라스의 방정식’, ‘라플라스 공식’ • 『우주체계론』, 『천체역학론』, 『확률의 해석적 이론』 • 고전적 확률론에 공헌
르장드르 Legendre, A.M 1752 ~ 1833 프랑스	• 타원함수, 수론, 최소제곱법 연구 • 르장드르 함수 발견
카르노 Carnot, L.N.M 1753 ~ 1823 프랑스	• 『위치의 기하학』,『횡단선의 이론에 관한 소고』⇒ 종합기하학의 기초 닦음
에머슨 Emerson, W. 1768년경 영국	• 무한대의 기호(∞)를 처음 사용
푸리에 Fourier, J.B.J. 1768 ~ 1830 프랑스	• ‘푸리에급수’ : 삼각함수의 무한 합 연구 • 현대적인 함수 이론의 발전에 기여 • 『열전도론』 : 수리물리학에 영향
가우스 Gauss, K.F. 1777 ~ 1855 독일	• 최소제곱법을 이론화 • 곡면론, 허수론, 방정식론, 급수론, 천문학, 측지학, 전자기학 등을 연구 • 대수학의 기본정리 발견 • 복소수의 개념을 확립 • 『정수론』 • 가우스 분포, 가우스 평면, 가우스 기호 발견
포아송 Poisson, S.D. 1781 ~ 1840 프랑스	• 근세 확률론의 기초를 확립 • 포아송분포 연구
볼자노 Bolzano, B. 1781 ~ 1848 체코	• 극한개념 및 무한집합과 관련한 연속함수 연구 • 『무한의 역설』

수 학 자	주 요 업 적
브리앙숑 Brianchon, C.J. 1785 ~ 1864 프랑스	• 사영기하학 연구
퐁슬레 Poncelet, J.U 1788 ~ 1867 프랑스	• 사영기하학의 사상을 생각함 • 쌍대의 원리연구 • 『도형의 사영적 성질에 관하여』
코시 Cauchy, A.L. 1789 ~ 1857 프랑스	• 정적분 정의 • ‘행렬식(determinant)’ 이라는 용어 사용 • 행렬의 특성 방정식을 행렬 이론에 도입 • 적분과 역도함수 사이의 관계 입증 • 현대 해석학의 기초 확립 • 극한의 뜻과 연속함수를 정의
뫼비우스 Mőbius, A.F. 1790 ~ 1868 독일	• 천문학, 기하학연구 • 뫼비우스의 띠 • 『중심해석』 지음
로바체프스키 Lobachevskii N.I. 1793 ~ 1856 러시아	• 비(非)유클리드 기하학 창시자의 한 사람 • 『로바체프스키 기하학』
베가 Vega, G.F. 1794년경 오스트리아	• 현재 사용되는 로그표를 만듦
케틀레 Quetelet, L.A.J. 1796 ~ 1874 벨기에	• 확률론 연구
플뤼커 Plücker, J. 1801 ~ 1868 독일	• 자료를 이용한 해석기하학 연구
아벨 Abel, N. H. 1802 ~ 1829 노르웨이	• ‘아벨정리’, ‘아벨적분’, ‘아벨방정식’, ‘아벨군’ • 타원함수론 전개 • 대수학 군론을 완성 • 5차이상의 대수방정식은 대수적 해법이 없음을 증명
볼리아이 Bolyai, J. 1802 ~ 1860 헝가리	• 비(非)유클리드 기하학 창시자의 한사람 • 미적분학, 역학, 곡선론에 공헌
야코비 Jacobi, K.G.J 1804 ~ 1851 독일	• 타원함수론, 야코비행렬식 연구 • 편미분 방정식, 진폭 계산, 삼면체 계산
이상혁 李尙爀 1804 ~ 1889 조선	• 『算術管見』 • 기하학, 삼각법 연구
디리클레 Dirichlet. P 1805 ~ 1859 프랑스	• 정수론 연구 • 해석적 정수론을 창시 • 퍼텐셜론을 정밀화 • 『정수론으로의 미적분학의 여러 응용에 관한 연구』
해밀턴 Hamilton, W.R 1805 ~ 1865 영국	• 벡터 해석학의 기초 확립 • 해밀턴 방정식 연구 • 사원수 이론 연구
드모르간 De Morgan, A 1806 ~ 1871 영국	• 드모르간 법칙 • 기호 논리학 완성
그라스만 Grassmann, H.G. 1809 ~ 1877 독일	• 『광연론』 • 그라스만의 법칙 발견 • 그라스만 대수, 선형대수학 창시자

수 학 자	주 요 업 적
갈루아 Galois, E. 1811 ~ 1832 프랑스	• 군론과 방정식의 해법 연구 • ‘군(group)’이라는 말을 최초로 사용 • 갈루아의 이론 세움
실베스터 Sylvester, J. 1814 ~ 1897 영국	• 수적 불변식론 전개 • 행렬을 ‘matrix’라 부름 • 행렬의 고유치 • 행렬이론의 창시자
불 Boole, G. 1815 ~ 1864 영국	• 『사고의 법칙』 • 논리학에 집합 개념을 도입 • 불 대수(Boolean algebra)를 창시
바이어슈트라스 Weierstrass, K.T 1815 ~ 1897 독일	• 수학에서 엄밀성 강조 • 해석함수론의 기초를 확립함 • 바이어슈트라스 정리 발견 • 극소곡면의 이론으로 기하학에 공헌
체비셰프 Chebyshyov, P. L. 1821 ~ 1894 러시아	• 오차론(誤差論)연구 • 체비셰프 부등식 발견
케일리 Cayley, A. 1821 ~ 1895 영국	• 불변식론 연구 • 행렬의 개념 도입 • 8원수 발견 • 사영기하학을 써서 비유클리드 기하학 표현
에르미트 Hermite, C. 1822 ~ 1901 프랑스	• 정수론, 불변식론, 함수론 연구 • e가 초월함수임을 증명 • 에르미트 다항식, 에르미트 방정식, 에르미트 행렬 발견
크로네커 Kronecker, L. 1823 ~ 1891 독일	• 방정식론, 정수론 등 연구 • 유한론자: 수학의 정수론화
리만 Riemann, G.F.B. 1826 ~ 1866 독일	• 리만 기하학(타원기하)창시 • 리만적분, 복소함수론 연구 • 상대성 원리에 절대적 역할을 함
데데킨트 Dedekind, J.W 1831 ~ 1916 독일	• 이데알론의 창시로 추상대수의 선구자 • 절단에 의한 무리수와 유리수의 정의
벤 Venn, J. 1834 ~ 1923 영국	• 논리학자 • 벤 다이어그램을 창안
기브스 Gibbs, J.W. 1839 ~ 1903 미국	• 대수학, 벡터해석 연구 • 3차원 공간벡터의 개념 확립 • 통계학 연구
리 Lie, M. S. 1842 ~ 1899 노르웨이	• 리군론 연구 • 기하학에 공헌이 큼
슈바르츠 Schwarz, H.A. 1843 ~ 1921 독일	• 등각사상, 극소곡면, 초기하급수, 미분방정식 등 연구 • 슈바르츠의 부등식 발견
칸토어 Cantor, G. 1845 ~ 1918 독일	• 집합론의 창시자 • 초한수 이론을 발전시킴 • 현대 수학의 시조
프레게 Frege, F.L.G 1848 ~ 1925 독일	• 기수의 정의를 확립 • 집합 개념과 논리 관계 규명 • 명제함수 도입

수 학 자	주 요 업 적
프로베니우스 Frobenius, G.F. 1849 ~ 1917 독일	• 행렬식론, 급수, 선형미분 방정식론 연구 • 『군의 지표』
클라인 Klein, F. 1849 ~ 1925 독일	• 기하학, 방정식론, 함수론 등에 공헌 • 수학교육 개선에 관심을 가짐 • ‘에를랑겐의 프로그램’ 제시
페리 Perry, J. 1850 ~ 1920 영국	• Perry 운동의 중심인물 • 수학의 실용성을 강조
푸엥카레 Poincare, J.H 1854 ~ 1912 프랑스	• 수론, 대수기하학, 위상기하학연구 • 자기동형함수, 제타-푸크스 함수의 이론을 발전
마르코프 Markov, A. 1856 ~ 1922 러시아	• 확률론, 수리통계학 연구
피어슨 Pearson, K. 1857 ~ 1936 영국	• 기술, 생물 통계학 연구 • 통계학의 수학적 기초 확립
페아노 Peano, G. 1858 ~ 1932 이탈리아	• 추상수학을 발전시킴 • 기호논리학에 기여 • 페아노의 공리
캐조리 Cajori, F. 1859 ~ 1930 미국	• 『수학사』
화이트헤드 Whitehead, A. 1861 ~ 1947 영국	• 논리주의 수학자 • 불(Boole)의 논리학을 발전시킴 • 러셀과 함께 『수학원리』 3권 • 『보편대수학』
무어 Moore, E.H. 1862 ~ 1932 미국	• 해석수학자 • 수학교육학자 • 미국수학회 회장 역임
힐베르트 Hilbert, D. 1862 ~ 1943 독일	• 불변식론, 대수적 정수론, 포텐셜론 등에 공헌 • 20세기 수학 연구의 목표 제시 • 공리론적 방법으로 현대수학의 기틀을 마련 • 기하학의 기초론, 힐베르트 공간 창시
하우스도르프 Hausdorff, F. 1868 ~ 1942 독일	• 위상공간론 창시자
체르멜로 Zermelo, E. 1871 ~ 1953 독일	• 공리적 집합론의 창시자 • 선택공리로 유명
러셀 Russell, B. 1872 ~ 1970 영국	• 수리철학 및 논리기호학에 공헌 • 화이트헤드와 『수학원리』 3권
프레셰 Frechet, M. 1878 ~ 1973 프랑스	• 『추상공간론(抽象空間論)』
아인슈타인 Einstein, A. 1879 ~ 1955 미국	• 상대성 원리의 연구에 리만기하학을 응용 • 통일장 이론에 대한 연구
뇌터 Noether, A.E 1882 ~ 1935 독일	• 다원수론 전개 • 추상대수학의 선구자
피셔 Fischer, R.A 1890 ~ 1962 영국	• 상관계수의 표본분포에 관한 연구 완성 • 현대 추측통계학의 창시자

수 학 자	주 요 업 적
위너 Wiener, N. 1894 ~ 1964 미국	• 정보를 수량으로 나타내는 엔트로피의 개념을 도입하여 통신이론의 '사이버네틱스'를 창시
브라우어 Brauer, R.D. 1901 ~ 1977 폴란드	• 위상기하학, 군 표현론 연구 • 직관주의 창시자
폰 노이만 Von Neuman, J. 1903 ~ 1957 미국	• 순수수학과 응용수학에 공헌 • Program 내장방식, 전자계산기의 개발 • Game이론 창시자
콜모고로프 Kolmogorov, A 1903 ~ 1987 소련	• 『확률론의 기초 개념』 • 공리론적 확률론에 공헌
괴델 Gödel, K. 1906 ~ 1978 미국	• 제1불완전성 정리 어떤 수학적 체계이든 본질적으로 불완전하다. • 제2불완전성 정리 어떤 공리계가 무모순일 때, 그 공리계 아래서는 증명할 수 없다.
슈발레 Chevalley 1909 ~ 1984 프랑스	• Bourbaki(부르바키)의 창시자
아일렌버그 Eilenberg, S 1913 ~ 1998 폴란드	• Category이론, Homology 대수학 창시자
슈바르츠 Schwarz, L 1915 ~ 2002 프랑스	• 『초함수론』

<수고하셨습니다.>