[모고 유형화 해설]

[정수론]

[선형대수학]

[이산수학]
〈경우의 수와 생성함수〉
〈그래프〉

[확률과통계]
〈이산형〉
〈연속형〉

[복소해석학]
〈해석함수〉
〈비해석함수〉

[미분기하학]
〈곡선〉
〈곡면〉

[위상수학]
〈집합・위상의기초・사상・거리공간〉
〈수렴과분리공리・컴팩트・연결〉

[현대대수학]
〈군〉
〈환〉
〈체〉

[실해석학]
〈미적분학(편도함수・다중적분)〉
〈실수체계・수열・연속・미분・적분〉
〈급수・함수열〉

[정수론]

1. $\gcd(990, 780)=30$이므로 정수해 존재 $\Leftrightarrow$ $30\mid k$. $\therefore$ 최소 $k=30$.
$-11\times 33+14\times 26=1$이므로 $33x+26y=1$의 해는 다음과 같다.
$x=-11+26t,\ y=14-33t,\ t\in\mathbb{Z}$.
$|x+y|=|7t-3|\le 100 \Leftrightarrow -13\le t\le 14$이므로 28개.

2. $\gcd(19, 20)=1$이므로 $\gcd(2^{19}-1, 2^{20}-1)=1$.
$(2^{20}-1)\cdot 1+(2^{19}-1)\cdot(-2)=1,\ -2a_{19}+a_{20}=1$.
$\alpha=-2+a_{20}\cdot t,\ \beta=1-a_{19}\cdot t,\ t\in\mathbb{Z}$.
$$(\alpha, \beta)=(-2+a_{20}t, 1-a_{19}t),\ t\in\mathbb{Z}.$$
중국인의 나머지 정리에 따라
$x\equiv 7a_{20}x_1+3a_{19}x_2 \pmod{a_{19}\times a_{20}}$
$\equiv 7(2^{20}-1)+(-6)(2^{19}-1)$
$\equiv 2^{22}-1$.
($a_{20}x_1\equiv 1 \pmod{a_{19}}$, $a_{19}x_2\equiv 1 \pmod{a_{20}}$)

3. 윌슨 정리에 따라 $12!\equiv -1 \pmod{13}$, $9!\equiv -2 \pmod{13}$.
$\gcd(13, 93)=1$이므로 오일러 정리에 따라
$93^{12}\equiv 1 \pmod{13}$, $93^{2022}\equiv 2^6\equiv -1 \pmod{13}$.
$2^5\equiv 6\equiv(-2)^m\cdot(-1)^n\equiv 2^{7m+6n} \pmod{13}$, $5\equiv 7m+6n \pmod{12}$.
$0\le n\le 11$일 때 각 $0\le m\le 11$인 m에 대하여
$7\cdot m\equiv 6n-5 \pmod{12}$, $\gcd(7, 12)=1\mid 6n-5$이므로 해 1개씩 있다.
그러므로 순서쌍 (m,n)의 개수 12.

4. 주어진 합동식의 해가 존재할 필요충분조건은
$a^{\frac{\varphi(m)}{\gcd(7,\varphi(m))}}\equiv 1 \pmod m$이며, 이때 해의 개수 $\gcd(7, \varphi(m))$.
7은 소수이므로 $\gcd(7, \varphi(m))=1$ 또는 7이다.
$\gcd(7, \varphi(m))=1$인 경우 $a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m$ 되는 a의 개수는
오일러 정리에 따라 $\varphi(m)$이므로 $\varphi(m)=42$, $\gcd(7, 42)=7\neq 1$, 모순.
따라서 $\gcd(7, \varphi(m))=7$이며 $a^{\frac{\varphi(m)}{7}}\equiv 1 \pmod m$ 되는 a는
$\gcd\left(\frac{\varphi(m)}{7}, \varphi(m)\right)=\frac{\varphi(m)}{7}$개 있으므로 $\frac{\varphi(m)}{7}=7\cdot 6$, $\varphi(m)=6\cdot 7^2$.
m은 원시근을 갖고 7의 배수이므로 $m=p^k$, $2\cdot p^k$ 꼴(p: 홀수 소수)이다.
$\varphi(m)=p^k-p^{k-1}=6\cdot 7^2$, $k=1$일 때 $p=295$는 소수가 아니다.
$k\neq 1$일 때 $p^{k-1}(p-1)=7^2\cdot 6$ 되는 $p=7$, $k=3$, $m=2\cdot 7^3=686$.

5. $0\equiv x^{18}-1\equiv(x^6-1)(x^{12}+x^6+1) \pmod P$, $x^6\equiv 1 \pmod P$이면
$x^{12}+x^6+1\equiv 3\not\equiv 0 \pmod P$이므로 $x^{12}+x^6+1\equiv 0 \pmod P$의 해의 개수는
$x^{18}-1\equiv 0 \pmod P$의 해의 개수에서 $x^6-1\equiv 0 \pmod P$의 해의 개수를
뺀 것과 같다.
따라서 $0<\gcd(18, \varphi(P))-\gcd(6, \varphi(P))$를 만족하는 최소의 $P=19$.

6. $\gcd(x, 125)\neq 1$이면 x는 5를 소인수로 가지므로
$f(x)\equiv -12\not\equiv 0 \pmod{125}$.
$\gcd(x, 125)=1$이면 오일러 정리에 따라 $x^{100}\equiv 1 \pmod{125}$이므로
$f(x)\equiv 3a+20x-12\equiv 0 \pmod{125}$의 해가 존재할 필요충분조건은
$5=\gcd(20, 125)\mid 12-3a$, 즉 $a\equiv 4 \pmod 5$.
$\therefore$ $a=14$, 19, 24, 29.

7. 윌슨 정리에 따라
$$(a!)^2\equiv\left(1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{p-1}{2}\right)\left(1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{p-1}{2}\right)$$
$$\equiv\left(1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{p-1}{2}\right)\left((1-p)\cdot(2-p)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(\frac{-p-1}{2}\right)\right)$$
$$\equiv\left(1\cdot 2\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot(p-2)(p-1)\right)\cdot(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$\equiv(p-1)!(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod p.$$
$$\sum_{k=4}^{p-1}\left(\frac{k(1-k)}{p}\right)=\sum_{k=2}^{p-1}\left(\frac{k(1-k)}{p}\right)-\left(\frac{-2}{p}\right)-\left(\frac{-6}{p}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{p-1}\left(\frac{k^{-1}-1}{p}\right)-(-1)-(-1)\left(\frac{3}{p}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{p-1}\left(\frac{k-1}{p}\right)+1+\left(\frac{3}{p}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)-\left(\frac{p-1}{p}\right)+1+\left(\frac{3}{p}\right)$$
$$=2+\left(\frac{3}{p}\right)=1$$
$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{p}\right)=-1 \Leftrightarrow x^2\equiv 3 \pmod p$의 정수해가 존재하지 않는다.
(3은 법 p에 대한 이차비잉여)
최소의 $p=31$.

8. $\varphi(59)=58=2\cdot 29$, $k=\min\{\mathrm{ord}_{59}2, \mathrm{ord}_{59}7\}$이다.
$2\equiv 2$, $2^2\equiv 4$, $2^{29}\equiv 2^{\frac{\varphi(59)}{2}}\equiv\left(\frac{2}{59}\right)\equiv -1 \pmod{59}$이므로 $\mathrm{ord}_{59}2=58$.
$$7\equiv 7,\ 7^2\equiv 49,\ 7^{29}\equiv 7^{\frac{\varphi(59)}{2}}\equiv\left(\frac{7}{59}\right)\equiv(-1)^{\frac{7-1}{2}\frac{59-1}{2}}\left(\frac{3}{7}\right)$$
$=-(-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{7-1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)=1$이므로 $\mathrm{ord}_{59}7=29$.
$\therefore$ $k=29$.

9. $x\equiv 10^t \pmod{337}$라 하면 $10^{mt}\equiv 10^1 \pmod{337}$, $mt\equiv 1 \pmod{336}$.
$\gcd(m, 336)\mid 1$일 때 해가 존재하고, 그 때 해의 개수 $\gcd(m, 336)=1$.
최대의 $m=335$, 해의 개수 1.

10. $x^{50}\equiv m \pmod{2022} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{50}\equiv m \pmod 2 \\ x^{50}\equiv m \pmod 3 \\ x^{50}\equiv m \pmod{337}\end{cases}$ 의 해가 존재할
필요충분조건은 $m^1\equiv 1 \pmod 2$, $m^1\equiv 1 \pmod 3$, $m^{168}\equiv 1 \pmod{337}$
이며, 이때 해의 개수는 중국 나머지 정리에 따라 $1\cdot 2\cdot 2=4=\alpha$.
$m\equiv 1 \pmod 6$인 20이하의 자연수 1, 7, 13, 19이며, 이 중에서
$1\equiv m^{168}\equiv\left(\frac{m}{337}\right) \pmod{337}$를 만족하는 $m=1$, 7, 13.

11. $\gcd(p, 2p+1)=1$이므로 $x^2\equiv p^{-1}(p+1) \pmod{2p+1}$이며,
합동식이 정수해를 가질 필요충분조건은
$$1=\left(\frac{p^{-1}(p+1)}{2p+1}\right)=\left(\frac{p^{-1}}{2p+1}\right)\left(\frac{p+1}{2p+1}\right)=\left(\frac{p^{-1}}{2p+1}\right)\left(\frac{-p}{2p+1}\right)=\left(\frac{-1}{2p+1}\right)=(-1)^p.$$
$\therefore$ $p=2$.

12. $\gcd(\varphi(42), 6)=6$, $\gcd(\varphi(47), 6)=2$이므로 중국 나머지 정리에 따라
$x^6\equiv 1 \pmod{2021}$의 정수해는 12개 있다.
$x^6\equiv 1 \pmod P$의 해의 개수 $\gcd(\varphi(P), 6)=\gcd(P-1, 6)$이므로
중국 나머지 정리에 따라 $x^6\equiv 1 \pmod{2021P}$의 해의 개수는
$12\gcd(P-1, 6)>50 \Leftrightarrow \gcd(P-1, 6)\ge 6$인 최소 $P=61$.

13. $1=\left(\frac{-3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$. $\therefore\ p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$.

$5^{\frac{\varphi(p)}{\gcd(\varphi(p),2)}}\equiv 5^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\equiv\left(\frac{5}{p}\right)\equiv(-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)\equiv\left(\frac{p}{5}\right)$.

$\therefore\ p\equiv 1,4\ (\mathrm{mod}\ 5)$. p는 홀수 소수이므로 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)$.

중국 나머지 정리에 따라 $p\equiv 1,19\ (\mathrm{mod}\ 30)$, 최소 $p=19$.

14. $x^5\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 13)$, $x\equiv 2^t\ (\mathrm{mod}\ 13)$라 하면

$5t\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 12)$, $t\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 12)$, $x\equiv 2^5\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 13)$.

$x^5\equiv 2^{15}\ (\mathrm{mod}\ 19)$, $x\equiv 2^t\ (\mathrm{mod}\ 19)$라 하면

$5t\equiv 15\ (\mathrm{mod}\ 18)$, $t\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 18)$, $x\equiv 2^3\equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 19)$.

중국 나머지 정리에 따라 $x\equiv 84\ (\mathrm{mod}\ 247)$.

15. $1=\gcd(\varphi(101),a)=\gcd(a,100)$이므로 $a\in\mathbb{Z}_{100}^*$.

$\therefore\ m=|\mathbb{Z}_{100}^*|=40$.

$n=\gcd(100,12)=4$.

16. 오일러 정리에 따라 $2\le k\le 70$인 k에 관하여 $k^{p-1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p)$.

$n=\sum_{k=2}^{70}\left(\frac{1-k}{p}\right)=\sum_{k=4}^{72}\left(\frac{k}{p}\right)=0-\left(\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{2}{p}\right)-\left(\frac{3}{p}\right)=-3$.

17. $2^{20}-1=2\cdot(2^{19}-1)+1$이므로 $(2^{20}-1)\cdot 1+(2^{19}-1)\cdot(-2)=1$.

중국 나머지 정리에 따라

$x\equiv 7\cdot(2^{20}-1)\cdot 1+3\cdot(2^{19}-1)\cdot(-2)\equiv 2^{22}-1\ (\mathrm{mod}\ (2^{19}-1)(2^{20}-1))$.

18. $22\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 101)$이므로 $x\equiv 3^t\ (\mathrm{mod}\ 101)$라 하면

$3^{34t}\equiv 3^6\ (\mathrm{mod}\ 101)$, $t\equiv 9,\ 59\ (\mathrm{mod}\ 100)$, 정수해 $\gcd(34,100)=2$개.

$\therefore\ x\equiv\pm 3^9\equiv\pm 89\equiv 12,\ 89\ (\mathrm{mod}\ 101)$.

19. $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 1008$일 때, $k\in\mathbb{Z}_{1009}^*=\langle 11\rangle$이므로

$k\equiv 11^t\ (\mathrm{mod}\ 1009)$, $t\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ 1008\}$라 쓸 수 있다.

$\left(\frac{11}{1009}\right)=11^{\frac{\varphi(1009)}{2}}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 1009)$이므로 (원시근은 생성원이므로)

$$\sum_{k=1}^{1008}k\times\left(\frac{k}{1009}\right)=\sum_{t=1}^{1008}11^t\left(\frac{11^t}{1009}\right)$$
$$\equiv\sum_{t=1}^{1008}(-11)^t\equiv(-11)(1-(-11)^{1008})12^*\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1009).$$

20. $x\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 17)$일 때 $(-1)^{\frac{\varphi(17)}{\gcd(\varphi(17),9)}}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 17)$, $\gcd(\varphi(17),9)=1$.

$x^9+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 17)$의 해 1개, $x(x^9+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 17)$의 해 2개 있다.

$x\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 71)$일 때 $(-1)^{\frac{\varphi(71)}{\gcd(\varphi(71),9)}}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 71)$, $\gcd(\varphi(71),9)=1$.

$x^9+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 71)$의 해 1개, $x(x^9+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 71)$의 해 2개 있다.

중국 나머지 정리에 따라 $x^{10}+x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1207)$의 정수해 4개.

21. $\gcd(4,\varphi(5))=\gcd(4,\varphi(13))=\gcd(4,\varphi(17))=4$,

$\gcd(4,\varphi(7))=\gcd(4,\varphi(11))=\gcd(4,\varphi(19))=2$이므로

중국 나머지 정리에 따라 $x^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ N)$의 해의 개수 512.

22.
$$\begin{aligned}A&\equiv[1\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot(p-2)][(-2)\cdot(-4)\cdot\ \cdots\ \cdot(3-p)\cdot(1-p)]\\&\equiv[2\cdot 4\cdot\ \cdots\ \cdot(p-1)][(-1)\cdot(-3)\cdot\ \cdots\ \cdot(2-p)]\\&\equiv B\\&\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!\\&\equiv(-1)^{\frac{p+1}{2}}\quad(\because\ \text{윌슨 정리})\\&\equiv\begin{cases}-1, & p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ 1\ , & p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}.\end{aligned}$$

23. $\gcd(2,\varphi(3))=\gcd(2,\varphi(5))=2$.

$x^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^k)$의 해는

$k=1$일 때 1개, $k=2$일 때 2개, $k\ge 3$일 때 4개 있으므로

중국 나머지 정리에 따라 $x^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ m)$의 해의 개수는

$k=1$일 때 4, $k=2$일 때 8, $k\ge 3$일 때 16.

($x^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2^k)$의 해 개수 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{X}+\mathbb{X}=2\mathbb{X}=\mathbb{O}$인 $\mathbb{X}\in\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^{k-2}}$ 개수)

24. 주어진 합동식의 해가 존재 $\Leftrightarrow$ $a^{\frac{\varphi(29)}{\gcd(\varphi(29),4)}}\equiv a^7\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 29)$.

a는 $x^7\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 29)$의 해이므로 $x\equiv 2^t\ (\mathrm{mod}\ 29)$라 할 때

$2^{7t}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 29)$, $t\equiv 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24\ (\mathrm{mod}\ 28)$.

$\therefore\ a\equiv 2^0,\ 2^4,\ 2^8,\ 2^{12},\ 2^{16},\ 2^{20},\ 2^{24}\equiv 1,\ 16,\ 24,\ 7,\ 25,\ 23,\ 20\ (\mathrm{mod}\ 29)$.

25. $a\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 17)$일 때 $a^{\frac{\varphi(17)}{\gcd(\varphi(17),2)}}\equiv a^8\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 17)$인 정수 a는

법 17에 대해 8개 있으므로 $x^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 17)$이 정수해를 갖는 a는 9개.

$a\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 23)$일 때 $a^{\frac{\varphi(23)}{\gcd(\varphi(23,2)}}\equiv a^{11}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 23)$인 정수 a는

법 23에 대해 11개 있으므로 $x^2\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 23)$이 정수해를 갖는 a는 12개.

따라서 중국 나머지 정리에 따라 $n=9\times 12=108$.

$1=\left(\frac{a}{391}\right)=\left(\frac{a}{17}\right)\left(\frac{a}{23}\right)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left(\frac{a}{17}\right)=1=\left(\frac{a}{23}\right)\\ \left(\frac{a}{17}\right)=-1=\left(\frac{a}{23}\right)\end{cases}$이며

법 17, 23 각각에 대하여 이차잉여와 이차비잉여의 개수는 같으므로

$m=2\times\frac{\varphi(17)}{2}\times\frac{\varphi(23)}{2}=176$.

$\therefore\ m+n=284$.

26. $k=1111,\ 2222,\ 3333$에 대하여 $(k,5)=(k,7)=1$이므로

오일러 정리에 따라 $k^4\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, $k^6\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7)$.

$1111^n+2222^n+3333^n$을 5, 7로 나눈 나머지를 각각 p_n, q_n이라 하면

주기가 각각 4, 6의 약수이다.

$p_1=1,\ p_2=4,\ p_3=1,\ p_4=3$,

$q_1=2,\ q_2=0,\ q_3=6,\ q_4=0,\ q_5=2,\ q_6=3$이므로

$\{p_n\}$, $\{q_n\}$의 주기는 각각 4, 6이다.

그러므로 중국 나머지 정리에 따라 $t=12$.

27. 양변에 x^n-1 곱하면 $x^{4n}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 257)$.

(주어진 합동식의 해의 개수)

$=$($x^{4n}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 257)$의 해의 개수)

$-$($x^n-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 257)$의 해의 개수)

$=\gcd(4n,\varphi(257))-\gcd(n,\varphi(257))$이므로

주어진 합동식이 해를 갖지 않을 필요충분조건은

$\gcd(\varphi(257),4n)=\gcd(n,\varphi(257))$이다.

$n=2^k\cdot m$, m:홀수라 하면

(좌변)$=2^{\min(k+2,8)}$, (우변)$=2^{\min(k,8)}$이므로

$k\ge 8$일 때 해를 갖지 않는다.

즉 $n=m\cdot 2^8$ 꼴이어야 한다. n의 최솟값 $2^8=256$.

28. 곱셈군 $\mathbb{Z}_{147}^*$에서 $x=y$인 경우

$x^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 147)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ 3)\\ x\equiv\pm 1\ (\mathrm{mod}\ 7^2)\end{cases}$.

중국 나머지 정리에 따라 순서쌍 (x,y)의 개수 4.

곱셈군 $\mathbb{Z}_{147}^*$에서 $x\ne y$인 경우

$xy=1$이므로 $1\le x\le 147$인 각 x마다

$xy=1$인 $1\le x^*=y\le 147$가 유일하게 존재.

이때 (x,y)의 개수는 $\frac{\varphi(147)-4}{2}=40$.

그러므로 총 개수 44.

29. 161과 서로소가 아닌 정수는 해가 될 수 없다.
($x\equiv 0$는 해가 될 수 없다.)
중국 나머지 정리와 오일러 정리에 따라
$x^{43}+2x^{23}+4\equiv 0 \pmod{161} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+2\equiv 0 \pmod 7 \\ 2x^2+4x+1\equiv 0 \pmod{23} \end{cases}$.
$\left(\dfrac{2^2-2}{7}\right)=\left(\dfrac{2}{7}\right)=1,\ \left(\dfrac{2^2-2}{23}\right)=\left(\dfrac{25}{23}\right)=1$이므로 중국 나머지 정리에 따라
$x^{43}+2x^{23}+4\equiv 0 \pmod{161}$는 법 161에 대해 4개의 해를 갖는다.
$x^2+4x+2\equiv 0 \pmod 7$의 근의 합은 법 7에 대해 3,
$2x^2+4x+1\equiv 0 \pmod{23}$의 근의 합은 법 23에 대해 -2이므로
$x^{43}+2x^{23}+4\equiv 0 \pmod{161}$의 모든 정수해의 합은
$(3\cdot 23x_1+(-2)\cdot 7x_2)\times 2\equiv 111 \pmod{161}$.
(단, $23x_1\equiv 1 \pmod 7$, $7x_2\equiv 1 \pmod{23}$.)

30. 3333과 서로소가 아닌 정수는 해가 될 수 없다.
중국 나머지 정리와 오일러 정리에 따라
$2x^{102}-3x+13\equiv 0 \pmod{3333} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+1\equiv 0 \pmod 3 \\ 2x^2-3x+2\equiv 0 \pmod{11} \\ 2x^2-3x+13\equiv 0 \pmod{101} \end{cases}$.
$2x^2+1\equiv 0 \pmod 3$의 근 1, 2 $\pmod 3$.
$\left(\dfrac{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 2}{11}\right)=\left(\dfrac{4}{11}\right)=1,\ \left(\dfrac{(-3)^2-4\cdot 2\cdot 13}{101}\right)=\left(\dfrac{6}{101}\right)=1$이므로
중국 나머지 정리에 따라
$2x^{102}-3x+13\equiv 0 \pmod{3333}$는 법 3333에 대해 8개 해를 갖는다.
$2x^{102}-3x+13\equiv 0 \pmod{3333}$의 모든 정수해의 합은
$4\times\{(2^*\cdot 3)\cdot 1111\cdot 1111^*+(2^*\cdot 3)\cdot 303\cdot 303^*+(2^*\cdot 3)\cdot 33\cdot 33^*\}$
$\equiv 6 \pmod{3333}$.

31. 707과 서로소가 아닌 정수는 해가 될 수 없다.
중국 나머지 정리와 오일러 정리에 따라
$x^{105}+101x^2+101x+506\equiv 0 \pmod{707}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^5+1\equiv 0 \pmod{101} \\ x^3+3x^2+3x+2\equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$
(홀수 소수 101, 7은 원시근을 갖는다.)
$x^5\equiv -1 \pmod{101}$, $(-1)^{\frac{\varphi(101)}{\gcd(\varphi(101),5)}}\equiv(-1)^{20}\equiv 1 \pmod{101}$이므로
해가 존재하고 해의 개수 $\gcd(\varphi(101),5)=5$.
$x^3+3x^2+3x+2\equiv(x+1)^3+1\equiv 0 \pmod 7$.
$(-1)^{\frac{\varphi(7)}{\gcd(\varphi(7),3)}}\equiv(-1)^2\equiv 1 \pmod 7$이므로 해가 존재하고
해의 개수 $\gcd(\varphi(7),3)=3$.
중국 나머지 정리에 따라
주어진 합동식은 법 707에 대해 15개 해 있다.
근과 계수와의 관계에 따라
$x^5\equiv -1 \pmod{101}$의 근의 곱은 법 101에 대해 -1,
$x^3+3x^2+3x+2\equiv 0 \pmod 7$의 근의 곱은 법 7에 대해 -2이므로
주어진 합동식의 모든 근의 곱은
$(-1)\times(-1)\times(-1)\cdot 7x_1+(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\cdot 101x_2$
$\equiv(-1)^3\times 7\cdot(-72)+(-2)^5\times 101\cdot 5$
$\equiv 605 \pmod{707}$.
(단, $7x_1\equiv 1 \pmod{101}$, $101x_2\equiv 1 \pmod 7$.)

32. n : 원시근 존재 $\Leftrightarrow$ n : 2, 4, p^k, $2p^k$ 꼴.
$\varphi(2)=1\not\equiv 2 \pmod 4$이므로 $2\notin A$.
$\varphi(4)=2\equiv 2 \pmod 4$이므로 $4\in A$.
$n\ge 3$일 때,
$T_n=\varnothing \Leftrightarrow x^n\equiv -1 \pmod n$ 해 존재 X
$\Leftrightarrow (-1)^{\frac{\varphi(n)}{\gcd(n,\varphi(n))}}\not\equiv 1 \pmod n$
$\Leftrightarrow \dfrac{\varphi(n)}{\gcd(n,\varphi(n))}$: 홀수
① $n=4$일 때 $\dfrac{\varphi(4)}{\gcd(\varphi(4),2)}=1$: 홀수(O)
② $n=p^k$일 때 $\dfrac{\varphi(n)}{\gcd(\varphi(n),n)}=p-1$: 짝수(X)
③ $n=2p^k$일 때 $\dfrac{\varphi(n)}{\gcd(\varphi(n),n)}=\dfrac{p-1}{2}$가 홀수 $\Leftrightarrow p=4k+3$.
$\therefore$ 6, 14, 22, 38, 18 (5개)
구하는 값 6.

33. 2는 37의 원시근이므로 $\left(\dfrac{2}{37}\right)=-1$, $2^{36}\equiv 1 \pmod{37}$.
$$\sum_{k=1}^{36}(k^2-k)\left(\frac{k}{37}\right)\equiv\sum_{i=1}^{36}(2^{2i}-2^i)\left(\frac{2^i}{37}\right)$$
$$\equiv\sum_{i=1}^{36}\left[(-4)^i-(-2)^i\right]$$
$$\equiv\frac{(-4)(1-(-4)^{36})}{5}-\frac{(-2)(1-(-2)^{36})}{3}$$
$$\equiv 0 \pmod{37}.$$
$$\sum_{k=2}^{35}(k^2-k)\left(\frac{k}{37}\right)=0-(36^2-36)\left(\frac{36}{37}\right)\equiv -2 \pmod{37}.$$
구하는 값 35.

34. $1=\left(\dfrac{7}{p}\right)=(-1)^{\frac{3(p-1)}{2}}\left(\dfrac{p}{7}\right)$.
$p\equiv 1 \pmod 4$일 때 $\left(\dfrac{p}{7}\right)=1$이므로 $p\equiv 1,\ 2,\ 4 \pmod 7$.
중국 나머지 정리에 따라 $p\equiv 1,\ 9,\ 25 \pmod{28}$.
$p\equiv 3 \pmod 4$일 때 $\left(\dfrac{p}{7}\right)=-1$이므로 $p\equiv 3,\ 5,\ 6 \pmod 7$.
중국 나머지 정리에 따라 $p\equiv 3,\ 19,\ 27 \pmod{28}$.
따라서 $p=3,\ 19,\ 29,\ 31,\ 37,\ 47,\ 53$ (7가지)

35. $A=\{3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\}$.
$p\in A$일 때, 윌슨 정리에 따라
$$-1\equiv(p-1)!\equiv a_p\times\frac{p+1}{2}\cdot\frac{p+3}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{p+(p-2)}{2}$$
$$\equiv a_p(2^*)^{\frac{p-1}{2}}\{1\times 3\times 5\times\cdots\times(p-2)\}$$
$$\equiv\left(\frac{2^*}{p}\right)b_p\equiv\left(\frac{2}{p}\right)b_p \pmod p.$$
$$\therefore\ b_p\equiv-\left(\frac{2}{p}\right) \pmod p.$$
$$\equiv(-1)(-1)^{\frac{(p-1)(p+1)}{8}} \pmod p$$
$$\equiv\begin{cases}-1, & p\equiv\pm 1 \pmod 8 \\ 1, & p\equiv\pm 3 \pmod 8\end{cases}.$$
$$\sum_{p\in A}\left(\frac{b_p}{p}\right)=\sum_{p\in\{7,17,23,31\}}\left(\frac{b_p}{p}\right)+\sum_{p\in A\setminus\{7,17,23,31\}}\left(\frac{b_p}{p}\right)$$
$$=(-1+1-1-1)+7=5.$$

36. $A=\{0,1,2,\cdots,p-1\}$는 법 p에 관한 완전잉여계.

임의의 $b\in\mathbb{Z}$에 대하여 $\{ak+b\mid k=0,1,\cdots,p-1\}$는

법 p에 관한 완전잉여계.

임의의 $k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$에 대하여 $ak+b\equiv r_k \pmod p$인

$r_k\in A$가 유일하게 존재한다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{ak+b}{p}\right)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{r_k}{p}\right)=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{99}\left(\frac{20k^2+21k}{101}\right)&=\sum_{k=2}^{99}\left(\frac{20k^2+21kkk^*}{101}\right)\\&=\sum_{k=2}^{99}\left(\frac{k^2}{101}\right)\left(\frac{20+21k^*}{101}\right)\\&=\sum_{k=2}^{99}\left(\frac{21k+20}{101}\right)\ (1^*\equiv 1,\ 100^*\equiv 100)\\&=\sum_{k=0}^{100}\left(\frac{21k+20}{101}\right)-\left(\frac{20}{101}\right)-\left(\frac{41}{101}\right)-\left(\frac{-1}{101}\right)\\&=0-1+1-1=-1.\end{aligned}$$

37. $\displaystyle|A|=\sum_{n=1}^{255}\frac{1}{4}\left(1+\left(\frac{n}{257}\right)\right)\left(1+\left(\frac{n+1}{257}\right)\right)$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{256}\left(\frac{n}{257}\right)=0$이므로 n의 법 257에 대한 역원을 n^*라 하면

$$\sum_{n=1}^{255}\left(\frac{n}{257}\right)\left(\frac{n+1}{257}\right)=\sum_{n=1}^{255}\left(\frac{n}{257}\right)\left(\frac{n+nn^*}{257}\right)=\sum_{n=1}^{255}\left(\frac{1+n^*}{257}\right)=-\left(\frac{1}{257}\right)=-1.$$

$$|A|=\frac{1}{4}\left(255-\left(\frac{256}{257}\right)-\left(\frac{1}{257}\right)-1\right)=63.$$

38. $\mathbb{Z}_{29}^*=\{1,2,\cdots,28\}=\langle 8\rangle,\ \ \mathbb{Z}_{125}^*=\{1,2,\cdots,124\}=\langle 8\rangle$.

a : 법 29에 대한 이차잉여

$\Leftrightarrow$ $x^2\equiv a \pmod{29}$의 해 존재

$\Leftrightarrow$ $\left(\frac{a}{29}\right)=1$

$\Leftrightarrow$ $a\in\langle 8^2\rangle$.

** $(a,m)=1,\ x^n\equiv a \pmod m$의 해 존재 $\Leftrightarrow$ $a\in\langle g^n\rangle$.

$A=\langle 8^2\rangle=\{1=(8^2)^{14},8^2,(8^2)^2,\cdots,(8^2)^{13}\}$.

$\displaystyle C\equiv\sum_{a\in A}a^2\equiv 8^4+8^8+\cdots+8^{4\cdot 14}=8^4\frac{\{(8^4)^{14}-1\}}{8^4-1}$,

8은 원시근이므로 $8^4-1\not\equiv 0$.

$(8^4-1)\cdot C\equiv 8^4(8^{4\cdot 14}-1)\equiv 0 \pmod{29}$.

$\therefore\ C\equiv 0 \pmod{29},\ r_1=0$.

$\mathbb{Z}_{125}^*=\{1,2,\cdots,124\}=\langle 8\rangle=\{8^1,8^2,\cdots,8^{\varphi(125)}=8^{100}\}$.

$\displaystyle\prod_{b\in B}b=8^1\cdot 8^2\cdot\ \cdots\ \cdot 8^{100}\equiv 8^{50\cdot 101}\equiv(-1)^{101}\equiv -1 \pmod{125}$.

$\therefore\ r_2=124$.

[선형대수학]

1. $\mathbb{X}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\ker T \Leftrightarrow \mathbb{X}\in\langle(2,2,1)\rangle$이므로 $\ker T=\langle(2,2,1)\rangle$.

$A\sim\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$이므로

$\mathrm{Im}\,T=\langle(0,1,-2),(1,-1,0)\rangle=\langle(1,0,-2),(0,1,-2)\rangle$.

$P\begin{bmatrix}2&1&0\\2&0&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-2\end{bmatrix}$이므로

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\2&0&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2&5&-4\\2&-4&5\\1&-2&-2\end{bmatrix}^{T}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5&-4&-2\\-4&5&-2\\-2&-2&8\end{bmatrix}.$$

2. 가정에 의해 $[I]_{B,C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&2&1\end{pmatrix}$이므로

$$[I]_{C,B}=[I]^{-1}_{B,C}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}1&-3&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}.$$

$$[T]_{C,C}=[I]_{B,C}[T]_{B,B}[I]_{C,B}=\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-8&6&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=[T(v)]_{C,C}=[T]_{C,C}[v]_{C,C}=\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}.$$

3. $\cos\theta=\dfrac{\langle 1,x\rangle}{\|1\|\ \|x\|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

$x-\mathrm{proj}_1 x=x-1\perp 1$, $W=\langle 1,x\rangle=\langle 1,x-1\rangle$.

$1,x\in W$이므로 $T(1)=1$, $T(x)=x$.

$T(x^2)=\mathrm{proj}_1 x^2+\mathrm{proj}_{1-x}x^2=2x-\dfrac{1}{3}$이므로

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

4. $\mathrm{rank}(A-I)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}=2$.

A와 B는 닮음(상사, similar)이므로 $\mathrm{tr}(A)=3=\mathrm{tr}(B)=2+d$, $d=1$.

A와 B는 닮음이므로 $A-I$, $B-I$도 닮음이다.

$\mathrm{rank}(A-I)=2=\mathrm{rank}(B-I)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$이므로

$c\neq 0$, $a\neq 0$, 즉 $a=1$, $c=1$이며 $abc=0$이므로 $b=0$.

5. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$.

$a=3$, $b=-1$, $c=-2$, $d=1$.

$(x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&1&2\\2&3&5\\3&4&7\end{pmatrix}=(0\ 0\ 0)$, 양변 전치하면 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&4\\2&5&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=O$.

$\therefore\ W=\ker(A^T)$.

$$\begin{aligned}\dim(W)&=\dim(\ker(A^T))\\&=\dim(\mathrm{im}(A)^{\perp})\\&=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(\mathrm{im}(A))=3-\mathrm{rank}(A)=1.\end{aligned}$$

6. $n=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $A=A^T=A^2$이므로 A는 평면 $2x-y-z=0$ 위로의 정사영.

$\therefore\ A=I-\dfrac{n\cdot n^T}{\|n\|^2}=\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&2\\2&5&-1\\2&-1&5\end{bmatrix}$, 구하는 값 3.

7. $\{v_1,v_2\}$는 일차독립이고 $w_1=v_1$, $w_2=v_2-\dfrac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=(1,0,1)$라 하자.

* 그람슈미트 안해도 된다.

$\ker(A-3I)=\langle v_1,v_2\rangle=\langle w_1,w_2\rangle$의 차원(기하적 중복도) 2이므로

A의 고유치 3이며, 3의 대수적 중복도는 2이상이다.

$\det(A)=9$이므로 A의 모든 고유치는 3, 3, 1이다.

A는 실대칭행렬이므로 직교대각화가능하다.

1에 대응하는 고유벡터 $w_3=w_1\times w_2=(1,0,-1)$이므로

$P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$라 할 때,

$$A=P\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}=PDP^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

8. $|A-xI|=-(x-1)^2(x-2)$, $|f(3)|=4$.

$A\sim\begin{pmatrix}a&b&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$이므로 두 행렬의 고유다항식은 일치한다.

$\therefore\ a=1$.

$A\sim\begin{pmatrix}a&b&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$이므로 $A-I\sim\begin{pmatrix}0&b&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$\mathrm{rank}(A-I)=1$이므로 $b=0$.

9. W의 정규직교기저 $\{w_1,w_2\}$일 때 $Pw_1=w_1$, $Pw_2=w_2$,

$w_3=w_1\times w_2$라 할 때 $Pw_3=0$이므로

P의 고유치 1, 1, 0. $\therefore\ f(x)=x(x-1)^2$.

P는 정사영 행렬이므로 $P=P^T=P^2$.

(P의 모든 성분의 합)

$$=(1\,1\,1)P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(1\,1\,1)P^2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\{(1\,1\,1)P\}\cdot\left\{P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\{(1\,1\,1)P^T\}\cdot\left\{P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\left(P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)^T\cdot\left(P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\left\|P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$=\left\{P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\cdot\left\{P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

$(1,1,1)$의 W위로의 정사영은

$$P\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=(1,1,1)-\mathrm{proj}_{(a,b,c)}(1,1,1)$$

$=(1,1,1)-\dfrac{5}{3}(a,b,c)$이므로

구하는 값 $3-\dfrac{25}{9}-\dfrac{25}{9}+\dfrac{25}{9}=\dfrac{2}{9}$.

10. $A=\begin{pmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_3\end{pmatrix}$, $4=\det(A)=(v_1\times v_2)\cdot v_3 = v_1\cdot(v_2\times v_3)$.

$$\det\begin{pmatrix} v_1-2v_2+3v_3 \\ 2v_1+v_2-v_3 \\ -v_1+v_3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} -2v_2+4v_3 \\ v_2+v_3 \\ -v_1+v_3\end{pmatrix}=\{(-2v_2+4v_3)\times(v_2+v_3)\}\cdot(-v_1+v_3)$$
$$=\{-6v_2\times v_3\}\cdot(-v_1+v_2)$$
$$=6v_1\cdot(v_2\times v_3)$$
$$=6\cdot\det(A)=24.$$

11. $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=a^T+(a\times c)^T$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a^T$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=(a\times b)^T=c^T$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=(a\times c)^T$.

$\therefore\ A=(a^T\mid c^T\mid (a\times c)^T)$.

$$\det(A)=\det(A^T)=\det\begin{pmatrix} a \\ \hline c \\ \hline a\times c\end{pmatrix}=(a\times c)\cdot(a\times c)$$
$$=\|a\times c\|^2=\|a\|^2\|c\|^2\sin^2 90^\circ$$
$$=4\|c\|^2$$
$$=4\|a\times b\|^2$$
$$=4\|a\|^2\|b\|^2\sin^2 90^\circ=4\cdot4\cdot3=48.$$

12. $T(v_1)=2v_1+v_2$, $T^2(v_1)=T(2v_1+v_2)=4v_1+4v_2+v_3$.

$C=\{v_1, 2v_1+v_2, 4v_1+4v_2+v_3\}$.

스칼라체 $\mathbb{R}$의 원소 $a,\ b,\ c$에 대하여

$\vec{0}=av_1+b(2v_1+v_2)+c(4v_1+4v_2+v_3)$이면

$0=a+2b+4c=b+4c=c$이므로 $a=b=c=0$.

$\therefore\ C$는 V의 기저.

$[I]_{B,C}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $[I]_{C,B}=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$이므로

$[T]_{C,C}=[I]_{B,C}[T]_{B,B}[I]_{C,B}=\begin{pmatrix}0&0&8\\1&0&-12\\0&1&6\end{pmatrix}$.

13. $T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이므로

$[T]_{\beta,\beta}=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&1\\0&4&0\end{pmatrix}$.

$f(x)=\begin{vmatrix}-x&2&0\\2&-x&1\\0&4&-x\end{vmatrix}=-x^3+8x$, $\operatorname{rank}(T)=\operatorname{rank}([T]_{\beta,\beta})=2$.

14. $\Pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x-y+z=0\}=\{(y-z,y,z)\mid y,z\in\mathbb{R}\}$

$=\langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle$.

$T(\Pi)=T(\langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle)=\langle(2,2,1),(1,-1,-1)\rangle$.

$(2,2,1)\times(1,-1,-1)=(-1,3,-4)$이므로 $T(\Pi): x-3y+4z=0$.

최단거리 $\dfrac{2}{\sqrt{26}}=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

15. $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$이므로 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$라 할 때 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x'+y'+z'\\2x'-y'-z'\\-2x'+y'+2z'\end{pmatrix}$.

$0=(-x'+y'+z')\cdot(x')+z'=-x'^2+x'y'+x'z'+z'$.

도형의 방정식 $x^2-xy-xz-z=0$.

16. $\vec{0}=T_{a,b}(\vec{0})$이므로 $a=2,\ b=1$.

평면 $6x+3y+2z=0$의 기저 $\{(0,2,-3),(1,-2,0)\}$,

$v_1=(0,2,-3)$, $v_2=(1,-2,0)$라 하자.

직선 $x=2y=3z$의 기저원 $v_3=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$라 하면

$B=\{v_1,v_2,v_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이며, $[T_{a,b}]_B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

* 직선 $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}$의 방향 코사인 $(6,3,2)$.

17. $w_1=\dfrac{1}{\sqrt5}(1,0,-2)$, $w_2=(0,1,0)-\operatorname{proj}_{w_1}(0,1,0)=(0,1,0)$.

서로 다른 고유치에 대응하는 고유벡터는 서로 수직이므로

11에 대응하는 고유벡터 $w_3=w_1\times w_2=\dfrac{1}{\sqrt5}(2,0,1)$.

$P=(w_1^T\mid w_2^T\mid w_3^T)=\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&\sqrt5&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$라 하면

$A=PDP^{-1}=PDP^T$, 즉 $P^TAP=D$.

$A-10I=PDP^{-1}-10PIP^{-1}=P\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T$이므로

$(A-10I)^{10}=P\begin{pmatrix}2^{20}&0&0\\0&2^{20}&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^T$, $\operatorname{tr}[(A-10I)^{10}]=1+2^{21}$.

$(A-10I)^{10}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\2-2^{21}&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$이므로 $\beta=\dfrac{1}{5}(2-2^{21})$.

$\alpha+5\beta=3$.

* $\beta=\dfrac{1}{\sqrt5}(-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix}2^{20}&0&0\\0&2^{20}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}(2-2^{21})$.

18. $C:(x\ y)\begin{pmatrix}7&3\sqrt3\\3\sqrt3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=16$. $A=\begin{pmatrix}7&3\sqrt3\\3\sqrt3&13\end{pmatrix}$의 고유다항식은

$(7-x)(13-x)-27=(x-16)(x-4)$, 고유치 16, 4.

각 고유치에 대응하는 고유벡터 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt3}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$이므로

$D=\begin{pmatrix}16&0\\0&4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$라 하면 P는 직교행렬이고,

$A=PDP^{-1}=PDP^T$.

$P^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x+\sqrt3y\\-\sqrt3x+y\end{pmatrix}$라 하면 $C:(u\ v)\begin{pmatrix}16&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=16$, $u^2+\dfrac{v^2}{4}=1$.

$\therefore\ a=1$, $b=\dfrac{1}{4}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$.

$J=\left|\dfrac{1}{4}\det\begin{pmatrix}1&\sqrt3\\-\sqrt3&1\end{pmatrix}\right|=1$.

$$\iint_D(2x+2\sqrt3y)^2\,dA=\iint_{u^2+\frac{v^2}{4}\le1}(4u)^2\cdot1\,dA$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 16r^2\cos^2\theta\cdot(2r)\,drdtheta=8\pi.$$

$(u=r\cos\theta,\ v=2r\sin\theta,\ J=2r)$

19. $\operatorname{Im}(A)=(A$의 열공간$)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}\right\rangle=\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle$.

$\operatorname{Ker}(A)$: $x-z=0=y+2z$, $\langle(1,-2,1)\rangle$.

$W=\langle(1,0,1),(0,1,1),(1,-2,1)\rangle=\langle(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\rangle=\mathbb{R}^3$.

$\dim W=3$.

20. $u=(1,2,-1)-\mathrm{proj}_{(1,1,1)}(1,2,-1)=\frac{1}{3}(1,4,-5)$,

$v=(2,-1,1)-\mathrm{proj}_{(1,1,1)}(2,-1,1)=\frac{1}{3}(4,-5,1)$.

$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\ \|v\|}=-\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$ (120° 회전 변환).

$w=(1,1,1)$라 하면 $\mathcal{B}=\{u,v,w\}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저.

$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$의 특성다항식 $\left|[T]_{\mathcal{B}}-xI\right|=(x-1)(-1-x-x^2)$.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&a\\2&6&-11&b\\1&-2&7&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-3&a\\0&2&-5&b-2a\\0&0&0&c+2b-5a\end{array}\right)$이므로 해를 가지려면 $-5a+2b+c=0$.

W: $5a-2b-c=0$, $n=(5,-2,-1)$라 하자.

$\mathrm{proj}_W v=v-\frac{v\cdot n}{\|n\|^2}n=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{21}{10}\right)$.

22. $T(\mathbb{X})=\mathbb{X}-\frac{2}{3}(v\cdot\mathbb{X})v=\mathbb{X}-2\mathrm{proj}_v\mathbb{X}$이므로

T는 평면 $\langle v\rangle^\perp$: $x+y+z=0$에 대한 대칭변환이다.

$\langle v\rangle^\perp$의 정규직교기저 $\{u_1,u_2\}$를 택하자.

$u_3=\frac{v}{\|v\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$라 할 때,

$\mathcal{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이며 $[T]_\beta^\beta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

$\therefore$ $a=1$, $b=-1$, $u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

23. $U=\langle v_1\times v_2\rangle=\langle(1,1,2)\rangle$, $u=(1,1,2)$라 하자.

$w=-v_1+2u$이므로 $T(w)=-T(v_1)+2T(u)=(10,2,6)$.

T의 고유치 -2, 2, k라 하면 $\mathrm{tr}(A)=1=-2+2+k$, $k=1$.

각 고유치에 대응하는 고유벡터 v_1, u, v라 하자.

$Cv_1=-8v_1+4v_1+v_1=-3v_1$,

$Cu=8u+4u+u=13u$,

$Cv=3v$이므로 C의 고유치 -3, 13, 3.

$\det(C)=(-3)\cdot 13\cdot 3=-117$.

24. $v=v_1+v_2$이므로 $A^{2020}v=\alpha_3 v_1$.

$W=(A$의 열공간$)=\langle Av_1,Av_3\rangle$, $\dim W=\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2$.

(v_1, v_2, v_3는 쌍마다 직교하므로 그람-슈미트 불필요)

$w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$, $w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}$, $w_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}$라 하면

$\mathcal{B}=\{w_1,w_2,w_3\}$는 $\mathcal{B}^3$의 정규직교기저이며, $P=(w_1|w_2|w_3)$라 할 때

P는 직교행렬이고 $D=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$에 대하여 $A=PDP^{-1}=PDP^T$.

$A^T=PDP^T=A$이므로 A는 대각화 가능한 대칭행렬이다.

25. 가정에 의해 T의 고유치 2, 1, -1이며 각 고유치에 대응하는 고유벡터

$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$이다.

$\begin{bmatrix}-3\\3\\-2\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$이므로

$T^{2020}(-3,3,-2)=1\cdot 2^{2020}(1,1,0)+2\cdot 1^{2020}(0,1,1)-4\cdot(-1)^{2020}(1,0,1)$

$=(2^{2020}-4,2^{2020}+2,-2)$.

$ac-bc=c(a-b)=(-2)(-6)=12$.

26. $A^2=A=A^T$이므로 T는 $\mathrm{Im}(T):x+y-z=0$ 위로의 정사영.

$n=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$라 할 때,

$A=I-nn^T=I-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}[1\,1\,-1]=I_{3\times 3}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$이므로

구하는 값 $3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$.

27. $\mathrm{Im}(T)=T(V)=\left\{3c_1x^2+2c_2x+c_3\mid c_i\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a_1x^2+a_2x+a_3\mid a_i\in\mathbb{R}\right\}$

$=\langle x^2,x,1\rangle$.

$\ker(T)=\{f\in V\mid f'=0\}=\{c_4\mid c_4\in\mathbb{R}\}$

$=\langle 1\rangle$.

$\mathrm{Im}(T)+\ker(T)=\langle 1,x,x^2\rangle$이므로 차원 3.

28. T는 정사영이므로 $A=A^2=A^T$이다.

$n=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$라 할 때 $A=I-\frac{nn^T}{\|n\|^2}=I-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

$\det(A^{2019}-I)=\det(A-I)=0$.

29. $T(e_1)=O$, $T(e_2)=e_3$, $T(e_3)=-e_2$이므로 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

$|A-xI|=-x^3-x$. 케일리-해밀턴 정리에 따라

$O=A^3+A$이므로 $A^3=-A$, $A^5=-A^3=A$.

$A^{2019}=-A$, 구하는 값 0.

30. $\det(\mathrm{v}_1|\mathrm{v}_2|\mathrm{v}_3)=-1\neq 0$이므로 $\mathcal{B}=\{\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3\}$는 일차독립이므로

$\mathcal{B}$는 $\mathbb{R}^3$의 기저이다. $\mathbb{R}^3$의 표준기저 E라 하자.

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\mathrm{v}_2-\mathrm{v}_3$, $\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=-\mathrm{v}_3$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\mathrm{v}_1-\mathrm{v}_2$이므로 $[T]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$.

$[I]_{\mathcal{B},E}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$, $[I]_{E,\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}$이므로

$A=[T]_E=[I]_{\mathcal{B},E}[T]_{\mathcal{B}}[I]_{E,\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$.

* 다른풀이

$A\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$이므로 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot(-1)\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\0&0&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$.

31. ($\vec{0}$이 아닌) $u\in W^\perp$에 대해 $T(u)=-u$.

W의 기저 $\{v,w\}$에 대해 $T(v)=v$, $T(w)=w$이므로

W는 고유치 1에 대응하는 고유공간이다.

(3차원 공간에서 차원 2인 벡터공간은 원점을 지나는 평면이다.)

$\vec{0}=(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4&2&-6\\2&-1&3\\-6&3&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2x-y+3z=0$.

$\therefore$ W의 방정식 $2x-y+3z=0$.

32. $u\in U,\ w\in W$일 때

$\langle u,w\rangle=\mathrm{tr}(uw^T)=\mathrm{tr}(-uw)=-\mathrm{tr}(uw)$

$\quad=-\mathrm{tr}(u^Tw)=-\mathrm{tr}((u^Tw)^T)$

$\quad=-\mathrm{tr}(w^Tu)=-\mathrm{tr}(uw^T)$

$\quad=-\langle u,w\rangle$이므로

$\langle u,w\rangle=0$. 즉 $W\le U^{\perp}(U\le W^{\perp})$.

$U\oplus W=M_3(\mathbb{R})=U\oplus U^{\perp}$이므로 $\dim W=\dim(U^{\perp})$.

$\therefore\ U^{\perp}=W.$

$A=\mathrm{proj}_WA+\mathrm{proj}_UA$

$\quad=\mathrm{proj}_WA+\mathrm{proj}_{W^{\perp}}A$

$$=\underbrace{\left\{\frac{1}{2}(A-A^T)\right\}}_{\in W}+\underbrace{\left\{\frac{1}{2}(A+A^T)\right\}}_{\in W^{\perp}(=U)}$$

$$\mathrm{proj}_WA=\frac{1}{2}(A-A^T)=\begin{bmatrix}0&-2&4\\2&0&1\\-4&-1&0\end{bmatrix}.$$

33. (가)에 따라 $v\ne0$, $Av\ne2v$이므로 v는 2의 고유벡터는 아니다.

$w=(A-2I)v\ne0$인 w에 대해 $(A-2I)w=0$이므로 $Aw=2w$.

(나)에 따라 2의 고유공간 E_2에 대해 $2\le\dim E_2\le3$.

만약 $\dim E_2=3$이면 $E_2=\mathbb{R}^3$이므로 $v\in E_2$가 되어 모순이다.

$\therefore\ E_2=\langle e_2,e_3\rangle$.

$w\in E_2$이므로 $w=(A-2I)v=pe_2+qe_3$인 스칼라 체 $\mathbb{R}$의 원소 $p,\ q$ 있다.

($w\ne0$이므로 $(p,q)\ne(0,0)$.)

$A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$라 하자.

$$Ae_2=2e_2\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}a&0&0\\d&2&f\\g&0&i\end{bmatrix}.$$

$$Ae_3=2e_3\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}a&0&0\\d&2&0\\g&0&2\end{bmatrix}.$$

$$w=\begin{bmatrix}0\\p\\q\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}a-2&0&0\\d&0&0\\g&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\p\\q\end{bmatrix}\Leftrightarrow A=\begin{bmatrix}2&0&0\\p&2&0\\q&0&2\end{bmatrix}.$$

34. $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Col}(A)$

$$=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-2\\2\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\a\\1\\c\end{bmatrix}\right\rangle$$

$=\mathrm{Ker}(T)$이므로

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-2\end{bmatrix}=\vec{0},\ A\begin{bmatrix}2\\-2\\2\\b\end{bmatrix}=O.\ \therefore\ a=-1,\ b=4,\ c=2.$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&-2&-1&-1\\1&2&-1&1\\-2&4&2&2\end{bmatrix},\ f(x)=\begin{vmatrix}1-x&2&-1&1\\1&-2-x&-1&-1\\1&2&-1-x&1\\-2&4&2&2-x\end{vmatrix}=x^4.$$

$\therefore\ f(1)=1.$

35. A는 10×10 실대칭행렬이므로 직교대각화 가능하다.

즉, $A=PDP^{-1}=PDP^T$인 직교행렬 P와 대각행렬 D존재.

(나)에 따라 $f(x)=(x-3)^1\cdot$ (9차 다항식)이고,

$\lambda\ne3$인 λ에 대응하는 고유벡터 $v=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{10}\end{bmatrix}$는 3의 고유벡터와 직교하므로

$$[1\,1\cdots1]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{10}\end{bmatrix}=0\in\mathbb{R}.$$

(가)에 따라 $A^2v+Av-2v=1_{10}v=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\lambda^2v+\lambda v-2v=\vec{0}$.

v는 영벡터가 아니므로 $(\lambda^2+\lambda-2)v=\vec{0}\Leftrightarrow(\lambda+2)(\lambda-1)=0$.

$\therefore\ \lambda=-2,\ 1$.

각 고유치에 대응하는 고유공간 $E_{-2},\ E_1$라 하면 $\dim E_{-2}+\dim E_1=9$.

그래프 G는 단순 그래프이므로 A의 모든 대각성분은 0이다.

$0=\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}D=3\cdot1+(-2)\cdot\dim E_{-2}+1\cdot\dim E_1$.

$\therefore\ \dim E_{-2}=4,\ \dim E_1=5$.

그러므로 $f(x)=(x-3)^1(x+2)^4(x-1)^5$.

36. $N=\mathrm{null}(A)$

A가 역행렬을 갖지 않으므로 $\mathrm{rank}(A)\ne3\Rightarrow\mathrm{rank}(A)\le2$이고

1행과 2, 3행은 종속이 아니므로 $2\le\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(A)=2$.

$\dim N=\mathrm{nullity}(A)=3-\mathrm{rank}(A)=1$.

P는 원점을 지나는 직선 위로의 정사영이므로

P의 고유치 0, 0, 1, $\mathrm{tr}P=0+0+1=1$.

1에 대응하는 고유벡터 $(c,1,4)\in N=\ker(A)=[\mathrm{row}(A)]^{\perp}$이므로

$$\begin{cases}c+2+12=0 & \Rightarrow c=-14\\4c+a+24=0 & \Rightarrow a=32\\bc+5+4b=0 & \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

[이산수학]

<경우의 수와 생성함수>

1. $f^2-2f+8x=0$, $f=1\pm\sqrt{1-8x}$, $f(0)=a_0=0$이므로 $f(x)=1-\sqrt{1-8x}$.

$f(x)=1-(1-8x)^{1/2}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-8x)^n$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-8x)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$이므로

$a_n=\begin{cases}0 & , n=0 \\ \frac{2^{n+1}}{n}\binom{2n-2}{n-1}, & n\ge 1\end{cases}$.

$\therefore\ a_4=\frac{2^5}{4}\binom{6}{3}=160.$

2. $\{a_n\}$의 지수생성함수

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot(e^x)^9=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{10^n+8^n}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$.

$\therefore\ a_n=\frac{10^n+8^n}{2}$. $a_{n+1}-8a_n=10^n$이므로 $a_{n+1}=8a_n+10^n$.

($a_{n+1}-10a_n=-8^n$이므로 $a_{n+1}=10a_n-8^n$.)

3. $f(x)(1+x-16x^2+20x^3)=x$이므로

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-16\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}+20\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=x$,

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-16\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n+20\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}x^n=x$이므로

$n\ge 3$일 때 $a_n+a_{n-1}-16a_{n-2}+20a_{n-3}=0$, $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=-1$.

특성다항식 $p(x)=x^3+x^2-16x+20$, $0=p(x)=(x-2)^2(x+5)$이므로

$a_n=(\alpha n+\beta)2^n+\gamma(-5)^n$이라 쓸 수 있다.

$a_0=0=\beta+\gamma$, $a_1=1=2\alpha+2\beta-5\gamma$, $a_2=-1=8\alpha+4\beta+25\gamma$로부터

$\alpha=\frac{1}{7}$, $\beta=\frac{5}{49}$, $\gamma=-\frac{5}{49}$이므로

$a_n=\frac{1}{49}\{(7n+5)2^n+(-5)^{n+1}\}$.

4. $\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}=2$, $b_n=\frac{a_n}{n!}$라 하자.

$b_n-2b_{n-1}+b_{n-2}=2$, $b_0=1$, $b_1=1$.

$\sum_{n=2}^{\infty}(b_n-2b_{n-1}+b_{n-2})x^n=2\sum_{n=2}^{\infty}x^n=\frac{2x^2}{1-x}$이므로

$\{b_n\}$의 생성함수 $f(x)$라 할 때,

$[f(x)-1-x]-2x[f(x)-1]+x^2f(x)=\frac{2x^2}{1-x}$.

$f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{(1-x)^3}=(3x^2-2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_nx^n$.

$b_n=3\cdot{}_3\mathrm{H}_{n-2}-2\cdot{}_3\mathrm{H}_{n-1}+{}_3\mathrm{H}_n=n^2-n+1$이므로

$a_n=n!\cdot b_n=n!(n^2-n+1)$, $n\ge 0$.

5. $\sum_{n=2}^{\infty}F_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-1}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F_{n-2}x^n$이므로

$[f(x)-x]=xf(x)+x^2f(x)$, $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$.

$f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}F_ka_{n-k}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(F_ka_{n-1-k})x^{n-1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=\frac{1}{x}[g(x)-5]$,

$xf(x)g(x)=g(x)-5$, $g(x)=\frac{5}{1-xf(x)}=\frac{5(1-x-x^2)}{1-x-2x^2}$.

6. $x_5=n-(x_1+x_2+x_3+x_4)$라 하면 a_n은

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=n,$$
$$3\le x_1\le 9,\ 1\le x_2\le 10,\ x_3\ge 2,\ x_4\ge 0,\ x_5\ge 0$$

을 만족하는 순서쌍 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)의 개수와 같다.

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$=(x^3+x^4+\cdots+x^9)(x^1+x^2+\cdots+x^{10})(x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)^2$

$=(x^{23}-x^{16}-x^{13}+x^6)\sum_{n=0}^{\infty}{}_5\mathrm{H}_nx^n$.

$\therefore\ a_{13}=-{}_5\mathrm{H}_0+{}_5\mathrm{H}_7=329$.

7. 주어진 점화관계로부터 $a_1=0$, $b_1=2$, $a_{n+2}-2a_{n+1}+2a_n=0$이므로

$0=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$=\frac{1}{x^2}[f(x)-1]-\frac{2}{2}[f(x)-1]+2f(x)$, $f(x)=\frac{1-2x}{1-2x+2x^2}$.

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-a_{n+1})x^n=f(x)-\frac{1}{x}[f(x)-1]=\frac{1}{1-2x+2x^2}$.

$h(x)=f(x)g(x)=\frac{1-2x}{(1-2x+2x^2)^2}$.

8. $b_n=\frac{1}{n+1}$, $c_n=n$의 지수생성함수는 각각 다음과 같다.

$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{e^x-1}{x}$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=xe^x$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\frac{n-k}{k+1}\right)\frac{x^n}{n!}=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\cdot xe^x=e^{2x}-e^x$, $f(1)=e^2-e$.

$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n-1)!}=f'(1)=2e^2-e$.

9. $\binom{-3}{n}=\frac{(-3)(-4)\cdots(-3-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$

$=(-1)^n{}_{n+2}\mathrm{C}_2$

$=(-1)^n{}_3\mathrm{H}_n$이므로

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_n(-x)^n=\frac{1}{(1+x)^3}$.

$\frac{f(x)}{1+x}=\frac{1}{(1+x)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}{}_4\mathrm{H}_n(-x)^n$이므로 $b_9=-{}_4\mathrm{H}_9=-220$.

10. $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2}{3}\frac{a_n}{n!}+\frac{5}{3}$, $n\ge 0$이므로

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^n=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3}x^n$,

$\frac{1}{x}[f(x)-5]=\frac{2}{3}f(x)+\frac{5}{3}\frac{1}{1-x}$,

$f(x)\left(\frac{3-2x}{3}\right)=\frac{5(3-2x)}{3(1-x)}$이므로 $f(x)=\frac{5}{1-x}$.

수열 $\{n\}$의 지수생성함수 $\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=xe^x$이므로

$g(x)=f(x)\cdot xe^x=\frac{5xe^x}{1-x}$.

11. a_n의 지수생성함수 $f(x)=(e^x)^8\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{1}{2}(e^{9x}-e^{7x})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9^n-7^n}{2}\right)\frac{x^n}{n!}\text{이므로 } a_n=\frac{9^n-7^n}{2}.$$

$a_{n+1}-9a_n=7^n$이므로 $a_{n+1}=9a_n+7^n$.

$(a_{n+1}-7a_n=9^n$이므로 $a_{n+1}=7a_n+9^n$.)

12. $\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(-1/2)^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}=\frac{(-1)^n}{4^n}{}_{2n}\mathrm{C}_n$이므로

$f(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}x^n$.

$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{4^n}$, ${}_{2n+1}\mathrm{C}_n=\frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}}{2}=\frac{4^{n+1}\cdot a_{n+1}}{2}$이므로

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(4^{n+1}a_{n+1})x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(4x)^n$$
$$=\frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}(4x)^{n+1}$$
$$=\frac{1}{2x}\left[f(4x)-{}_1\mathrm{C}_0\right]$$
$$=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}}.$$

13. $\{a_n\}$의 지수생성함수 $f(x)=2\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}$.

$\{1\}$의 지수생성함수 $g(x)=e^x$.

$\{b_n\}$의 지수생성함수 $ae^{bx}+c=f(x)g(x)=\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}$.

$a+b+c=4$.

14. $196=4\cdot7\cdot7$. $\sum x_i\ge3$, $\sum y_j\ge3$, $\sum z_k\ge4$.

$\sum x_i$, $\sum y_j$, $\sum z_k=4$, 7, 7인 3가지 경우에 대해

${}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_4\times{}_4\mathrm{H}_3$, ${}_3\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_1\times{}_4\mathrm{H}_3$, ${}_3\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_4\times{}_4\mathrm{H}_0$의 경우의 수가 있다.

양의 정수해의 개수는 2025.

15. 특성방정식 $t-4=0$, $t=4$. 일반해 $p_n=\alpha\cdot4^n$.

특수해 $q_n=\beta n\cdot4^n$라 하자. ($q_n=\beta\cdot4^n$라 하면 모순.)

$q_n-4q_{n-1}=\beta n4^n-4\beta(n-1)4^{n-1}=4^n$, $\beta n-\beta(n-1)=1$, $\beta=1$.

$\therefore$ $a_n=p_n+q_n=(\alpha+n)4^n$, $a_0=1$이므로 $a_n=(n+1)4^n$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$이므로 수렴반경 $\frac{1}{4}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\frac{1}{4}x\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+\frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}}$,

$\{f(x)-a_0\}=\frac{1}{4}xf(x)=\frac{x}{4-x}$, $f(x)=\frac{16}{(4-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$f'(x)=32(4-x)^{-3}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $xf'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=32x(4-x)^{-3}$.

$f'(x)+xf''(x)=32(4-x)^{-3}+96x(4-x)^{-4}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_nx^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n=2\times32\cdot3^{-3}=\frac{64}{27}$.

17. 1과 3을 합쳐서 짝수 번, 2, 4, 5, 6을 중복해서 사용하여 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수를 $\{a_n\}$라 하면

$\{a_n\}$의 지수생성함수 $f(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\cdot e^{4x}=\frac{1}{2}(e^{6x}+e^{2x})$.

1과 3을 합쳐서 홀수 번, 2, 4, 5, 6을 중복해서 사용하여 만들 수 있는 n자리 자연수의 개수를 $\{b_n\}$라 하면

$\{b_n\}$의 지수생성함수 $g(x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\cdot e^{4x}=\frac{1}{2}(e^{6x}-e^{-2x})$.

$\{a_n-b_n\}$의 지수생성함수 $f(x)-g(x)=e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$이므로

$a-b=2^9=512$.

18. $a_n=P(n,3)=\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=n\\ x_1,\ x_2\ge0,\ x_3\ge1\end{cases}$의 정수해의 개수이므로

$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(x^3+x^6+x^9+\cdots)$

$$=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{21}$.

19. $f(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$이므로 $a_n=\begin{cases}0, & n: \text{짝수}\\ 1, & n: \text{홀수}\end{cases}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$.

$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}$.

$g(1)=e^{-1}$.

20. $\sum_{n=2}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}na_{n-1}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_{n-2}\frac{x^n}{n!}=0$,

$\{f(x)-1-x\}+x\{f(x)-1\}+x^2f(x)=0$,

$f(x)\cdot(1+x+x^2)=1+2x$, $f(x)=\frac{1+2x}{1+x+x^2}$.

$\int_0^1f(x)dx=\ln(1+x+x^2)]_0^1=\ln3$.

21. $(x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{2017})^5=x^{10}\cdot\frac{(1-x^{2016})^5}{(1-x)^5}=x^{10}(1-x^{2016})^5\sum_{n=0}^{\infty}{}_5\mathrm{H}_nx^n$.

구하는 값 ${}_5\mathrm{H}_6={}_{10}\mathrm{C}_4=210$.

22. $a_n=\begin{cases}x_1+2x_2=n\\ x_1,x_2\ge0\end{cases}$인 정수해의 개수.

$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)$

$$=\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}+\frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\cdot{}_2\mathrm{H}_n\right)x^n\text{이므로}$$

$a_n=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{n+1}{2}$ $(n\ge0)$.

$a_{2018}=1010$.

23. $g(x)=(x^5+x^7+x^9+\cdots)(x^3+x^5+x^7+\cdots)$

$$\times(x+x^3+x^5+\cdots+x^{15})(x^8+x^{24}+\cdots)$$
$$=\frac{x^{17}}{(1-x^2)^3}$$
$$=x^{17}\sum_{n=0}^{\infty}{}_3\mathrm{H}_n(x^{2n})\text{이므로}$$

$a_{57}={}_3\mathrm{H}_{20}={}_{22}\mathrm{C}_2=231$.

$h(x)=g(x)\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{x^{17}}{(1-x)(1-x^2)^3}$.

24. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} {}_2\mathrm{H}_n (x^2)^n.$

$g(x)=\dfrac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2}=\dfrac{1}{x^2}\{f(x)-a_0-a_1x\}=\dfrac{f(x)-1}{x^2}.$

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{28}{9}.$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{n!}x^n=\{f(x)\}^2,\ f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=y^2,\ \dfrac{dx}{dy}=y^{-2}.$

$x=-y^{-1}+C,\ f(x)=y=\dfrac{1}{-x+C},\ f(0)=a_0=1,\ \ C=1.$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{1-x},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2.$

26. $x_4=n-x_1-2x_2-3x_3,\ a_n=\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=n \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0\end{cases}$의 정수해의 개수.

$f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)$

$\qquad\times(1+x^3+x^3+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)$

$\quad=\dfrac{1}{(1-x)^2}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{1-x^3}.$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{128}{21}.$

27. $f'(x)=f(x)e^x,\ \dfrac{f'}{f}=e^x,\ \ln f(x)=e^x+C,\ f(x)=e^{e^x+C}.$

$f(0)=a_0=1,\ C=-1,\ f(x)=e^{e^x-1},\ f(\ln 2)=e.$

28. $\dfrac{a_n}{n!}=\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{2^n}{n!}\ \ (n\geq 1).$

$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!},$

$\{f(x)-a_0\}=x\cdot f(x)+\{e^{2x}-1\},\ f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{1-x}.$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n n!}=2e-2.$

29. $a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ \ (n\geq 1).$

$n\geq 1$이면 $a_{n+2}x^{n+2}=(a_{n+1}x^{n+1})x+(a_nx^n)x^2$이므로 $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+x-1}.$

수열 $\{a_n\}$의 특성다항식 x^2-x-1의 해 $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$이므로

$a_n=s\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+t\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$을 얻는다.

$a_1=a_2=1$이므로 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$

30. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}-1\right)x^n=\dfrac{e^x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{e^x-1}{1-x}.$

$xg(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}$

$\qquad\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=f(x)-a_0=f(x)$이므로

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x-1}{x-x^2}.$

31. U를 1, 2, $\cdots$, n의 순열의 집합이라 하고,

각 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$에 대하여 A_k를

U의 원소 중에서 k의 바로 뒤에 $k+1$이 나오는 순열의 집합이라 하자.

포함배제의 원리에 의해

$T_n=\left|A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_{n-1}^c\right|$

$\quad=|U|-S_1+S_2-\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}$

$\quad=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-(n-1))!$

$\quad=n!-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}(n-k)!.$

(단, $S_k=\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_k}\left|A_{n_1}\cap A_{n_2}\cap\cdots\cap A_{n_k}\right|$)

$\therefore\ f(n,k)=(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k}.$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{T_n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}+\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)=1-(1-e^{-1})+0=e^{-1}.$

32. $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$의 특성다항식 t^2-2t+1의 근 1(중근).

동차해 $p_n=\alpha+\beta n.$

특수해 $q_n=\gamma n^2$라 하면 $\gamma n^2=2\gamma(n-1)^2-\gamma(n-2)^2+1,\ \gamma=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ a_n=p_n+q_n=\alpha+\beta n+\dfrac{1}{2}n^2.$

초기조건으로부터 $\alpha=0,\ \beta=\dfrac{1}{2}.$

$a_n=\dfrac{n^2+n}{2},\ n\geq 0.$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\dfrac{x^n}{n!}$

$\quad=\dfrac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$\quad=\dfrac{x}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$

$\quad=\dfrac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dfrac{x^n}{n!}+e^x\right)$

$\quad=\dfrac{x}{2}(xe^x+e^x+e^x).$

$\therefore\ f(2)=4e^2.$

33. 모든 자연수 n에 대하여 $E_n=-E_{n-1}$이므로 $E_n=(-1)^n$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\dfrac{D_n}{n!}$로 두면

$A_n=A_{n-1}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$이므로 $A_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}.$

그러므로 $D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}.$

$\{D_n\}$의 지수생성함수를 $f(x)$라 하면 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{D_n}{n!}=\dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(-1)^n}{n!}$이므로 $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}.$

<그래프>

1. G의 꼭짓점, 변, 면의 개수를 v, e, f라 하자.
$30=\text{tr}(A^2)=\sum\deg(v)=2e,\ e=15.$
G는 평면그래프이므로 $\sum\deg(f)=3f=\sum\deg(v)=2e=30,\ f=10.$
G는 평면그래프이므로 오일러 정리에 따라 $2=v-e+f,\ v=7.$
H의 변의 개수 $e+1=16>3v-6=15$이므로 H는 평면그래프가 아니다.
G'의 꼭짓점, 변, 면의 개수를 v', e', f'라 하자. $v'=v=7.$
G'는 평면그래프이므로 $\sum\deg(f')=4f'=\sum\deg(v')=2e',\ e'=2f'.$
G'은 평면그래프이므로 오일러 정리에 따라 $2=v'-e'+f'=7-f',\ f'=5.$

2. $BB^t=D+A=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\1&4&1&2\\2&1&4&1\\0&2&1&3\end{pmatrix}.$
$\det(BB^t-3I)=\det\begin{pmatrix}0&1&2&0\\1&1&1&2\\2&1&1&1\\0&2&1&0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2&0\\1&0&-1&2\\0&0&3&-3\\0&2&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&0\\0&3&-3\\2&1&0\end{vmatrix}=-(-12+3)=9.$

3. G는 루프가 없으므로 A의 대각성분은 모두 0이다.
$BB^T=D+A$이므로 $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&7&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&5\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&2&1&0\\0&2&0&2&3\\0&1&2&0&2\\0&0&3&2&0\end{pmatrix}.$
$G=G(V,E)$라 할 때 $|V|=5,\ 2|E|=\sum_{v\in V}\deg(v)=\text{tr}D=24,\ |E|=12.$
G는 평면그래프이므로 오일러정리에 따라 $2=|V|-|E|+f,\ f=9.$
matrix-tree 정리에 따라 G의 생성수형도의 개수는
$D-A$의 2행 1열의 여인자 $(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-2&7&-2&-3\\-1&-2&5&-2\\0&-3&-2&5\end{pmatrix}=116.$

4. 제거축약정리에 따라
$P_G(x)=x(x-1)^3-x(x-1)(x-2)=x(x-1)(x^2-3x+3).$
$a-b+c-d=1-P_G(-1)=-13.$

5. $A=\begin{pmatrix}0&1&0&3\\1&0&2&2\\0&2&0&1\\3&2&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$이므로
$D-A=\begin{pmatrix}-4&1&0&3\\1&-5&2&2\\0&2&-3&1\\3&2&1&-6\end{pmatrix}$의 한 여인수 $(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&3\\2&-3&1\\2&1&-6\end{vmatrix}=41.$

6. $P_G(x)=x(x-1)(x-2)(x^2-3x+3).$
$a=\chi(G)=\min\{x\in\mathbb{Z}^+\mid P_G(x)\neq0\}=3.$
$v=\deg(P_G(x))=5,\ e=a_{n-1}=a_5=6.$
G는 연결, 평면그래프이므로 오일러 정리에 따라
$2=v-e+f,\ f=b=3.$
$a+b=6.$

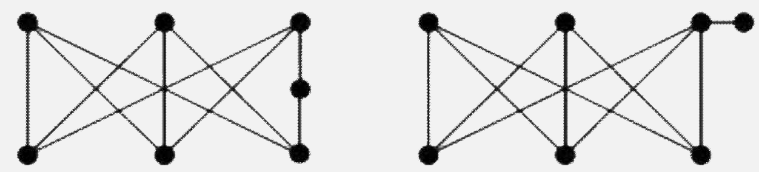
7. $2e=\sum\deg(v)=3\cdot8=24,\ e=12.$
G는 연결평면그래프이므로 오일러 정리에 따라 $2=v-e+f,\ f=6.$
외부면의 차수를 α라 하면 $2e=24=\sum\deg(f)=5\cdot n+\alpha.$
$3\le\alpha=24-5n,\ n\le\frac{21}{5}$이므로 n의 최댓값 4.

8. $\deg(v_1)=\deg(v_2)=3,\ \deg(v_3)=4,\ \deg(v_4)=6$이므로
$\sum\deg(v_i)=2m=16,\ m=8.$
차수 행렬 $D=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}.$
$D-A=\begin{bmatrix}3&-1&0&-2\\-1&3&-1&-1\\0&-1&4&-3\\-2&-1&-3&6\end{bmatrix}$의 한 여인수 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&4&-3\\-1&-3&6\end{vmatrix}=29=n.$
$m+n=37.$

9. $v=50,\ 2e=\sum\deg(v)\ge150,\ e\ge75.$
$v-e+f=2,\ f=e-48.\ 2e=\sum\deg(f)\ge5f=5e-240,\ e\le80.$
$75\le e\le80,\ e=79.\ f=31.$

10. $|V|=4,\ E=|V|-1=3$이 유지되도록 3개의 변을 남기자.
대각선 $v_2\vee v_4$을 기준으로 $v_2\vee v_4$이 지워지지 않는 경우 $2\times2=4.$
$v_2\vee v_4$이 지워지는 경우 4가지이므로 $\tau(G)=8.$
G의 차수행렬 D라 하면 G_k의 차수행렬과 인접행렬은 각각 kD, kA.
matrix-tree 정리에 따라 $D-A$의 1행 1열의 여인수 8이므로
$k(D-A)$의 1행 1열의 여인수 $8k^3$.
따라서 G_k의 생성수형도의 개수 $8k^3$.
A^3의 2행 4열의 값 5이므로 k^3A^3의 2행 4열의 값은 $5k^3$.
따라서 구하는 값 $5k^3$.

11. G는 평면그래프가 아니므로 Kuratowski 정리에 따라
G는 K_5 또는 $K_{3,3}$의 부분분할그래프와 동형인 부분그래프를 갖는다.
K_5는 변이 10개이므로 K_5의 부분분할그래프와 동형인 부분그래프를 갖는 그래프가 첫번째 조건을 만족하려면 적어도 12개의 변을 가져야 한다.
$K_{3,3}$은 변이 9개이므로 $K_{3,3}$에 꼭짓점 하나와 변 하나를 추가하여 만든 그래프가 첫 번째, 두 번째 조건을 만족하면서 변이 최소인 그래프이다.



(ㄱ) (ㄴ)

(ㄱ)은 해밀턴 회로가 존재하고 (ㄴ)은 차수가 1인 꼭짓점이 존재하므로 회로가 존재하지 않는다. 따라서 G는 (ㄴ)과 동형이다.
차수행렬 D일 때 $BB^T-A=D$. D의 행렬식은 각 꼭짓점의 차수의 곱과 같으므로 $3^5\cdot4\cdot1=972.$
$G-e$의 꼭짓점, 변, 면의 수를 v, e, f라 할 때 $v-e+f=2$이므로
$7-9+f=2,\ f=4.$

12. B의 한 행의 성분의 합이 1인 행의 개수는
차수 1인 꼭짓점의 개수와 같다.
G의 변의 개수를 e라 하고, 집합 I, J를

$$I=\{1,2,\cdots,n\},\ J=\{i\in I\mid d(v_i)=1\}$$

라 하자.

$$\begin{aligned}20&=\sum_{i=1}^{20}\left|d(v_i)-2\right|\\&=\sum_{i\in J}|-1|+\sum_{i\in I-J}\left(d(v_i)-2\right)\\&=\left(\sum_{i\in J}1+\sum_{i\in I-J}d(v_i)\right)-2(n-a)\\&=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)-2(n-a)\\&=2e-2n+2a=12+2a\ (\because\ n-e+8=2)\end{aligned}$$

따라서 $a=4$.
$n=13$인 경우 오일러 정리에 따라 $13-e+8=2$, $e=19$.
G의 인접행렬 A, 차수행렬 D라 하면 $BB^T=D+A$이므로
모든 성분의 합 $b=\sum d(v_i)+2e=4e=76$.

13. G가 연결, 평면그래프이므로 $v-e+f=2$, $kv=2e=nf$이다.

$\dfrac{2e}{k}-e+\dfrac{2e}{n}=2$, $\dfrac{2}{k}-1+\dfrac{2}{n}=\dfrac{2}{e}$.

$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2}\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{11}=\dfrac{13}{22}$, $k\geq 3$이므로

$\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{13}{22}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{44}$, $n=3$, $k=3$.

$\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}$, $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e}$, $e=6$, $v=4$. $G=K_4$.

$$n^{n-2}=4^2=16,\ D=3I_4,\ A=1_4-I_4,\ D-A=\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}.$$

$$(-1)^{1+2}=\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16=m.$$

[확률과통계]

<이산형>

1. $V[X+Y]=7=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=-3$.
$\mathrm{Cov}(3X+1, 5Y-2)=15\mathrm{Cov}(X,Y)=-45$.
$\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{-3}{2\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$.

2. $f_X(x)=\sum_{y=1}^{2}f(x,y)=\dfrac{2x^2+5}{20}$ $(x=1,\ 2)$
$\mathrm{E}[X]=\sum_{x=1}^{2}\dfrac{2x^3+5x}{20}=\dfrac{33}{20}$.
$f(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{x^2+y^2}{2y^2+5}$ $(x=1,\ 2,\ y=1,\ 2)$.
$f(x|1)=\dfrac{x^2+1}{7}$ $(x=1,\ 2)$.
$\mathrm{E}[X|\ Y=1]=\sum_{x=1}^{2}\dfrac{x^3+x}{7}=\dfrac{12}{7}$.

3.

$T \backslash S$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	0
1	0	0	$\frac{1}{5}$	0
2	0	0	0	$\frac{1}{10}$

0의 개수 7.

$$f_T(T)=\begin{cases}\frac{7}{10}, & t=0\\ \frac{1}{5}, & t=1\end{cases}\text{이므로 } f(s\,|\,t=0)=\frac{f(s,0)}{f_T(0)}=\begin{cases}\frac{2}{7}, & s=0\\ \frac{4}{7}, & s=1\\ \frac{1}{7}, & s=2\\ 0, & s=3\end{cases}.$$
$$\quad\ \ \frac{1}{10},\ t=2$$

$\mathrm{E}(S|\ T=0)=\dfrac{4}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{6}{7}=\dfrac{1}{\Pr(T=0)}\times\left(0\cdot\dfrac{1}{5}+1\cdot\dfrac{4}{10}+2\cdot\dfrac{1}{10}+3\cdot 0\right)$.

4. $f_X(x)=\Pr(X=x)\sim \mathrm{B}(2,\dfrac{1}{3})$.

X	0	1	2
$\Pr(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{1}{9}$.
$\mathrm{E}(Y)=\sum_y y\cdot\Pr(Y=y)$
$=\sum_y y\cdot[\Pr(X\le 1,\ Y=y)+\Pr(X=2,\ Y=y)]$
$=\mathrm{E}(Y|\ X\le 1)\Pr(X\le 1)+\mathrm{E}(Y|\ X=2)\Pr(X=2)$
$=8+\dfrac{4}{3}=\dfrac{28}{3}$.

5. $\mathrm{E}(X)=0.2$, $\mathrm{E}(X^2)=1$, $\mathrm{V}(X)=0.96$.
(X_i들이 서로 독립이므로)
$\mathrm{E}(Y)=0.2\cdot 25=5$, $\mathrm{V}(Y)=0.96\cdot 25=\dfrac{96}{4}=24$.
(중심극한정리에 따라 근사적으로) $Y\sim N(5,(2\sqrt{6})^2)$.
$P(4\le Y\le 6)=\Pr\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\le Z\le\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right)$, $b-a=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

6. $P(X\ge k+1\,|\,X\ge k)=\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{\Pr(X\ge k+1)}{\Pr(X\ge k)}$이므로
$\Pr(X\ge k+1)=\dfrac{k}{k+1}\Pr(X\ge k)$
$=\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{k-1}{k}\Pr(X\ge k-1)$
$=\dfrac{k}{k+1}\dfrac{k-1}{k}\dfrac{k-2}{k-1}\cdots\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{1}{k+1}$.
$\sum_{k=1}^{100}\Pr(X=k)=\sum_{k=1}^{100}\{\Pr(X\ge k)-\Pr(X\ge k+1)\}$
$=\sum_{k=1}^{100}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{101}=\dfrac{100}{101}$.

7. $f(x,y)=(1-p)^{y+1}p^{x+1}$ (x, y는 음이 아닌 정수).
$\dfrac{1}{7}=\Pr(Y<X)=\sum_{y<x}p^{x+1}(1-p)^{y+1}$
$=\sum_{y=0}^{\infty}\left[\sum_{x=y+1}^{\infty}p^{x+1}(1-p)^{y+1}\right]$
$=\sum_{y=0}^{\infty}\left[(1-p)^{y+1}\sum_{x=y+1}^{\infty}p^{x+1}\right]$
$=\sum_{y=0}^{\infty}(1-p)^{y+1}\cdot\dfrac{p^{y+2}}{1-p}$
$=p^2\sum_{y=0}^{\infty}[p(1-p)]^y=\dfrac{p^2}{1-p(1-p)}$.
$\therefore\ p=\dfrac{1}{3}$.

8. 가정에 의해 X와 Y의 결합확률분포는 다음과 같다.

$Y \backslash X$	-1	0	2	계
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
계	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 $Z=\max\{X,Y\}$의 분포는 다음과 같다.

Z	1	2	계
$\Pr(Z=z)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(Z)=\dfrac{3}{2}$, $\mathrm{E}(Z^2)=\dfrac{5}{2}$이므로 $\mathrm{V}(Z)=\dfrac{1}{4}$.

9. $M_X(t)=\sum_{x=1}^{\infty}\left(\dfrac{e^t}{2}\right)^x=\sum_{x=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^x}e^{xt}$이므로 $f_X(x)=\dfrac{1}{2^x}$ $(x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.
$P(X=10\,|\,X>3)=\dfrac{P(X=10)}{P(X\ge 4)}=\dfrac{1}{2^{10}}\cdot 2^3=P(X=7)=\dfrac{1}{128}$.

10. $\Pr(|Z|\le 1.96)=0.95\le\Pr(|\bar{p}-p|\le 0.02)=\Pr\left(|Z|\le\dfrac{0.02}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}\right)$이므로
$\dfrac{0.02}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}\ge 1.96$, $\bar{p}=\dfrac{1}{2}$일 때 $\bar{p}(1-\bar{p})$가 최대이므로
그때의 n이 최소가 된다.
$\sqrt{n}\ge\dfrac{1.96}{0.02}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}}=49$, $n\ge 49^2=2401$.

11. $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{7\cdot 13}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$.

$\overline{X}=\frac{1}{105}\sum X_i$, $\mathrm{E}(\overline{X})=3.5$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{36}=\frac{1}{6^2}$, $\overline{X}\sim N(3.5,\left(\frac{1}{6}\right)^2)$.

$\Pr(350\le \sum X_i \le 385)=\Pr(\frac{10}{3}\le \overline{X}\le \frac{11}{3})=\Pr(-1\le z\le 1)$, $ab=-1$.

12. $M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tX})=\sum_{x=0}^{126} e^{tX}{}_{126}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{126-x}$

$$=\left(\frac{e^t}{3}+\frac{2}{3}\right)^{126}=\left(\frac{2+e^t}{3}\right)^{126}.$$

$M_Y(t)=\left(\frac{2+e^t}{3}\right)^{162}$.

X, Y는 독립이므로

$M_{X+Y}(t)=\mathrm{E}(e^{t(X+Y)})=\mathrm{E}(e^{tX}\cdot e^{tY})$

$$=\mathrm{E}(e^{tX})\cdot \mathrm{E}(e^{tY})=\left(\frac{2+e^t}{3}\right)^{288}.$$

$\therefore\ X+Y\sim B\left(288,\frac{1}{3}\right)$.

13. $\Pr(Y\le y)=\Pr(\min\{X_1,X_2,X_3\}\le y)$

$$=1-\Pr(\min\{X_1,X_2,X_3\}>y)$$
$$=1-[\Pr(X_1>y)]^3$$
$$=1-[1-\Pr(X_1\le y)]^3$$
$$=1-\left(1-\frac{y}{6}\right)^3.$$

$\Pr(Y=3)=\Pr(Y\le 3)-\Pr(Y\le 2)$

$$=\left(1-\frac{2}{6}\right)^3-\left(1-\frac{3}{6}\right)^3=\frac{37}{216}.$$

14. 가정에 의해 두 확률변수의 결합확률분포는 다음과 같다.

X \ Y	0	1	2	계
0	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{3}{20}$	0	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{5}$
계	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1

$A+B+E=\frac{3}{5}$.

15. $g(z)=\Pr(Z=z)=\Pr([X]=z)$

$$=\int_z^{z+1}e^{-x}\,dx=e^{-z}-e^{-1-z}=e^{-z}(1-e^{-1}),\ z=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

$\mathrm{E}(e^{tZ})=\sum_{z=0}^{\infty}e^{tz}\cdot e^{-z}(1-e^{-1})=(1-e^{-1})\frac{1}{1-e^{t-1}}$.

$E(Z)=M_Z{}'(0)=\frac{1}{e-1}$, $E(Z^2)=M_Z{}''(0)=\frac{e+1}{(e-1)^2}$.

$Var(Z)=\frac{e+1}{(e-1)^2}-\frac{1}{(e-1)^2}=\frac{e}{(e-1)^2}$.

16. $\mu_X=\frac{1}{2}$, $\mu_Y=1$, $\mathrm{E}(XY)=\sum_{x,y}xy\cdot f(x,y)=\frac{1}{2}$.

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y=0$이므로 $\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=0$.

$\Pr(X=0,Y=1)=\frac{1}{6}$, $\Pr(X=0)=\frac{1}{2}$, $\Pr(Y=1)=\frac{1}{2}$이므로

X, Y는 독립이 아니다.

17. $\Pr(Y=2X)=\sum_{x=1}^{\infty}\Pr(Y=2x,X=x)$

$$=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2x}}\cdot\frac{1}{2^x}$$
$$=\sum_{x=1}^{\infty}2^{-3x}=\frac{1}{7}.$$

18. 가정으로부터 X의 확률분포는 다음과 같다.

X	-2	1	3	계
$f_X(x)=\Pr(X=x)$	0.2	0.5	0.3	1

이때 X가 양수일 확률은 $\Pr(X>0)=0.5+0.3=0.8$.

Y를 100회의 독립시행에서 X가 양수인 개수라 하면

$Y\sim B(100,0.8)$, $\mathrm{E}(Y)=80$, $\mathrm{V}(Y)=4^2$.

표본비율 $\overline{p}=\frac{Y}{100}\sim N(0.8,\left(\frac{4}{100}\right)^2)$.

$\Pr(\overline{p}\ge 0.73)=\Pr(Z\ge\frac{-0.07}{0.04}=-\frac{7}{4})$이므로 $c=-\frac{7}{4}$.

19. $\Pr(X\ge 3)=\sum_{x=3}^{\infty}2^{-x}=\frac{2^{-3}}{1-2^{-1}}=\frac{1}{4}$.

$Y\sim B(10,\frac{1}{4})$, $V(Y)=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$.

20. $1=\sum_{x=1}^{n}ax=a\cdot\frac{n(n+1)}{2}$, $a=\frac{2}{n(n+1)}$.

$\mathrm{E}(X)=\sum ax^2=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$.

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n(n+1)}{2}$.

$\mathrm{V}(X)=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4n^2+4n+1}{9}=\frac{n^2+n-2}{18}$.

$1\ge \mathrm{V}(X)\ \Leftrightarrow\ 0\ge n^2+n-20=(n+5)(n-4)\ \Leftrightarrow\ -5\le n\le 4$.

최댓값 4.

21. 자연수 n일 때 $X=n$에 관하여 $S\sim B\left(n,\frac{3}{4}\right)$, $T\sim B\left(n,\frac{1}{4}\right)$.

$k\ge 0$일 때

$P_S(k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(S=k\mid X=n)P_X(n)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\frac{40^ne^{-40}}{n!}$

$$=\frac{30^ke^{-30}}{k!}.$$

s, $t\ge 0$일 때

$P_{S,T}(s,t)=P(S=s,\ T=t\mid X=s+t)P_X(s+t)$

$$=\left(\frac{30^se^{-30}}{30!}\right)\left(\frac{10^te^{-10}}{10!}\right).$$

$P_{S,T}(s,t)=P_S(s)P_T(t)$이므로 S, T는 독립이고

$M_S(t)=e^{30(e^t-1)}$, $M_T(t)=e^{10(e^t-1)}$.

따라서 $E((ST)^2)=E(S^2)E(T^2)=M_S{}''(0)M_T{}''(0)=102300$.

22. $k \ge 1,\ \Pr(T \le 1 \mid X=k) = \int_0^1 \frac{dx}{k+1} = \frac{1}{k+1}$ 이므로

$$\Pr(T \le 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(T \le 1 \mid X=k) \cdot P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k!e}$$

$$= e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$$

$$= e^{-1}(e-1) = 1 - e^{-1}.$$

$k \ge 1$일 때 $\mathrm{E}(T \mid X=k) = \int_0^{k+1} t \cdot \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{2}(k+1)$이므로

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{E}(T \mid X=k) \cdot \Pr(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(k+1) \cdot \frac{1}{k!e}$$

$$= \frac{1}{2e} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{k!} \right]$$

$$= \frac{1}{2e}(e + e - 1) = 1 - \frac{1}{2e}.$$

23. $P(X>1) = 1 - P(X=1) = \frac{3}{4}$. 자연수 $n \in \mathbb{N}$일 때

$P(X>n+1) = P(X>1)P(X>n) = \frac{3}{4}P(X>n)$이므로 $P(X>n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

$P(X=10) = P(X \ge 10) - P(X \ge 11) = P(X>9) - P(X>10) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

$P(X=n) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이므로 $M_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^t}{4}\left(\frac{3e^t}{4}\right)^{n-1} = \frac{e^t}{4-3e^t}\ \ (t < \ln\frac{4}{3})$.

$E(X) = M_X{}'(0) = 4.$

<연속형>

1. $f(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

$\mathrm{P}(Y>X^2)=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\frac{1}{4}dydx=\frac{1}{3}.$

$$F(z)=\Pr(Z\le z)=\begin{cases}0 & ,\ z<0\\ \frac{1}{2}z^2 & ,\ 0\le z<1\\ -\frac{z^2}{2}+2z-1, & 1\le z<2\\ 1 & ,\ z\ge 2\end{cases}.$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z & ,\ 0\le z<1\\ -z+2, & 1\le z<2\end{cases}.$$

$\mathrm{E}(Z)=\int_0^1 z^2+\int_1^2 -z^2+2z=1.$

2. $f(x_1,x_2)=|x_1|\cdot|x_2|=|x_1x_2|,\ -1<x_1,x_2<1.$

$$\begin{aligned}P(Y<1)&=P(-1<X_1-X_2<1)\\&=1-2\int_0^1\int_{-1}^{x_1-1}|x_1x_2|\,dx_2dx_1\\&=1+2\int_0^1\int_{-1}^{x_1-1}x_1x_2\,dx_2dx_1\\&=\frac{7}{12}.\end{aligned}$$

3. $$F(z)=\Pr(Z\le z)=\begin{cases}0,\ z\le 0\\ 6\int_0^z\int_x^{-x+2z}y-x\,dydx=4z^3,\ 0\le z<\frac{1}{2}\\ 1-6\int_z^1\int_{-y+2z}^{y}y-x\,dxdy=1+4(z-1)^3,\ \frac{1}{2}\le z<1\\ 1,\ z\ge 1\end{cases}.$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}12z^2,\ 0\le z<\frac{1}{2}\\ 12(z-1)^2,\ \frac{1}{2}\le z<1\end{cases}.$$

$E(Z)=12\int_0^{1/2}z^3\,dz+12\int_{1/2}^1 z(z-1)^2\,dz=\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}.$

4. $\mathrm{P}(1\le X\le 2\le Y\le 3)=F(2,3)-F(1,3)-F(2,2)+F(1,2)=\frac{1}{6}e^{-1}-\frac{1}{6}e^{-2}.$

$f(x,y)=e^{-x}\cdot y^{-2},\ f(2,\sqrt{6})=\frac{e^{-2}}{6}.$

$\therefore\ \frac{1}{6}e^{-1}.$

5. $\Pr(Z\le z)=\Pr(X\le zY)=\int_0^\infty\int_{x/2}^\infty e^{-(x+y)}\,dydx=\frac{z}{z+1}=1-\frac{1}{z+1}\ (z>0).$

$g(z)=(z+1)^{-2},\ z>0.$

$E\left((1+Z)^2/e^Z\right)=\int_0^\infty(1+z)^2e^{-z}\cdot(z+1)^{-2}dz=\int_0^\infty e^{-z}\,dz=1.$

6. $f_Y(1)=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2\pi}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi},\ f(x,1)=\frac{1}{2\pi},\ 0<x<\sqrt{3}.$

$f(x|1)=\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0<x<\sqrt{3}.$

$\mathrm{P}(X\le 1|\ Y=1)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\mathrm{E}(X|\ Y=1)=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{3}}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

7. $f_Y(y)=\int_0^1\frac{2x+y}{12}dx=\frac{y+1}{12},\ 0<y<4.$

$f(x|y)=\frac{2x+y}{y+1},\ 0<x<1,\ 0<y<4.$

$\frac{2}{5}=\mathrm{P}(X\le 0.5|\ Y=k)=\int_0^{1/2}f(x|k)dx=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1+2k}{4}.$

$8k+8=5+10k,\ k=\frac{3}{2}.$

$\mathrm{E}(X|\ Y=k)=\int_0^1 xf(x|k)dx=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{4+3k}{6}=\frac{17}{30}.$

8. $\mathrm{E}(X)=6\int_1^2-x^3+3x^2-2xdx=6\left(-\frac{15}{4}+7-3\right)=\frac{3}{2}.$

$\mathrm{E}(X^2)=6\int_1^2-x^4+3x^3-2x^2dx=6\left(-\frac{31}{5}+\frac{45}{4}-\frac{14}{3}\right)=\frac{23}{10}.$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mu_X^2=\frac{23}{10}-\frac{9}{4}=\frac{1}{20}.$

$\overline{X}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}X_i,\ \mu_{\overline{X}}=\frac{3}{2},\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{400}\cdot 20\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{400}.$

$\overline{X}\sim N\left(\frac{3}{2},\left(\frac{1}{20}\right)^2\right),\ \mathrm{P}(\overline{X}\le\frac{17}{12})=\Pr(Z\le-\frac{5}{3}),\ c=-\frac{5}{3}.$

9. $T=\min\{X_1,\cdots,X_{10}\}.$

$$\begin{aligned}F_T(t)&=\Pr(T\le t)\\&=1-\Pr(T>t)\\&=1-\left[\int_t^\infty e^{-x}dx\right]^{10}\\&=1-e^{-10t}.\end{aligned}$$

$\therefore\ f_T(t)=10e^{-10t},\ t>0.$

$E(T)=\int_0^\infty 10te^{-10t}dt=\frac{1}{10}.$

10. $F_z(z)=\Pr(Z\le z)=\Pr(Y\le zX)$

$$=\begin{cases}0 & ,\ z\le 0\\ \int_0^1\int_0^{zx}3x^2\cdot 2ydydx, & 0<z\le 1\\ 1-\int_0^{\frac{1}{z}}\int_{zx}^1 6x^2y\,dydx, & 1<z\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ,\ z\le 0\\ \frac{3}{5}z^2 & ,\ 0<z\le 1\\ 1-\frac{2}{5}z^{-3}, & 1<z\end{cases}.$$

$$\therefore\ f_Z(z)=\begin{cases}\frac{6}{5}z,\ 0<z\le 1\\ \frac{6}{5}z^{-4},\ z>1\end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\ln Z]&=\int_0^1\frac{6}{5}z\ln z+\int_1^\infty\frac{6}{5}z^{-4}\ln z\\&=\frac{6}{5}\left[\frac{1}{2}z^2\ln z-\frac{1}{4}z^2\right]_0^1+\frac{6}{5}\int_0^\infty te^{-3t}\\&=\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{9}\\&=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

11. 표준정규분포 Z일 때, $\mathrm{V}(Z)=1^2=\mathrm{E}(X^2)-0^2=\mathrm{E}(Z^2).$

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Z_1)\mathrm{E}(Z_2)=0.$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2=\mathrm{E}(Z_1^2Z_2^2)-0^2=\mathrm{E}(Z_1^2)\mathrm{E}(Z_2^2)=1\cdot 1=1.$

12. $F_X(x) = \Pr(X \le x) = \Pr(Z_1^2 + Z_2^2 \le x^2)$

$$= \iint_{Z_1^2+Z_2^2 \le x^2} f(z_1) f(z_2)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{x} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}},\ x > 0.$$

$$\therefore\ g(x) = (F_X(x))' = xe^{-\frac{x^2}{2}}\ \ (x > 0).$$

13. $\Pr(Y \le y) = \begin{cases} \Pr(2X \le y),\ 0 < y \le 2 \\ \Pr(2X \le 2) + \Pr(2 < X^2 + 1 \le y),\ 2 < y \le 5 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{y}{2}} \frac{1}{2}\, dx,\ 0 < y \le 2 \\ \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{2}\, dx + \Pr(1 < X < \sqrt{y-1}),\ 2 < y \le 5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} y,\ 0 < y \le 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{y-1},\ 2 < y \le 5 \end{cases}.$$

$$\therefore\ f(y) = [\Pr(Y \le y)]' = \begin{cases} \frac{1}{4},\ 0 < y \le 2 \\ \frac{1}{4}(y-1)^{-1/2},\ 2 < y \le 5 \end{cases}.$$

$$XY = \begin{cases} 2X^2,\ X \le 1 \\ X^3 + X^2,\ X > 1 \end{cases},\ \mathrm{E}(XY) = \int_0^1 2x^2 \cdot \frac{1}{2} dx + \int_1^2 (x^3 + x) \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{71}{24}.$$

14. 검정통계량 $Z = \dfrac{\overline{X} - 9}{\sqrt{6}/\sqrt{150}}$, 기각역 $R : Z \ge z_\alpha = 1.645$.

H_0가 기각 $\Leftrightarrow$ 검정통계량 $Z \in R$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{X} - 9}{\sqrt{6}/\sqrt{150}} \ge 1.645$이므로

$\overline{X} \ge 9 + \dfrac{1.645}{5} = 9.329$, 최솟값 9.329.

15. $M_Y(t) = \mathrm{E}(e^{t(2X+3)}) = e^{3t} \cdot \mathrm{E}(e^{2tX}) = e^{3t} \cdot \dfrac{1}{1-(2t)^2} = e^{3t}(1-4t^2)^{-1}$.

16. $f_X(x) = \dfrac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$.

$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) = 2xe^{-xy}\ \ (y \ge 0,\ 1 \le x \le 3)$.

$\Pr(Y > 1) = \Pr(Y > 1 \mid 1 \le X \le 3) \cdot \Pr(1 \le X \le 3)$

$$= \left(\int_1^3 \int_1^\infty 2xe^{-xy}\, dy dx\right) \cdot 1$$

$$= 2e^{-1} - 2e^{-3}.$$

$$E(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y)\, dy = \int_0^\infty y\left[\int_1^3 f(x, y) dx\right] dy$$

$$= \int_0^\infty y\left[\int_1^3 \frac{f(y|x)}{f_X(x)} dx\right] dy$$

$$= \int_0^\infty y \int_1^3 2xe^{-xy} dx dy$$

$$= \int_1^3 \int_0^\infty 2xye^{-xy}\, dy dx\ \ (*x > 0)$$

$$= 2\ln 3.$$

17. $\Pr(Z \le z) = \Pr(X \le z,\ \ Y \le z)$

$$= \begin{cases} 0,\ z < 0 \\ \displaystyle\int_0^z \int_0^z f(x, y) dy dx = \frac{1}{8} z^3 + \frac{1}{2} z^2,\ 0 \le z \le 1 \\ \displaystyle\int_0^1 \int_0^z f(x, y) dx dy = \frac{3}{4} z - \frac{1}{8} z^2,\ 1 \le z \le 2 \\ 1,\ z \ge 2 \end{cases}.$$

$$\therefore\ f_Z(z) = (\Pr(Z \le z))' = \begin{cases} \frac{3}{8} z^2 + z,\ 0 \le z \le 1 \\ \frac{3}{4} - \frac{1}{4} z,\ 1 \le z \le 2 \end{cases}.$$

$$E[Z] = \int_0^1 \frac{3}{8} z^3 + z^2 + \int_1^2 \frac{3}{4} z - \frac{1}{4} z^2 = \frac{31}{32}.$$

18. $M_{X+Y}(t) = \mathrm{E}(e^{t(X+Y)}) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = (1-2t)^{-\frac{3}{2}}$.

$$\mathrm{E}(Z) = M_{X+Y}^{(3)}(0) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)(-2)^3 (1-2t)^{-\frac{9}{2}}\Big|_{t=0} = 105.$$

19. $\mathrm{E}(X^n) = \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$. ($n$은 음이 아닌 정수)

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mu_X \mu_Y = \mathrm{E}(X^3 + X) - \mu_X[\mathrm{E}(X^2) + 1] = \frac{1}{12}.$$

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu_X^2 = \frac{1}{12},\ \mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(X^4) - \mathrm{E}(X^2)^2 = \frac{4}{45}.$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

20. $1 = \displaystyle\int_0^1 \int_0^y k(x+y) dx dy = \frac{k}{2},\ k = 2.$

$$f(x \mid y) = \frac{2(x+y)}{\displaystyle\int_0^y 2(x+y)\, dx} = \frac{2x + 2y}{3y^2}\ \ (0 < x < y < 1).$$

$$\mathrm{E}(X \mid Y = y) = \int_0^y x \cdot \frac{2x + 2y}{3y^2} dx = \frac{5y}{9}\ \ (0 < y < 1).$$

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 3y^3\, dy = \frac{3}{4}.$$

21. $\overline{X} - 2\overline{Y} \sim N\!\left(\mu_1 - 2\mu_2, \left(\dfrac{\sqrt{5}\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$.

$$0.95 < P\left(\overline{X} - 2\overline{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - 2\mu_2 < \overline{X} - 2\overline{Y} + \frac{\sigma}{5}\right)$$

$= \Pr\left(|Z| < \dfrac{\sigma}{5} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}\sigma/\sqrt{n}}\right)$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{5\sqrt{5}} > 1.96$, $n > 480.\mathrm{xxx}$, 최소의 $n = 481$.

22. $\overline{X} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i = 9.$

$$S^2 = \frac{1}{100-1}\sum_{i=1}^{100} (X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{\sum X_i^2 - 2\overline{X}\sum X_i + 100\overline{X}^2}{99}$$

$$= \frac{8991 - 200\overline{X}^2 + 100\overline{X}^2}{99} = 9 = 3^2.$$

$$\overline{X} \sim N(9, 3^2).$$

$$\therefore\ 2 \times 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{100}} = 1.176.$$

23. $\Pr(Z \le z) = \Pr(\min\{X, Y\} \le z)$

$$= 1 - \Pr(X \ge z,\ Y \ge z)$$

$$= 1 - \Pr(z \le X \le 1 - z)$$

$$= 1 - \int_z^{1-z} 2x\, dx$$

$$= 2z,\ 0 \le z \le \frac{1}{2}.$$

$$f_Z(z) = 2,\ 0 \le z \le \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2z\, dz = \frac{1}{4},\ \mathrm{E}(Z^2) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2z^2 dz = \frac{1}{12}.$$

$$\mathrm{V}(Z) = \frac{1}{48}.$$

24. $\Pr(U\le u)=1-\Pr(X>u)\Pr(Y>v)=1-\left[\int_u^1 1\right]^2=2u-u^2.$

$\Pr(V\le v)=\Pr(X\le v)\Pr(Y\le v)=\left[\int_0^v 1\right]^2=v^2.$

$f_U(u)=2-2u,\ 0\le u\le 1,\ f_V(v)=2v,\ 0\le v\le 1.$

$E(U)=\int_0^1 2u-2u^2=\frac{1}{3},\ E(V)=\int_0^1 2v^2=\frac{2}{3}.$

$0\le u\le v\le 1$인 $u,\ v$에 대하여

$\Pr(U\le u,\ V\le v)=\Pr(X\le u \text{ or } Y\le u,\ X\le v,\ Y\le v)$

$=v^2-(v-u)^2=2uv-u^2.$

$f(u,v)=2,\ 0\le u\le v\le 1.$

$E(UV)=\iint_{0\le u\le v\le 1} 2dA=\frac{1}{4}.$

$\therefore\ \mathrm{cov}(U,V)=E(UV)-\mu_U\mu_V=\frac{1}{36}.$

* $X,\ Y$는 독립이고 $UV=\min\{X,Y\}\cdot\max\{X,Y\}=XY$이므로

$E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1-0}{2}\cdot\frac{1-0}{2}=\frac{1}{4}.$

25. $\Pr(X\le 2)=\frac{8}{27}$이므로 $f(x\mid x\le 2)=\frac{3}{8}x^2,\ 0\le x\le 3.$

$\mathrm{E}(X\mid X\le 2)=\int_0^2\frac{3}{8}x^3dx=\frac{3}{2}.$

26. $1-\Pr(X<1,\ Y<1)=1-\int_0^1\int_x^1\frac{x+y}{4}\ dydx=\frac{7}{8}.$

27. A의 확률밀도함수 $f_A(x,y)=1,\ 0<x,y<1.$

$0<s<1$일 때 $\Pr(S\le s)=\Pr(xy\le s)=s(1-\ln s).$

$f_S(s)=-\ln s,\ 0<s<1.$

$\mathrm{E}(S)=\int_0^1 s\cdot f_S(s)dx=\frac{1}{4}.$

$0<t<1$일 때

$\Pr(T\le t)=1-\Pr(T>t)=1-[\Pr(T>t)]^4=1-(1-t+t\ln t)^4.$

$f_T(T)=-3\ln t[1+t(\ln t-1)]^2,\ 0<t<1.$

28. $Z_1-Z_2\sim\mathrm{N}(0,(\sqrt{2})^2).$

$\Pr(Z_1\le Z_2+1)=\Pr(Z\le\frac{1}{\sqrt{2}})=\Pr(Z_1\le\frac{1}{\sqrt{2}}),\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$\overline{X}=\frac{Z_1+Z_2}{2},\ S^2=\frac{1}{2-1}\left[(\overline{X}-Z_1)^2+(\overline{X}-Z_2)^2\right]=\frac{(Z_1-Z_2)^2}{2}.$

$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\frac{Z_1+Z_2}{2}-0}{\frac{|Z_1-Z_2|}{\sqrt{2}}\Big/\sqrt{2}}=\frac{Z_1+Z_2}{|Z_1+Z_2|}\sim t(1).$

$\Pr(Z_1+Z_2\le|Z_1-Z_2|)=\Pr\left(\frac{Z_1+Z_2}{|Z_1-Z_2|}\le 1\right)=\Pr(\mathrm{T}\le 1),\ b=1.$

29. $X,\ Y$는 독립이므로 결합확률밀도함수 $f(x,y)=\frac{1}{xy},\ 1<x<e,\ 1<y<e$

$F_Z(z)=\Pr(Z\le z)$

$=\Pr(\ln(XY)\le z)$

$$=\begin{cases}0\ ,\ z<0\\ \int_1^{e^z}\int_1^{\frac{e^z}{x}}\frac{1}{xy}dydx=\frac{1}{2}z^2,\ 0\le z<1\\ 1-\int_{e^{z-1}}^{e}\int_{\frac{e^z}{x}}^{e}\frac{1}{xy}\ dydx=-\frac{1}{2}z^2+2z-1,\ 1\le z<2\\ 1\ ,\ z\ge 2\end{cases}.$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}z,\ 0<z<1\\ -z+2,\ 1\le z<2.\\ 0\ ,\ \mathrm{o.w}\end{cases}$$

$E(Z)=\int_0^1 z^2+\int_1^2 -z^2+2z=1.$

30. $0<x\le y\le z<30$일 때

$F(x,y,z)$

$=\Pr(Y_1\le x,\ Y_2\le y,\ Y_3\le z)$

$=3!\cdot\Pr(X_1\le x,\ X_2\le y,\ X_3\le z)$

$=6\int_0^x\int_{x_1}^y\int_{x_2}^z\left(\frac{1}{30}\right)^3dx_3dx_2dx_1$

$=\frac{6}{30^3}\left(xyz-\frac{1}{2}y^2x-\frac{z}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\right).$

$f(x,y,z)=\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}F=6\left(\frac{1}{30}\right)^3,\ 0<x<y<z<30.$

$p=\Pr(Y_1+10<Y_2,\ Y_2+10<Y_3)=\int_0^{10}\int_{x+10}^{20}\int_{y+10}^{30}f=\frac{1}{27}.$

주유소의 위치 $X,\ Y,\ Z$일 때

$E(Y_1Y_2Y_3)=E(XYZ)=\left(\int_0^{30}\frac{1}{30}xdx\right)^3=3375.$

31. $0<y<x<2$라 하자.

$\Pr(X\le x,\ Y\ge y)=\Pr(y\le x_i\le x,\ i=1,2,3,4,5)$

$=\Pr(y\le x_1\le x)^5=\left[\int_y^x\frac{1}{2}dx_1\right]^5$

$=\left(\frac{x-y}{2}\right)^5.$

$\Pr(X\le x,\ Y\le y)=\Pr(X\le x)-\Pr(X\le x,\ Y>y)$

$=\left[\int_0^x\frac{1}{2}dx_1\right]^5-\left(\frac{x-y}{2}\right)^5$

$=\left(\frac{x}{2}\right)^5-\left(\frac{x-y}{2}\right)^5.$

$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^5-\left(\frac{x-y}{2}\right)^5\right]=\frac{5}{8}(x-y)^3.$

32. $0\le z\le 2$일 때

$G(z)=\Pr(Z\le z)=1-\Pr(X>z,\ Y>z)$

$=1-\int_z^{\frac{6-z}{2}}\int_z^{6-2x}\frac{1}{9}\ dydx$

$=1-\frac{1}{36}(6-3z)^2.$

$g(z)=\frac{1}{6}(6-3z),\ 0\le z\le 2.$

$\Pr([Z+1]=1)=\Pr(0\le z<1)=\int_0^1 g=\frac{3}{4}.$

$\Pr([Z+1]=2)=\Pr(1\le Z<2)=G(2)-G(1)=\frac{1}{4}.$

$E([Z+1])=1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$

[복소해석학]

<해석함수>

1. $x+iy \in D \Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 \le x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow y \le -x.$

$f(z)=f(x+iy)=(x-1)+i(y-1)$이므로

$|f(z)|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$의 최솟값 $a=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $b=0+0i=0.$

2. $f'(z)=f_x=u_x+iv_x$, $f'(0)=u_x(0,0)+iv_x(0,0).$

코시-리만 방정식에 따라 $-1=u_y(0,0)=-v_x(0,0)$, $v_x(0,0)=1$

코시 적분 공식에 따라

$$\begin{aligned} f'(0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^2}dz \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{2it}}\cdot ie^{it}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-it}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(\cos t,\sin t)+iv(\cos t,\sin t)\}\cdot(\cos t-i\sin t)\,dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u\cos t+v\sin t)dt+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-u\sin t+v\cos t)dt \\ &=u_x(0,0)+iv_x(0,0) \\ &=u_x(0,0)+i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\pi&=\int_0^{2\pi}-v(\cos t,\sin t)(-\sin t)+u(\cos t,\sin t)\cos t\,dt \\ &=\int_0^{2\pi}u\cos t+v\sin t dt \end{aligned}$$

$=2\pi u_x(0,0)$이므로 $u_x(0,0)=3.$

$\therefore\ f'(0)=3+i.$

3. $g(z)=e^{if^2}=e^{-2uv+i(u^2-v^2)}$는 $|z|\le r$에서 해석적이므로

코시 적분 공식에 따라

$$\begin{aligned} g(0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{g(z)}{z}\,dz \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{g(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,d\theta \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[-2u(re^{i\theta})v(re^{i\theta})+i(u(re^{i\theta})^2-v(re^{i\theta})^2)\right]d\theta \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2}e^{-2uv}\cdot\left[(\cos(u^2-v^2)+i\sin(u^2-v^2)\right]d\theta \\ &=e^{4i} \\ &=\cos 4+i\sin 4. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \int_0^{2\pi}e^{-2uv}(\cos(u^2-v^2))d\theta=2\pi\cos 4.$$

4. 가정에 의해 $\int_0^{2\pi}ue^{it}=0+i\cdot 8\pi=8\pi i.$

코시-구르사 정리에 따라

$$\begin{aligned} 0&=\int_{|z|=1}f(z)dz=\int_0^{2\pi}f(e^{it})ie^{it}\,dt\ =i\int_0^{2\pi}(u+iv)e^{it}dt \\ &=i\int_0^{2\pi}ue^{it}-\int_0^{2\pi}ve^{it}=-8\pi-\int_0^{2\pi}ve^{it}. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \int_0^{2\pi}ve^{it}=-8\pi=\int_0^{2\pi}vc+i\int_0^{2\pi}vs.\quad \int_0^{2\pi}vc=-8\pi,\quad \int_0^{2\pi}vs=0.$$

코시-적분공식에 따라

$$\begin{aligned} f'(0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{it})}{e^{2it}}ie^{it}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})e^{-it} \\ &=\frac{1}{2\pi}\int ue^{-it}+\frac{i}{2\pi}\int ve^{-it} \\ &=-4i+\frac{i}{2\pi}(-8\pi+i\cdot 0)=-8i. \end{aligned}$$

5. f가 정함수이므로 f'도 정함수이다. $R>1$인 실수 R에 대하여

f'은 $|z|\le R$에서 해석적이고 $|z|=R$ 위에서

$|f'(z)|\le\frac{\sqrt{R}}{\ln R}:=M$이므로 코시부등식에 따라

$$|(f')^{(n)}(0)|=|f^{(n+1)}(0)|\le\frac{n!\cdot M}{R^n}=\frac{n!}{R^{n-\frac{1}{2}}\ln R}.$$

f'은 정함수이므로 $R\to\infty$일 때도 부등식이 성립한다.

따라서 $n>\frac{1}{2}$일 때 $f^{(n+1)}(0)=0.$

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(0)}{n!}z^n=f'(0)=f'(1)=1.$$

$$\therefore\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n=f(0)+f'(0)z=1+z.$$

$|f(1+i)|=|2+i|=\sqrt{5}.$

6. 코시적분공식(유수정리)에 따라

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{(n+1)z-1}dz=\frac{1}{n+1}f\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{-(n+1)^2}{4(n+1)^2-1}=\frac{-1}{4-\frac{1}{(n+1)^2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

항등 정리에 따라 $f(z)=\frac{-1}{4-z^2}=\frac{1}{z^2-4}.$

$$f\left(\frac{i}{2}\right)=-\frac{4}{17}.$$

7. $u_x+v_x=x^3-3x^2y+2axy^2+y^3$, 코시리만 방정식에 따라

$u_y+v_y=-x^3+2ax^2y+3xy^2+y^3=-v_x+u_x$이므로

$2u_x=(2a-3)x^2y+(2a+3)xy^2+2y^3,$

$-2u_y=2v_x=2x^2+(-3-2a)x^2y+(2a-3)xy^2.$

$2u_{xx}=(4a-6)xy+(2a+3)y^2,$

$-2u_{yy}=(-3-2a)x^2+(4a-6)xy.$

u는 조화함수이므로

$0=2u_{xx}+2u_{yy}\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}.$

$2u_x=-6x^2y+2y^3$, $u_x=-3x^2y+y^3.$

$2v_x=2x^3-6xy^2$, $v_x=x^3-3xy^2.$

$f'=u_x+iv_x$, $f'(1-i)=2-2i$

8. f가 정함수이므로 f'도 정함수이다.

$0\le|f'(z)|<|f(z)|$이므로 $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|<1$, $\frac{f'}{f}$는 정함수이므로

리우빌 정리에 따라 $\frac{f'}{f}$는 상수.

$$(\ln f)'=\frac{1}{2}i,\quad f=e^{\frac{1}{2}iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

코시 적분 공식에 따라

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}i\right)^n=2\pi i\cdot\frac{1}{1-\frac{i}{2}}=\frac{4\pi i(2+i)}{5}.$$

9. 코시 적분 공식에 따라 $6\pi = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) \cdot 2\pi i$, $f(0) = -3i$.

$z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

$6\pi = \int_0^{2\pi} \frac{u+iv}{e^{it}} ie^{it}\, dt = i\int_0^{2\pi} u dt - \int_0^{2\pi} v dt$이므로

$\int_0^{2\pi} u dt = 0$, $\int_0^{2\pi} v dt = -6\pi$.

$$\int_{x^2+y^2=1} (xu - yv)dx + (yu + xv)dy$$
$$= \int_0^{2\pi} (u\cos t - v\sin t)(-\sin t)dt + (u\sin t + v\cos t)(\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t)dt$$
$$= -6\pi.$$

10. $g = u(x, -y) + iv(x, -y)$는 정함수이므로 코시-리만 방정식에 따라
임의의 실수 x, y에 대해 $u_x = -v_y$, $-u_y = -v_x$.
f는 정함수이므로 코시-리만 방정식에 따라
임의의 실수 x, y에 대해 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.
$\therefore\ u_x = u_y = 0 = v_x = v_y$.
f는 상수함수이므로 $f(2+2i) = 3+5i$.

11. $v(x, y) = 3x^2 y + ay^3 + y$라 하자.
f가 정함수이므로 v는 조화함수이다.
$0 = v_{xx} + v_{yy} = 6y + 6ay$, $a = -1$.
$v_y = 3x^2 - 3y^2 + 1$, $v_x = 6xy$.
$f' = f_x = u_x + iv_x = v_y + iv_x$이므로 $f'(1+i) = 1+6i$.

12. 코시적분공식과 코시-구르사 정리에 따라
$$f(z) = \begin{cases} 2\pi i(3z^2 + e^z), & |z| < 5 \\ 0 & , |z| > 5 \end{cases}.$$
구하는 값 $0 + 2\pi i(6 + e^{\pi i}) = 10\pi i$.

13. $\mathbb{R} \ni v - u \le 0$, $e^{v-u} \le 1$.
$$e^{v-u} = \frac{e^v}{e^u} = \frac{|e^{v-iu}|}{|e^{u+iv}|} = \frac{|e^{-if(z)}|}{|e^{f(z)}|} = |e^{(-1-i)f(z)}| \le 1.$$
리우빌 정리에 따라 $e^{(-1-i)f(z)}$는 상수함수이므로 $f(z)$도 상수함수이다.
$f(z) = f(i) = 1 + i = f(1)$.

14. $f = u + iv$, $dz = dx + idy$.
$\overline{f(z)} f'(z) = (u - iv)(u_x + iv_x) = (uu_x + vv_x) + i(uv_x - u_x v)$
$$\int_C \overline{f} f' = \int_C (uu_x + vv_x)dx + (u_x v - uv_x)dy$$
$$+ i\int_C (uv_x - u_x v)dx + (uu_x + vv_x)dy \text{이므로}$$
$$\mathrm{Re}\left(\int_C \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz\right) = \int_C (uu_x + vv_x)dx + (u_x v - uv_x)dy$$
$$= \int_C \left\{\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right\}_x dx + \left\{\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right\}_y dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right]_{z_1}^{z_2}$$
$$= \left[\frac{1}{2}|f(z)|^2\right]_{z_1}^{z_2} = \frac{7}{2}.$$

15. $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $T(0) = 0$, $b = 0$, $d \ne 0$. $T(\infty) = \infty$, $c = 0$, $a \ne 0$.

$z = T(T(z)) = T\left(\frac{a}{d}z\right) = \left(\frac{a}{d}\right)^2 z$, $\frac{a}{d} = \pm 1$. $T(z) = z$ 또는 $T(z) = -z$.

$TST^{-1}TST^{-1} = TS^2T^{-1} = I$, $TST^{-1} = \pm I$이고 S는 항등변환이 아니므로

$TST^{-1} = -I$, $S = T^{-1}(-I)T$.

$S(z) = T^{-1}\left(\frac{-z+1}{z-3}\right) = \frac{2z-3}{z-2}$. $S(2-i) = 2+i$.

16. 코시적분공식에 따라 $\int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z}\, dz = 2\pi i$.

$\alpha = -i$인 경우
$$2\pi i = \int_{|z|=1} \frac{e^{\alpha z}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{-i(\cos\theta + i\sin\theta)}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta} e^{-i\cos\theta}\, i\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} ie^{\sin\theta}(\cos(-\cos\theta) + i\sin(-\cos\theta))\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} ie^{\sin\theta}(\cos(\cos\theta) - i\sin(\cos\theta))\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\sin(\cos\theta) + ie^{\sin\theta}\cos(\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\sin(\cos\theta)\, d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\cos(\cos\theta)\, d\theta.$$
$$\therefore\ \int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\cos(\cos\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

17. f는 D에서 해석적이므로 $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$.

코시 적분공식에 따라 $0 < r < 1$인 r에 대해

임의의 자연수 n에 대하여 $na_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz$.

따라서 $|na_n| \le \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$, $|a_n| \le \frac{1}{nr^{n-1}(1-r)}$.

$n = 1$인 경우 $|a_1| = |f'(0)| \le 1 < e$.

$n \ge 2$인 경우 $r = 1 - \frac{1}{n}$라 하면
$$|a_n| \le \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e.$$

18. $$\frac{e^{2zi}-1}{z\sin z} = \frac{e^{2zi}-1}{z \cdot \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})} = \frac{2ie^{iz}}{z} = \frac{2i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \frac{2i}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2i^n}{(n+1)!}z^n$$

$A = -2i$, $B = 0$일 때, 0 근방에서 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2i^n}{(n+1)!}z^n$이므로

$z = 0$는 $f(z)$의 제거가능 특이점.

$n \ne 0$일 때, $\lim_{z\to n\pi} f(z) = \lim_{z\to n\pi}\left(\frac{2ie^{iz}}{z} + \frac{-2i}{z}\right) = \frac{(-1)^n 2i - 2i}{n\pi}$ (수렴).

따라서 리만정리에 따라 $f(z)$는 $A = -2i$, $B = 0$일 때
모든 특이점이 제거가능 특이점이 된다.
$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = -2$, $\lim_{z\to 0} f'(z) = f'(0) = -i$.

19. $x > 0$일 때 $\ln f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$이므로
$$f'(x) = \left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$= \left[\int_x^{x+1}\frac{dt}{t} - \frac{1}{x+1}\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 0 \text{이므로 } f\text{는 순증가.}$$
$0 < r < 1$일 때 반시계 방향의 원 $C: |z| = r$에 대하여

코시부등식에 따라 임의의 자연수 n에 대해 $|a_n| = \left|\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right| \le \frac{1}{r^n(1-r)}$.

$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$은 e로 수렴하는 순증가 수열이므로

$r = \frac{n}{n+1}$라 할 때 $|a_n| \le (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e$.

20. f가 상수가 아니라고 가정하자.
열린사상정리에 따라 D는 개집합이므로 $f(D)$는 개집합이다.
$1+i=f(0)\in f(D)\in G$이므로 $1+i$는 G의 내점, 모순이다.
따라서 f는 상수함수이므로 $f'(0)=0$.

21. $B\neq 0$라 하면 $B>0$이므로 $|f(z)|>0$, $\dfrac{1}{f(z)}$도 정함수이다.
$\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|\leq \dfrac{1}{B}$이므로 리우빌 정리에 따라 $\dfrac{1}{f}$는 상수, 따라서 f도 상수.
$f(z)=C$라 놓으면 $|C|\geq A+Be^{|z|}$, 모순이다.
따라서 $B=0$이고 $0\leq A\leq 1$.

22. $g(z)=\dfrac{\sin(f(z))}{\cos(z^2)}$의 특이점은 $z=\pm\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, $n\in\mathbb{Z}$ (고립 특이점).
특이점을 제외한 근방에서 $|g(z)|\leq 1$이므로 리만정리에 따라
g는 $\mathbb{C}$에서 해석적인 정함수 $\hat{g}$로 확장된다.
$|\hat{g}|\leq 1$이므로 리우빌 정리에 따라 $\hat{g}(z)$는 상수함수.
복소상수 C에 대해 $\sin|f(z)|=C\cdot\cos(z^2)$라 놓으면
$\sin|f(0)|=C\cos(0)=C$, $C=1$.
$\sin|f(z)|=\cos(z^2)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z^2\right)=\cos(-z^2)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+z^2\right)$이므로
$f(z)=\dfrac{\pi}{2}+z^2+2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.
$f'(1)=2$, $f(0)=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi=\dfrac{\pi}{2}$, $n=0$.
$\therefore$ $f(z)=\dfrac{\pi}{2}+z^2$.

23. $g(z)=f'(z)=u_x+iv_x$일 때 g는 정함수이고
임의의 복소수 z에 대해 $|g(z)|=|u_x+iv_x|\geq\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이므로 $\left|\dfrac{1}{g}\right|\leq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
리우빌 정리에 따라 $g(z)=f'(z)$는 상수함수.
$f(z)=az+b$라 할 때 $1+i=f'(i)=a$, $1=f(i)=ai+b$이므로
$f(z)=(1+i)z+(2-i)$, $f(1)+f''(2i)=3$.

24. $e^{-f(z)}$는 정함수이고
$|e^{-f(z)}|=|e^{-u}e^{-iv}|=|e^{-u}(\cos v+i\sin v)|=e^{-u}\leq e^0=1$이므로
리우빌 정리에 따라 $e^{-f(z)}$는 상수, 따라서 $f(z)$는 상수함수.
$f(1)=u(1,0)+iv(1,0)=-\pi+iv(1,0)$,
$f(i)=u(0,1)+iv(0,1)=u(0,1)+i\dfrac{\pi}{2}$이므로 $f(z)=\pi+i\dfrac{\pi}{2}$.
$e^{f(1+i)}=e^{\pi+\frac{\pi}{2}i}=ie^{\pi}$.

25. $e^{f(z)}$는 정함수이고
$|e^{f(z)}|=e^{u(x,y)}\leq e^{2|\ln|z||+1}=e^{2\ln|z|+1}=e|z|^2$이므로
일반화된 리우빌 정리에 따라 $e^{f(z)}$는 2차 이하 다항함수.
임의의 복소수 z에 대해 $e^{f(z)}\neq 0$이고,
상수함수가 아닌 모든 다항함수는 전사함수이므로
$e^{f(z)}$는 상수함수이다.
$0=\dfrac{d}{dz}(e^{f(z)})=f'(z)\cdot e^{f(z)}$, $f'(z)=0$이므로 f는 상수함수이다.
따라서 v도 상수함수이며, $v(1,0)=v(0,0)=1$.

〈비해석함수〉

1. $z=2e^{i\theta},\ f=2e^{i\theta}+\frac{1}{2}e^{-i\theta}=\frac{5}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi.$

$$x=\frac{5}{2}\cos\theta,\ y=\frac{3}{2}\sin\theta,\ \frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

$$\therefore\ S=\pi\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}\pi.$$

2. 상수수열이 아닌 수열 $\left\{\frac{i}{n}\right\}$에 대하여

$f\left(\frac{i}{n}\right)=1-\left(\frac{i}{n}\right)^6,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{i}{n}=0\in\mathrm{int}\,\mathbb{C}$ 이므로

항등정리에 따라 $f(z)=1-z^6,\ f'=-6z^5.$

$z^6=1\Leftrightarrow z=e^{\frac{2k\pi i}{6}}=e^{\frac{k\pi i}{3}}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$

유수 정리에 따라

$$\int_{|z-i|=1}\frac{z^6}{f(z)}\,dz=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right)+\exp\left(\frac{2\pi}{3}i\right)\right)$$
$$=-\frac{\pi i}{3}\left(2\times i\sin\frac{\pi}{3}\right)\ (x\text{부호 반대})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

3. $g(z)=zf(z)-1+e^z$는 정함수이고 $|g(z)|\le 1+|z|$이므로

일반화된 리우빌 정리에 따라 g는 1차 이하 다항함수.

$g(0)=0$이므로 $g(z)=az$라 하자.

$f(z)=\frac{az+1-e^z}{z}=a-1-\frac{z}{2!}-\frac{z^2}{3!}-\frac{z^3}{4!}-\cdots$이므로

유수정리에 따라

$$\int_{|z|=1}\frac{(z+1)f(z)}{z^3}\,dz=2\pi i\left(-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=-\frac{4}{3}\pi i.$$

4. $q(0)=1,\ q$는 $|z|\le 1$에서 해석적이고 $|z|=1$위에서 $|q(z)|\le 1^{2022}\cdot 1=1.$

최대절댓값 정리에 따라 $|z|\le 1$에서 $q\equiv 1.$

유수 정리에 따라

$$\sum_{k=0}^{2022}\int_{|z|=1}\frac{q(z)}{z^k}dz=\int_{|z|=1}\frac{1}{z}dz=2\pi i.$$

5. $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ \frac{dz}{iz}=d\theta,\ \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{2+z+z^{-1}}{4}.$

유수 정리(코시적분공식)와 코시-구르사 정리에 따라

$$\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int_{|z|=1}f(z)\cdot\frac{2+z+z^{-1}}{4}\cdot\frac{1}{iz}\,dz$$
$$=\frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{2f(z)}{z}+f(z)+\frac{f(z)}{z^2}\,dz$$
$$=\frac{1}{4i}\cdot 2\pi i(2f(0)+0+f'(0))$$
$$=4\pi.$$

6. $z=e^{it}=\cos t+i\sin t,\ \cos t=\frac{z+z^{-1}}{2},\ \sin t=\frac{z-z^{-1}}{2i},\ dz=izdt.$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2-(\cos t+\sin t)}\,dt=\int_{|z|=1}\frac{2}{2iz\left(2-\frac{z+z^{-1}}{2}-\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\,dz$$
$$=\int_{|z|=1}\frac{-1+i}{z^2-2(1+i)z+i}\,dz.$$

$\therefore\ f(z)=z^2-2(1+i)z+i.$

$f(z)=0\Leftrightarrow z=1+i\pm\sqrt{(1+i)^2-i}=1+i\pm e^{\frac{\pi}{4}i}.$

$z_1=1+i-e^{\frac{\pi}{4}i},\ z_2=1+i+e^{\frac{\pi}{4}i}$라 하면 $f(z)=(z-z_1)(z-z_2).$

$z_1\in\mathrm{int}\,C,\ z_2\notin\mathrm{int}\,C.$

유수 정리에 따라

$$\int_C\frac{-1+i}{f(z)}dz=2\pi i\cdot(-1+i)\cdot\left(\frac{1}{z_2-z_1}\right)$$
$$=2\pi i\frac{-1+i}{-2e^{\frac{\pi}{4}i}}$$
$$=-\pi i\frac{(-1+i)\sqrt{2}}{1+i}=\sqrt{2}\pi.$$

7. $|z|\le 2$에서 $z^3,\ 3z+1$은 해석적이고 $|z|=2$위에서

$|3z+1|\le 7<8=|z|^3$이므로 Rouche 정리에 따라

C내부에 $z^3+3z+1=0$의 모든 근 있다. $f(z)=\frac{z^4}{z^3+3z+1}.$

$$\int_C\frac{z^4}{z^3+3z+1}dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),\,0\right)=2\pi i\cdot\frac{-6}{2!}=-6\pi i.$$

8. $f=u+iv,\ f^2=(u^2-v^2)+i(2uv).\ z=e^{it}=\cos t+i\sin t,\ dz=ie^{it}dt.$

유수 정리에 따라

$$\pi=2\pi i\{f(0)\}^2=\int_{|z|=1}\frac{\{f(z)\}^2}{z}dz$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{\{f(e^{it})\}^2}{e^{it}}ie^{it}dt$$
$$=i\int_0^{2\pi}(u^2-v^2)dt-2\int_0^{2\pi}u(e^{it})v(e^{it})dt.$$

$\therefore$ 구하는 값 $-\frac{\pi}{2}.$

9. 코시적분공식(유수정리)에 따라

$$\int_{|z|=1}\frac{z^2}{2i+4z}dz=\int_{|z|=1}\frac{z^2}{4\left(z+\frac{i}{2}\right)}\,dz$$
$$=2\pi i\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{i}{2}\right)^2=-\frac{\pi i}{8}.$$

10. $|z|=2$ 위에서 $z\bar{z}=|z|^2=4,\ \bar{z}=\frac{4}{z}.$

유수 정리에 따라

$$\int_{|z|=2}(x-yi)\,dz=\int_{|z|=2}\bar{z}dz=\int_{|z|=2}\frac{4}{z}dz=4\cdot 2\pi i=8\pi i.$$

11. 코시리만 방정식에 따라 $u_x = v_y = -e^{-x}\cos y$,

$f(0)=1$, $u_y = -v_x$ 이므로 $u = e^{-x}\cos y$.

$f(z) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y = e^{-x}\cdot e^{-iy} = e^{-z}$.

유수 정리에 따라

$$\int_{|z|=2}\frac{z}{f(z)+i}dz = \int_{|z|=2}\frac{z}{e^{-z}+i}dz$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{\left(-\frac{\pi}{2}i\right)}{e^{\frac{\pi}{2}i}} = \pi^2 i.$$

12. $z = e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, $\dfrac{dz}{iz} = dt$.

유수 정리에 따라

$$\int_0^{2\pi}\frac{3\sin(e^{it})}{5+4\cos(t)}\,dt = \int_{|z|=1}\frac{3\sin(z)}{5+2(z+z^{-1})}\frac{1}{iz}dz$$

$$= \int_{|z|=1}\frac{-3i\sin z}{2z^2+5z+2}\,dz$$

$$= \int_{|z|=1}\frac{-3i\sin z}{(2z+1)(z+2)}\,dz$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-3i\sin(-\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}} = -2\pi\sin\frac{1}{2}.$$

13. $z\bar{z} = |z|^2 = r^2$, $\bar{z} = \dfrac{r^2}{z}$. 유수 정리와 코시-구르사 정리에 따라

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{r^2}{2z}+\frac{z}{2}dz = \frac{1}{2}r^2 = f(r).$$

$$\int_0^1\frac{r^2}{2}dr = \frac{1}{6}.$$

14. $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = (-2)Res[f(z),-2]+(-1)Res[f(z),-i]$

$$= 3 - \left.\frac{\cos z}{z^3(z-i)}\right|_{z=-i}$$

$$= 3 - \frac{e^{-1}+e}{4}.$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)(1-z^2+z^4-\cdots),\ 0<|z|<1.$$

15. C 위에서 $|f_n(z)| = \dfrac{|z|^{2n}}{n!\,|z-i|^4} \le \dfrac{5^n}{n!} := M_n$.

$\sum M_n$은 비판정에 따라 수렴하므로 바이어슈트라스 M-판정에 따라

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)$는 C 위에서 균등수렴.

$$S = \int_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!(z-i)^4}\,dz$$

$$= \int_C\frac{1}{(z-i)^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\,dz$$

$$= \int_C\frac{e^{z^2}}{(z-i)^4}\,dz$$

$$= -\frac{4\pi}{3e}\ (\because\ \text{코시적분공식}).$$

16. $Res[f(z),i] = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\lim_{z\to i}\left[(z-i)^n f(z)\right]^{(n-1)} = -i2^{1-2n}\binom{2n-2}{n-1}$.

$g(n) = 2^{1-2n}$.

$C_R : |z| = R > 1$, $\mathrm{Im}\,z > 0$일 때,

유수정리에 따라 $\displaystyle\int_{-R}^{R}f_3(x)dx + \int_{C_R}f_3(z)dz = 2\pi i\,Res[f_3(z),i) = \frac{3\pi}{8}$.

$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\left|\int_{C_R}f_3(z)dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{(R^2-1)^3} = 0$. f_3는 우함수이므로

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_3(x)dx = \mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}f_3(x)dx = \frac{3\pi}{8}.$$

17. $L : L(t) = t$, $-1\le t\le 1$, $C' = C+L$, $C = C'-L$.

$$\int_{C'}ze^z dz = \int_C ze^z dz + \int_L ze^z dz.$$

$$\int_L ze^z dz = \int_{-1}^{1}xe^x dx = \frac{2}{e}.$$

그린 정리 적용.

$$\int_{C'}2\overline{z}dz = \int_{C'}2(x-iy)(dx+idy) = \int_{C'}2(x-iy)dx+(2xi+2y)dy$$

$$= \iint_{\mathrm{int}(C')\cup\mathrm{b}(C')}4idxdy = 4i\times(C'\ \text{내부의 넓이})$$

$$(C'\ \text{내부의 넓이}) = \int_{C'}-ydx = \int_{C'}xdy = \frac{1}{2}\int_{C'}-ydx+xdy$$

$$= \int_0^{\pi}-\sin^3\theta(3\cos^2\theta(-\sin\theta))d\theta + \int_{-1}^{1}0$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16}\pi.$$

그러므로 구하는 값 $\dfrac{3}{4}\pi i - \dfrac{2}{e}$.

18. 자연수 k일 때 $0<|z-ki|<1$이면 $z=ki$에서 해석적인 h_k에 대해

$f(z) = \dfrac{1/k^2}{(z-ki)} + h_k(z)$이므로

$0 < \left|z - \dfrac{(1-k)i}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$이면 $g(z) = f(i-2z) = \dfrac{-1/2k^2}{z-\frac{(1-k)i}{2}} + h_k(i-2z)$.

f는 $z=-i$에서 해석적이므로 $\mathrm{Res}(f(z)g(z),-i) = -\dfrac{1}{18}$.

$\mathrm{Res}(g(z),0) = -\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{Res}\left(g(z), -\dfrac{1}{2}i\right) = -\dfrac{1}{8}$이므로

유수정리에 따라 $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{4}}g(z)\,dz = -\frac{5\pi i}{4}$.

[미분기하학]

<곡선>

1. $B' = -\tau N$, $\| B' \| \| N \| \cos\pi = B' \cdot N = -\tau$. $\therefore$ $\tau = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\beta' = \left(\kappa + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)N$ 이므로

$\sqrt{3}t = \int_0^t \kappa + \frac{2\sqrt{3}}{3}\, ds$, $\sqrt{3} = \kappa + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\kappa = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $(\sqrt{3}, 0, 0) = \alpha(t)$, $t = 0$, $a = \sqrt{3}$.

$\alpha' = (\sqrt{3}\sinh t, \sqrt{3}\cosh t, b)|_{t=0} = (0, \sqrt{3}, b)$.

$\sqrt{6} = \sqrt{b^2 + 3}$, $b = \sqrt{3}$.

$s = \int_0^t \sqrt{6}\cosh t\, dt = \sqrt{6}\sinh t$ $(\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t)$

$2\sqrt{3} = \sqrt{6}\sinh t$, $\sinh t = \sqrt{2}$, $\cosh t = \sqrt{3}$.

$\beta(s) = \alpha(t(s)) = (\sqrt{3}\cos(t(s)), \sqrt{3}\sinh t(t(s)), \sqrt{2}t(s))$

$= (3, \sqrt{6}, \sqrt{3}t(s))$.

구하는 값 3.

3. $\frac{\tau}{\kappa} = 1 = \cot\theta$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $u = \cos\theta T_\alpha + \sin\theta B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(T+B)$.

$\beta' = T_\alpha + 2B_\alpha$, $T_\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}(T_\alpha + 2B_\alpha)$.

$\beta'' = \kappa N_\alpha - 2\tau N_\alpha = -\kappa N_\alpha$.

$\langle T_\beta, u\rangle = k \in \mathbb{R}$ 라 하면 $\langle T_\alpha, u\rangle + 2\langle B_\alpha, u\rangle = \sqrt{5}k$.

양변 미분하면 $0 = \langle \kappa N_\alpha, u\rangle - 2\langle \tau N_\alpha, u\rangle = -\kappa\langle N_\alpha, u\rangle$, $\langle N_\alpha, u\rangle = 0$.

$(\langle T_\alpha, u\rangle)' = \langle N_\alpha, u\rangle = 0$이므로 $\langle T_\alpha, u\rangle$는 상수이다.

$a = \langle u, T_\beta\rangle = \left\langle u, \frac{1}{\sqrt{5}}(T_\alpha + 2B_\alpha)\right\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$b^2 = 1 - a^2 = \frac{1}{10}$, 구하는 값 $\frac{4}{5}$.

4. $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$라 하자. $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$, $T(t) \cdot u = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\theta$이므로

α는 주면 나선이다. $u = \cos\theta T + \sin\theta B = \frac{1}{\sqrt{2}}T \pm \frac{1}{\sqrt{2}}B$, 양변미분하면

$\vec{0} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}}N \mp \frac{\tau}{\sqrt{2}}N$, $\kappa = \mp\tau$, $\tau(0) = \pm\frac{1}{2}$.

5. $T \cdot u = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 α는 주면나선.

$u = \cos\frac{\pi}{6}T + \sin\frac{\pi}{6}B = \frac{1}{2}(\sqrt{3}T + B)$, $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\tau = \sqrt{3}\kappa$.

$\beta' = \kappa N + (-\kappa T + \tau B) - \tau N = -\kappa T + \kappa(1-\sqrt{3})N + \sqrt{3}\kappa B$.

$\int_0^4 \frac{\|\beta'(t)\|}{\kappa_\alpha(t)}\, dt = \int_0^4 \sqrt{1 + (1-\sqrt{3})^2 + 3}\, dt = 4\sqrt{8 - 2\sqrt{3}}$.

6. $u = \frac{\gamma}{\|\gamma\|} = \gamma(s)$, $B \cdot \gamma = 0 = B \cdot u$, 양변 미분하면

$-\tau N \cdot \gamma + B \cdot T = 0$, $\tau(N \cdot \gamma) = 0$.

$1 = \|\gamma\|^2 = \gamma \cdot \gamma$, 양변 미분하면 $0 = 2\gamma \cdot T$, $\gamma \cdot T = 0$, 양변 미분하면

$T \cdot T + \gamma \cdot (\kappa N)$, $\kappa(\gamma \cdot N) = -1$. $\therefore$ $\tau = 0$, $\kappa = 1$.

7. $B \cdot u = \frac{3}{5}$, 양변 미분하면 $-\tau N \cdot u = 0$, $N \cdot u = 0$.

단위벡터 u를 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저 $\{T, N, B\}$로 나타내면

$u = \mathrm{proj}_T u + (u \cdot N)N + (u \cdot B)B = \pm\frac{4}{5}T + \frac{3}{5}B$.

양변 미분하면 $\vec{0} = \pm\frac{4}{5}\kappa N - \frac{3}{5}\tau N$, $\kappa > 0$, $\tau > 0$이므로 $\frac{4}{5}\kappa = \frac{3}{5}\tau$, $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{4}{3}$.

$\kappa_\sigma(s) = \frac{\|\sigma' \times \sigma''\|}{\|\sigma'\|^3} = \frac{\|-\tau N \times (-\tau' N + \kappa\tau T - \tau^2 B)\|}{\|-\tau N\|^3}$

$= \sqrt{\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2 + 1} = \frac{5}{4}$.

8. $\beta(0) = \alpha(0)$, $\beta' = T + \kappa_\alpha B$,

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\alpha'(0) \cdot \beta'(0)}{\|\alpha'(0)\|\|\beta'(0)\|} = \frac{T \cdot (T + \kappa_\alpha B)}{\sqrt{1+\kappa_\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa_\alpha^2}}$.

$\therefore$ $\kappa_\alpha = \sqrt{3}$.

$\beta'' = \kappa_\alpha N + \kappa_\alpha' B - \kappa_\alpha\tau_\alpha N = (\kappa_\alpha - \kappa_\alpha\tau_\alpha)N + \kappa_\alpha' B$,

$\beta''(0) = -4\sqrt{3}N + \kappa_\alpha' B$.

$\beta'(0) \cdot \beta''(0) = 0 = \kappa_\alpha(0) \cdot \kappa_\alpha'(0)$.

$\kappa_\beta(0) = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\|\beta''\|}{\|\beta'\|^2} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

9. $-\tau N(t)e_3 = 0$, $\tau(N \cdot e_3) = 0$. $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$로 놓으면

$1 = \|\beta\|^2$, $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = 1$, $\frac{1}{4} = z(t)$.

$\beta : x(t)^2 + y(t)^2 = \frac{15}{16}$, $z = \frac{1}{4}$.

$\therefore$ $\kappa = \sqrt{\frac{16}{15}}$, $\tau = 0$.

10. $\|N(t) \times (0,0,1)\| = 1 \cdot 1 \cdot \sin\theta = \left\|\frac{3}{5}T - \frac{4}{5}B\right\| = 1$.

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$N(t) \cdot (0,0,1) = 1 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

$e_3 = (e_3 \cdot T)T + (e_3 \cdot B)B$이므로

$\frac{3}{5}T - \frac{4}{5}B = N \times \{(e_3 \cdot T)T + (e_3 \cdot B)B\} = -(e_3 \cdot T)B + (e_3 \cdot B)T$.

$\therefore$ $e_3 = \frac{4}{5}T + \frac{3}{5}B$. 양변 미분하면 $\vec{0} = \left(\frac{4}{5}\kappa - \frac{3}{5}\tau\right)N$, $\kappa = \frac{3}{4}\tau$.

$10 = \|N'\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \tau \cdot \frac{5}{4}$, $\tau = 8$, $\kappa = 6$.

$\therefore$ $\kappa + \tau = 14$.

11. $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\|\, dt = \int_0^t \sec t\, dt = \ln(\sec t + \tan t)$, $s\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\sqrt{3}$.

12. $\beta' = T + B$, $\|\beta'\| = \sqrt{2}$, $\beta'' = (\kappa - \tau)N$, $\beta' \times \beta'' = (\kappa - \tau)(B - T)$.

$\beta''' = (\kappa' - \tau')N - (\kappa - \tau)(-\kappa T + \tau B)$.

$\kappa_\beta(1) = \frac{|\kappa - \tau|}{2}$, $\tau_\beta(1) = \frac{\kappa + \tau}{2}$. 구하는 값 $\frac{\kappa^2 - \tau^2}{4} = \frac{3}{4}$.

13. $36=\kappa N\cdot\kappa N=\kappa^2,\ \kappa=6.\ u=\frac{1}{3}(1,2,2)$라 하자.

$T\cdot u=\frac{1}{2}$, 양변 미분하면 $(\kappa N)\cdot u=0,\ N\cdot u=0.$

$\mathbb{R}^3$의 정규직교기저 $\{T,N,B\}$이고, u는 단위벡터이므로

$u=(u\cdot T)T+(u\cdot N)N+(u\cdot B)B=\frac{1}{2}T\pm\frac{\sqrt{3}}{2}B.$

양변 미분하면 $\vec{0}=\frac{1}{2}\kappa N\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\tau N,\ \kappa>0$이므로 $\kappa=\sqrt{3}\tau.$

$\therefore\ \tau=2\sqrt{3}.$

14. 양변 미분하면 $T+3(-\kappa T+\tau B)-4\tau N=\vec{0},\ \kappa=\frac{1}{3},\ \tau=0.$

$r=\|c(t)-P_0\|=\|3N+4B\|=5.$

15. $\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}=\frac{1}{6\sqrt{2}},\ \rho=6\sqrt{2}.$

$T//(2,1,-1),\ B//\alpha'(0)\times\alpha''(0)//(-1,1,-1).$

$N=B\times T//(0,-3,-3)//(0,-1,-1).$

$q=\alpha(0)+\frac{1}{\kappa}N=(1,1,0)+6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-1)=(1,-5,-6).$

16. $\alpha(t)=(t,\cosh t,\sinh t),\ \alpha(0)=(0,1,0)=P.$

$\alpha'=(1,0,1),\ \alpha''=(0,1,0),\ \alpha'\times\alpha''=(-1,0,1),\ \alpha'''=(0,0,1).$

$\kappa=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\ \tau=\frac{1}{2}.$

17. $\alpha'=6(1,2,2),\ \mathrm{v}=\|\alpha'\|=18,\ \mathrm{v}'=6.$

$\alpha''=(6,6,0),\ \alpha'\times\alpha''=36(-2,2,-1),\ \kappa=\frac{1}{54}.$

$\alpha'=\mathrm{v}T,\ \alpha''=\mathrm{v}'T+\mathrm{v}T'=\mathrm{v}'T+\mathrm{v}^2\kappa N=6T+6N,$ 구하는 값 12.

18. $S_2:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4},\ x=\frac{1+\cos t}{2},\ y=\frac{1}{2}\sin t.$

$z=\sqrt{1-x}=\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}=\sin\frac{t}{2}.$

$\alpha(t)=\left(\frac{1+\cos t}{2},\frac{1}{2}\sin t,\sin\frac{t}{2}\right),\ \alpha(\pi)=(0,0,1).$

$\alpha'=(0,-\frac{1}{2},0),\ \alpha''=(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}),\ \alpha'\times\alpha''=\frac{1}{8}(1,0,2),\ \alpha'''=(0,\frac{1}{2},0).$

$\kappa=\frac{1/8\cdot\sqrt{5}}{1/8}=\sqrt{5},\ \tau=0.$

19. $\alpha'=(3-3t^2,6t,3+3t^2),\ \alpha''=(-6t,6,6t),\ \alpha'''=(-6,0,6).$

$\alpha'\times\alpha''=18(t^2-1,-2t,t^2+1)//(0,1,-1)$이므로 $t=1,\ p=(2,3,4).$

$\alpha'=(0,6,6),\ \alpha''=(-6,0,6),\ \alpha'\times\alpha''=18(0,-2,2).$

$\therefore\ \tau=\frac{1}{12}.$

20. $\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4},1\right).\ \alpha'=(1,\sqrt{3},0),\ T=\frac{1}{2}(1,\sqrt{3},0).$

$\alpha''=(0,2,0),\ \alpha'\times\alpha''=(0,0,2),\ B=(0,0,1).$

$\kappa=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\ N=B\times T=\frac{1}{2}(-\sqrt{3},1,0).$

$\therefore\ \alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{\kappa}N=\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3},\frac{11}{4},1\right),\ \frac{1}{\kappa}=4.$

21. 양변 B내적하면 $-\frac{4}{5}=(e_3\times N)\cdot B=e_3\cdot(N\times B)=e_3\cdot T.$

양변 T내적하면 $\frac{3}{5}=(e_3\times N)\cdot T=-e_3\cdot B.$

단위벡터 $e_3=-\frac{4}{5}T-\frac{3}{5}B$라 쓸 수 있다.

양변 미분하면 $\vec{0}=-\frac{4}{5}(\kappa N)+\frac{3}{5}(\tau N),\ 4\kappa=3\tau,\ \frac{\tau}{\kappa}=\frac{4}{3}.$

22. $\frac{d}{dt}\|\alpha'\|^2=\frac{d}{dt}\langle\alpha',\alpha'\rangle=2\langle\alpha',\alpha''\rangle=0$이므로 $\|\alpha'\|$은 상수이다.

$\therefore\ \|\alpha'(t)\|=\|\alpha'(0)\|=3.\ \int_1^3 3\,dt=6.$

23. 양변 x에 관하여 미분하면 $3x^2+3y^2y'=4xy^2+4x^2yy'$이므로

A에서 $3+3y'=4+4y',\ y'=-1.$

양변 x에 관하여 미분하면

$6x+6y(y')^2+3y^2y''=4y^2+8xyy'+8xyy'+4x^2(y')^2+4x^2yy''$이므로

A에서 $6+6+3y''=4-8-8+4+4y'',\ y''=20.$

$\therefore\ \kappa=\frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+(y')^2}\right)^3}=\frac{20}{2\sqrt{2}}=5\sqrt{2}.$

24. $\beta'=A\alpha'=AT,\ \beta''=AT'=A\kappa N=\kappa AN.$

$\beta'\times\beta''=\kappa(AT\times AN),\ \beta'''=A\kappa(-\kappa T+\tau_1 B)=-\kappa^2AT+\kappa\tau_1AB.$

$AT=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ AN=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ B=T\times N=(-1,0,0),\ AB=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}.$

$$\tau_2=\frac{\langle\beta'\times\beta'',\beta'''\rangle}{\|\beta'\times\beta''\|^2}=\frac{\kappa^2\tau_1(AT\times AN)\cdot AB}{\kappa^2\|AT\times AN\|^2}$$
$$=\frac{\tau_1(AT\times AN)\cdot AB}{\|AT\times AN\|^2}$$
$$=\frac{\tau_1\times2}{2}=\tau_1.$$

$\therefore\ \frac{\tau_2}{\tau_1}=1.$

25. $x=r\cos\theta=(2-\sin\theta)\cos\theta=2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta,$

$y=r\sin\theta=(2-\sin\theta)\sin\theta=2\sin\theta-\sin^2\theta.$

$\theta=0$일 때 $x=2,\ y=0.$

$x'=-2\sin\theta-\cos2\theta=-1,\ x''=-2\cos\theta+2\sin2\theta=-2.$

$y'=2\cos\theta-\sin2\theta=2,\ y''=-2\sin\theta-2\cos2\theta=-2.$

$\kappa=\frac{|x''y'-x'y''|}{\left(\sqrt{(x')^2+(y')^2}\right)^3}=\frac{|-4-2|}{5\sqrt{5}}=\frac{6}{5\sqrt{5}}.$

26. $\frac{\tau}{\kappa}=\frac{\langle\gamma'\times\gamma'',\gamma'''\rangle}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2}\cdot\frac{\|\gamma'\|^3}{\|\gamma'\times\gamma''\|}=\frac{a\left(\frac{1}{4}+4a^2t^2+\frac{t^4}{4}\right)^{3/2}}{\left(a^2t^4+\frac{t^2}{4}+a^2\right)^{3/2}}$가 상수

$\Leftrightarrow\ \frac{\frac{1}{4}}{a^2}=\frac{4a^2}{\frac{1}{4}},\ a^4=\frac{1}{64},\ a=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

27. $\alpha,\ \beta$는 서로 합동이므로 모든 $t\in\mathbb{R}$에 대하여

$\|\alpha'\|^2=9a^2t^4+8t^2+2=18t^4+8t^2+a^2=\|\beta'\|^2,\ a=\sqrt{2}.$

F는 등장사상이므로

b만큼의 평행이동 T_b와 직교변환 C에 대해 $F=T_b\circ C.$

$C=\left[T_\beta(0)\ N_\beta(0)\ B_\beta(0)\right]\begin{bmatrix}T_\alpha(0)\\N_\alpha(0)\\B_\alpha(0)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&\sqrt{2}\\-\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0\\1&-1&-\sqrt{2}\end{bmatrix}.$

$b=\beta(0)-C(\alpha(0))=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$이므로

$g(x,y,z)=-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}+1.$

<곡면>

1. $M: X(u,v)=(\sinh u\cos v, u, \sinh u\sin v)$.

$X_u=(\cosh u\cos v, 1, \cosh u\sin v)$, $X_v=(-\sinh u\sin v, 0, \sinh u\cos v)$.

$E=1+\cosh^2 u$, $F=0$, $G=\sinh^2 u$.

$X_u\times X_v=(\sinh u\cos v, \sinh u\cosh u, \sinh u\sin v)$,

$U=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cosh^2 u}}(\cos v, -\cosh u, \sin v)$.

$X_{uu}=(\sinh u\cos v, 0, \sinh u\sin v)$,

$X_{uv}=(-\cosh u\sin v, 0, \cosh u\cos v)$,

$X_{vv}=(-\sinh u\cos v, 0, -\sinh u\sin v)$.

$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-1}{(1+\cosh^2 u)^2}=-\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \cosh u=\sqrt{2}$, $\sinh u=1$.

$H=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

2. β의 프레네 세레틀 $\{T, N, B\}$라 하자.

$\mathbb{R}^3$의 정규직교기저 $\{U_1, T, U_1\times T\}$, $\{U_2, T, U_2\times T\}$.

$T'=(T'\cdot U_1)U_1+(T'\cdot U_1\times T)U_1\times T=\kappa_{n_1}U_1+\kappa_{g_1}U_1\times T$

$=(T'\cdot U_2)U_2+(T'\cdot U_2\times T)U_2\times T=\kappa_{n_2}U_2+\kappa_{g_2}U_2\times T$.

$\kappa_{g_1}=\kappa BU_1=\dfrac{1}{1}\cdot(0,0,1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

$\mathbb{R}^3$공간에서 $U_1\perp U_2$이므로 $U_2\times T=\pm U_1$ $(U_2\times T // U_1)$

$\kappa_{g_2}=T'\cdot U_2\times T=T'\cdot \pm U_1=\pm\kappa_{n_1}$이므로

$\kappa_{g_2}^2=\kappa_{n_1}^2=1-\kappa_{g_1}^2=\dfrac{4}{5}$, $|\kappa_{g_2}|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. ($\kappa B\cdot U_1\times T$로 구해도 됨/기저변환)

3. M의 patch $X(u,v)=(u,v,uv)$.

$X_u=(1,0,v)$, $X_v=(0,1,u)$, $E=1+v^2$, $F=uv$, $G=1+u^2$.

$X_u\times X_v=(-v,-u,1)$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-v,-u,1)$.

$X_{uu}=\vec{0}=X_{vv}$, $X_{uv}=(0,0,1)$.

$L=0$, $M=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$, $N=0$.

$-1=K_p=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}$, $u^2+v^2=0$, $u=v=0$.

$p=X(0,0)=(0,0,0)$.

p에서 $E=1$, $F=0$, $G=1$, $L=0$, $M=1$, $N=0$.

$w=(2,3,0)=2X_u+3X_v$이므로 $\kappa_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{0+12+0}{4+0+9}=\dfrac{12}{13}$.

4. $\alpha'(0)\in T_{\alpha(0)}M\cap T_{\alpha(0)}P$이므로

$\alpha'(0)//\nabla(x^2+y^3-z)|_{(1,1,2)}\times\nabla(x-2y+3z)|_{(1,1,2)}$

$=(2,3,-1)\times(1,-2,3)=(7,-7,-7)//(1,-1,-1)$.

$M: X(u,v)=(u,v,u^2+v^3)$, $u=v=1$일 때 $X(u,v)=\alpha(0)=(1,1,2)$.

$X_u=(1,0,2)$, $X_v=(0,1,3)$, $E=5$, $F=6$, $G=10$.

$X_u\times X_v=(-2,-3,1)$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-2,-3,1)$.

$X_{uu}=(0,0,2)$, $X_{uv}=(0,0,0)$, $X_{vv}=(0,0,6)$,

$L=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $M=0$, $N=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$.

$(1,-1,-1)=X_u-X_v$이므로 $\kappa_n=\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{14}}+0+\frac{6}{\sqrt{14}}}{5-12+10}=\dfrac{8}{3\sqrt{14}}$.

5. C의 프레네-세레틀 $\{T, N, B\}$라 하자. $U_1\times U_2 // T$이다.

$\|\kappa_1U_2-\kappa_2U_1\|=\|(T'\cdot U_1)U_2-(T'\cdot U_2)U_1\|$

$=\|(\kappa N\cdot U_1)U_2-(\kappa N\cdot U_2)U_1\|$

$=\kappa\|\langle N\cdot U_1\rangle U_2-\langle N\cdot U_2\rangle U_1\|$

$=\kappa\|N\times(U_2\times U_1)\|$ (벡터 삼중적)

$=\kappa\|N\|\|U_2\times U_1\|\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}$

$=\kappa\|U_1\times U_2\|$

$=2\cdot1\cdot1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

6. $X(0,0)=p=(0,0,0)$.

$X_u=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$, $X_v=\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, $X_u\times X_v=(0,0,-\dfrac{1}{2})$, $U=(0,0,-1)$.

$X_{uu}=\vec{0}$, $X_{uv}=(0,0,1)$, $X_{vv}=(0,0,0)$.

$L=0$, $M=-1$, $N=0$, $E=\dfrac{1}{2}$, $F=0$, $G=\dfrac{1}{2}$.

$S=\begin{bmatrix}E&F\\F&G\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}L&M\\M&N\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\-2&0\end{pmatrix}$의 고유치 ±2, 고유벡터 $(1,\mp1)$이므로

주곡률 $\kappa_1=2$, $\kappa_2=-2$, 주방향 $v_1=X_u-X_v$, $v_2=X_u+X_v$.

v_1과 점근방향 단위벡터 w가 이루는 각 θ라 할 때, 오일러 공식에 따라

$0=\kappa_n(w)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta$, $\cos\theta=\pm\sin\theta$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi$.

$\therefore$ $w=\langle w,v_1\rangle v_1+\langle w,v_2\rangle v_2=\cos\theta v_1+\sin\theta v_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\pm v_1+v_2)$.

7. α의 프레네-세레 틀 T, N, B라 하고 곡률을 κ, 열률을 τ라 하자.

α는 반지름 $\sqrt{3}$인 평면 곡선이므로 $\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\tau=0$.

$\{U_1, T, U_1\times T\}$, $\{U_2, T, U_2\times T\}$는 $\mathbb{R}^3$의 정규직교기저이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}N=T'=\langle T', U_1\rangle U_1+\langle T', U_1\times T\rangle(U_1\times T)$

$=\kappa_{n_1}U_1+\kappa_{g_1}U_1\times T$

$=\pm\dfrac{1}{2}U_1\pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(U_1\times T)$, ($N$과 U_1 사잇각을 생각)

$U_1=\langle U_1, U_2\rangle U_2+\langle U_1, T\rangle T+\langle U_1, U_2\times T\rangle(U_2\times T)$

$=\pm(U_2\times T)$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}N=T'=\langle T', U_2\rangle U_2+\langle T', U_2\times T\rangle(U_2\times T)$

$=\langle T', U_2\rangle U_2+\langle T', \pm U_1\rangle(U_2\times T)$

$=\pm\kappa_{g_1}U_2\pm\kappa_{n_1}(U_2\times T)$.

$\therefore$ $|\kappa_g|=|\kappa_{n_1}|=\dfrac{1}{2}$.

8. $\alpha(t)=(1+\cos t, \sin t, \sqrt{2-2\cos t})=(1+\cos t, \sin t, 2\sin\dfrac{t}{2})$.

$\alpha(\pi)=(0,0,2)=q$.

$\alpha'=(0,-1,0)$, $\alpha''=(1,0,-\dfrac{1}{2})$, $\alpha'\times\alpha''=(\dfrac{1}{2},0,1)$.

접촉평면 $(1,0,2)\cdot(x,y,z-2)=0$, $x+2z=4$.

구하는 값 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

9. S를 경계로 하는 M의 영역 R라 하자.

R은 폐원판과 위상동형이므로 $\chi(R)=1$.

경계를 따라 외각은 없다.

$K=\dfrac{-4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$, $\|X_u\times X_v\|=\sqrt{1+4u^2+4v^2}$.

가우스-보네 정리에 따라 $\iint_R KdM+\int_{\partial R}\kappa_g ds+\sum$외각$=2\pi\chi(R)$.

$$\int_C \kappa_g ds=2\pi-\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{-4}{(1+4r^2)^{3/2}}r\,dr\,d\theta=4\pi-\frac{2}{\sqrt{5}}\pi.$$

10. $M: X(u,v)=(1+\dfrac{u^2+v^2}{4},u,v)$, $X(0,2)=(2,0,2)=\alpha(0)$.

$X_u=(0,1,0)$, $X_v=(1,0,1)$, $X_u\times X_v=(1,0,-1)$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

$X_{uu}=(\dfrac{1}{2},0,0)$, $X_{uv}=\vec{0}$, $X_{vv}=(\dfrac{1}{2},0,0)$.

$L=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $M=0$, $N=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $E=1$, $F=0$, $G=2$.

$\alpha'(0)=(1,-2,1)=-2X_u+X_v$.

$$\kappa_N^M=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{\sqrt{2}+0+\frac{\sqrt{2}}{4}}{4+0+2}=\frac{5}{24}\sqrt{2}.$$

$U\cdot U_S=0$(수직, 직교, 사잇각 $\dfrac{\pi}{2}$)이므로 $|\kappa_g^S|=|\kappa_n^M|$.

$\kappa^2=(\kappa_n^S)^2+(\kappa_g^S)^2$로부터 $\kappa=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

11. $\chi(S)=4-6+2=0$. 외각은 없다.

S의 경계는 $z=0$일 때 $\alpha(t)=(\cos t,\sin t,0)$, $\kappa_\alpha=1$, $B_\alpha=(0,0,1)$.

$z=\sqrt{3}$일 때 $\beta(t)=(2\cos t,2\sin t,\sqrt{3})$, $\kappa_\beta=\dfrac{1}{2}$, $B_\beta=(0,0,1)$.

$\nabla(x^2+y^2-z^2)=(2x,2y-2z)$이므로

$U_\alpha=(\cos t,\sin t,0)$, $U_\beta=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(2\cos t,2\sin t,-\sqrt{3})$.

가우스-보네 정리에 따라 $\iint_S K\,dA+\int_{\partial S}\kappa_g\,ds+\sum$외각$=2\pi\chi(S)$.

$$\begin{aligned}\iint_S K\,dA&=-\int_{\partial S}\kappa_g ds\\&=-\int_0^{2\pi}\kappa_\alpha\cdot\langle B_\alpha,U_\alpha\rangle\times\|\alpha'(t)\|dt-\int_0^{2\pi}\kappa_\beta B_\beta U_\beta\|\beta'(t)\|dt\\&=0-2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)\cdot 2\\&=-\frac{2\sqrt{21}}{7}\pi.\end{aligned}$$

12. $\iint_S -2\,dA+\int_{\partial S}0\,ds+\left(3\cdot\pi-\sum\text{내각}\right)=2\pi(3-3+1)$.

$3\pi-\sum$내각$=2\pi+\dfrac{3}{4}\pi$, $\sum$내각$=\dfrac{\pi}{4}$.

13. S_1의 조각 $X(u,v)=(u,v,u^2+v^2+uv)$, $X(0,1)=(0,1,1)$ $(u=0,\ v=1)$.

$X_u=(1,0,1)$, $X_v=(0,1,2)$, $X_u\times X_v=(-1,-2,1)$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)$.

$X_{uu}=(0,0,2)$, $X_{uv}=(0,0,1)$, $X_{vv}=(0,0,2)$.

$L=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $M=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $N=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $E=2$, $F=2$, $G=5$.

$(-1,-2,1)\times\nabla(x+y+z-2)=(-3,2,1)=-3X_u+2X_v$.

$$\kappa_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{\frac{18}{\sqrt{6}}-\frac{12}{\sqrt{6}}+\frac{8}{\sqrt{6}}}{18-24+20}=\frac{14}{14\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

14. M의 매개변수표현 $X(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$.

$X_u=(1,0,2u)$, $X_v=(0,1,2v)$, $X_u\times X_v=(-2u,-2v,1)$,

$U=\dfrac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}(-2u,-2v,1)$.

$X_{uu}=(0,0,2)$, $X_{uv}=(0,0,0)$, $X_{vv}=(0,0,2)$.

$L=\dfrac{2}{\sqrt{\ }}$, $M=0$, $N=\dfrac{2}{\sqrt{\ }}$, $E=1+4u^2$, $F=4uv$, $G=1+4v^2$.

$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$.

$$\begin{aligned}\iint_R KdS&=\iint_R\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}\cdot\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,dudv\\&=\int_0^{2\pi}\int_1^2\frac{4}{(1+4r^2)^{3/2}}\cdot r\,dr\,d\theta\\&=2\pi\left[-(1+4r^2)^{-1/2}\right]_1^2=2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{17}}\right).\end{aligned}$$

15. R의 두 경계 $x^2+y^2=9$, $z=0$와 $x^2+y^2=25$, $z=4$의 매개변수표현

$\alpha(t)=(3\cos t,3\sin t,0)$ (반시계방향),

$\beta(t)=(5\cos t,-5\sin t,4)$ (시계방향).

$\alpha'=(-3s,3c,0)$, $\alpha''=(-3c,-3s,0)$, $\alpha'\times\alpha''=(0,0,9)$,

$\nabla(x^2+y^2-z^2-9)=(2x,2y,-2z)$, $U(\alpha(t))=(\cos t,\sin t,0)$이므로

$\kappa_{g_\alpha}=\kappa B\cdot U=0$.

$\beta'=(-5s,-5c,0)$, $\beta''=(-5c,5s,0)$, $\beta'\times\beta''=(0,0,-25)$,

$U(\beta(t))=\dfrac{1}{\sqrt{41}}(5c,5s,-4)$이므로

$\kappa_{g_\beta}=\dfrac{\langle\beta'\times\beta'',\,U(\beta(t))\rangle}{\|\beta'\|^3}=\dfrac{-100}{125\sqrt{41}}=\dfrac{-4}{5\sqrt{41}}$.

경계를 따라 (매끄러우므로) 외각은 없으며 $\chi(R)=4-6+2=0$.

가우스-보네 정리에 따라

$\iint_R K\,dM+\int_{\partial R}\kappa_g\,ds+\sum$외각$=2\pi\chi(R)$,

$$\begin{aligned}\iint_R K\,dM&=-\int_{\partial R}\kappa_g\,ds=-\int_\alpha\kappa_{g_\alpha}ds-\int_\beta\kappa_{g_\beta}ds\\&=-\int_\beta\kappa_{g_\beta}\,ds=-\int_0^{2\pi}\frac{4}{5\sqrt{41}}\cdot 5\,dt=\frac{-8}{\sqrt{41}}\pi.\end{aligned}$$

16. $\nabla(x^2+2y^2+z^2)=(2x,4y,2z)$, $\nabla(x^2+y^2-z)=(2x,2y,-1)$.

$$T//\begin{vmatrix} i & j & k\\ x & 2y & z\\ 2x & 2y & -1\end{vmatrix}=(-2y-2yz,x+2xz,-2xy)//(1,0,0).$$

$b>0$이므로 $x=0$.

$2y^2+z^2=3$, $y^2=z$. $0=z^2+2x-3=(z+3)(z-1)$.

$y^2=z=1$, $y=1$.

$\therefore p=(0,1,1)$.

17. $X(u,v)=(u,v,e^{(\ln u)(\ln v)})$, $e^{(\ln u)(\ln v)}=u^{\ln v}=v^{\ln u}$, $X(e,e)=(e,e,e)$.

$X_u=(1,0,(\ln v)u^{\ln v-1})=(1,0,1)$, $X_v=(0,1,(\ln v)v^{\ln u-1})=(0,1,1)$.

$(\nabla(x^{\ln y}-z)=(\ln y\cdot x^{\ln y-1},\ln x\cdot y^{\ln x-1},-1)=(1,1,-1))$

$X_u\times X_v=(-1,-1,1)//(1,1,-1)$.

접평면의 방정식 $0=(1,1,-1)\cdot(x-e,y-e,z-e)=x+y-z-e$.

$B+C+D=-e$.

18. $1=\cosh^2 t-\sinh^2 t=t+1$, $t=0$. $p=\alpha(0)=(1,0,1)$.

$\alpha'=(\sinh t,\cosh t,1)=(0,1,1)$, $\nabla(z-x^2+y^2)=(-2x,2y,1)=(-2,0,1)$.

$1=(0,1,1)\cdot(-2,0,1)=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\theta$.

$\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

19. $\gamma(t)=(\cosh t, \sinh t, \cosh t\sinh t=\dfrac{1}{2}\sinh 2t)$, $\gamma(0)=(1,0,0)=q$.

$\nabla(x^2-y^2-1)=(2x,-2y,0)=(2,0,0)$, 접평면 $x=1$.

$\gamma'=(s,c,\cosh 2t)=(0,1,1)$, $T=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

$\gamma''=(c,s,2\sinh 2t)=(1,0,0)$, $\gamma'\times\gamma''=(0,1,-1)$, $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.

$N=B\times T=(1,0,0)$, $\kappa=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$.

$\nabla(x^2-y^2)=(2x,-2y,0)$, $U_1=(1,0,0)$.

$\therefore\ \kappa_1=\kappa N\cdot U_1=\dfrac{1}{2}$.

$\nabla(z-xy)=(-y,-x,1)$, $U_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$.

$\therefore\ \kappa_2=\dfrac{\gamma''\cdot U_2}{\|\gamma'\|^2}=0$.

구하는 값 0.

20. $X_u=(\sinh u\cos v, \sinh u\sin v, 1)$, $X_v=(-\cosh u\sin v, \cosh u\cos v, 0)$.

$X_u\times X_v=(-\cosh u\cos v, -\cosh u\sin v, \cosh u\sinh u)$

$=\cosh u(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$,

$\|X_u\times X_v\|=\sqrt{EG-F^2}=\cosh^2 u$.

$U=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}(-\cos v, -\sin v, \sinh u)=\dfrac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$.

$X_{uu}=(\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, 0)$,

$X_{uv}=(-\sinh u\sin v, \sinh u\cos v, 0)$,

$X_{vv}=(-\cosh u\cos v, -\cosh u\sin v, 0)$.

(회전면의 조각이므로 "$F=M=0$" 일 것이다.)

$L=-1$, $M=0$, $N=1$, $E=\cosh^2 u$, $F=0$, $G=\cosh^2 u$.

$\therefore\ K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{L}{E}\dfrac{N}{G}=\dfrac{-1}{\cosh^4 u}$.

$$\iint_M K\,dM=\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\frac{-1}{\cosh^4 u}\cdot\cosh^2 u\,dv du$$

$=2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{-1}{\cosh^2 u}\,du$, ($\tanh u=\dfrac{\sinh u}{\cosh u}$ 의 부호는 $\sinh u$를 따른다.)

$=2\pi[-\tanh u]_{-1}^{1}=2\pi(\tanh(-1)-\tanh(1))$

$=2\pi\left(\dfrac{e^{-1}-e^1}{e^{-1}+e^1}-\dfrac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}\right)$

$=4\pi\dfrac{1-e^2}{1+e^2}$.

21. $X(u,v)=((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u)$, $-\dfrac{\pi}{2}<u<\dfrac{\pi}{2}$, $0\le v<2\pi$.

$X_u=(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)$,

$X_v=(-(2+\cos u)\sin v, (2+\cos u)\cos v, 0)$,

$X_u\times X_v=(-(2+\cos u)\cos u\cos v, -(2+\cos u)\cos v\sin v, (2+\cos u)\sin u)$.

$\|X_u\times X_v\|=2+\cos u=\sqrt{EG-F^2}$.

$$A=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{EG-F^2}\,dudv=2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2+\cos u\,du=4\pi(\pi+1).$$

$U=(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)$.

$X_{uu}=(-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u)$,

$X_{uv}=(\sin u\sin v, -\sin u\cos v, 0)$,

$X_{vv}=(-(2+\cos u)\cos v), -(2+\cos u)\sin v, 0)$.

$L=-1$, $M=0$, $N=-(2+\cos u)\cos u$,

$E=1$, $F=0$, $G=(2+\cos u)^2$.

$K=\dfrac{(2+\cos u)\cos u}{(2+\cos u)^2}=\dfrac{\cos u}{2+\cos u}$.

$$\iint_S K\,dM=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{2+\cos u}\cdot(2+\cos u)\,dudv=4\pi.$$

22. 조각 $X(u,v)=(u,v,uv+u)$, $X(1,1)=(1,1,2)$.

$X_u=(1,0,v+1)=(1,0,2)$, $X_v=(0,1,u)=(0,1,1)$,

$X_u\times X_v=(-2,-1,1)$, $U=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-2,-1,1)$.

$X_{uu}=(0,0,0)$, $X_{uv}=(0,0,1)$, $X_{vv}=\vec{0}$.

$L=0$, $M=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$, $N=0$, $E=5$, $F=2$, $G=2$.

영이 아닌 $w=aX_u+bX_v\in T_P(S)$ 방향 법곡률 $\kappa_n(w)$라 하면

$$\kappa_n(w)=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{6}}ab}{5a^2+4ab+2b^2}=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ or } b=0.$$

$a=0$일 때 접벡터가 X_v와 평행한 곡선과

$b=0$일 때 접벡터가 X_u와 평행한 곡선이 점근선이다.

$\alpha(u)=X(u,1)=(u,1,2u)$, $\beta(v)=X(1,v)=(1,v,v+1)$.

$(P+t(0,1,1)=(1,t+1,t+2),\ t\in\mathbb{R}.)$

23. S_1, S_2의 단위 법벡터를 각각 u_1, u_2라 하자.

C의 프레네 틀 T, N, B라 하자.

$T\perp u_1$, $T\perp u_2$이므로 $T/\!/u_1\times u_2$, 즉 $N\perp(u_1\times u_2)$.

$\lambda_1=\dfrac{1}{2}=\kappa(N\cdot u_1)$, $\lambda_2=\dfrac{1}{3}=\kappa(N\cdot u_2)$.

$N\times(u_1\times u_2)=(N\cdot u_2)u_1-(N\cdot u_1)u_2$, 양변에 κ곱하면

$\kappa(N\times(u_1\times u_2))=\dfrac{1}{3}u_1-\dfrac{1}{2}u_2$, 양변 노름 제곱하면

(좌변)$=\|\kappa(N\times(u_1\times u_2)\|^2$

$=\kappa^2\|N\|^2\cdot\|u_1\times u_2\|\sin^2\dfrac{\pi}{2}$

$=\kappa^2\|u_1\times u_2\|^2$

$=\kappa^2\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\kappa^2}{2}$.

(우변)$=\left\|\dfrac{1}{3}u_1-\dfrac{1}{2}u_2\right\|^2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}(u_1\cdot u_2)$

$=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\kappa^2=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{18}(13-6\sqrt{2})$.

24. 원점에서 평면 S_2까지의 거리 2이므로 교선 α는 반지름 $\sqrt{5}$인 원.

α의 곡률 $\kappa=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 법곡률 $\kappa_n=\pm\dfrac{1}{3}$이므로

$\kappa_g^2=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{45}$, $\kappa_g=\pm\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$.

$$\int_\alpha\kappa_g\,ds=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3\sqrt{5}}\,ds=\frac{2}{3\sqrt{5}}\times2\pi\sqrt{5}=\frac{4}{3}\pi.$$

25. $X(u,v)=(2\cos u, 2\sin u, v)$, $0\le u\le\dfrac{\pi}{2}$, $0\le v\le 2$.

$X_u=(-2s,2c,0)$, $X_v=(0,0,1)$, $E=4$, $F=0$, $G=1$

$\sqrt{EG-F^2}=2$.

$$\int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos u\cdot2\,dudv=8[\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}}=8.$$

26. X는 정칙이므로 $\|X_s\times X_t\|\neq0$, $EG-F^2=\|X_s\times X_t\|^2>0$.

$X_{tt}=\vec{0}$이므로 $N=0$, $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=\dfrac{-M^2}{EG-F^2}\le0$.

27. 주어진 곡선 위의 점 $\gamma(u)$와 z축 사이 거리 $f(u)=2\sqrt{1+u^2}$.
M의 매개변수표현 $X(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, 2u)$.
$C(u)=(2\sqrt{1+u^2}, 0, 2u)$, $C(0)=(2,0,0)$.
$C(0)$에서 곡률 $\kappa=\dfrac{1}{2}$.
경선 C는 $C(0)$에서 법단면이므로 $C(0)$에서 법곡률의 절댓값 $\dfrac{1}{2}$.
$C(0)$에서 경선방향 법곡률을 $\dfrac{1}{2}$라 하면
위선은 반지름 $f(0)=2$인 원이므로 법곡률 $-\dfrac{1}{2}$.
$\therefore$ 회전면 M의 주곡률 $\pm\dfrac{1}{2}$.
주곡률 $-\dfrac{1}{2}$에 대응하는 주벡터 $(0,1,0)$라 하면
오일러 공식에 따라 $\kappa_n(w)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5}=-\dfrac{3}{10}$.
절댓값 $\dfrac{3}{10}$.

28. 점 p에서의 법선이 l과 만나는 점을 q,
p에서 l에 내린 수선의 발 r라 하자.
반지름 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$인 원 C_p의 곡률 $\kappa=\sqrt{2}$.
$\kappa_n=\pm\kappa\dfrac{\overline{pr}}{\overline{pq}}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, $|\kappa_g|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
점 p에서 위선 C_p, 경선 α이다.
p에서 α의 법곡률 $\pm\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$이므로 $K=-\dfrac{6}{25}$.

29. $EG-F^2=\|S_x\|^2\cdot\|S_y\|^2-\langle S_x, S_y\rangle^2=\|S_x\times S_y\|^2=9$.
$L=\langle S_{xx}, \mathrm{N}\rangle=-\langle S_x, \mathrm{N}_x\rangle$,
$M=\langle S_{xy}, \mathrm{N}\rangle=-\langle S_x, \mathrm{N}_y\rangle=-\langle S_y, \mathrm{N}_x\rangle$,
$N=\langle S_{yy}, \mathrm{N}\rangle=-\langle S_y, \mathrm{N}_y\rangle$.
$LN-M^2=\langle (S_x\times S_y), (\mathrm{N}_x\times \mathrm{N}_y)\rangle=\langle 3\mathrm{N}, 12\mathrm{N}\rangle=36$.
$K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}=4$.

30. $X_u=(\cos v, \sin v, 0)$, $X_v=(-u\sin v, u\cos v, 1)$,
$U=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}(\sin v, -\cos v, u)$.
$X_{uu}=(0,0,0)$, $X_{vv}=(-u\cos v, -u\sin v, 0)$, $L=0=N$이므로
$(2,0,0)=X(2,0)$을 지나는 매개변수곡선 $X(u,0)$, $X(2,v)$는 점근곡선.
$X(u,0)$는 모선이므로 모선이 아닌 점근곡선
$\alpha(t)=X(2,t)=(2\cos t, 2\sin t, t)$.
$\alpha'(t)=(-2\sin t, 2\cos t, 1)$, $\alpha''(t)=(-2\cos t, -2\sin t, 0)$,
$(\alpha'\times\alpha'')(t)=(2\sin t, -2\cos t, 4)$.
$\left|\displaystyle\int_\alpha \kappa_g\, ds\right|=\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\kappa_t(t)\frac{ds}{dt}dt\right|=\left|\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\langle\alpha'\times\alpha'', U\rangle}{\|\alpha'\|^2}\,dt\right|=\dfrac{4\pi}{\sqrt{5}}$.

31. 경선 $S(x,0)=(x,0,f(x))$의 곡률 $\kappa(0)=2$.
경선은 측지선이므로 경선 방향 주곡률 ±2.
$S(0,0)$은 배꼽점이므로 $\kappa_1=\kappa_2$, $K=\kappa_1\cdot\kappa_2=\kappa_1^2=4$.
정사영 이용, $c(t)$의 측지곡률 $\kappa_g=\dfrac{1}{2}$.
$\kappa^2=\kappa_n^2+\kappa_g^2=4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{4}$, $\kappa=\dfrac{\sqrt{17}}{4}$.

32. 점 p에서 L에 내린 수선의 발을 r라 하자.
C_p는 반지름 $\overline{pr}=\dfrac{|-8+2|}{\sqrt{1+(-2)^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$이므로 $\kappa=\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.
점 p에서 법선이 L과 만나는 점 s라 하자.
법곡률 $\kappa_n=\pm\dfrac{1}{\overline{ps}}=\pm\dfrac{1}{3}$이므로 $|\kappa_g|=\dfrac{1}{6}$.
p를 지나는 위선의 법곡률 $-\dfrac{1}{3}$.
p를 지나는 경선 $\alpha(T)=(t, 4-t^2, 0)$이므로 경선의 법곡률 -2.
$K=\dfrac{2}{3}$.

33. p를 지나는 곡선 α는 반지름 $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$인 원이므로 $\kappa=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
p에서 α의 단위주법선벡터 N과 M위 단위법벡터 U의 사잇각은
$\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $\dfrac{3\pi}{4}$이므로 $|k_n|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$.
α는 위선이므로 $|k_1|=\dfrac{2}{3}$
경선 C는 측지선이고, 평면곡선이므로 $|k_2|=\dfrac{|x''|}{\{1+(x')^2\}^{3/2}}=\pi^2$.
$K(p)=k_1k_2=\dfrac{2\pi^2}{3}$.

34. $\beta\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=S\left(\sqrt{3}-2\cos\dfrac{\pi}{6}, 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=S(0,1)=\alpha(1)=p$.
점 p에서 α의 곡률 6.
p에서 곡면 S위의 곡선 β의 법곡률 κ_n, 측지곡률 κ_g라 하자.
$S_r=B$, $S_t=T$, $S_r\times S_t=N$, $U=N$.
$\beta'(\theta)=2\sin\theta S_r+2\cos\theta S_t$, $\beta'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=1\cdot S_r+\sqrt{3}\cdot S_t$.
점 p에서 S의 주요곡률 0(경선 S_r), 6(위선 S_t).
β', v_1 사잇각 ϕ, $\cos\phi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
β의 법곡률 $\kappa_n=6\cos^2\phi+0\cdot\sin^2\phi=\dfrac{9}{2}$.
$S_{rr}=\vec{0}$, $S_{rt}=B'=-\tau N=\vec{0}$, $S_{tt}=T'=\kappa N|_p=6N$.
$\beta'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\,T+B$, $\beta''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-T+18N+\sqrt{3}B$.
$\kappa_g=\dfrac{\|\beta'\times\beta''\|}{\|\beta'\|^3}\dfrac{\beta'\times\beta''}{\|\beta'\times\beta''\|}U=-\dfrac{1}{2}$.

35. $3\pi=x\equiv 3t-\sin t$, $t=\pi$, $y=3-\cos t=4$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t}{3-\cos t}\Bigg|_{t=\pi}=0$.
$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3\cos t-1}{(3-\cos t)^3}\Bigg|_{t=\pi}<0$이므로 p는 극댓점.
$\therefore$ α는 주곡선, 측지곡선.
$X(t,\theta)=(3t-\sin t, \cos\theta(3-\cos t), \sin\theta(3-\cos t))$, $0\le t, \theta\le 2\pi$.
$p=X(\pi,0)$에서
$E=16$, $F=0$, $G=16$, $L=1$, $M=0$, $N=4$이므로
$H(p)=\dfrac{EN+GK-2FM}{2(EG-F^2)}=\dfrac{5}{32}$.
(다른 설명)
p에서 경선 γ, 위선 α는 주곡선, 측지선이므로 $|\kappa_n|=\kappa_\gamma$, $\kappa_\alpha=\dfrac{1}{16}$, $\dfrac{1}{4}$.
(타원점 $\Rightarrow$ 부호 같다.)
$|H(p)|=\dfrac{\kappa_\gamma+\kappa_\alpha}{2}=\dfrac{5}{32}$.

[위상수학]

<u><집합 · 위상의기초 · 사상 · 거리공간></u>

1. $X/R=\{[x]\mid x\in\mathbb{R}\}=\{\overline{x}\mid x\in\mathbb{R}\}=\{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$, $|X/R|=3$.
   (단, $\overline{1}=\{1,4\}$, $\overline{2}=\{2,5\}$, $\overline{3}=\{3,6\}$.)
   $X^2=X\times X\supset R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),$
   $(1,4),(4,1),$
   $(2,5),(5,2),$
   $(3,6),(6,3)\}$.
   $\therefore\ |R|=12$.

2. X의 넓이 8, $\overline{A}=A$, $\mathrm{int}(A)=\{(x,y) : x+y\le 2,\ 0<x<2\}$.
   $b(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=(\{0\}\times[0,2])\cup([0,2]\times\{0\})$.
   $b(A)$의 길이 4.

3. $\varepsilon>0$일 때, $B_d(\vec{0},\varepsilon)=$(O중심 반지름 ε인 원)
   $p\neq(0,0)$일 때
   $B_d(p,\varepsilon)=\{q\in\mathbb{R}^2\mid d(p,q)<\varepsilon\}$
   $=\{p\}\cup\{q\in\mathbb{R}^2\mid p\neq q,\ \|p\|+\|q\|<\varepsilon\}$
   $=\{p\}$ ($0<\varepsilon<\|p\|$일 때, "가장 작은" 기저 개집합 찾기).
   $\therefore$ 원점 제외하면 이산위상 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$: 이산위상공간, $A'=\{(0,0)\}$.
   ① $p\in B$일 때, $d(p,B)=\inf\{d(p,q)\mid q\in B\}=d(p,p)=0$, $p\in C$.
   ② $p=(0,0)$일 때, $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $I_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in B$이고 $d(p,I_n)=\frac{2}{n}$이므로
   최대하게 $d(p,B)\le\frac{2}{n}$, n은 임의이므로 $d(p,B)=0$, $p\in C$.
   ③ $p\notin B\cup\{(0,0)\}$일 때, $d(p,B)=\inf\{\|p\|+\|q\|\mid q\in B\}=\|p\|>0$이므로
   $p\notin C$.
   그러므로 $C=B\cup\{(0,0)\}$. ($C=\overline{B}=B\cup B'=B\cup\{(0,0)\}$)

4. $f^{-1}(\{1\})=(-\infty,0)$, $f^{-1}(\{3\})=\{0\}$, $f^{-1}(\{2\})=(0,1]$, $f^{-1}(\{4\})=(1,\infty)$.
   $\mathfrak{I}_1=\{H\subset Y\mid f^{-1}(H)\in\mathfrak{I}_u\}$
   $=\{\varnothing, Y,\{1\},\{1,3\},\{2\},\{4\},\{1,2,3\},\{2,4\},\{1,3,4\},$
   $\{1,2\},\{1,4\},\{1,2,4\}\}$.
   $\mathfrak{I}_2=\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathfrak{I}_Y\}$
   $=\{\varnothing,\mathbb{R},(-\infty,0),\{0\},(-\infty,0],(-\infty,0]\cup(1,\infty)\}$.
   $\therefore\ |\mathfrak{I}_1|=12$, $|\mathfrak{I}_2|=6$.

5. (유도위상 "공식" 이용)
   $\overline{A}=f^{-1}(\overline{f(A)})=\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $\mathrm{int}(A)=f^{-1}[\mathrm{int}\{f(A^c)^c\}]=(-1,1)$.

6. $A=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm10\}\cup\{11,12,13,\cdots,100\}$.
   ① $x=\pm1,\pm2,\cdots,\pm10,\ -11,\ -12,\ \cdots,\ -100$일 때
   $x\in G\in\mathfrak{I}$이면 $\pm x\in G$이므로 $A\cap(G-\{x\})\supset\{-x\}\neq\varnothing$, $x\in A'$.
   ② $x=0,\ 11,\ 12,\ \cdots,\ 100$일 때
   $x\in G=\mathbb{Z}-\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm100\}\cup\{\pm x\}\in\mathfrak{I}$이므로
   $A\cap(G-\{x\})=\varnothing$, $x\notin A'$.
   ③ $|x|>100$일 때
   $x\in G=\mathbb{Z}-\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm100\}\in\mathfrak{I}$, $A\cap(G-\{x\})=\varnothing$, $x\notin A'$.
   그러므로 $A'=\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm10\}\cup\{-11,-12,\cdots,-100\}$, 110개.

7. $\mathfrak{I}$는 유도위상(약위상)이므로 $g:(\mathbb{R},\mathfrak{I})\to(\mathbb{R},T)$는 연속이다.
   $g\circ f:(\mathbb{R},T)\to(\mathbb{R},T)$, $g(f(x))=(x-[x]+k)^2$.
   f가 연속이 되도록 k를 정하면 g는 연속이므로 $g\circ f$는 연속이 된다.
   임의의 정수 n에 대하여
   우극한 $\lim_{x\to n^+}(x-[x]+k)^2=\lim_{x\to n^+}(x-n+k)^2=k^2$,
   좌극한 $\lim_{x\to n^-}(x-[x]+k)^2=\lim_{x\to n^-}(x-n+k)^2=(k+1)^2$이므로
   $k^2=(k+1)^2$, $k=-\frac{1}{2}$일 때 f가 연속.

〈수렴과분리공리・컴팩트・연결〉

1. $f(\mathbb{R}^2)=\{(0,0)\}\cup\{\mathrm{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\mathrm{x}\|=1\}$

$\quad =\{(0,0)\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$\quad :=B$라 하자.

$f^{-1}(B^c)=f^{-1}(\mathbb{R}^2-B)=f^{-1}(\mathbb{R}^2)-f^{-1}(B)=\varnothing\in\mathfrak{I}_u$,

$f^{-1}(B)=\mathbb{R}^2\in\mathfrak{I}_u$이므로 B는 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I})$에서 개, 폐집합.

즉, B, $B^c\in\mathfrak{I}$. $A\cap B$, $A\cap B^c$는 부분공간 $(A,\mathfrak{I}_A)$에서 공집합이 아닌 개집합이고 $(A\cap B)\cup(A\cap B^c)=A$이므로 $\{A\cap B, A\cap B^c\}$는 A의 분리.

$\therefore$ A는 연결공간이 아니다.

보통위상공간 $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{I}_u)$는 연결공간이고 f는 연속이므로 $f(\mathbb{R}^2)=B$는 연결.

B는 연결인 개폐집합이므로 $(0,0)$의 성분은 B.

2. $(X,\mathfrak{I})$의 기저 $\mathcal{B}=\{(a,\infty)\times(b,c) \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

$\mathrm{int}(A)=\bigcup_{\substack{G\in\mathfrak{I}\\ G\subset A}} G=A$,

$\overline{B}=\bigcap_{\substack{F^c\in\mathfrak{I}\\ A\subset F}} F=B\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le 0,\ -1\le y\le 1\}$.

$S=[0,1]$, $T=[0,1]$라 하자.

T는 유계폐집합인 구간이므로 하이네-보렐정리에 따라 cpt이고, 연결.

S의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. $0\in G_{i_0}$인 $i_0\in I$ 있다.

$0\in(-\varepsilon,\infty)\subset G_{i_0}$인 $\varepsilon>0$ 있다. $S\subset(-\varepsilon,\infty)$이므로 S는 cpt.

S의 분리 $\{G,H\}$ 있다 하고 $0\in G$라 하면 $G=S$이므로 $H=\varnothing$, 모순.

따라서 S는 연결.

그러므로 $S\times T$는 $(X,\mathfrak{I})$에서 cpt이고 연결이다.

3. $(X,\mathfrak{I}_X)$는 무한 집합상의 여유한 위상공간이므로 X는 연결이다.

f는 연속이므로 $f(X)=\{n\in\mathbb{Z} \mid -5\le n\le 5\}$는 연결이다.

$A=f(X)$라 할 때, $f^{-1}(A)=X$, $f^{-1}(A^c)=\varnothing$.

A는 $(Y,\mathfrak{I}_Y)$에서 연결, 개폐집합이므로 연결성분이다.

$n\in Y-A=\{-10,-9,-8,-7,-6,6,7,8,9,10\}$에 대하여

$\{n\}$는 단집합(singleton)이므로 연결이다.

$f^{-1}(\{n\})=\varnothing$, $f^{-1}(\{n\}^c)=X$이므로 $\{n\}$는 개폐집합이다.

따라서 $\{n\}$은 연결, 개폐집합이므로 연결성분이다.

따라서 성분의 개수 11.

4. * $A\cap B=\{0\}\neq\varnothing$.

집합 A는 가산이므로 $\mathfrak{I}_A$는 이산 위상이다.

$(A,\mathfrak{I}_A)$의 기저원 $\{0\}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이므로 $x\in A$이면 $x\notin C'$.

$x\in B\backslash\{0\}$를 포함하는 개집합 $G_x\in\mathfrak{I}_B$를 택하면 집합 $B-G_x$는 가산.

비가산집합 C에 대해

$C\cap\left(G_x-\{x\}\right)=\varnothing$이면 $C\subset B-\left(G_x-\{x\}\right)$이므로 모순이다.

따라서 $C'=[-1,0)$, $\overline{C}=C\cup C'=[-1,0]=B$.

$$\begin{aligned}\mathrm{int}(C)&=\left[\overline{C^c}\right]^c=\left[\overline{\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup(A-\{0\})}\right]^c\\&=\left(\overline{\left[-1,\frac{1}{2}\right)}\cup\overline{A-\{0\}}\right)^c\\&=\{[-1,0)\cup(A-\{0\})\}^c\\&=\{0\}.\end{aligned}$$

$\therefore$ $b(C)=\overline{C}-\mathrm{int}(C)=[-1,0)$.

$\{0\}\in\mathfrak{I}_A\subset\mathfrak{I}'$, $\{0\}^c=[-1,0)\cup\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\in\mathfrak{I}_B\cup\mathfrak{I}_A\subset\mathfrak{I}'$이므로

단집합 $\{0\}$은 0을 포함하는 연결성분.

5. $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$에 대해 $1\in G_{i_1}$인 $i_1\in I$ 택하자.

$A\not\subset\mathbb{R}-G_{i_1}$이므로 $\mathbb{R}-G_{i_1}\supset\mathbb{N}-G_{i_1}=\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$라 하면

$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$에 대하여 $n_j\in G_{i_j}$인 $i_j\in I$ 있다.

$\therefore$ $\mathbb{N}$은 cpt.

$\overline{B}=\mathbb{R}$인 가산집합 B 있다 하자.

A는 폐집합이므로 $A\cup B$는 B를 포함하는 한 폐집합.

$\mathbb{R}=\overline{B}\subset B\cup A$이고 $A\cup B$는 가산집합이므로 모순.

$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 가분공간이 아니다.

6. $\mathfrak{I}=\{f^{-1}(G) \mid G\in\mathfrak{I}_u\}=\{(a,b]\cap(\mathbb{Q}-\{0\}),\ (a,b]\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

$\mathrm{int}(A)=(-\sqrt{2},1]\cap(\mathbb{Q}-\{0\})=[-\sqrt{2},1]\cap(\mathbb{Q}-\{0\})=A\cap(\mathbb{Q}-\{0\})$.

$A'=A\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$.

f는 연속이고 $f(\mathbb{R})=\mathbb{Q}\cup\{0\}=\mathbb{Q}$이므로

$(\mathbb{R},\mathfrak{I})$가 연결이면 $\mathbb{Q}$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_u)$에서 연결이다.

상한 위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I}_u)$는 완전비연결 공간이므로 $\mathbb{Q}$는 비연결이다.

따라서 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$는 연결공간이 아니다.

7. $\begin{cases}a<x+y\le b\\ c<x-y\le d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-x<y\le b-x\\ x-d\le y<x-c\end{cases}$

$\mathrm{int}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<1\}$

$\quad\cup\{(x,1-x) \mid 0<x\le 1\}\cup\{(x,x-1) \mid 0<x\le 1\}$.

$\overline{A}=A$.

$b(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=\{(x,x+1) \mid -1\le x\le 0\}\cup\{(x,x-1) \mid -1\le x\le 0\}$.

$(1,1)$을 포함하는 성분 C라 하자.

f_1, f_2는 연속이므로 $f_1(1,1)=2\in f_1(C)$와 $f_2(1,1)=0\in f_2(C)$는

상한위상공간 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 연결이다.

따라서 $f_1(C)=\{2\}$, $f_2(C)=\{0\}$.

$C\in f_1^{-1}(\{2\})\cap f_2^{-1}(\{0\})=\{(x,y) \mid x+y=2\}\cap\{(x,y) \mid x-y=0\}=\{(1,1)\}$.

$\therefore$ $C=\{(1,1)\}$.

8. $\varepsilon>0$일 때 $B_d(0,\varepsilon)=(-\varepsilon,\varepsilon)$. 0아닌 $p\in\mathbb{R}$에 대하여

$B_d(p,\varepsilon)=\{q\in\mathbb{R} \mid d(p,q)<\varepsilon\}$

$\quad=\{p\}\cup\{q\in\mathbb{R} \mid p\neq q, |p|+|q|<\varepsilon\}$

$\quad=\{p\}$. ($\varepsilon=|p|>0$일 때)

$A'=\{0\}$, $\overline{A}=A\cup A'=A$. $\mathrm{int}(A)=\bigcup_{\substack{G\subset A\\ G\in\mathfrak{I}}} G=A$, $b(A)=\overline{A}-\mathrm{int}(A)=\varnothing$.

단집합 $\{0\}$는 0을 포함하는 연결집합이다.

$\{0\}\subsetneq C$인 집합 C를 고려하자. 0아닌 $\alpha\in C$를 택하면 $\{\alpha\}$는 개집합.

$\{\alpha\}^c=\mathbb{R}-\{\alpha\}=(-|\alpha|,|\alpha|)\cup\left(\bigcup_{\substack{\beta\in\{\alpha\}^c\\ \beta\neq 0}}\{\beta\}\right)$는 개집합.

$\{\{\alpha\},\{\alpha\}^c\}$는 C의 분리.

$\therefore$ $\{0\}$는 성분.

9. $\begin{cases}x^2+y=k\\ x^2+y^2=1\end{cases}$, $y^2-y+k-1=0$, $D=0$, $k=\frac{5}{4}$.

$Z=\left[-1,\frac{5}{4}\right]\subset\mathbb{R}$. $f:S\to Z$, $f(x,y)=x^2+y$는 연속, 전사이다.

$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)\Leftrightarrow(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$.

$\mathbb{R}^2$의 부분집합 S는 유계폐집합이므로 하이네 보렐정리에 따라 cpt.

S의 폐부분집합 F일 때 F는 cpt이다.

f는 연속이므로 $f(F)$는 cpt이다.

T_2-공간의 부분공간 Z는 T_2-공간이므로 $f(F)$는 폐집합이다.

따라서 f는 폐사상이다.

주어진 정리에 따라 $S/\sim\,\cong Z$.

10. K의 개피복 $\{G_i\}_{i\in I}$라 하자. 임의의 $i\in I$에 대하여 $G_i\in\mathfrak{I}_X$이므로

$G_i=f^{-1}(H_i)$인 $H_i\in\mathfrak{I}_Y$ 있다. $K\subset\bigcup_{i\in I}G_i=f^{-1}(\bigcup_{i\in I}H_i)$.

$f(K)\subset\bigcup_{i\in I}H_i$이므로 $\{H_i\}_{i\in I}$는 $f(K)$의 개피복.

$f(K)$는 $(Y,\mathfrak{I}_Y)$에서 cpt이므로 $f(K)\subset\bigcup_{k=1}^{n}H_{i_k}$인 $i_1,\ \cdots,\ i_n\in I$ 있다.

$K\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{i_k}$이므로 K는 $(X,\mathfrak{I}_X)$에서 cpt.

11. $A_0=\{(0,0)\},\ A_n=\left\{\left(\frac{1}{n},\,y\right)\,\middle|\,0\le y\le 1\right\}$.

주어진 조건을 만족하는 B가 존재한다고 하자.

B는 열린집합이므로 $\varepsilon>0$이 존재해서 원점이 중심이고

반지름의 길이 ε인 원의 내부를 G_ε라 하면

$G_\varepsilon\cap X\subset B$이므로 $\frac{1}{N}<\varepsilon$인 자연수 N을 택할 때

$n\ge N$이면 $\left(\frac{1}{n},\,0\right)\in B$이고, (나)에 따라 $A_n\subset B$.

따라서 $(0,1)\in\left\{\left(\frac{1}{n},\,y\right)\,\middle|\,n\ge k,\,0\le y\le 1\right\}'\subset B'\subset B$가 되어 모순.

그러므로 조건을 만족하는 집합 B는 존재하지 않는다.

12. $\overline{A}=\{(x,\,rx)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}^+,\ r\in\mathbb{Q}^+\}\cup\{(0,0)\}$.

임의의 가산집합 B라 하면 B는 기껏해야 원점과 B의 각 점을 지나는

가산 개의 직선과 서로소가 아니다.

따라서 $\overline{B}\ne\mathbb{R}^2$이므로 $(\mathbb{R}^2,\,\mathfrak{I}_e)$는 가분공간이 아니다.

13. $B_1{}'=\{0,\,2,\,4\}$

$f:[0,1]\to B_m,\ f(x)=\begin{cases}2m-1, & 0\le x<1/2\\ 2m\ , & x=1/2\\ 2m+1, & 1/2<x\le 1\end{cases}$ 라 정의하면

$f(0)=2m-1,\ f(1)=2m+1$.

B_m의 기저 $\{\{2m-1\},\,\{2m+1\},\,B_m\}$에 대해

$f^{-1}(\{2m-1\})=[0,1/2),\ f^{-1}(\{2m+1\})=(1/2,1],\ f^{-1}(B_m)=[0,1]$은

$[0,1]$에서 개집합이므로 f는 연속이다.

$[0,1]$은 길연결이고 f는 연속이므로 $f([0,1])=B_m$은 길연결이다.

$B_m\cap B_{m+1}\ne\varnothing$이므로 $\mathbb{Z}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}B_m$은 길연결이다.

14. $a=2,\ b=3$.

하이네-보렐 정리에 따라 $[1,2]$는 보통위상공간에서 cpt.

$[1,2]$는 구간이므로 연결이다.

f가 연속되도록 하는 위상 $\mathfrak{I}$이므로 f는 연속이다.

따라서 $f([1,2])=K$는 $(\mathbb{R},\mathfrak{I})$에서 cpt, 연결이다.

$2,\ 3\not\in(a,b)$는 기저 개집합이다.

$f^{-1}(\{2\})=\varnothing\in\mathfrak{I}_u$이므로 $\{2\}$는 2를 포함하는 기저 개집합.

$f^{-1}(\{3\})=\{2,3\}\not\in\mathfrak{I}_u$.

$H=(3-r,3+r),\ G=(2-t,2)\cup(2,2+t)$라 할 때

$f^{-1}(H)=\{2\}\cup(3-r,3+r)\not\in\mathfrak{I}_u$ (X)

$f^{-1}(G\cup H)=(2-t,2)\cup(2,2+t)\cup(3-r,3+r)\in\mathfrak{I}_u$ (O)

따라서 3을 포함하는 기저 개집합 $((2-t,2+t)-\{2\})\cup(3-r,3+r)$.

$\overline{A}=A\cup A'=A\cup\{3\}$이므로 $B=\{3\}$.

15. $G=[0,1)\cup\{2,\,3,\,4,\,\cdots\}\in\mathfrak{I},\ H=\{1\}\in\mathfrak{I}$라 하자.

$\{1\}\subsetneq A\subset X$인 A에 대하여 $A\cap G\ne\varnothing,\ A\cap H=\{1\}\ne\varnothing$이므로

A는 비연결이다. $\therefore$ 1을 포함하는 성분 $\{1\}$.

$X-B=(0,1)\cup\{4,\,5,\,6,\,\cdots\}\in\mathfrak{I}$이므로 B는 폐집합.

$B=\overline{B}=B\cup B'\supset B'$.

$0\in[0,1)\in\mathfrak{I}$이고, $(G-\{0\})\cap B=\varnothing$.

$k=1,\ 2,\ 3$에 대하여 $k\in G=(\mathbb{N}-\{1,2,3\})\cup\{a\}\in\mathfrak{I}$이고,

$(G-\{a\})\cap B=\varnothing$.

$\therefore\ B'=\varnothing$.

16. $\overline{A}=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 9\}$.

A의 분리 $\{U,\,V\}$라 하자.

$U=f^{-1}(G),\ V=f^{-1}(H)$인 $G,\ H\in\mathfrak{I}_Y$ 있다.

$[1,9]=f(A)\subset f(U\cup V)=f(f^{-1}(G\cup H))=G\cup H$.

$G\cap[1,9]=f(f^{-1}(G))\cap f(A)\supset f(f^{-1}(G)\cap A)=f(U\cap A)\ne\varnothing$.

$H\cap[1,\,9]\ne\varnothing$.

$b\in G\cap H\cap[1,9]\ \Rightarrow\ b\in[1,9]=f(A)$

$\Rightarrow\ \exists a\in A$ s.t. $b=f(a)\in G\cap H$

$\Rightarrow\ a\in f^{-1}(\{f(a)\})\subset f^{-1}(G\cap H)=U\cap V$

$\Rightarrow\ U\cap V\cap A\ne\varnothing$, 모순.

$\therefore\ G\cap H\cap[1,\,9]=\varnothing$.

$[1,9]$는 Y의 비연결부분집합이 되어 모순이다.

따라서 A는 연결이다.

[현대대수학]

<군>

1. $|G|=2^3\times3^3$을 위수로 갖는 가환군은 9가지 경우가 있으며,
이 중에서 위수가 6인 원소가 24개인 경우는
$G\cong(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2)\times(\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3)$.
$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$의 위수 4인 원소의 개수 2×2,
$\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3$의 위수 9인 원소의 개수 6×3이므로
G의 위수 $36=4\times9$인 원소의 개수는 72.
$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$의 위수 4인 원소의 개수 2×2,
$\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_3$의 위수 3인 원소의 개수 8이므로
G의 위수 $12=4\times3$인 원소의 개수는 32이다.
따라서 G의 위수 12인 순환부분군의 개수는 $\dfrac{32}{\varphi(12)}=8$.

2. $\mathbb{Z}_{2022}^*\cong\mathbb{Z}_2^*\times\mathbb{Z}_3^*\times\mathbb{Z}_{337}^*\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{336}$.
$(a,b,c)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{336}\times(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$일 때, $\mathrm{lcm}(|a|,|b|,|c|)=15$라 하면 $|a|=1$.
$|b|=1$인 경우 $|c|=15$인 c는 15와 서로 소인 $1\le k\le14$에 대하여
$c=\dfrac{k}{15}+\mathbb{Z}$이므로, $\varphi(15)$개 있다.
$|b|=3$인 경우 $|c|=5$ 또는 $|c|=15$이므로 $\varphi(5)+\varphi(15)$개 있다.
그러므로 위수 15인 원소의 개수는 $\varphi(15)+\varphi(3)\cdot(\varphi(5)+\varphi(15))=32$.
$15=3\times5$, $3\nmid(5-1)$이므로 위수 15인 부분군은 순환군이다.
그러므로 위수 15인 부분군의 개수 $\dfrac{32}{\varphi(15)}=4$.

3. $f:G\to I(G)$를 $f(g)=\sigma_g$로 정의하자. $g,\ h\in G$이면 $x\in G$에 대하여
$\sigma_g\sigma_h(x)=\sigma_g(hxh^{-1})=g(hxh^{-1})g^{-1}=(gh)x(gh)^{-1}=\sigma_{gh}(x)$.
$\therefore$ $f(gh)=f(g)f(h)$이므로 f는 군 준동형사상이다.
$\mathrm{Im}f=I(G)$이고 1을 항등사상이라 하면
$\ker f=\{g\in G|\,f(g)=1\}=\{g\in G|$ 임의의 $x\in G$에 대하여 $gxg^{-1}=x\}$
$=Z(G)$이므로
동형정리에 의해 $G/Z(G)\cong I(G)$.
$|Z(G)|=2$이면 $|I(G)|=|G/Z(G)|=26=2\times13$이므로
$I(G)\cong\mathbb{Z}_{26}$ 또는 $I(G)\cong D_{13}$.
$I(G)\cong\mathbb{Z}_{26}$이면 $G/Z(G)$는 순환군이므로 G가 가환군이 되어 모순이다.
$(\because$ $G\ne Z(G)$.)
따라서 $I(G)\cong D_{13}$.
$D_{13}=\langle a,b\,|\,|a|=13,|b|=2,ab=ba^{-1}\rangle$
$=\{1,a,a^2,\cdots,a^{12},b,ba,\cdots,ba^{12}\}$.
(회전) (대칭)

위수	1	2(순환군)	13(순환군)	26
부분군 개수	1	$\dfrac{13}{\varphi(2)}=13$	$\dfrac{12}{\varphi(13)}=1$	1

D_{13}의 부분군의 개수 16이므로 $I(G)$의 부분군의 개수 16.

4. G의 Sylow 7, 3$-$부분군 H, K라 할 때
$H=\langle s\rangle$, $K=\langle t\rangle$인 s, $t\in G$ 있다.
G의 Sylow 7, 3$-$부분군의 개수 n_3, n_7라 하면 Sylow 정리에 따라
$n_7=1$, $n_3\in\{1,7\}$.
$n_3=1$이면 $st=ts$이므로 $|st|=21=|G|$, G는 순환군이므로 가환이다.
$(1,1)\cdot(2,1)\ne(2,1)\cdot(1,1)$이므로 모순.
따라서 $n_3=7$이므로 H는 G의 정규부분군이며,
K는 G의 정규부분군이 아니다.
라그랑지 정리에 따라 $|Z(G)|\in\{1,3,7,21\}$.
$|Z(G)|\in\{3,7,21\}$이면 $G/Z(G)$가 순환군, G는 가환군(모순).
따라서 $|Z(G)|=1$이므로 $Z(G)=\{(0,0)\}$.

5. $N=f^{-1}(L)$라 하면 $f(N)=L$이므로 $f|_N:N\to L$, $f|_N(x)=f(x)$는
전사인 군준동형사상이다.
제1동형정리에 따라 $G/\ker f\cong H$, $N/\ker f=N/\ker(f|_N)\cong L$이므로
$|H:L|=\dfrac{|H|}{|L|}=\dfrac{|G:\ker f|}{|N:\ker f|}=|G:N|=|G:f^{-1}(L)|$.
임의의 $a\in S$에 대하여 $|f(a)|\,\big|\,|a|$이고 $|a|\,\big|\,|S|$이므로
$f(S)$의 모든 원소의 위수는 p의 거듭제곱꼴이 되어
$f(S)$는 H의 $p-$부분군이다.
$|H:f(S)|=|G:f^{-1}(f(S))|\,\big|\,|G:S|$이므로 $\gcd(|H:f(S)|,p)=1$.
$\therefore$ $f(S)$는 H의 실로우 $p-$부분군.

6. $S=\{a\in G|\ \exists n\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ a^{p^n}=e\}$.
① 부분군
$e^{p^1}=e$이므로 $e\in S$, $S\ne\varnothing$.
$\forall a,\ b\in S$, $\exists m,\ n\in\mathbb{N}$ s.t. $a^{p^m}=e$, $b^{p^n}=e$.
$\Rightarrow$ $(ab^{-1})^p=(a^{p^m})^{p^n}(b^{p^n})^{-p^m}=e$.
$\Rightarrow$ $ab^{-1}\in S$.
$\therefore$ $S\le G$.
② $p-$군
$q\,\big|\,|S|$인 소수 $q(\ne p)$가 존재하면 코시정리에 따라 $|a|=q$인 $a\in S$ 있다.
이때 $a^{p^n}=e$인 $n\in\mathbb{N}$이 존재하므로 $q|p^n$, 모순.
$\therefore$ S : $p-$군.
③ G의 임의의 실로우 $p-$부분군 H라 하자.
$\forall a\in H$, $|a|\,\big|\,|H|$이므로 $|a|$는 p의 거듭제곱 꼴이다.
$\Rightarrow$ $a\in S$
$\Rightarrow$ $H\subset S$.
S는 H를 포함하는 $p-$부분군이므로 $S\in\mathrm{Syl}_p(G)$.
$|H|=|S|$ $\Rightarrow$ $H=S$.
$\therefore$ S는 G의 유일한 실로우 $p-$부분군.

7. $H=\langle h\rangle$인 $h\in G$ 있다. 임의의 $g\in G$에 대하여
$ghg^{-1}=(ggg^{-1})h(g^{-1}hh^{-1})=g^2(g^{-1}hg^{-1})h^{-1}$
$=g^2(g^{-1}h)^2h^{-1}\in H$이므로 $H\triangle G$.
$K=\langle h^n\rangle$인 $n\in\mathbb{Z}$ 있다. 임의의 $g\in G$에 대하여
$ghg^{-1}\in H$이므로 $ghg^{-1}=h^m$인 $m\in\mathbb{Z}$ 있다.
$gh^ng^{-1}=(ghg^{-1})^n=(h^m)^n=(h^n)^m\in K$이므로 $K\triangle G$.

8. 3은 법 3과 25에 관한 원시근이다.
$\psi:\mathbb{Z}_{25}^*\times\mathbb{Z}_{50}^*\to\mathbb{Z}_{20}\oplus\mathbb{Z}_{20}$, $\psi(3^x,3^y)=([x]_{20},[y]_{20})$.
$\psi(9,9)=(2,2)$의 덧셈 역원 $(18,18)$이므로
$\psi^{-1}(18,18)=(3^{18},3^{18})=(-3^8,-3^8)=(-11,-11)=(14,39)$.
$\therefore$ $a=14$, $b=39$.
(다른 설명)
$\mathbb{Z}_{25}^*$에서 $9\cdot(-11)=1$, $a=14$.
법 50에 관하여 $9\cdot(-11)\equiv1$, $b=39$.

9. $\varphi(17^2)=17^2\left(1-\dfrac{1}{17}\right)=17^2-17=17\cdot16$.
$\mathbb{Z}_{2023}^*\cong\mathbb{Z}_7^*\times\mathbb{Z}_{17}^*\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{2^4\cdot17}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^4\cdot3\cdot17}=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{816}$.
$\therefore$ $a=2$, $b=816$

10. $\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_{12}=\langle(1,0),(0,1)\rangle\neq\langle(1,1)\rangle$, $\sigma\tau=\tau\sigma$, $\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle=\langle\mathrm{id}\rangle$.

$\mathrm{Im}(f)=f(\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_{12})=f(\langle(1,0),(0,1)\rangle)$

$=\langle f(1,0),f(0,1)\rangle=\langle\sigma,\tau\rangle$.

$|\mathrm{Im}f|=|\langle\sigma,\tau\rangle|=\dfrac{|\sigma|\cdot|\tau|}{|\langle\sigma\rangle\cap\langle\tau\rangle|}=\dfrac{4\cdot 2}{1}=8$.

동형 정리에 따라 $|\ker f|=m=|\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_{12}|/|\mathrm{Im}f|=12^2/8=18$.

(다른 풀이)

$(x,y)\in\ker f \Leftrightarrow \sigma^x\tau^y=\mathrm{id} \Leftrightarrow x:4$의 배수, $y:2$의 배수이므로

$\ker f=\langle 4\rangle\times\langle 2\rangle$, $|\ker f|=m=3\cdot 6=18$.

동형 정리에 따라 $|\mathrm{Im}f|=|\mathbb{Z}_{12}\oplus\mathbb{Z}_{12}|/|\ker f|=12^2/18=8$.

11. 홀수 소수 31이므로 원시근 g 있다. 즉, $\mathbb{Z}_{31}^*=\langle g\rangle$, $|g|=30$, $g^{15}=-1$.

$f(g^t)=g^{3t}$라 쓸 수 있다.

$g^{3t}=1 \Leftrightarrow 3t\equiv 0 \pmod{30}$, $\gcd(3,30)=3$이므로 $|\ker f|=m=3$.

동형정리에 따라 $n=|\mathrm{Im}(f)|=\varphi(31)/|\ker f|=10$.

(다른 설명)

$\mathrm{Im}(f)=\langle f(g)\rangle$이므로 $|\mathrm{Im}(f)|=|g^3|=10$.

12. $\gcd(5,12)=1$이므로 $5s+12t=1$인 $s,\ t\in\mathbb{Z}$ 있다.

$s\equiv x \pmod{40}$, $t\equiv y \pmod{50}$일 때 $f(x,y)=[5x+12y]=1$이므로

f는 전사 준동형사상이다. 즉 $\mathrm{im}f=\mathbb{Z}_{40}$.

동형 정리에 따라 $|\ker(f)|=a=|\mathbb{Z}_{40}\oplus\mathbb{Z}_{50}|/40=50$.

$b=|\mathbb{Z}_{40}\oplus\mathbb{Z}_{50}:f^{-1}(H)|=|\mathbb{Z}_{40}/H|=\dfrac{40}{5}=8$.

13. Sylow 정리에 따라 $n_7=7k+1$, $n_7\mid 17^2$, $n_{17}=17k+1$, $n_{17}\mid 7$이므로

$n_7=1=n_{17}$.

따라서 실로우 7−부분군 H, 실로우 17−부분군 K일 때 $H\triangle G$, $K\triangle G$.

$H\cap K$는 H와 K의 부분군이므로

$|H\cap K|\mid\gcd(|H|,|K|)=1$, $|H\cap K|=1$.

HK는 G의 부분군이고 $|HK|=\dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}=|G|$이므로 $G=HK$.

$\therefore\ G\cong H\times K$. $G\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{17^2}$ 또는 $G\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{17}\times\mathbb{Z}_{17}$.

가정에 따라 $G\cong\mathbb{Z}_7\times\mathbb{Z}_{17}\times\mathbb{Z}_{17}$.

$\mathbb{Z}_7$의 모든 부분군은 $\mathbb{Z}_7$, $\{0\}$.

$\mathbb{Z}_{17}\times\mathbb{Z}_{17}$의 모든 부분군은

$\mathbb{Z}_{17}\times\mathbb{Z}_{17}$, $\{0\}\times\{0\}$, 위수 17인 순환부분군이므로

G의 부분군의 개수는 $2\times\left(1+1+\dfrac{\varphi(17)+\varphi(17)+\varphi(17)^2}{\varphi(17)}\right)=40$.

14. 실로우 정리에 따라

치역 H의 실로우 5−부분군 N의 개수 $n_5\equiv 1 \pmod 5$, $n_5\mid 28$.

$n_5=1$이므로 $N\triangle H$.

$\therefore\ f^{-1}(N)\triangle G$, $|f^{-1}(N)|=|\ker f|\cdot|N|=75$.

15. $|H|=5$이고 제1동형정리에 따라 $|K|=|G|/|H|=12$.

$\ker f=H\triangle G$이므로 $HK<G$.

$|HK|=\dfrac{5\cdot 12}{\gcd(5,12)}=|G|$이므로 $G=HK$, 즉 $G\cong H\times K$.

16. 실로우 정리에 따라 실로우 3−부분군 H의 개수 n_3,

실로우 5−부분군 K의 개수 n_5일 때,

$n_3\in\{1,10\}$, $n_3\mid 10$, $n_5\in\{1,6\}$, $n_5\mid 6$.

$n_3=10\wedge n_5=6$인 경우 위수 3, 5인 원소의 개수는 각각

$\varphi(3)\cdot 10$, $\varphi(5)\cdot 6$이므로 $44\le|G|$이므로 모순.

따라서 $n_3=1$ 또는 $n_5=1$이므로 $HK<G$.

$|HK|=\dfrac{3\cdot 5}{\gcd(3,5)}=15$, $[G:HK]=2$이므로 $N=HK\triangle G$.

17. $|\mathrm{Im}(f)|=|(4,25)|=\mathrm{lcm}(25,2)=50$이므로 $\mathrm{Im}(f)$는 위수 50인 순환군.

대응정리에 따라

조건을 만족하는 H와 $\mathbb{Z}_{50}\times\mathbb{Z}_{50}/\ker(f)$의 부분군은 일대일 대응이다.

제1동형정리에 따라

$\mathbb{Z}_{50}\times\mathbb{Z}_{50}/\ker(f)\cong\mathrm{Im}f\cong\mathbb{Z}_{50}$의 부분군 6개 있으므로

그런 H는 6개 있다.

18. $|G|=2|H|=3|K|$이므로 $|H|=15$, $|K|=10$.

$[G:H]=2$이므로 $H\triangle G$, $HK<G$.

라그랑지 정리에 따라 $|HK|\mid 30$이고, $|H\cap K|\mid\gcd(15,10)=5$이므로

$|H\cap K|=1$ 또는 5.

$|HK|=\dfrac{150}{|H\cap K|}$이므로 $|H\cap K|=5$, $|HK|=30$.

19. $|a|=n$라 하자. $(aN)^n=N$이므로 $n=8k$인 $k\in\mathbb{Z}$ 있다.

$H=\langle a^{2k}\rangle$라 하면 $|H|=\dfrac{n}{\gcd(n,2k)}=\dfrac{8k}{2k}=4$.

$N\triangle G$이므로 $HN<G$이고, $|HN|=\dfrac{505\cdot 4}{\gcd(505,4)}=2020$.

20. $\varphi(100)=40$.

21. 위수 4인 원소가 12개 있으므로 구하는 값 $\dfrac{12}{\varphi(4)}=6$.

22. $H\cong\mathbb{Z}_m$, $K\cong\mathbb{Z}_n$인 $m,\ n\neq 1$ 있다.

$\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{300}$이려면 $\gcd(m,n)=1$이어야 한다.

$300=2^2\times 5^2\times 3$이므로

순서쌍 $(m,n)=(2^2,5^2\cdot 3)$, $(5^2\cdot 3,2^2)$, $\cdots$, $3!=6$가지 있다.

23. $A=\varphi(7)=6$, $B=1$.

라그랑지 정리에 따라 H의 원소 a의 위수 $|a|\mid 49$,

H는 순환군이 아니므로 $|a|=1$(항등원) 또는 7.

$\therefore\ C=49-1=48$, $D=\dfrac{48}{\varphi(7)}=8$.

구하는 값 63.

24. $G/H=(\mathbb{Z}/\langle 100\rangle)/(\langle 28,100\rangle/\langle 100\rangle)$

$\cong\mathbb{Z}/\langle 28,100\rangle$ (∵ 제3동형정리)

$=\mathbb{Z}/\langle 4\rangle\cong\mathbb{Z}_4$의 위수 4.

25. $\begin{pmatrix}12&0\\0&12\\2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-36\\0&12\\2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0\\0&12\\2&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0\\0&12\\0&0\end{pmatrix}$이므로

$(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{12})/\langle(2,6)\rangle\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{12}$.

$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{12}$에서 $m=3$, $n=2$. $m+n=5$.

26. $f^{-1}(f(K))=K\cdot\ker(f)$, $\ker(f)\triangle G$이므로 $K\ker(f)$는 G의 부분군.

$800=|K\ker(f)|=\dfrac{|K|\,|\ker(f)|}{|K\cap\ker(f)|}$.

제1동형정리에 따라 $K/K\cap\ker(f)\cong f(K)$이므로

$\dfrac{|K|}{|K\cap\ker(f)|}=|f(K)|=20$.

$\therefore\ |\ker(f)|=40$.

27. $\gcd(36,25)=1$이므로 $\mathbb{Z}_{36}\oplus\mathbb{Z}_{25}\cong\mathbb{Z}_{900}$, $x=3^3=27$.

$|(10,20)|=\mathrm{lcm}(18,5)=90$이므로 $y=10$.

$x+y=37$.

28. $\begin{pmatrix} 30 & 5 \\ 12 & 20 \\ x & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -35 \\ 0 & 90 \\ x & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 90 \\ x & 6x+y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -540 & 90 \\ -35x-6y & 6x+y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 540 & 0 \\ 35x+6y & 6x+y \end{pmatrix}$.

$\therefore\ G/H \cong \mathbb{Z}_{540} \oplus \mathbb{Z}_1$.

$\overline{(6,8)} \to (258, 0)$. $|258| = \dfrac{540}{\gcd(540,\ 258)} = \dfrac{540}{6} = 90$.

29. $\gcd(52, 88) = 4$, $H = \langle 52 \rangle + \langle 88 \rangle = \langle 4 \rangle$.

$G/H \cong \mathbb{Z}_{\gcd(120,\ 4)} = \mathbb{Z}_4$, 구하는 값 4.

<환>

1. $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$, $f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$라 하자.

$f(x)\mid x^{10}-1$이므로 $f(x)\mid x^{80}-1$.

$f(x)$의 한 근 $\alpha\in \mathrm{GF}(3^4)=\left\{x\in\overline{\mathbb{Z}_3}\ \middle|\ x^{3^4}=x\right\}=\{0\}\cup\left\{x\in\overline{\mathbb{Z}_3}\ \middle|\ x^{80}=1\right\}$.

따라서 $\mathbb{Z}_3\subset\mathbb{Z}_3(\alpha)\subset\mathrm{GF}(3^4)$.

$[\mathbb{Z}_3(\alpha):\mathbb{Z}_3]=1$인 경우 α는 $x^2=1$의 근이므로 $\alpha^2=1$.

$[\mathbb{Z}_3(\alpha):\mathbb{Z}_3]=2$인 경우 α는 $x^8=1$의 근이고 $\alpha^{10}=1$이므로 $\alpha^2=1$.

$\alpha^5=-1=-\alpha^2$이므로 $\alpha=-1=2$, $f(-1)=1\neq 0$이므로 모순.

따라서 $[\mathbb{Z}_3(\alpha):\mathbb{Z}_3]=4=[\mathrm{GF}(3^4):\mathbb{Z}_3]$, $\deg(\alpha,\mathbb{Z}_3)=4$.

$\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Z}_3)=x^4-x^3+x^2-x+1$.

$\gcd(x+1,f(x))=1$, $\mathrm{lcm}(x+1,f(x))=x^5+1$.

중국 나머지 정리에 따라

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_3[x[/(x^5+1)&\cong\mathbb{Z}_3[x]/(x+1)\times\mathbb{Z}_3[x]/\langle f(x)\rangle\\&\cong\mathbb{Z}_3[-1]\times\mathbb{Z}_3[\alpha]\\&=\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3(\alpha)\\&=\mathbb{Z}_3\times\mathrm{GF}(3^4).\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_3\times\mathrm{GF}(3^4)$의 단원의 개수 $(3-1)\times(3^4-1)=160$이므로

$\mathbb{Z}_3[x[/(x^5+1)$의 단원의 개수 160.

2. $G_1\cong U(\mathbb{Z}_{1600})\cong U(\mathbb{Z}_{2^6})\times U(\mathbb{Z}_{5^2})\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^{6-2}}\oplus\mathbb{Z}_{20}=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{16}\oplus\mathbb{Z}_{20}$.

$G_2\cong U(\mathbb{Z}_{121})\cong\langle\mathbb{Z}_{110},+\rangle$.

$\alpha=(2,110)\times(16,110)\times(20,110)=2\cdot 2\cdot 10=40$.

$\beta=(R_1$의 멱등원 개수$)=2^2=4$.

3. 제1동형 정리에 따라

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)&\cong\mathbb{Z}_{20}[x]/\langle\ker(f)\rangle\cong\mathbb{Z}_4[x]\times\mathbb{Z}_5[x]/\langle 1\rangle\times\langle 4x\rangle\\&\cong\{0\}\times\mathbb{Z}_5[x]/\langle 4x\rangle\\&\cong\mathbb{Z}_5[x]/\langle 4x\rangle\\&=\{\overline{a}\mid a\in\mathbb{Z}_5\}.\end{aligned}$$

$\therefore$ $\mathrm{Im}(f)\cong\mathbb{Z}_5$.

환 $\mathbb{Z}_{20}$의 위수 5인 아이디얼 $\langle 4\rangle$이므로 $\mathrm{Im}(f)=\langle 4\rangle=4\cdot\mathbb{Z}_{20}$.

$\mathrm{Im}(f)=\langle 4\rangle\subset J\subset\langle 1\rangle=\mathbb{Z}_{20}$인 $J=\langle 1\rangle$, $\langle 2\rangle$, $\langle 4\rangle$, 3개 있다.

(다른 설명)

대응정리에 따라

$\{J\mid\langle 4\rangle\subset J$(아이디얼)$\subset\mathbb{Z}_{20}\}$와

$\{J/\langle 4\rangle\mid\mathbb{Z}_{20}/\langle 4\rangle$의 아이디얼 $J/\langle 4\rangle\}$사이에 일대일 대응이 존재한다.

$\langle 4\rangle\subset J\subset\mathbb{Z}_{20}$인 아이디얼 J의 개수는

$\mathbb{Z}_{20}/\langle 4\rangle\cong\mathbb{Z}_{\gcd(20,4)}=\mathbb{Z}_4$의 아이디얼 개수와 같고

$\mathbb{Z}_4$의 아이디얼의 개수는 4의 양의 약수의 개수 3.

4. $\alpha^2=-12+2\sqrt{-13}=2(-6+\sqrt{-13})\in\langle 2\rangle$.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]/\langle 2\rangle&\cong\mathbb{Z}[x]\langle x^2+13,2\rangle\cong\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2+1\rangle\\&\cong\mathbb{Z}_2[x]/(\langle x+1\rangle\cap\langle x-1\rangle)\\&\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$는 정역이 아니므로 $\langle 2\rangle$는 $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$의 소아이디얼이 아니다.

$\langle 2\rangle$가 소아이디얼이 아니므로 2는 소원이 아니다.

$2=\beta\gamma$ (β, $\gamma\in\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$)라 하면 $4=N(2)=N(\beta)N(\gamma)$.

모든 $\delta\in\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$에 대해 $N(\delta)\neq 2$이므로

$N(\beta)=1$ 또는 $N(\gamma)=1$, 즉 β 또는 γ는 단원이다.

2가 $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$의 기약원이므로 $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$은 UFD가 아니다.

5. 대응정리에 따라 $\mathbb{Z}[i]/J$의 아이디얼은

$J\subset I\subset\mathbb{Z}[i]$인 $\mathbb{Z}[i]$의 아이디얼 I와 일대일 대응.

$\mathbb{Z}[i]$는 PID이므로 $I=\langle a\rangle$인 $a\in\mathbb{Z}[i]$ 있다.

$\langle m\rangle=J\subset I=\langle a\rangle\Leftrightarrow a\mid m$이므로

R의 아이디얼의 개수 45 $\Leftrightarrow$ m의 약수의 개수 45.

$45=15\times 3=9\times 5=5\times 3\times 3$, 각 경우에 해당하는 최소의 자연수 m은

$-(1+i)^{44}=2^{22}$,

$i(1+i)^{14}3^2=2^7 3^2$,

$(1+i)^8 3^4=6^4$,

$-(1+i)^4(2+i)^2(2-i)^2=100$이므로

최소의 자연수 $m=100$.

R의 아이디얼은 $a\mid 100$인 a에 대해 $\langle a\rangle/J$,

$R/(\langle a\rangle/J)=(\mathbb{Z}[i]/J)/(\langle a\rangle/J)\cong\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$.

a가 기약원인 경우 R의 극대아이디얼 된다.

$\therefore$ $\langle 1+i\rangle/J$, $\langle 2+i\rangle/J$, $\langle 2-i\rangle/J$.

6. $I=\langle 7-31i,5-5i\rangle=\langle\gcd(7-31i,5-5i)\rangle$.

$\dfrac{(7-31i)(1+i)}{(5-5i)(1+i)}=\dfrac{38-24i}{10}$이므로 $7-31i=(4-2i)(5-5i)+(-3-i)$.

$\dfrac{(5-5i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}=\dfrac{-10+20i}{10}=-1+2i$이므로 $5-5i=(-1+2i)(-3-i)$.

$\therefore$ $\gcd=-3-i$.

$I=\langle -3-i\rangle=\langle(-i)\cdot(-3-i)\rangle=\langle -1+3i\rangle$.

$\therefore$ $a=-1$, $b=3$.

$-1+3i=(1+i)(1+2i)$의 노름 10, $1+i$의 노름 2, $1+2i$의 노름 5,

$1+i$, $1+2i$는 기약원이므로 소원(PID $\Rightarrow$ UFD).

대응정리에 따라 $\mathbb{Z}[i]/I$의 소아이디얼 $\langle 1+i\rangle/I$, $\langle 1+2i\rangle/I$

(제3동형정리에 따라 $(\mathbb{Z}[i]/I)/(\langle 1+(2)i\rangle/I)\cong\mathbb{Z}[i]/\langle 1+(2)i\rangle$.)

7. $x-2=x-3+1$이므로 $\gcd(x-2,x-3)=1$.

$I=\langle x-2\rangle\cap\langle x-3\rangle$, $\mathbb{Q}[x]=\langle x-2\rangle+\langle x-3\rangle$.

중국나머지정리에 따라

$R\cong(\mathbb{Q}[x]/\langle x-2\rangle)\times(\mathbb{Q}[x]/\langle x-3\rangle)\cong\mathbb{Q}[2]\times\mathbb{Q}[3]=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

$x^5=x$인 $x\in\mathbb{Q}$는 $x=0$, ± 1, 3개 있으므로 $|A|=3^2=9$.

$\mathbb{Q}$의 아이디얼은 $\{0\}$, $\mathbb{Q}$, 2개 있다.

R의 아이디얼 중에서 소아이디얼은 $\mathbb{Q}\times\{0\}$, $\{0\}\times\mathbb{Q}$, 2개 있다.

8. $$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]\langle 2+0i\rangle&=\left\{\overline{r+si}\ \middle|\ 0\le r<\frac{2^2+0^2}{\gcd(2,0)},\ 0\le s<\gcd(2,0)\right\}\\&=\{\overline{r+si}\mid 0\le r<2,\ 0\le s<2\}\\&=\{\overline{0},\overline{1},\overline{i},\overline{1+i}\}\end{aligned}$$
의 단원은 $\overline{1}$, $\overline{i}$, 2개 있다.

$3\equiv 3\pmod 4$인 3은 홀수 소수이므로 3은 PID $\mathbb{Z}[i]$의 기약원.

따라서 $\mathbb{Z}[i]/\langle 3\rangle$은 체이며, 위수는 $3^2+0^2=9$.

$\therefore$ $|U(R)|=2\cdot 8=16=a$.

$R\cong(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2)\times(\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3)\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_6$의 원소의 최대 위수 $b=6$.

9. $$\begin{aligned}x\cdot(x^7+1)=x(x^7-1)=x^{2^3}-x&=\prod_{d\mid 3}(\text{차수 }d\text{인 모닉 기약다항식})\\&=x(x-1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)\end{aligned}$$
이므로

$x^7+1=(x-1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$.

$$\begin{aligned}\therefore\ R&\cong(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x-1\rangle)\times(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x+1\rangle)\times(\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3+x^2+1\rangle)\\&\cong\mathrm{GF}(2)\times\mathrm{GF}(2^3)\times\mathrm{GF}(2^3)\end{aligned}$$
의 단원의 개수 $(2-1)(8-1)(8-1)=49$.

$(a,b,c)\in\mathrm{GF}(2)\times\mathrm{GF}(8)\times\mathrm{GF}(8)$일 때

$(a^2,b^2,c^2)=(a,b,c)$인 a, b, $c=0$, 1이므로 R의 멱등원 $2^3=8$개 있다.

10. $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$이므로 $N(\mathbb{Z}_{360})=30\cdot\mathbb{Z}_{360}=\langle 30\rangle$.
$N(\mathbb{Z}_{11})=11\cdot\mathbb{Z}_{11}=\{0\}$.
$\therefore\ R_1/N(R_1)\times R_2/N(R_2)\cong\mathbb{Z}_{30}\times\mathbb{Z}_{11}\cong\mathbb{Z}_{330}$.
표수 330, 단원의 개수 $\varphi(30)\cdot\varphi(11)=8\cdot 10=80$.

11. $x-2,\ x^2+2x+4$는 $\mathbb{R}$ 위에서 서로소, 기약.
중국나머지정리에 따라
$\mathbb{R}[x]/I\cong(\mathbb{R}[x]/\langle x-2\rangle)\times(\mathbb{R}[x]/\langle x^2+2x+4\rangle)$
$\cong\mathbb{R}[2]\times\mathbb{R}[-1+\sqrt{3}i]$
$=\mathbb{R}\times\mathbb{R}[i]\cong\mathbb{R}\times\mathbb{C}\cong A$.
$\mathbb{R}\ni a$인 $a^4=1,\ a=\pm1$,
$\mathbb{C}\ni b$인 $b^4=1,\ b=\pm1,\ \pm i$이므로 $a=2\times 4=8$.

12. $\operatorname{im}f=f(\mathbb{Z})=f(\langle 1\rangle)=\langle f(1)\rangle=\langle 134\rangle,\ |134|=\dfrac{266}{\gcd(266,134)}=133$.
동형 정리에 따라 $\mathbb{Z}/\ker f\cong\mathbb{Z}_{133}$이므로
$G\cong\mathbb{Z}_{133}^*\cong\mathbb{Z}_7^*\times\mathbb{Z}_{19}^*\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{18}=(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2)\oplus(\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_9)$.
G의 위수 6인 원소의 개수는
$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$의 위수 2인 원소의 개수와
$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_9$의 위수 3인 원소의 개수의 곱과 같으므로
구하는 값 $3\times 8=24$.

13. 제2동형정리에 따라
$I/J=\langle x+1\rangle/\langle x+1\rangle\cap\langle x^2\rangle\cong\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2\rangle=\{\overline{a+bx}\mid a,b\in\mathbb{Z}_3\}$
$=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{x},\ \overline{1+x},\ \overline{2+x},\ \overline{2x},\ \overline{1+2x},\ \overline{2+2x}\}$의 단원은
$\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{1+x},\ \overline{2+x},\ \overline{1+2x},\ \overline{2+2x}$, 6개 있다.
단위원 $f(x)+J\in I/J$라 하자.
$\overline{f(x)}=g(x)\cdot(x+1)+J$인 $g(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$ 있다.
$\overline{g(x)(x+1)}\cdot\overline{(x+1)}=\overline{x+1},\ \overline{g(x)(x+1)^2}-\overline{x+1}=\overline{0}$이므로
$(x+1)^2g-(x+1)=x^2(x+1)\cdot h(x)\in J$인 $h(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$ 있다.
$(x+1)g-x^2h=1,\ h=-1,\ g=1-x$.
$\therefore\ f(x)+J=(1-x^2)+J=(1+2x^2)+J$.

14. $3(1+2i)(1-2i)=15\in I,\ \mathbb{Z}\cap I=15\mathbb{Z}$.
제2동형정리에 따라 $S/I=\mathbb{Z}+I/I\cong\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\cap I=\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_{15}$.
S/I의 위수, 표수는 각각 15, 15, 단원의 개수 $\varphi(15)=8$.

15. $x^3-x=x(x+1)(x-1),\ x,\ x+1,\ x-1$은 쌍마다 서로소이므로
중국나머지정리에 따라 $\mathbb{Z}_9[x]/\langle x^3-x\rangle\cong\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9$.
$\mathbb{Z}_9$는 단위원을 갖는 가환환이다.
$U(\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9)\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_6$, 단원의 개수 $6^3=216$.
$9=3^2$의 약수 개수 3이므로 $\mathbb{Z}_9$의 아이디얼 3개($\langle 0\rangle,\ \langle 3\rangle,\ \mathbb{Z}_9$).
따라서 $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_9$의 아이디얼의 개수 $3^3=27$, 구하는 값 27.

16. $K=\langle x^2+x+1\rangle$라 하자.
$\gcd(x,x^2+x+1)=1$이므로 제2동형정리에 따라
$I/J=I/I\cap K\cong I+K/K=\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x+1\rangle$.
$x^2+x+1\in\mathbb{Q}[x]$은 유리수 근을 갖지 않으므로 기약이고,
$\mathbb{Q}[x]$는 PID이므로 $\langle x^2+x+1\rangle$은 극대아이디얼이다.
$\therefore\ I/J\cong\mathbb{Q}[x]/\langle x^2+x+1\rangle$은 체.
$x\cdot(-x-1)+(x^2+x+1)\cdot 1=1,\ f(x)=x(-x-1)=-x^2-x$라 하자.
I/J의 임의의 원소 $\overline{xg(x)}$일 때,
$\overline{f(x)}\cdot\overline{xg(x)}=\overline{(-x^3-x^2)g(x)}=\overline{xg(x)}$이므로
$\overline{f(x)}=f(x)+J$는 I/J의 단위원.

17. $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1),\ \gcd(x+1,\ x^4-x^3+x^2-x+1)=1$.
$f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$의 한 근 α라 하자.
$\alpha\notin\mathbb{Z}_3$이고 $\mathbb{Z}_3(\alpha)\subset\mathrm{GF}(3^4)$.
$[\mathbb{Z}_3(\alpha):\mathbb{Z}_3]=2$이면 $\mathbb{Z}_3(\alpha)=\mathrm{GF}(3^2)$이므로 $\alpha^8=1$.
한편 $x^4-x^3+x^2-x+1\mid x^{10}-1$이므로 $\alpha^{10}=1$.
$\mathbb{Z}_3$에서 $\alpha^2=1$인 $\alpha=-1=2.\ f(-1)\neq 0$이므로 모순.
$\therefore\ \mathbb{Z}_3(\alpha)=\mathrm{GF}(3^4)$. 중국나머지정리에 따라
$\mathbb{Z}_3[x]/(x^5+1)\cong(\mathbb{Z}_3[x]/(x+1))\times(\mathbb{Z}_3[x]/(f(x)))$
$=\mathrm{GF}(3)\times\mathrm{GF}(3^4)$의 단원의 개수 $(3-1)(3^4-1)=160$.

18. $\alpha=\mathrm{lcm}(20,42)=420,\ \beta=840-\varphi(20)\cdot\varphi(42)-1=743$.
$\mathbb{Z}_{20}$의 극대아이디얼의 개수 2,
$\mathbb{Z}_{42}$의 극대아이디얼의 개수 3이므로 $\gamma=5=\delta$ (유한환이므로)
$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=1173$.

19. $K=\langle x^2-1\rangle$일 때, $(x^2+1)+(-1)(x^2-1)=2\in(\mathbb{Z}_5[x])^*$이므로
$I+K=\mathbb{Z}_5[x].\ I\cap K=\langle x^4-1\rangle=J$.
제2동형정리에 따라 $I/J=I/I\cap K\cong I+K/K=\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2-1\rangle$.
$(x+1)+(-1)(x-1)=2\in(\mathbb{Z}_5[x])^*$이므로 $\langle x+1\rangle+\langle x-1\rangle=\mathbb{Z}_5[x]$.
중국나머지정리에 따라
$\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2-1\rangle\cong(\mathbb{Z}_5[x]/\langle x+1\rangle)\times(\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-1\rangle)=\mathrm{GF}(5)\times\mathrm{GF}(5)$의
가역원의 개수 16.

20. 대응정리에 따라 $\mathbb{Q}[x]/(x^{14}-1)$의 아이디얼은
$\langle x^{14}-1\rangle\subset\langle f(x)\rangle\subset\mathbb{Q}[x]$인 아이디얼 $\langle f(x)\rangle$와 1−1대응.
$x^{14}-1=\prod_{d\mid 14}\Phi_d(x)=\Phi_1\Phi_2\Phi_7\Phi_{14}$이므로 $m=2^4=16,\ n=4$.

21. $x^2-x+2\in\mathbb{Z}_5[x]$는 $\mathbb{Z}_5$에서 근을 갖지 않으므로 기약이다.
$\mathbb{Z}_5[x]$는 PID이므로 $\langle x^2-x+2\rangle$는 극대아이디얼. $\therefore\ R_1=\mathrm{GF}(5^2)$.
$R_2\cong R_1$이려면 $f(x)$가 2차 기약다항식이어야 한다.
$\alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}_5$가 존재해서 $f(x)=(x+\alpha)^2-\beta$라 쓸 수 있으므로
$\left(\dfrac{\beta}{5}\right)=-1$, 즉 β가 이차비잉여일 때 근을 갖지 않으므로 $\beta=\dfrac{5-1}{2}=2$.
그러므로 $f(x)$의 개수 $2\times 5=10$.

22. $x^4-25=(x^2-5)(x^2+5)$. Kronecker 정리에 따라 x^2-5의 근 $\pm\overline{x}\in F$.
$\left(\dfrac{-5}{47}\right)=\left(\dfrac{-1}{47}\right)\left(\dfrac{5}{47}\right)=(-1)(-1)^{\frac{5-1}{2}\frac{47-1}{2}}\left(\dfrac{2}{5}\right)=(-1)(+1)(-1)=1$이므로
$x^2+5=0$인 $x\in\mathbb{Z}_{47}$은 2개 있다.
$\mathbb{Z}_{47}\subset F$이므로 x^2+5의 F에서의 근 2개.
그러므로 x^4-25의 근이 되는 $\alpha\in F$의 개수 4.
(F는 체이므로 주어진 다항식은 기껏해야 4개의 근을 갖는다.)

23. $R\cong\mathbb{Z}_{30}/\langle 20\rangle\times\mathbb{Z}_{30}/\langle 25\rangle\cong\mathbb{Z}_{\gcd(30,\,20)}\times\mathbb{Z}_{\gcd(30,\,25)}=\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_5$.
위수 50, 표수 10.

24. $m=\mathrm{lcm}(4,18,15)=180,\ n=\varphi(4)\varphi(18)\varphi(15)=2\cdot 6\cdot 8=96$,
$k=1+2+2=5.\ m+n+k=281$.

25. R의 극대아이디얼은 $a\mid 2020$인 a에 대해 $\langle\overline{a}\rangle=\langle a\rangle/\langle 2020\rangle$.
제3동형정리에 따라 $R/\langle\overline{a}\rangle=(\mathbb{Z}[i]/\langle 2020\rangle)/(\langle a\rangle/\langle 2020\rangle)\cong\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$.
$\mathbb{Z}[i]$는 PID이고 $\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$가 체이므로 a는 기약원.
$\mathbb{Z}[i]$에서 $2020=2^2\cdot 5\cdot 101=-(1+i)^4(2+i)(2-i)(10+i)(10-i)$이므로
R의 극대아이디얼은 5개 있다.

26. $I\cap J=\langle x(x-1)(x+1)\rangle$, x, $x-1$, $x+1$은 쌍마다 서로소이다.
중국나머지정리에 따라
$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_5[x]/(I\cap J)&\cong \mathbb{Z}_5[x]/\langle x\rangle\times\mathbb{Z}_5[x]/\langle x-1\rangle\times\mathbb{Z}_5[x]/\langle x+1\rangle\\&=\mathrm{GF}(5)\times\mathrm{GF}(5)\times\mathrm{GF}(5)\\&=\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_5\text{의 단원의 개수 } 4^3=64.\end{aligned}$$

27. $\mathbb{Z}[i]^*=\{\pm1,\ \pm i\}$.
$x+yi\in\ker(f)\ \Leftrightarrow\ x+2y\equiv x-2y\equiv 0\pmod 5$
$\Leftrightarrow\ x\equiv y\equiv 0\pmod 5$
$\Leftrightarrow\ x+yi\in\langle 5\rangle$이므로
$\mathbb{Z}[i]\supset\ker(f)=\langle 5\rangle=\langle -5\rangle=\langle 5i\rangle=\langle -5i\rangle$.

28. $N(6+7i)=85=5\cdot17$, $\dfrac{6+7i}{1+2i}=4-i$, $6+7i=(1+2i)(4-i)$.
$N(1+2i)=5$, $N(4-i)$는 소수이므로 $1+2i$, $4-i$는 기약원.
$\mathbb{Z}[i]$는 PID이므로 $\langle 1+2i\rangle$, $\langle 4-i\rangle$는 극대아이디얼.
중국나머지정리에 따라
$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[i]/\langle 6+7i\rangle&\cong\mathbb{Z}[i[/\langle 1+2i\rangle\times\mathbb{Z}[i]/\langle 4-i\rangle\\&=\mathrm{GF}(5)\times\mathrm{GF}(17)\text{의 단원의 개수 }\varphi(5)\varphi(17)=64.\end{aligned}$$

29. $\dfrac{4}{2+2i}=\dfrac{4(2-2i)}{8}=1-i$, $I=\langle 4\rangle+\langle 2+2i\rangle=\langle\gcd(4,\,2+2i)\rangle=\langle 2+2i\rangle$.
$\therefore\ a=2^2+2^2=8$, $b=2^2+2^2/\gcd(2,2)=4$.
R은 가환환이므로 R/I는 가환환.
$\langle R/I,\,+\rangle$는 위수 8인 가환군이고, 잉여환 R/I의 표수가 4이므로
유한 가환군의 기본정리에 따라
$\langle R/I,\,+\rangle\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$의 위수 2인 원소의 개수 3.

30. $N(\alpha)=85=5\cdot17$, $\dfrac{7-6i}{2-i}=\dfrac{(7-6i)(2+i)}{5}=\dfrac{20-5i}{5}=4-i$이므로
$7-6i=(2-i)(4-i)$.
$2-i$, $4-i$는 PID R의 기약원이므로 $\langle 2-i\rangle$, $\langle 4-i\rangle$는 극대아이디얼.
중국나머지정리에 따라
$R/I\cong R/\langle 2-i\rangle\times R/\langle 4-i\rangle=\mathrm{GF}(5)\times\mathrm{GF}(17)$의 단원의 개수 64.

31. (유클리드 알고리즘) $85=(1+13i)(-6i)+7+6i$, $1+13i=(7+6i)(1+i)+0$.
$\gcd(85,\,1+13i)=7+6i$.
$\therefore\ I=\pm\langle 7+6i\rangle=\pm i\langle 7+6i\rangle$, 구하는 값 85.

32. 임의의 정수 S일 때, $S^2\equiv 0$ 또는 $1\pmod 2$.
$a^2+b^2\equiv 0\pmod 2\ \Leftrightarrow\ a\equiv b\equiv 0\pmod 2$ 또는 $a\equiv b\equiv 1\pmod 2$.
$a\equiv b\equiv 0\pmod 2$인 경우 $I=\langle 2\rangle=\langle (1+i)(1-i)\rangle$, 극대아이디얼 아님.
$a\equiv b\equiv 1\pmod 2$인 경우 $I=\langle 1+i\rangle$이므로
$x=\pm(1+i)$, $\pm i(1+i)$.

33. $300=2^2\times3\times5^2$. $m=300-\varphi(300)-1=219$.
a : 멱영원 $\Leftrightarrow\ 30=2\cdot3\cdot5\mid a\in\mathbb{Z}_{300}\ \Leftrightarrow\ a\in\langle 30\rangle$, $n=\dfrac{300}{30}=10$.

34. $I=\langle c\rangle$, $\dfrac{17+6i}{9-6i}=1+\dfrac{4}{3}i$, $[1]+\left[\dfrac{4}{3}\right]i=1+i$.
$17+6i=(9-6i)(1+i)+(2+3i)$, $9-6i=(2+3i)(-3i)+0$, $N(2+3i)=13$.
$I=\langle a\rangle+\langle b\rangle=\langle\gcd(a,b)\rangle=\pm\langle 2+3i\rangle=\pm i\langle 2+3i\rangle$이므로
$c=\pm2+3i$, $\pm i(2+3i)$.

35. $A=(-4)^2+2^2=20$, $B=A/\gcd(4,2)=10$.
$-4+2i=-2(2-i)=i(1+i)^2(2-i)$, i는 단원.
$C=3\times2=6$, $D=E=2$.
구하는 값 40.

36. 제3동형정리에 따라
$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[x]/\langle x^2+a,\,5\rangle&\cong(\mathbb{Z}[x]/\langle 5\rangle)/(\langle x^2+a\rangle/\langle 5\rangle)\\&\cong\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2+a\rangle\end{aligned}$$
: 체 $\Leftrightarrow\left(\dfrac{-a}{5}\right)=-1\ \Leftrightarrow\ \mathbb{Z}_5$에 해 없다.
$\Leftrightarrow\ a\equiv 2,3\pmod 5$.
구하는 값 $\dfrac{2020}{5}\times2=808$.

37. PID $\mathbb{Z}[i]$의 잉여환은 PIR이다.
R의 아이디얼은 $a\mid 10$인 $a\in\mathbb{Z}[i]$에 대해 $\langle\bar{a}\rangle=\langle a\rangle/\langle 10\rangle$.
제3동형정리에 따라
$R/\langle\bar{a}\rangle\cong\mathbb{Z}[i]/\langle a\rangle$가 체가 될 필요충분조건은 a가 기약원.
$10=2\times5=-i(1+i)^2(1+2i)(1-2i)$이므로
R의 극대아이디얼은 3개 있다.

<체>

1. $\ker\psi_m$은 F_{p^m}의 아이디얼이므로 $\ker\psi_m=\{0\}$ 또는 F_{p^m}이고,
$\psi_m(1)=1$이므로 $\ker\psi_m=\{0\}$, ψ_m은 단사.
ψ_m은 단사인 환준동형사상이므로 $\mathrm{Im}\psi_m$은 F_{p^6}의 부분체이다.
따라서 $A\subset\{1,2,3,6\}$.
각 $m=1,\ 2,\ 3,\ 6$에 대해 동형사상 $\sigma_m : F_{p^m}\to F_{p^m}$, $\sigma_m(\alpha)=\alpha^p$ 있다.
따라서 환준동형사상 $\psi_m : F_{p^m}\to F_{p^6}$, $\psi_m(\alpha)=\alpha^p$ 있다.
$A=\{1,2,3,6\}$.
모든 ψ_m은 F_p를 고정하며 $\mathrm{Im}\psi_m=F_{p^m}$이므로 $a_m=\left|G(F_{p^m}/F_p)\right|=m$.
따라서 $\displaystyle\sum_{m\in A}a_m=1+2+3+6=12$.

2. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 2023번째 원분확대체이므로 $K=\mathbb{Q}(\zeta)$.
$G(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}^*_{7\times17^2}\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{16\cdot17}$.
$\sigma^n=\mathrm{id}\ \Leftrightarrow\ 2^n\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2023)\ \Leftrightarrow\ n\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 3\cdot8\cdot17)$.
$\therefore\ |\sigma|=408$.
가환군 $G(K/\mathbb{Q})$의 위수 6인 원소의 개수
$\varphi(6)(\varphi(1)+\varphi(2))+\varphi(3)\varphi(2)=6$이므로 위수 6인 부분군 $\dfrac{6}{\varphi(6)}=3$개 있다.
따라서 조건을 만족하는 중간체 3개 있다.

3. $K=\mathbb{Q}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $G(K/\mathbb{Q})\cong S_4$이므로
$G(K/\mathbb{Q})$는 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$에서 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$로의 치환으로 간주 가능.
$\beta=\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4$라 하면 $\alpha_1=\alpha_4$ 또는 $\alpha_2=\alpha_3$가 되어 모순이며,
$\beta=\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3$라 하면 $\alpha_1=\alpha_3$ 또는 $\alpha_2=\alpha_4$가 되어 모순이다.
$\therefore\ \{\sigma\in G(K/\mathbb{Q})\mid\sigma(\beta)=\beta\}$
$=\{1_K,\ (\alpha_1\,\alpha_2),\ (\alpha_3\,\alpha_4),\ (\alpha_1\,\alpha_2)(\alpha_3\,\alpha_4),\ (\alpha_1\,\alpha_3)(\alpha_2\,\alpha_4),\ (\alpha_1\,\alpha_4)(\alpha_2\,\alpha_3),$
$(\alpha_1\,\alpha_3\,\alpha_2\,\alpha_4),\ (\alpha_1\,\alpha_4\,\alpha_2\,\alpha_3)\}$.
$|G(K/\mathbb{Q}(\beta))|=8$이므로 $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=\dfrac{|G(K/\mathbb{Q})|}{|G(K/\mathbb{Q}(\beta))|}=\dfrac{4!}{8}=3$.
$G(K/\mathbb{Q}(\beta))$의 각 원소의 위수 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4이므로
$G(K/\mathbb{Q}(\beta))\cong D_4$.
D_4의 위수 2인 부분군 5개, 위수 4인 부분군 3개 있다.
그러므로 문제의 조건에 맞는 중간체 E는 8개 있다.

4. $f(x)=(x^3-1)(x^3+1)\cdot(x^7-1)\cdot(x-1)^{2^3}$
$=(x-1)^2(x^2+x+1)^2\cdot(x^7-1)\cdot(x-1)^{2^3}$
$=(x-1)^{10}(x^2+x+1)^2(x^7-1)$.
$x\cdot(x^7-1)=x^{2^3}-x$, $\gcd(2,3)=1$이므로
$K=\mathrm{SF}(f(x)/\mathbb{Z}_2)=\mathrm{SF}((x^2+x+1)(x^{2^3}-x)/\mathbb{Z}_2)$
$=\left\{x\in\overline{\mathbb{Z}_2}\ \middle|\ \mathrm{lcm}(x^{2^2}-x,x^{2^3}-x)=0\right\}$
$=\mathrm{GF}(2^6)$.
$G(K/\mathbb{Z}_2)\cong\mathbb{Z}_6$이므로 구하는 E는 2개 있다.

5. $\alpha=\sqrt[3]{2}$, $\beta=-\sqrt[3]{5}$이므로
$\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$는 각각 $g_1(x)=x^3+10$, $g_2(x)=5x^3+2$의 해.
아이젠슈타인 판정에 따라 g_1, g_2는 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이므로
$\left\{\alpha\beta,\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right\}\cap\mathbb{Q}=\varnothing$.
$w=e^{\frac{2\pi i}{3}}$일 때 $f(x)=0$의 해 αw^k, βw^k $(k=0,\ 1,\ 2)$.
$E=\mathbb{Q}(\alpha,\beta,w)=L(\beta)$. $G=\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$라 할 때
$G=\langle\sigma,\tau\rangle$, $\sigma(\alpha)=\alpha w$, $\sigma(w)=w$.
$\beta\in L$이면 $\beta\notin\mathbb{Q}$, $\tau(\beta)=\beta$이므로 $\sigma(\beta)=\{\beta w,\ \beta w^2\}$.
$\sigma(\beta)=\beta w$이면 $\sigma\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}$이고 $\sigma(\beta)=\beta w^2$이면 $\sigma(\alpha\beta)=\alpha\beta$가 되어
$\left\{\alpha\beta,\ \dfrac{\alpha}{\beta}\right\}\cap\mathbb{Q}=\varnothing$임에 모순이다.
따라서 $\beta\notin L$이므로 $\mathrm{irr}(\beta,L)=x^3+5$이며, $[E:L]=3$.

6. 그래프 개형으로부터 $f(x)=0$는
서로 다른 2개의 허근 α_1, α_2,
서로 다른 3개의 실근 β_1, β_2, β_3를 갖는다.
따라서 $G(K/\mathbb{Q})\cong H\le S_5$인 집합 $R=\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$위의 치환 군과 동형인 H가 존재한다.
K는 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체이므로 켤레동형사상 $\tau:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\tau(z)=\bar{z}$의 K로의 제한사상 $\tau|_K$는 $G(K/\mathbb{Q})$의 원소이다.
$\tau|_K(\beta_i)=\beta_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$이므로 코시 정리에 따라 H는 위수 5인 원소, 즉 길이 5인 순환치환을 갖는다.
그러므로 $G(K/\mathbb{Q})\cong H=S_5$이므로 $n=5$.
갈루아 정리에 따라
$m=$(위수 5인 S_5의 부분군의 개수)
$=\dfrac{(S_5\text{의 길이 5인 순환치환 개수})}{\varphi(5)}$
$=\dfrac{24}{4}=6$.

7. $\mathbb{Q}$ 위의 65차 원분확대체 $\mathbb{Q}(\alpha)$이므로
$|G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})|=\left|\mathbb{Z}^*_{65}\right|=\varphi(65)=48$.
명제(1)에 따라 $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))\cap G(K/\mathbb{Q}(\beta))=G(K/\mathbb{Q}(\alpha,\beta))=G(K/K)=\langle\mathrm{id}\rangle$.
$\mathbb{Q}(\alpha)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체이므로
명제(2)에 따라 $G(K/\mathbb{Q}(\alpha))\cdot G(K/\mathbb{Q}(\beta))=G(K/\mathbb{Q}(\alpha)\cap\mathbb{Q}(\beta))=G(K/\mathbb{Q})$.
$|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))\cdot G(K/\mathbb{Q}(\beta))|$
$=\dfrac{|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))|\cdot|G(K/\mathbb{Q}(\beta))|}{|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))\cap G(K/\mathbb{Q}(\beta))|}$
$=\dfrac{|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))|\cdot|G(K/\mathbb{Q}(\beta))|}{|\langle\mathrm{id}\rangle|}$
$=|G(K/\mathbb{Q})|$.
$\therefore\ |G(K/\mathbb{Q}(\beta))|=|G(K/\mathbb{Q})|/|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))|$
$=|G(K/\mathbb{Q})/G(K/\mathbb{Q}(\alpha))|$
$=|G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})|$.
$[K:\mathbb{Q}]=[K:\mathbb{Q}(\beta)][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$
$=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$
$=48\cdot10=480$.
$|G(K/\mathbb{Q}(\alpha))|=[K:\mathbb{Q}(\alpha)]=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}=\dfrac{480}{48}=10$.

8. $u^4 \in \mathbb{Q}$라 하면 $f(x) := \mathrm{irr}(u, \mathbb{Q}) \mid x^4 - u^4 \in \mathbb{Q}[x]$이므로
$x^4 - u^4 = f(x)g(x)$인 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$가 존재하며, 이때 $g(x) \in \mathbb{Q}$.
$f(x) = x^4 - u^4 = (x^2+u^2)(x^2-u^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm u,\ \pm ui,\ K = \mathbb{Q}(u, ui)$.
$[K : \mathbb{Q}(u)] = \deg(ui, \mathbb{Q}(u)) \le \deg(x^2+u^2) = 2,\ [\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 4$이므로
$24 = |S_4| = |G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] \le 8$, 모순.
$[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}] = 4$이므로 $[\mathbb{Q}(u^4) : \mathbb{Q}] = 2$ 또는 4.
$[S_4 : A_4] = 2$인 A_4에 대하여 $[A_4 : H] = 2$인 부분군 H는 없으므로
$[\mathbb{Q}(u^4) : \mathbb{Q}] = 4$. 따라서 $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^4)$.
$G(K/\mathbb{Q}(u)) \cong S_3$의 비자명 진부분군 4개 있으므로 중간체 개수 4.

9. $G(K/\mathbb{Q})$의 중심 Z에 대하여 $|Z| = 2,\ Z \triangle G(K/\mathbb{Q})$.
고정체 $K_Z = E$라 할 때, 갈루아 정리에 따라
E는 $\mathbb{Q}$의 정규확대이고, $[E : \mathbb{Q}] = 6$.
원시원소정리에 따라 $e = \mathbb{Q}(\alpha)$인 $\alpha \in K$ 있다.
$p(x) = \mathrm{irr}(\alpha, \mathbb{Q})$일 때 $\deg p(x) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [E : \mathbb{Q}] = 6$이고,
E는 $p(x)$의 근과 $\mathbb{Q}$를 포함하는 최소체이므로
E는 $\mathbb{Q}$ 위의 $p(x)$의 분해체이다.
$G(K/\mathbb{Q})/G(K/E) \cong G(E/\mathbb{Q}),\ |G(E/\mathbb{Q})| = 6$이므로
$G(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_6$ 또는 S_3.
$G(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_6$이면 $G(K/\mathbb{Q})/G(K/E) = G(K/\mathbb{Q})/Z \cong \mathbb{Z}_6$,
$G(K/\mathbb{Q}) \cong D_6$이므로 모순.
$G(E/\mathbb{Q}) \cong S_3$의 부분군 6개 있으므로 중간체 L의 개수 6.

10. $k \in \mathbb{Z}_5$에 대하여
$f(\alpha+k) = (\alpha+k)^5 + 4(\alpha+k) + 2 = \alpha^5 + k^5 + 4\alpha + 4k + 2 = 0$.
$\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \alpha+3,\ \alpha+4$는 $f(x)$의 서로 다른 모든 근.
$K = \mathbb{Z}_5(\alpha),\ \sigma \in G(K/\mathbb{Z}_5)$일 때 $\sigma(\alpha)$는 $f(x)$의 근이므로
$\sigma(\alpha) = \alpha + t$인 $t \in \mathbb{Z}_5$ 있다.
$\psi(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha = t \in \mathbb{Z}_5$.
$\sigma,\ \tau \in G(K/\mathbb{Z}_5)$일 때 $\sigma = \tau$이면 $\psi(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha = \tau(\alpha) - \alpha = \psi(\tau)$.
따라서 ψ는 잘 정의되었다.
$\sigma,\ \tau \in G(K/\mathbb{Z}_5)$일 때 $\sigma(\alpha),\ \tau(\alpha)$는 $f(x)$의 근이므로
$\sigma(\alpha) = \alpha + s,\ \tau(\alpha) = \alpha + t$인 $s,\ t \in \mathbb{Z}_5$ 있다.
따라서 $\psi(\sigma) + \psi(\tau) = \sigma(\alpha) - \alpha + \tau(\alpha) - \alpha = s + t$,
$\psi(\sigma \circ \tau) = \sigma(\tau(\alpha)) - \alpha = \sigma(\alpha + t) - \alpha = \sigma(\alpha) + \sigma(t) - \alpha = s + t$이므로
$\psi : (G, \circ) \to (\mathbb{Z}_5, +)$는 군 준동형사상.
$\ker\psi = \{\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_5) \mid \sigma(\alpha) = \alpha\} = \{\mathrm{id}\}$이므로 ψ는 단사.
$\mathbb{Z}_5$의 덧셈부분군 $\mathrm{Im}\psi$의 위수는 1 또는 5이다.
$\mathrm{Im}\psi = \{0\}$이면 임의의 $\sigma \in G(K/\mathbb{Z}_5)$일 때 $\psi(\sigma) = \sigma(\alpha) - \alpha = 0$이므로
$\sigma(\alpha) = \alpha$, 즉 $\sigma = 1_K$.
$[K : \mathbb{Z}_5] = |G(K/\mathbb{Z}_5)| = 1,\ \mathbb{Z}_5(\alpha) = K = \mathbb{Z}_5$이므로 $\alpha \in \mathbb{Z}_5$.
$f(x)$는 $\mathbb{Z}_5$에서 근을 갖지 않으므로 모순이다.
따라서 $\mathrm{Im}\psi = \mathbb{Z}_5$이므로 ψ는 전사.
그러므로 ψ는 군-동형사상이다.

11. $f(x) = \mathrm{irr}(e^{\frac{2\pi}{15}i}, \mathbb{Q}) = \Phi_{15}(x)$.
$x^{15} - 1 = \prod_{d \mid 15} \Phi_d = \Phi_1\Phi_3\Phi_5\Phi_{15}$,
$\Phi_{15} = f(x) = \dfrac{x^{15}-1}{\Phi_1\Phi_3\Phi_5} = \dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ (8차).
$f(i) = \dfrac{i^{10}+i^5+1}{i^2+i+1} = \dfrac{i^2+i+1}{i^2+i+1} = 1$.
$f(\alpha) = \dfrac{\alpha^{10}+\alpha^5+1}{\alpha^2+\alpha+1} = 0,\ \alpha^2+\alpha+1 \neq 0$.
$\alpha^{10} + \alpha^5 + 1 = 0,\ \alpha^5 + 1 + \alpha^{-5} = 0$.
$\alpha^5 + 1 + \alpha^{-5} = (\alpha+\alpha^{-1})^5 - {}_5\mathrm{C}_1(\alpha+\alpha^{-1})^3 + 5(\alpha+\alpha^{-1}) + 1$이므로
$\beta^5 - {}_5\mathrm{C}_1\beta^3 + 5\beta + 1 = 0$.
$x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1)$.
$x^4 + x^3 + 1$은 $\mathbb{Z}_2$에서 근을 갖지 않고,
$\mathbb{Z}_2[x]$의 2차 기약 다항식은 $x^2 + x + 1$ 뿐이므로
법 2-판정법에 따라 $\mathrm{irr}(\beta, \mathbb{Q}) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$.
$\beta = \alpha + \alpha^{-1} = e^{\frac{2\pi}{15}i} + e^{-\frac{2\pi}{15}i} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$.
$G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_k \mid \sigma_k(\alpha) = \alpha^k,\ k \in \mathbb{Z}_{15}^*\}$
$= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_8, \sigma_7, \sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{14}\}$이므로
$\sigma_k(\beta) = \sigma_k(\alpha + \alpha^{-1}) = \sigma_k(\alpha) + \sigma_k(\alpha^{-1}) = \alpha^k + \alpha^{-k} = \alpha^{ki\theta} + \alpha^{-ki\theta} = 2\cos(k\theta)$.
따라서 $\{2\cos\theta, 2\cos(2\theta), 2\cos(4\theta), 2\cos(8\theta)\}$: $\mathrm{irr}(\beta, \mathbb{Q})$의 해집합.
근과 계수와의 관계에 따라
$2\cos\theta \cdot 2\cos(2\theta) \cdot 2\cos(4\theta) \cdot 2\cos(8\theta) = 1$,
$2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 8\theta = 1$.
$\therefore\ \cos(\theta)\cos(2\theta)\cos(4\theta)\cos(8\theta) = \dfrac{1}{16}$,
$\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(8\theta) = \dfrac{1}{2}$.

12. 임의의 $\beta \in \mathrm{im}\psi$에 대하여 $\psi(\alpha) = \beta$인 $\alpha \in K$가 존재한다.
임의의 $\sigma \in H = G(K/K_H)$에 대하여 $\sigma(\alpha)$는 $\mathrm{irr}(\alpha, K_H)$의 근이고,
$\sum_{\sigma \in H} \sigma(\alpha)$는 $\mathrm{irr}(\alpha, K_H)$의 모든 근의 합이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 따라 $\beta \in K_H$. 즉, $\mathrm{im}\psi \subset K_H$.
차원 정리에 따라 $\dim_{\mathbb{Q}}(\ker\psi) = [K : \mathbb{Q}] - \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{im}\psi)$.
$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{im}\psi) = [K_H : \mathbb{Q}] = \dfrac{[K : \mathbb{Q}]}{[K : K_H]} = \dfrac{100}{|H|} = 5$이므로
$\dim_{\mathbb{Q}}(\ker\psi) = 95$.

13. $\alpha = \sqrt[3]{2}$일 때 $f(x)$의 서로 다른 모든 근 $\alpha\zeta^k$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 23)$.
$K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$. $\mathbb{Q}(\zeta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 24번째 원분확대체이므로
$[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = |G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})| = \varphi(24) = 8$.
소수 2에 관한 아이젠 슈타인 판정에 따라
$x^3 - 2$는 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이므로 $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^3 - 2) = 3$.
$\gcd(8, 3) = 1$이고 K는 $\mathbb{Q}$ 위의 갈루아 확대이므로
$|G(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = 24$.
$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$는 $x^3 - 2$의 모든 근을 포함하고 있지 않으므로
$\mathbb{Q}$ 위의 정규 확대체가 아니다.
따라서 $G(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$는 $G(K/\mathbb{Q})$는 정규부분군이 아니다.
$|G(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))| = \dfrac{[K : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]} = 8$이므로
$G(K/\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$는 $G(K/\mathbb{Q})$의 실로우 2-부분군.
$n_2 \neq 1,\ n_2 = 2k + 1 \mid 3$이므로 $n_2 = 3$.
따라서 L의 개수 3.
$\zeta^8 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2},\ \mathbb{Q}(\zeta^8) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}i),\ \zeta^4 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Q}(\zeta^8)$.
$x^4 - \zeta^4 \in \mathbb{Q}(\zeta^8)[x]$는 ζ를 근으로 가지므로 $\mathrm{irr}(\zeta, \mathbb{Q}(\zeta^8)) \mid x^4 - \zeta^4$.
$8 = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)][\mathbb{Q}(\sqrt{3}i) : \mathbb{Q}]$
$= 2[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta^8)]$이므로
$[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta^8)] = 4,\ \mathrm{irr}(\zeta, \mathbb{Q}(\zeta^8)) = x^4 - \zeta^4$.

14. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 15번째 원분확대체이므로
$K=\mathbb{Q}(\zeta)$, $G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ 1\le i\le \varphi(15),\ \gcd(i,15)=1\}\cong \mathbb{Z}_{15}^*$
$=\{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_4,\ \sigma_7,\ \sigma_8,\ \sigma_{11},\ \sigma_{13},\ \sigma_{14}\}$.
법 15에 관한 원시근 2이므로 $G(K/\mathbb{Q})=\langle\sigma_2\rangle$.
$\sigma_2(\alpha)=\alpha$이므로 $\mathbb{Q}(\alpha)\subset K_{\langle\sigma_2\rangle}$.
$[K:K_{\langle\sigma_2\rangle}]=\left|G(K/K_{\langle\sigma_2\rangle}\right|=|\sigma_2|=4$이므로 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=1$ 또는 2.
$\alpha\notin\mathbb{Q}$이므로 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=2$, 즉 $\mathbb{Q}(\alpha)=K_{\langle\sigma_2\rangle}$.
$G(K/K_{\langle\sigma_2\rangle})=\langle\sigma_2\rangle\cong\mathbb{Z}_4$의 비자명 진부분군 1개 있으므로
조건을 만족하는 중간체 1개 있다.

15. $\mathbb{Q}(\zeta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 7번째 원분확대체이므로
$G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ 1\le i\le\varphi(7),\ \gcd(i,7)=1\}\cong\mathbb{Z}_7^*$.
$\mathbb{Z}_7^*$에서 $|2|=3$이므로 $|\sigma|=|\sigma_2|=3$, $\langle\sigma\rangle=\{\sigma,\sigma^2,\mathrm{id}\}$.
$\sigma(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6)=\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6$이므로 $\mathbb{Q}(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6)\subset\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma\rangle}$.
$3=|\sigma|=\left|G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma\rangle})\right|=[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma\rangle}]$이므로
$[\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma\rangle}:\mathbb{Q}]=2$, $\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6\notin\mathbb{Q}$이므로 $\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma\rangle}=\mathbb{Q}(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6)$이고,
$f(x):=\mathrm{irr}(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6)$의 차수 2이다.
$\mathbb{Z}_7^*$의 원시근 3이므로 $\sigma_3(\zeta)=\zeta^3$인 σ_3에 대하여 $G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})=\langle\sigma_3\rangle$.
따라서 $\sigma_3(\zeta^3+\zeta^5+\zeta^6)=\zeta^2+\zeta^1+\zeta^4$은 $f(x)$의 근이다.
$\zeta^7=1$, $\zeta^6+\cdots+\zeta=-1$이므로
$f(x)=(x-(\zeta+\zeta^5+\zeta^6))(x-(\zeta+\zeta^2+\zeta^4))=x^2+x+2$.
$f(x)$의 근 $\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}$이므로 $\sqrt{-7}\in\mathbb{Q}(\zeta)$.
$[\mathbb{Q}(\sqrt{-7}):\mathbb{Q}]=2=|\sigma^2|=\left|G(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma^2\rangle})\right|$이고
$\mathbb{Z}_7^*\cong\mathbb{Z}_6$는 순환군이므로(부분군 유일) $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})=\mathbb{Q}(\zeta)_{\langle\sigma^2\rangle}$.

16. $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{14}}$, $G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ 1\le i\le\varphi(14),\ \gcd(i,14)=1\}\cong\mathbb{Z}_{14}^*$.
$=\langle\sigma_3\rangle=\{\sigma_3,\ \sigma_3^2,\ \sigma_3^3,\ \sigma_3^4,\ \sigma_3^5,\ \mathrm{id}\}$이므로
$A=\{\zeta^3,\ \zeta^9,\ \zeta^{27},\ \zeta^{81},\ \zeta^{243},\ \zeta\}$
$=\{\zeta,\ \zeta^{-1},\ -\zeta^2,\ -\zeta^{-2},\ \zeta^3,\ \zeta^{-3}\}$.
$\Phi_{14}(x)=\prod_{\alpha\in A}(x-\alpha)=\dfrac{x^{14}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_7}=\dfrac{x^{14}-1}{(x^7-1)(x^2-1)/(x-1)}=\dfrac{x^7+1}{x+1}$이므로
$\prod_{\alpha\in A}(2-\alpha)=\Phi_{14}(2)=43=(2-\zeta)(2-\zeta^{-1})(2+\zeta^2)(2+\zeta^{-2})(2-\zeta^3)(2-\zeta^{-3})$.

17. 법 13의 한 원시근 2이므로 모든 원시근 2, 6, 11, 7.
$A=\{2,6,7,11\}$. $\sigma(w)=w^2$인 σ에 대하여
$f(x)=\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q})$의 해집합 $\{\alpha,\sigma(\alpha)\}$.
$w^{13}=1$, $w^{12}+\cdots+w=-1$임을 이용하면
이차다항식 $f(x)=(x-\alpha)(x-\sigma(\alpha))=x^2-x-3$.
구하는 값 -1.

18. $x^{125}-x=x(x^{124}-1)=x(x^{62}-1)f(x)$의 분해체 $\mathrm{GF}(5^3)$의 부분체는
$\mathbb{Z}_5$, $\mathrm{GF}(5^3)$, 2개 있으므로 $f(x)$의 분해체는 $\mathbb{Z}_5$ 또는 $\mathrm{GF}(5^3)$.
$\gcd(f(x),f'(x))=1$이므로 $f(x)$는 분리다항식(중근 없음).
$\therefore$ $K=\mathrm{GF}(5^3)$.
$\left|G(K/\mathbb{Z}_5)\right|=[K:\mathbb{Z}_5]=3$, 위수 124인 순환군 K^*의 부분군의 개수 6.

19. $\mathrm{irr}(\zeta,\mathbb{Q})=\Phi_{16}=\dfrac{x^{16}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_4\Phi_8}=\dfrac{x^{16}-1}{x^8-1}=x^8+1$.
$K=\mathbb{Q}(\zeta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 16번째 원분확대체이므로
$G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ 1\le i\le 16,\ \gcd(i,16)=1\}\cong\mathbb{Z}_{16}^*\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$
$=\{\sigma_1,\ \sigma_3,\ \sigma_5,\ \sigma_7,\ \sigma_9,\ \sigma_{11},\ \sigma_{13},\ \sigma_{15}\}$.
$G(K/\mathbb{Q}(i))=\{\tau\in G(K/\mathbb{Q}) \mid \tau(i)=i\}$
$=\{\sigma_k\in G(K/\mathbb{Q}) \mid k\equiv 1\pmod 4\}$
$=\{\sigma_1,\ \sigma_5,\ \sigma_9,\ \sigma_{13}\}$
$=\langle\sigma_5\rangle\cong\mathbb{Z}_4$의 부분군의 개수 3이므로 구하는 값 1.

20. $G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(w)=w^i,\ 1\le i\le 5,\ \gcd(i,5)=1\}\cong\mathbb{Z}_5^*\cong\mathbb{Z}_4$.
$w^5=1$, $w^4+w^3+w^2+w+1=0$이므로 $\alpha=w+w^{-1}$라 할 때
$\alpha^2+\alpha-1=0$, α는 기약다항식 $x^2+x-1\in\mathbb{Q}[x]$의 근. ($\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$)
$\sigma_4(\alpha)=w^4+w^{-4}=w^{-1}+w=\alpha$이므로 $\mathbb{Q}(\alpha)\subset E_{\langle\sigma_4\rangle}$.
$[E:E_{\langle\sigma_4\rangle}]=\left|G(E/E_{\langle\sigma_4\rangle})\right|=|\sigma_4|=2$.
$G(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_4$는 순환군이고, $\alpha\notin\mathbb{Q}$이므로 $E_{\langle\sigma_4\rangle}=\mathbb{Q}(\alpha)$, $[E:F]=2$.
$\mathbb{Z}_4$의 위수 2인 부분군은 유일하므로
$i\in E$이라면, $[\mathbb{Q}(i):\mathbb{Q}]=\deg(x^2+1)=2=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$이므로
$\mathbb{Q}(i)=\mathbb{Q}(\alpha)$, 모순이다.
$E(i)=\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5},\ e^{2\pi i/4})=\mathbb{Q}(e^{2\pi i/20})$이므로 $G(L/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_{20}^*\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$.
$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$의 부분군의 개수 8이므로 중간체 8개 있다.

21. $x^{28}-1=\prod_{d\mid 28}\Phi_d(x)=\Phi_1^1\Phi_2^1\Phi_4^1\Phi_7^1\Phi_{14}^1\Phi_{28}^1$, Φ_d는 $\mathbb{Q}$ 위에서 기약이므로
("소인수분해")
아이디얼의 개수는 $(1+1)^6=2^6=64$개. (극대아이디얼 6개)

22. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 5번째 원분확대체이므로 $[K:\mathbb{Q}]=\varphi(5)=4$.
$E=\mathbb{Q}(w,\ \sqrt[5]{2})$, $\gcd(4,5)=1$이므로 $[E:\mathbb{Q}]=2^2\cdot 5=|G(E/\mathbb{Q})|$.
$5=[E:K]=\deg(\sqrt[5]{2},\ K)$이므로 $\mathrm{irr}(\sqrt[5]{2},\ K)\mid f(x)$.
$f(x)$는 5차 모닉다항식이므로 $f(x)=\mathrm{irr}(\sqrt[5]{2},\ K)$는 K 위에서 기약.
$G(E/\mathbb{Q})$의 실로우 2-부분군 $G(E/F)$의 개수 $n_2\equiv 1\pmod 2$, $n_2\mid 5$.
$\therefore$ $n_2\in\{1,\ 5\}$.
$n_2=1$이면 $G(E/F)\triangle G(E/\mathbb{Q})$이므로 F는 $\mathbb{Q}$위의 정규확대이고
$|G(E/F)|=[E:F]=4$, $[F:\mathbb{Q}]=5$인 $F=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$는 정규확대 아님, 모순.
$\therefore$ $n_2=5$, 조건을 만족하는 F는 5개 있다.

23. $x^{30}-1=\prod_{d\mid 30}\Phi_d(x)$이므로
$\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Q})=\Phi_{30}(x)=\dfrac{x^{10}-x^5+1}{x^2-x+1}=x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1$.
K는 $\mathbb{Q}$ 위의 30번째 원분확대체이므로 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$.
$\beta=\dfrac{1}{2}\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\in\mathbb{Q}(\alpha)$이므로 $\mathbb{Q}(\beta)\subset\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{Q}(\beta)(\alpha)=\mathbb{Q}(\alpha)$.
$x^2-2\beta x+1\in\mathbb{Q}(\beta)[x]$의 두 근 α, $\overline{\alpha}\notin\mathbb{R}$이고 $\mathbb{Q}(\beta)\subset\mathbb{R}$이므로
$\mathrm{irr}(\alpha,\ \mathbb{Q}(\beta))=x^2-2\beta x+1$.
$|G(K/\mathbb{Q}(\beta))|=[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}(\beta)]=\deg(\alpha,\ \mathbb{Q}(\beta))=2$.

24. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 7번째 원분확대체이므로 $K=\mathbb{Q}(w)$,
$G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(w)=w^i,\ 1\le i\le 7,\ \gcd(i,7)=1\}\cong\mathbb{Z}_7^*=\langle 3\rangle$
$=\langle\sigma_3\rangle$의 모든 부분군 $\langle\sigma_3\rangle$, $\langle\sigma_3^2\rangle$, $\langle\sigma_3^3\rangle$, $\langle\sigma_3^6\rangle$.
$\beta=w+w^2+w^4$라 하자.
$\sigma_3(\beta)\ne\beta$, $\sigma_3^3(\beta)\ne\beta$, $\sigma_3^2(\beta)=\beta$이고, "자명하게" $\beta\notin\mathbb{Q}$이므로
$E=K_{\langle\sigma_3^2\rangle}$, $|G(K/E)|=|\sigma_3^2|=3=[K:E]$.
$[E:\mathbb{Q}]=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[K:E]}=2$.

25. $\zeta=e^{\frac{20\pi}{19}i}$라 하자. $\zeta^{19}=1$, $\mathrm{irr}(\zeta,\ \mathbb{Q})=x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1$.
$\alpha=\dfrac{1}{2}(\zeta+\zeta^{-1})$이므로 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\zeta+\zeta^{-1})\subset\mathbb{Q}(\alpha)(\zeta)=\mathbb{Q}(\zeta)$.
$\mathbb{Q}(\zeta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 19번째 원분확대체이므로 $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]=\varphi(19)=18$.
$f(x)=x^2-(\zeta+\zeta^{-1})x+1=x^2-2\alpha x+1\in\mathbb{Q}(\alpha)[x]$에 대하여
$f(\zeta^{-1})=f(\zeta)=0$, ζ, ζ^{-1}는 복소수이고 $\mathbb{Q}(\alpha)\subset\mathbb{R}$이므로
$f(x)$는 $\mathbb{Q}(\alpha)$ 위에서 기약.
$\therefore$ $[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}(\alpha)]=\deg(\zeta,\ \mathbb{Q}(\alpha))=\deg f(x)=2$.
$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\dfrac{[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}(\alpha)]}=9$.

26. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 26번째 원분확대체이므로 $K=\mathbb{Q}(\alpha)$, $G(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_{26}^* \cong \mathbb{Z}_{12}$.
$\alpha^{26}=1$, $\alpha^{13}=-1$, K의 중간체의 구조는 $\mathbb{Z}_{12}$의 부분군의 구조와 같다.
$\sigma^2(\alpha)=\alpha^{-9}=-\alpha^4$, $\sigma^3(\alpha)=\alpha^{-27}=\alpha^{-1}$, $\sigma^6(\alpha)=\alpha$이므로 $|\sigma|=6$.
$\sigma(\beta)=\alpha^{-3}+\alpha^{-9}+\alpha^{-27}=-\alpha^{10}-\alpha^4+\alpha^{-1}$,
$\sigma^2(\beta)=-\alpha^{-30}-\alpha^{-12}+\alpha^3=\alpha^9+\alpha+\alpha^3=\beta$이므로 $\beta\notin K_{\langle\sigma\rangle}$, $\beta\in K_{\langle\sigma^2\rangle}$.
$\beta\notin\mathbb{Q}$이므로 $\mathbb{Q}(\beta)=K_{\langle\sigma^2\rangle}$이다.
$[K:\mathbb{Q}(\beta)]=[K:K_{\langle\sigma^2\rangle}]=\left|G(K/K_{\langle\sigma^2\rangle})\right|=\left|\sigma^2\right|=3$.
$\langle\sigma^2\rangle=\{\mathrm{id},\sigma^2,\sigma^4\}$이므로
$g(x)=(x-\mathrm{id}(\alpha))(x-\sigma^2(\alpha))(x-\sigma^4(\alpha))=(x-\alpha)(x-\alpha^4)(x-\alpha^3)$.

27. $G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$는 가환이므로 모든 부분군이 정규부분군.
따라서 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\beta)$는 β를 포함하는 $\mathbb{Q}$ 위의 분해체이므로
$\mathrm{irr}(\beta,\mathbb{Q})$의 분해체이다.
$G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}))/G(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\beta))\cong G(\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{10}$.
$\mathbb{Z}_{10}$의 부분군의 구조와 $\mathbb{Q}(\beta)$의 부분체의 구조가 일치하므로
조건을 만족하는 중간체 F는 4개 있다.

28. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 91번째 원분확대체이므로
$[K:\mathbb{Q}]=\varphi(91)=72=|G(K/\mathbb{Q})|$, $G(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_{91}^*\cong\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{12}$.
$H=G(K/K_H)\cong\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3$, $[K:F]=|G(K/F)|=3$.
$\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3$의 위수 3인 원소의 개수 $3^2-1=8$이므로
위수 3인 부분군의 개수 $\dfrac{8}{\varphi(3)}=4$.
그러므로 조건을 만족하는 중간체 F는 4개 있다.

29. $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{13}}$. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 13번째 원분확대체이므로
$[K:\mathbb{Q}]=\varphi(13)=12=|G(K/\mathbb{Q})|$,
$G(K/\mathbb{Q})=\{\sigma_i \mid \sigma_i(\zeta)=\zeta^i,\ 1\le i\le 13,\ \gcd(1,13)=1\}\cong\mathbb{Z}_{13}^*=\langle 2\rangle$.
$=\langle\sigma_2\rangle$.
$|\sigma|=|\sigma_5|=4$이므로 $[K_{\langle\sigma\rangle}:\mathbb{Q}]=\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{[K:K_{\langle\sigma\rangle}]}=\dfrac{12}{|\sigma|}=3$.
한편 $\sigma(\beta)=\beta$이므로 $\beta\in K_{\langle\sigma\rangle}$, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\beta)\subset K_{\langle\sigma\rangle}$.
$\beta\notin\mathbb{Q}$임을 보이자.
만약 $\beta\in\mathbb{Q}$이면 α는 $x^4+x^6+x^7+x^9-\beta\in\mathbb{Q}(\beta)[x]=\mathbb{Q}[x]$의 근이므로
$\Phi_{13}(x)=\mathrm{irr}(\alpha,\mathbb{Q}) \mid x^4+x^6+x^7+x^9-\beta$, $12=\deg(\alpha,\mathbb{Q})\le 9$, 모순.
따라서 $\beta\notin\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\beta)\neq\mathbb{Q}$.
그러므로 $\mathbb{Q}(\beta)=K_{\langle\sigma\rangle}$. $[K:\mathbb{Q}(\beta)]=[K:K_{\langle\sigma\rangle}]=\left|G(K/K_{\langle\sigma\rangle}\right|=|\sigma|=4$.

30. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 1800번째 원분확대체이므로
$[K:\mathbb{Q}]=|G(K/\mathbb{Q})|=\varphi(1800)=480$,
$G(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_{480}^*\cong(\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_{2^{3-2}})\oplus\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_{20}$의 부분군의 구조는
K의 부분체의 구조와 일치한다.
$H=G(K/K_H)$, $G(K/\mathbb{Q})/H\cong G(K_H/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_{30}$.
$\mathbb{Z}_{30}$의 부분군의 개수 8이므로 조건을 만족하는 중간체 F 8개 있다.

31. $\gcd(f(x),f'(x))=1$이므로 $f(x)$는 중근을 갖지 않는다.
K는 분리다항식 $x^{7^m}-x$의 분해체이므로 $f(x) \mid x^{7^m-1}-1$.
$7^m-1\equiv 0 \pmod{100}$인 최소의 $m=4$.
$\therefore$ $G(K/\mathbb{Z}_7)\cong\mathbb{Z}_4$의 부분군 3개 있다.

32. K는 $\mathbb{Q}$ 위의 2017번째 원분확대체이므로 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_{2017}^*\cong\mathbb{Z}_{2016}$.
$\mathbb{Z}_{2016}$의 부분군의 구조와 K의 중간체의 구조가 일치한다.
$\mathrm{Gal}(K/F)\triangle\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$이므로 $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})\cong\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})/\mathrm{Gal}(K/F)\cong\mathbb{Z}_{126}$.
$\mathbb{Z}_{126}$의 부분군의 개수 12개 있으므로 조건을 만족하는 중간체 12개 있다.

[실해석학]

<미적분학(편도함수 · 다중적분)>

1. $f_x = 2kx + 2ky + 3x^2$, $f_y = 2kx + 6y$. $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$.

$f_{xx} = 2k + 6x$, $f_{xy} = 2k = f_{yx}$, $f_{yy} = 6$.

$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$라 하면 이계도함수판정법에 따라

$D(0,0) = 12k - 4k^2 > 0$, $f_{xx}(0) = 2k > 0$일 때 극소.

$A = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k < 3\}$.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{1}{r^3} dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{1}{r^3} dr d\theta$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2\theta}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2\theta}{2} d\theta$

$\displaystyle= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx + \int_0^1 \int_0^y e^{-y^2} dx dy = 2\int_0^1 x e^{-x^2} dx = 1 - e^{-1}$.

4. $[x^2 + y] = 0 \Leftrightarrow 0 \le x^2 + y < 1 \Leftrightarrow -x^2 \le y < 1 - x^2$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} 0 \, dy dx = 0$.

$[x^2 + y] = 1 \Leftrightarrow 1 \le x^2 + y < 2 \Leftrightarrow 1 - x^2 \le y < 2 - x^2$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x^2}^1 dy dx = \frac{1}{3}$.

구하는 값 $\frac{1}{3}$.

5. $x - y = u$, $4y - z = v$, $z - x = w$, $\displaystyle\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 = \frac{1}{J}$.

$(x,y,z) \in D \Leftrightarrow (u,v,w) \in D' = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 \le 1\}$.

$\displaystyle\iiint_{D'} \frac{1}{3} |u| = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 |\rho \sin\phi \cos\theta| \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{6}$.

6. $\nabla f = (2-y, 2-x)$, $\nabla g = (2x+y, x+2y)$

$\begin{cases} 2 - y = \lambda(2x+y) \\ 2 - x = \lambda(x+2y) \end{cases} \Rightarrow x - y = \lambda(x-y)$.

① $\lambda = 1$: $x + y = 1 \Rightarrow (2,-1), (-1,2)$일 때 $f(x,y) = 4$.

② $x = y$: $(1,1), (-1,-1)$일 때 $f(x,y) = -5$.

$m = 4$, $n = -5$.

7. $P = xe^{x^2+y^2} + 3xy$, $Q = ye^{x^2+y^2} + x^2$라 하면

$Q_x = 2xye^{x^2+y^2} + 2x$, $P_y = 2xye^{x^2+y^2} + 3x$.

그린 정리에 따라 $\displaystyle\iint_{\mathrm{int}(C) \cup \mathrm{b}(C)} Q_x - P_y \, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} -x \, dy dx = -\frac{1}{6}$.

8. $\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ 또는 } y = 2x + 2 = 0 \\ x = 0 \text{ 또는 } x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0), (-2,0), (0,-2), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$, $D(0,0) < 0$, $D(-2,0) < 0$, $D(0,-2) < 0$: 안장점.

$D\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} > 0$, $f_{xx}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) < 0$. 극댓값 $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$.

9. $\operatorname{div} V = \nabla \cdot V = 3z^2$. 발산 정리에 따라

$\displaystyle\iiint_M 3z^2 dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 3z^2 dz \right] dx dy$

$\displaystyle= \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2(1-r^2)^{\frac{3}{2}} r \, dr d\theta = \frac{4}{5}\pi$.

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^2 \theta \cdot r \, dr d\theta = \frac{\pi^2}{32}$.

11. $\displaystyle\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, $|J| = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{v}{2} \sin\frac{uv}{2\pi} \, du dv = \frac{16}{3}\pi$.

12. 부피 $\frac{1}{6}$, $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz dy dx = \frac{1}{24}$.

13. $\displaystyle 32\pi = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le r^2} \operatorname{div}(V) \, dV = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le r^2} 3 \, dV = 4\pi r^3$, $r = 2$.

$S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

14. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^3 r^3 \, dr d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r \sin(\pi r^2) dr d\theta = \frac{81}{4}\pi + 1$.

15. $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \sin 2x$.

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin 2x} \frac{dy dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}} dx$ ($\sin^2 x = t$ 치환)

$\displaystyle= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ ($t = \sin u$ 치환)

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1 du$

$= \frac{\pi}{6}$.

16. $x - y = u$, $x + 2y = v$, $\displaystyle\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $J = \frac{1}{3}$.

$1 \le u \le 2$,

$0 \ge 3y = v - u$, $0 \le 3x = 2u + v$이므로 $-2u \le v \le u$.

$\displaystyle\int_1^2 \int_{-2u}^u e^{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{2}(e - e^{-2})$.

17. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $J = r$, $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2 \, dr d\theta dz = \frac{324}{5}\pi$.

18. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$라 하면

$\displaystyle\lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r \to 0} \frac{r^m \cos^m\theta}{r^2} \frac{\sin(r^2)}{r^2} = \begin{cases} \text{발산}, & m = 1 \\ \cos^2\theta, & m = 2 \\ 0, & m \ge 3 \end{cases}$ 이므로

$\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$이기 위한 최소의 자연수 $m = 3$.

$\displaystyle D_u f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(ah, bh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^3 \sin(h^2)}{h^2} = a^3$.

f가 $(0,0)$에서 미분가능하면

$D_u f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot u = \langle 1, 0 \rangle \cdot \langle a, b \rangle = a$가 되어 모순.

따라서 f는 $(0,0)$에서 미분가능하지 않다.

19. $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{r} \, dr d\theta = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2} - 1)$.

20. $x = f(y)$, $\displaystyle dx = f'(y) dy = \frac{ye^y - e^y}{y^2} dy$

$\displaystyle\int_1^2 y^2 \cdot \frac{ye^y - e^y}{y^2} dy = [ye^y - 2e^y]_1^2 = e$.

21. $g(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y-1$

$\nabla f=\lambda\nabla g \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x-1+y)=\lambda(2x+y-1)\\ x(x-1+2y)=\lambda(x+2y-1)\end{cases}$

① $2x+y-1=0$: $3x^2-2x-1=0$, $\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$, $(1,-1)$.

② $2x+y-1\neq 0$: $\lambda=y$.

$\begin{cases} x+2y-1=0 \to \left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right),\ (-1,1)\\ x-2y-1\neq 0 \Rightarrow \lambda=x=y \to \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right),\ (1,1)\end{cases}$

$f(1,-1)=f(-1,1)=f(1,1)=1=m$

$f\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{27}=n.$

22. f는 연속이고 A에서 $(x+y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=24$이므로
A는 유계폐집합이다. 최대최소 정리에 따라
f는 A에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
라그랑주 승수법 적용.
$\lambda\neq 0$이면
$g_x=2x+y-z=\lambda\cdot 1=\lambda\cdot f_x$ $-$①
$g_y=2y+x-z=\lambda\cdot 1=\lambda\cdot f_y$ $-$②
$g_z=2z-y-x=2\lambda$
①$-$② : $x=y=\lambda$
$\begin{cases} 3x-z=\lambda\\ 2x-2x=2\lambda\end{cases} \Rightarrow 2x=2\lambda,\ z=2\lambda.$
$g(x,y,z)=12$에 대입하면
$\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2+\lambda^2-2\lambda^2-2\lambda^2=12,\ \lambda=\pm 2.$
$\lambda=2$일 때 $f(2,2,4)=12=M,$
$\lambda=-2$일 때 $f(-2,-2,-4)=-12=m$
($\lambda=0$인 경우 $x=y=z$ $g=g(x,x,x)=0$, 모순.)

23. $\nabla f=(4x-2y,-2x+2y-1)=(0,0) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\ y=1.$

$f\left(\frac{1}{2},1\right)=\frac{5}{2}.$

$y=0,\ 0\le x\le 2$일 때 $f(x,y)=2x^2+3$, 최솟값 3, 최댓값 11

$x=0,\ 0\le y\le 2$일 때 $f(x,y)=y^2-y+3$, 최솟값 $\frac{11}{4}$, 최댓값 5

$y=-x+2,\ 0\le x\le 2$일 때 $f(x,y)=5x^2-7x+5$, 최솟값 $\frac{51}{20}$, 최댓값 11

구하는 값 $\frac{27}{2}$.

24. $f_{xx}=2>0,\ f_{xy}=-2,\ f_{yy}=2k,\ D(0,0)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=4k-4>0 \Leftrightarrow k>1.$

25. $\nabla f=(2x+y,x+2y)=(0,0) \Leftrightarrow x=y=0,\ (0,0)\in D,\ f(0,0)=0.$
D의 경계 ∂D : $x^2+y^2=4$에서 라그랑주 승수법 적용.

$(2x+y,x+2y)=\lambda(2x,2y) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \Rightarrow 2x^2=4,\ x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp\sqrt{2}\\ \lambda=\frac{3}{2} : y=x \Rightarrow x=\pm\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}.$

$f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=2,\ f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})=6.$
$M+m=0+6=6.$

26. $I_1+I_2+I_3=\int_0^1\int_{x^2}^{3-\sqrt{x}}\frac{y}{3-x^2-\sqrt{x}}dydx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(3-\sqrt{x})^2-(x^2)^2}{3-x^2-\sqrt{x}}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 3-\sqrt{x}+x^2dx=\frac{4}{3}.$

27. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$

28. $\nabla f=(4x+1,2y)=(0,0) \Leftrightarrow (x,y)=\left(-\frac{1}{4},0\right)\in D.\ f\left(-\frac{1}{4},0\right)=-\frac{17}{8}.$

D의 경계 ∂D에서 $f(x,y)=x^2+x+2$ $(0\le x\le 2)$의 최댓값 8, 최솟값 $\frac{7}{4}$.

구하는 값 $8-\frac{17}{8}=\frac{47}{8}.$

29. $F_x=\int_0^1 2(xt+y-t^2)\cdot t\,dt=\frac{2}{3}x+y-\frac{1}{2},$

$F_y=\int_0^1 2(xt+y-t^2)\,dt=x+2y-\frac{2}{3}$ 로 부터 $x+y=\frac{5}{6}.$

$F_{xx}=\frac{2}{3}>0,\ F_{xy}=1,\ F_{yy}=2,\ D(x,y)=\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy}\\ F_{yx} & F_{yy}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}>0.$

구하는 값 $\frac{5}{6}$.

30. $F_x(1,0)=\lim_{x\to 1}\frac{F(x,0)-F(1,0)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)=3.$

$F_y(1,0)=\lim_{y\to 0}\frac{F(1,y)-F(1,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{f(1+y)-f(1)}{y}-f'(1)}{y}=\frac{1}{2}f''(1)=\frac{3}{2}.$

구하는 값 $\frac{9}{2}$.

31. $I=\int_0^2\int_{2x}^4 e^{y^2}dydx+\int_0^2\int_0^{2x}e^{4x^2}dydx=\frac{1}{2}(e^{16}-1).$

32. $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ J=r.$ $1\le r\sin\theta\le\sqrt{3}r\cos\theta\le\sqrt{3}$이므로

$(x,y)\in A \Leftrightarrow \frac{1}{\sin\theta}\le r\le\frac{1}{\cos\theta},\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}.$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\sin\theta}}^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^5}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{3\sqrt{3}+1-4\sqrt{2}}{24}.$

33. $x+y=u,\ x-y=v,\ \frac{1}{J}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\ |J|=\frac{1}{2}.$

$(x,y)\in D \Leftrightarrow 1\le u\le 2,\ \frac{1}{u}\le v\le\frac{4}{u}$이므로

$\int_1^2\int_{\frac{1}{u}}^{\frac{4}{u}}\frac{u+v}{2}\,\frac{u-v}{2}\cdot\frac{1}{2}dv\,du=-\frac{27}{64}.$

34. 곡선 C_a로 둘러싸인 영역을 R이라 하면 그린정리에 따라

$I_a=\iint_R(g_x-f_y)dxdy=0.$

$\int_{\overline{OA}}fdx+gdy=\int_0^a\sin(x^2)dx,\ \int_{\overline{AB}}fdx+gdy=\int_0^a e^{-2ay}\cos(a^2-y^2)dy,$

$\int_{\overline{BO}}fdx+gdy=-\int_0^a e^{-2y^2}dy.$

$\left|\int_{\overline{AB}}fdx+gdy\right|\le\int_0^a e^{-2ay}dy=\frac{1}{2a}\left(1-e^{-2a^2}\right),\ \lim_{a\to\infty}I_a=0$이므로

$\int_0^\infty\sin(x^2)dx=\int_0^\infty e^{-2y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

35. $F=xy\cos(xy)+\sin(xy),x^2\cos(xy))$에 대하여 $f(x,y)=x\sin(xy)$라 하면
$\nabla f=F.$ 선적분의 기본정리에 따라

$\int_C F\cdot d\alpha=f(4,1)-f(2,-1)=4\sin 4+2\sin 2,$

$\int_C\pi x dy=\int_{-1}^1\pi(t^5+3)\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt=3\pi^2\int_0^1\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt=6\pi$이므로

주어진 식의 값은 $\int_C F\cdot dr+\int_C\pi x dy=4\sin 4+2\sin 2+6\pi.$

36. $\int_{C_2} f\,dx = \int_1^2 f(\gamma(t)) \parallel \gamma'(t) \parallel dt = \int_1^2 \frac{t^3}{\sqrt{1+4t^2}} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_1^2 t^3 dt = \frac{15}{4}.$

$\int_{C_a} F \cdot T ds = \int_1^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_1^a \left(\frac{t^p}{\sqrt{t^{10}+1}}, \frac{t^{p-1}}{\sqrt{t^{10}+1}} \right) \cdot (1, 2t) dt$

$= \int_1^a \frac{3t^p}{\sqrt{t^{10}+1}} dt.$

$\lim_{a \to \infty} \frac{3t^p / \sqrt{t^{10}+1}}{1/t^{5-p}} = 3$, $\lim_{a \to \infty} \int_1^a \frac{dt}{t^{5-p}}$ 는 $5-p>1$, $p<4$일 때 수렴하므로 극한비교판정에 따라 $I = (-\infty, 4)$.

37. $x = e^{-\frac{a}{2}} r\cos\theta$, $y = e^{-\frac{b}{2}} r\sin\theta$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = \begin{vmatrix} e^{-\frac{a}{2}} r\cos\theta & -e^{-\frac{a}{2}} r\sin\theta \\ e^{-\frac{b}{2}} r\sin\theta & e^{-\frac{b}{2}} r\cos\theta \end{vmatrix} = e^{-\frac{a+b}{2}} \cdot r.$

$F(a,b) = \iint_{D'(r,\theta)} \sqrt{1-r^2} \cdot e^{-\frac{a+b}{2}} \cdot r\,dr\,d\theta = \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{a+b}{2}}.$

$a^2+b^2=1$이므로 $a = \cos t$, $b = \sin t$라 할 때,

$a+b = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$이므로

$m = \frac{2\pi}{3} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $n = \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

38. $x = 2u$, $y = 3v$, $z = 5w$. $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30.$

$(x,y,z) \in D$

$\Leftrightarrow$ $(u,v,w) \in D' = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2+v^2+w^2 \le 1,\ w^2 \le u^2+v^2\}.$

$\iiint_D \frac{\cos\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}}} dV = \iiint_{D'} \frac{\cos(u^2+v^2+w^2)}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \cdot 30\,dV$

$= 30 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\cos(\rho^2)}{\rho} \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

$= 30\sqrt{2}\pi\sin 1.$

〈실수체계 · 수열 · 연속 · 미분 · 적분〉

1. $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n \to \infty)$

$b_n = e^{\ln(b_n)} = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$이므로

극한비교판정에 따라 $\{b_n\}$는 수렴한다.

2. $x \in \mathbb{R}$로 수렴하는 단조증가 유리수열 $\{x_n\}$과 단조감소 유리수열 $\{y_n\}$을 택하자. g는 x에서 연속이므로 $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x) = \lim_{n\to\infty} g(y_n)$.

가정에 의해 $f(x_n) = g(x_n)$, $f(y_n) = g(y_n)$, $f(x_n) \le f(x) \le f(y_n)$이므로

$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x) \le \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(x)$.

$\therefore\ f \equiv g$

3. $|f(0)| \le 0$, $f(0) = 0$.

$x \ne 0$일 때 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le |x^2| \to 0 \ (x \to 0)$이므로 조임정리에 따라 $f'(0) = 0$.

$x \ne 0$일 때 로피탈 정리와 조임 정리에 따라

$0 = \lim_{x\to 0} x = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0)$이므로 $f''(0) = 0$

4. 가정에 의해 $|x| \ge M$이면 $|f(x)| < 1$인 $M > 0$ 있다.

f는 $[-M, M]$에서 연속이므로 최대최소정리에 따라 최댓값 α있다.

따라서 $|f(a_n)| \le \max\{1, \alpha\}$이므로 $\{f(a_n)\}$는 유계이다.

볼자노-바이어슈트라스 정리에 따라 $\{f(a_n)\}$는 수렴하는 부분수열 있다.

5. $g(x) = f(x) - x$는 $[-1, 1]$에서 연속이고 $(-1, 1)$에서 미분가능하다.

$g(1) = 0 = g(-1)$, $g'(x) = f'(x) - 1 \le 0$이므로 g는 단조감소이다.

$\therefore\ g \equiv 0$, $f(x) = x$.

$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$.

6. $g(t) = \int_0^{\sin t} \sqrt{1+u^4}\, du$, $g'(t) = \cos t \sqrt{1+\sin^4 t}$.

$F(x) = \int_x^{\sin x} g(t) dt$, $F'(x) = \cos x\, g(\sin x) - g(x)$,

$F''(x) = -\sin x\, g(\sin x) + \cos^2 x\, g'(\sin x) - g'(x)$.

$F'(\pi) = -g(0) - g(\pi) = 0$, $F''(\pi) = g'(0) - g'(\pi) = 1 + 1 = 2$.

7. f가 $x = 0$에서 미분가능하다 하자. $f'(-1) < 0 < f'(1)$이므로

Darboux 정리에 따라 $f'(c) = 0$인 $c \in (-1, 1)$ 있다.

$0 \le \lim_{x\to 0+} f'(x) = f'(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) \le 0$이므로 $f'(0) = 0$, $c = 0$.

함수 $g(x) = f'(x)$는 $g(x) > 0$, $g'(x) < 0$이므로

g는 $(0, \infty)$에서 순감소하는 양함수이다.

$x \in (0, 1)$일 때 평균값 정리에 따라 $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(t_x)$인 $t_x \in (0, x)$ 있다.

g는 순감소이므로 $g(1) < g(t_x)$.

$0 < g(1) = \lim_{x\to 0+} g(1) \le \lim_{x\to 0+} g(t_x) = g(0) = f'(0) = 0$, 모순.

8. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

실수열 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}$라 하면 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = -1 \ne 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$이므로

극한값 $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$는 존재하지 않는다.

9. f는 $x = 0$에서 연속이므로 $g(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} = 0$.

자연수 n에 대하여 $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$이므로 평균값 정리에 따라

$g'(x_n) = 0$, $g''(y_n) = 0$이 되는 $x_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $y_n \in (x_{n+1}, x_n)$있다.

조임 정리에 따라 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 = \lim_{n\to\infty} y_n$.

g''은 $x = 0$에서 연속이므로 $f''(0) = \lim_{n\to\infty} g''(y_n) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

10. $a_2 = 2$, $a_3 = \frac{7}{4}$, $\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{3}{\alpha}\right)$, $2\alpha^2 = \alpha^2 + 3$, $\alpha = \pm\sqrt{3}$.

$\alpha \ge \sqrt{3}$, 단조감소일 것으로 예상할 수 있다.

$a_n \ge \sqrt{3} \Rightarrow 0 \le \frac{1}{a_n} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$, $0 \le \frac{3}{a_n} \le \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} \le 2a_{n+1} = a_n + \frac{3}{a_n}$이므로 아래로 유계.

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{3}{a_n}\right) \le 0$이므로 단조감소

단조수렴정리에 의해 수열 a_n : 수렴.

11. $\{a_n\}$가 수렴하지 않는다고 가정하자.

$\{a_n\}$은 유계이므로 수렴하는 부분수열 $\{a_{n_k}\}$ 있다.

부분수열의 극한값 α라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_n \ne \alpha$이므로

$\varepsilon_0 > 0$과 부분수열 a_{m_k}가 존재해서 $|a_{m_k} - \alpha| \ge \varepsilon_0$.

$\{a_{m_k}\}$는 유계이므로 β로 수렴하는 부분수열 $\{a^*_{m_k}\}$있다.

$|\beta - \alpha| \ge \varepsilon_0$이므로 $\beta \ne \alpha$

〈조건〉에 의해 $\exists f \in C$ s.t. $f(\alpha) \ne f(\beta)$

$\lim_{k\to\infty} f(a_{m_k}) \ne \lim_{k\to\infty} f(a^*_{m_k})$이므로 $\lim f(a_n)$이 유한함에 모순.

12. $\alpha = 0$일 때 $a_n = 1 - \ln 2 \Rightarrow$ 발산(일반항 판정)

$\alpha < 0$일 때 $\lim a_n = \lim_{x\to\infty} x - \ln(1+x) = \lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x}{1+x} = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+x}$

$= \ln \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$ (발산)

$\alpha > 0$일 때 $a_n = \frac{1}{2n^{2\alpha}} - \frac{1}{3n^{3\alpha}} + \cdots$

$\lim \frac{a_n}{\frac{1}{2n^{2\alpha}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1}{2}$.

$\sum^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$는 수렴 $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

13. $n = 2k-1$일 때 $0 \le |a_{2k+1}| \le |a_{2k-1}|$이므로 단조감소+아래로 유계.

$n = 2k$일 때 $0 \le |a_{2k+2}| = \frac{|a_k|}{|a_k| + 1} \le |a_{2k}|$이므로 단조감소+아래로유계.

단조수렴 정리에 따라 짝수열, 홀수열 수렴

짝수열의 극한 α라 하면 $\alpha = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$, $\alpha = 0$.

홀수열의 극한 $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$.

짝수열, 홀수열이 수렴하므로 $\{a_n\}$: 0으로 수렴

14. $x \neq y$일 때 평균값 정리에 따라

$\left|\dfrac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right| = |f_n{}'(t_n)|$인 t_n이 x와 y사이 존재.

$|f_n(x)-f_n(y)| = |f_n{}'(t_n)||x-y| \le M|x-y|$.

$\therefore$ $|f(x)-f(y)| = \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_n(y)| \le M|x-y|$ (립쉬츠 조건) $\Rightarrow$ 균연.

$\{f_n(0)\}$:수렴 $\Rightarrow$ 유계 $\Rightarrow$ $|f_n(0)| \le K$인 $K>0$ 존재.

$|f_n(x)-f_n(0)| = |x||f'(t_n)|$인 $t_n \in (0,x)$ 또는 $(x,0)$

$|f_n(x)| \le |f_n{}'(x)||x| + |f_n(0)| \le M+K$

$\therefore$ 유계수렴정리에 따라 적분 <-> 극한 교환 성립.

15. $(\Rightarrow)$ $x^n f(x)$: $[0,1]$에서 연속. $\lim_{n\to\infty} x^n f(x) = g(x)$라 하자.

$x=1$이면 $f(1)$, $x\in[0,1)$이면 $x^n f(x) \to 0$이므로 $[0,1)$에서 $g \equiv 0$.

$\lim_{x\to 1-} g(x) = g(1)$. $\therefore$ $f(1)=0$.

$(\Leftarrow)$ $f(1)=0$, f는 $x=1$에서 연속.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ s.t. $\begin{cases}|x-1|<\delta \\ x\in[0,1]\end{cases}$ $|f(x)| = |f(x)-f(1)| < \varepsilon$.

$f(x)$: $[0,1]$에서 연속 $\Rightarrow$ $\exists M>0$ s.t. $|f(x)| \le M$ (유계)

$1-\delta < x < 1+\delta$, $x\in[1-\delta,1]$이면 $|x^n f(x) - 0| = |x^n||f(x)| \le |f(x)| < \varepsilon$.

$x\in[0,1-\delta]$이면 $|x^n f(x)| = x^n |f(x)| \le M(1-\delta)^n \to 0$.

16. $a = \lim f(x_n)$, $x_n \in [0,\infty)$, $\lim x_n = \infty$

$b = \lim f(y_n)$, $y_n \in [0,\infty)$, $\lim y_n = \infty$

$c\in(a,b)$, $\varepsilon = \min\{c-a, b-c\}$라 하자.

$n \ge N_1 \Rightarrow |f(x_n)-a| < \varepsilon \le c-a$

$n \ge N_2 \Rightarrow |f(y_n)-b| < \varepsilon \le b-c$

$\Rightarrow -c+1 \le f(x_n)-a \le c-a,\ -c+2a \le f(x_n) \le c,\ c \le f(y)n) \le 2b-c.$

$f(x_n) \le c \le f(y_n)$.

$\max\{N_1, N_2\} = N$라 하면

$n \ge N$일 때 $f(x_n) \le c \le f(y_n)$.

사잇값정리에 따라 $f(c_n) = c$인 c_n이 a_n과 b_n사이 존재.

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = c$, $c_n \to \infty$, $c \in S$.

17. (1) $x^m g\left(\dfrac1x\right) = x^m\left[\dfrac1x\right]$, $\left[\dfrac1x\right] = 0 \Leftrightarrow 0 \le \dfrac1x < 1$.

$m=1$이라 하자. $f(x) = \begin{cases} x\left[\dfrac1x\right], & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$.

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x\left[\dfrac1x\right]}{x} = \left[\dfrac1x\right]$, $x=0$에서 미가 X.

$m=2$일 때 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\left[\dfrac1x\right]$, $x=0$에서 미가 O.

$\therefore$ $m_0 = 2$.

(2) $m=2$일 때 $\dfrac14,\ \dfrac13,\ \dfrac12,\ 1$을 고려하자.

$\left[\dfrac1x\right] = 1 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac1x < 2,\ \dfrac12 < x \le 1.$

$\left[\dfrac1x\right] = 2 \Leftrightarrow \dfrac13 < x \le \dfrac12.$

$\left[\dfrac1x\right] = 3 \Leftrightarrow \dfrac14 < x \le \dfrac13.$

$\left[\dfrac1x\right] = 4 \Leftrightarrow \dfrac15 < x \le \dfrac14.$

$x=1$에서 좌극한 1, 우극한 0.

$x=\dfrac12$에서 좌극한 2, 우극한 $\dfrac14$.

$x=\dfrac13$에서 좌극한 3, 우극한 $\dfrac29$.

$x=\dfrac14$에서 좌극한 4, 우극한 $\dfrac{3}{10}$.

$\therefore$ 불연속점 4개.

(3) $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\left[\dfrac1x\right]$, $\dfrac1x - 1 < \left[\dfrac1x\right] \le \dfrac1x$이므로 $1-x < x\left[\dfrac1x\right] \le 1$.

조임정리에 따라 $\lim_{x\to0} f'(0) = 1$.

18. $|f'|$은 $[0,1]$에서 균등연속이므로 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재해서

$|x-y| < \delta,\ x, y \in [0,1] \Rightarrow ||f'(x)| - |f'(y)|| < \varepsilon$.

임의의 $n \in \mathbb{N}$을 고정하자. 각 $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

평균값 정리에 의해

$\left|f\left(\dfrac{k-1}{n}\right) - f\left(\dfrac kn\right)\right| = \dfrac1n |f'(x_k)|$인 $x_k \in \left(\dfrac{k-1}{n}, \dfrac kn\right)$가 존재한다.

적분의 평균값 정리에 의해

$\int_0^1 |f'(t)|dt = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac kn} |f'(t)|dt = \sum_{k=1}^n \dfrac1n f'(y_k)$인 $y_k \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac kn\right]$가 존재.

$\dfrac1N < \delta$인 $N \in \mathbb{N}$ 택하자. $n \ge N$일 때

$$\left|a_n - \int_0^1 |f'(t)|dt\right| = \frac1n\left|\sum_{k=1}^n (|f'(x_k)| - |f'(y_k)|)\right|$$

$$\le \frac1n \sum_{k=1}^n \big||f'(x_k)| - |f'(y_k)|\big| < \varepsilon$$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 |f'(t)|dt$.

19. $\sup A = M$이므로 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$인 수열 $\{x_n\} \subset [0,1]$있다.

$\{x_n\}$은 유계이므로 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha \in [0,1]$인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$있다.

$\sup A = M$이므로 $f(\alpha) \le M$이다.

만약 $f(\alpha) < M$이면 $\varepsilon = \dfrac{M - f(\alpha)}{2}$에 대하여 $\delta > 0$가 존재해서

$|y-\alpha| < \delta,\ y\in[0,1] \Rightarrow f(y) < f(\alpha) + \varepsilon$.

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$이므로, $N \in \mathbb{N}$이 존재해서 $k \ge N$일 때

$|x_{n_k} - \alpha| < \delta \Rightarrow f(x_{n_k}) < f(\alpha) + \varepsilon$.

$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha) + \varepsilon = \dfrac{M + f(\alpha)}{2}$이므로 $M \le f(\alpha)$, 모순.

따라서 $f(\alpha) = M$.

20. 최대최소정리에 따라 $x \in [0,1]$일 때 $f(x) \le f(c_1)$, $g(x) \le g(c_2)$인 $c_1,\ c_2 \in [0,1]$ 있다. 가정에 의해 $f(c_1) = g(c_2)$.

$h(x) = f(x) - g(x)$는 $[0,1]$에서 연속이다.

$h(c_1) = f(c_1) - g(c_1) = g(c_2) - g(c_1) \ge 0$,

$h(c_2) = f(c_2) - g(c_2) = f(c_2) - f(c_1) \le 0$.

중간값정리에 따라 $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$인 $x_0 \in [0,1]$ 있다.

21. $0 \notin A$이므로 $f(0) = 0$

$\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} - 0\right| = \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| = \begin{cases} na_n, & x \in A \\ 0, & x \notin A\end{cases}$이므로

조임정리에 따라 $f'(0)$ 존재.

22. 최대최소정리에 따라 $|f(x)| \le M$인 $M>0$ 있다.

$$\left|\int_{\frac{1}{\sqrt n}}^1 f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx\right| \le M\int_{\frac{1}{\sqrt n}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}dx$$

$$= M\left[\tan^{-1}(nx)\right]_{1/\sqrt n}^1$$

$$= M(\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(\sqrt n)) \to 0\ (n\to\infty).$$

$$\int_0^1 f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt n}} f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt n}}^1 f(x)\frac{n}{1+n^2x^2}dx$$

<정리>에 따라

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt n}} f(x)\dfrac{n}{1+n^2x^2}dx = f(x_n)\int_0^{\frac{1}{\sqrt n}} \dfrac{n}{1+n^2x^2}dx = f(x_n)\tan^{-1}(\sqrt n)$인

$x_n \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt n}\right]$ 있다. 조임정리에 따라 $\lim x_n = 0$이므로

구하는 극한 $\dfrac{\pi}{2}f(0)$.

23. $\varepsilon>0$라 하자. $a\in[0,1]$일 때 f는 연속이므로 $\delta>0$가 존재해서
$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a}-f(a)\right| &= \left|\frac{1}{x-1}\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f(a)dt\right| \\ &\le \frac{1}{|x-a|}\int_a^x |f(t)-f(a)|dt \\ &< \frac{1}{|x-a|}|x-a|\cdot\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

$h(x)=F(x)-g(x)$는 $[0,1]$에서 미분가능하고
가정에 의해 $h'(0)h'(1)<0$이므로 Darboux 정리에 따라
$0=h'(c)=f(c)-g'(c)$인 $c\in(0,1)$ 있다.

24. $F:[0,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 두자.
미적분 기본정리 $\Rightarrow\ \forall x\in[0,1],\ F'(x)=f(x)$이다.
$F(1)=F(0)$를 만족하므로
$\int_0^1 xf(x)dx=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 F(x)dx=0$
$\therefore\ \int_0^1 F(x)dx=0$
적분에 관한 평균값 정리에 따라 $F(a)=\int_0^1 F(x)dx$인 $a\in(0,1)$ 있다.
$\therefore\ F(0)=F(1)=F(a)$
롤의 정리에 따라 $F'(x_1)=F'(x_2)=0$인 $x_1\in(0,1),\ x_2\in(a,1)$ 있다.

25. 임의의 $b\in(a,\infty)$에 대하여
$\int_a^b f(x)\cos x dx=f(b)\sin b-f(a)\sin a-\int_a^b f'(x)\sin x dx.$
$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로, 조임정리에 따라 $\lim_{b\to\infty}f(b)\sin b=0$이 되므로
$\lim_{b\to\infty}(f(b)\sin b-f(a)\sin a)=-f(a)\sin a.$
모든 $x\in[a,\infty)$에 대하여 $|f'(x)\sin x|\le|f'(x)|$이고
$\lim_{b\to\infty}\int_a^b|f'(x)|dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b -f'(x)dx=\lim_{b\to\infty}(f(a)-f(b))=f(a)$이므로
비교판정법에 의해 $\int_a^\infty f'(x)\sin x dx$는 절대수렴하고, 따라서 수렴.
그러므로 $\int_a^\infty f(x)\cos x dx$는 수렴한다.
$t=x^2$라 하면, $\int_1^\infty\cos(x^2)dx=\int_1^\infty\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}dt$이고,
앞의 결과에 따라 이 특이적분은 수렴한다.

26. $h'(x)=g(x)-\frac{f(x)}{x^2}$이므로, $\frac{f(x)}{x^2}$이 $[1,\infty)$에서 유계이면
$|h'|$가 유계이므로 h는 $[1,\infty)$에서 균등연속이 된다.
모든 $x\in[1,\infty)$에 대하여 평균값 정리에 따라
$\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right|=|f'(c_x)|$인 $c_x\in(1,x)$가 존재하고,
$|g(x)|=\left|\frac{f'(x)}{x}\right|\le M$인 $M>0$이 존재하므로,
$|f'(c_x)|\le Mc_x\le Mx$이다.
즉, $\frac{||f(x)|-|f(1)||}{x^2}\le\frac{|f(x)-f(1)|}{x(x-1)}\le M$이므로,
$\frac{|f(x)|}{x^2}\le\frac{|f(1)|}{x^2}+M\le|f(1)|+M.$
따라서 $\frac{f(x)}{x^2}$은 $[1,\infty)$에서 유계이다.

27. $h(x)=(1-x)\int_0^x f(t)dt$라 하자. f는 $[0,1]$에서 연속이므로
미적분 기본정리에 따라 $\int_0^x f(t)dt$는 미분가능하므로
h는 $[0,1]$에서 미분가능하다.
$h(1)=h(0)=0$이므로 평균값 정리에 따라
$0=h'(c)=-\int_0^c f(x)dx+(1-c)f(c)$인 $c\in(0,1)$ 있다.

28. A가 무한집합이라 하자.
$f(x_n)=0$인 서로 다른 점들로 이루어진 수열 $\{x_n\}\subset[0,1]$을 택하자.
조임 정리와 <정리>에 따라 $\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=c\in[0,1]$인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$ 있다.
f는 연속이므로 $0=f(c)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}).$
f는 미분가능하므로 $f'(c)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k})-f(c)}{x_{n_k}-c}=0$이므로 모순이다.
$\therefore\ A$는 유한집합.

29. $f'(x)>0$이므로 f는 $[1,\infty)$에서 단조증가함수.
미적분 기본정리에 따라

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1)+\int_1^x f'(t)dt \\ &\le 1+\int_1^x\frac{dt}{1+t^2} \\ &=1+\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4} \\ &\le 1+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+1\text{이므로}\end{aligned}$$

f는 $[0,\infty)$에서 유계이다. <정리>에 따라
$\lim_{x\to\infty}f(x)$가 존재하고, $\lim_{x\to\infty}f(x)\le1+\frac{\pi}{4}.$

30. 평균값 정리에 따라 $f'(c_1)=3,\ f'(c_2)=4$인 $c_1\in(0,1),\ c_2\in(1,2)$ 있다.
Darboux 정리에 따라 $f'(c)=\frac{10}{3}$인 $c\in(c_1,c_2)\subset(0,2)$ 있다.

31. $x=0$일 때 $\int_0^1 f(0)dt=f(0)=0.$
$x\neq0$일 때 $0=\int_0^1 f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$이므로 $\int_0^x f(t)dt=0.$
미적분 기본정리에 따라 $f(x)=0.$
그러므로 $f\equiv0.$

32. f는 무한번 미분가능하므로 테일러 정리에 따라
$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$인 $t_x\in(0,x)$ 있다.
$f,\ f'$는 연속이므로 유계이다. 따라서 $f^{(n)}$도 유계이므로
$|f^{(n)}(x)|\le M$인 $M>0$ 있다.
$\left|\frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}\to0$이므로 $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$
$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=f^{(n+1)}(0)$이므로
$f(x)=\sum\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=\sum\frac{f^{(n+1)}(0)x^n}{n!}=f'(x).$

33. f는 $[0,1]$에서 연속이므로 임의의 $x \in [0,1]$에 대하여 $|f(x)| \le M$인 $M>0$ 있다. 임의의 자연수 n에 대하여

$$0 \le \left| \int_{1/\sqrt{n}}^{1} ne^{-nx} f(x)dx \right| \le \int_{1\sqrt{n}}^{1} |ne^{-nx} f(x)| dx$$

$$\le M \int_{1/\sqrt{n}}^{1} ne^{-nx} dx = M(e^{-\sqrt{n}} - e^{-n}) \to 0 \ (n \to 0)$$이므로

조임 정리에 따라 $\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1} ne^{-nx} f(x)dx = 0.$

적분에 관한 평균값 정리에 따라 임의의 자연수 n에 대하여

$$\int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx} f(x)dx = f(x_n) \int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx} dx$$

$$= f(x_n)(1 - e^{-\sqrt{n}})$$인 $x_n \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 있다.

조임 정리에 따라 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$이고 f는 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx} f(x)dx = f(0).$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{-nx} f(x)dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/\sqrt{n}} ne^{-nx} f + \lim_{n\to\infty} \int_{1/\sqrt{n}}^{1} ne^{-nx} f$$

$$= f(0).$$

34. $x^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u$로 치환하면 주어진 특이적분은

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}} u + 1 \right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty \frac{u^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \frac{1}{2} \int_0^\infty u e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

가정에 의해

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2},$$

$$1 = V(Z) + (E(Z))^2 = E(Z^2) = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

$\int_0^\infty u e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1$이므로 주어진 특이적분의 값 $\frac{4 + 3\sqrt{\pi}}{8}$.

〈급수・함수열〉

1. $\frac{e^{-x}}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}1^{n-k}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^n.$

   $\therefore\ c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!},\ \lim_{n\to\infty}c_n=e^{-1}.$

   $\{c_n\}$, $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$의 생성함수는 각각 $\frac{e^{-x}}{1-x}$, e^x이므로 $\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{(n-k)!}$의 생성함수는 $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$이다.

   음이 아닌 정수 n에 대하여 $\frac{1}{1-x}$의 x^n의 계수 1이므로

   수열 $\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{(n-k)!}\right\}$은 상수수열 1.

2. f는 $\mathbb{R}$에서 연속이고 $f'(x)=\operatorname{sech}^2x>0$이므로 f는 증가함수이다.
   따라서 f의 역함수 g가 존재하고 g는 미분가능하다.

   $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(\ln\sqrt{3})}=\frac{4}{3}.$

   $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{1-y^2}\quad(y=f(x))$

   $\quad=\sum_{n=0}^{\infty}y^{2n}$이므로

   $g(y)=g(y)-g(0)=\int_0^y g'(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}y^{2n+1}.$

3. $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$이므로 바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$는 $\mathbb{R}$에서 점별수렴한다.

   $\left|\frac{n\cos nx}{2^n}\right|\le\frac{n}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1/2^{n+1}}{n/2^n}=\frac{1}{2}<1$이므로 비판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$은 수렴하므로 바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos nx}{2^n}$는 $\mathbb{R}$에서 균등수렴한다.

   따라서 f는 $\mathbb{R}$에서 미분가능하고 $|x|<1$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$이므로

   $f'(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2.$

4. $\frac{1}{n}\int_2^{n+1}\frac{dx}{x}\le f_n(0)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\le\frac{1}{n}\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$이므로

   조임정리에 따라 $\lim_{n\to 0}f_n(0)=0.$

   $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2x}{k^2+k}$, $[0,2]$에서 $\left|\frac{2x}{k^2+k}\right|\le\frac{4}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}=\frac{2\pi^2}{3}$이므로

   바이어슈트라스 M판정에 따라 $\{f_n\}$는 $[0,2]$에서 균등수렴하고,

   $f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2x}{k}-\frac{2x}{k+1}\right)=2x.$

   $f(0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$이므로 $f(x)=x^2.$

5. $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_0^1 xe^{tx}\,dt=e^x-1,\ f'(x)=e^x.$

   $\int_0^1 f(x)dx=e-1.$

6. $\frac{\pi}{6}A=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ A=\frac{3}{\pi}.$

   $B=\cosh(\ln 2)=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4}.$

7. $\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots,\ \ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\cdots.$

   $f(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{30}x^6-\frac{1}{56}x^8+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}.$

   구하는 값 $\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$

8. 미적분기본정리에 따라 $\int_0^x h(t)dt$는 미분가능하다.

   따라서 f는 미분가능(연속)이므로 $f'(x)=1+h(x)>0.$
   f가 연속, 순증가이므로 역함수 g 있다.
   $1+2x=h(0)+h'(0)x$에서 $h(0)=1,\ h'(0)=2$이므로
   $f'(0)=1+h(0)=2,\ f''(0)=h'(0)=2.$

   한편 $f(g(x))=x$이므로 $f'(g(0))=f'(0)=\frac{1}{g'(0)},\ g'(0)=\frac{1}{2}.$

   $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$이므로 $g''(x)=-\frac{f''(g(x))g'(x)}{\{f'(g(x))\}^2},\ g''(0)=\frac{-1}{4}.$

   $\therefore\ g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(0)x^2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2.$

9. $x\ne 0$일 때 $f''(t_x)=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\frac{1}{2}x^2}.$

   로피탈 정리에 따라

   $\lim_{x\to 0}\frac{f''(t_x)-f''(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x-\frac{f''(0)}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{f'''(0)}{3}=\frac{5}{3}.$

   $\frac{5}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(t_x)-f''(0)}{t_x}\cdot\frac{t_x}{x}=f'''(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{t_x}{x}$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{t_x}{x}=\frac{1}{3}.$

10. $n\ge 3,\ x\in\mathbb{R}$일 때, $\left|\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right||\sin nx|\le\frac{2}{n^2-1}$,

    $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}}=2$, $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$은 $p-$급수 판정에 따라 수렴하므로

    바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\sin nx$는 $\mathbb{R}$에서 균등수렴.

    $\left\{\frac{2}{n^2-1}\sin nx\right\}$는 $\mathbb{R}$에서 연속이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 연속이다.
    따라서 f는 $[0,\pi]$에서 리만적분가능하고,

    $\int_0^{\pi}f(x)dx=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$

    $=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\frac{1}{n}(1-(-1)^n)$

    $=2\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}(1-(-1)^n)$

    $=2\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots\right)$

    $=2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots\right\}$

    $=2\left(\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\right)\right)$

    $=-4\ln 2+3.$

11. $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$일 때 $\frac{1}{k}h\left(x-\frac{1}{k}\right)=\begin{cases}\frac{1}{k}, & x=\frac{1}{k}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.

$A=\left\{\frac{1}{n}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$라 하면 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}x, & x\in A\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$.

$\|f_n(x)-f(x)\|_{\mathbb{R}}=\|f_n(x)-f(x)\|_{A}=\frac{1}{n+1}\ \to\ 0\ (n\to\infty)$이므로

$\{f_n\}$는 f로 균등수렴하고 $f_n(x)$는 $\mathbb{R}-\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}\right\}$에서 연속이므로

f는 $\mathbb{R}-A$에서 연속이다.

12. 최대최소정리에 따라 $|f'(x)|\le M$인 $M>0$있다.

I에서 $\left|\frac{1}{n(n+1)}f'\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\le\frac{M}{n(n+1)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n(n+1)}=M$이므로

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}f'\left(\frac{x}{n+1}\right)$는 균등수렴.

$s(0)=0$이므로 $s(x)$는 I에서 미분가능한 함수로 균등수렴한다.

가정에 의해 $|s'(0)|=|f'(0)|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right|\le 1$.

13. 적분에 관한 평균값 정리에 따라

$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}f(t)dt$

$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(a_k)$인 $a_k\in\left(x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right)$있다.

f는 $[0,2]$에서 균등연속이므로 $\varepsilon>0$에 대하여 $\delta>0$가 존재해서

$|x-y|<\delta,\ x,\ y\in[0,2]$이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

아르키메데스 원리에 따라 $\frac{1}{N}<\delta$인 자연수 N을 선택하자.

$n\ge N$일 때 $\left|f_n(x)-\int_x^{x+1}f(t)dt\right|=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(a_k)\right|<\varepsilon$.

14. $\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot|x-1|^2\ \to\ \frac{1}{4}|x-1|^2<1\ \Leftrightarrow\ -1<x<3$.

$x=-1,\ 3$일 때 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$라 하면 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)}>1$이므로

$\{a_n\}\not\to 0$. 일반항 판정에 따라 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴구간에 속하는 정수는 3개 있다.

15. $|x|<1$일 때 $\ln(1+x)'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$이므로

$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

평균값 정리에 따라 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{1+t_x}$인

t_x가 0과 x 사이에 존재하고, $\frac{1}{2}<f'(x)=\frac{1}{1+t_x}<1$.

평균값 정리에 따라 $f\left(\sin\frac{1}{n}\right)=f\left(\sin\frac{1}{n}\right)-f(0)=f'(t_n)\sin\frac{1}{n}\ge\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}$인

t_n있다. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 $p-$급수 판정에 따라 발산하므로

극한비교판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}$은 발산하고,

비교판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\sin\frac{1}{n}\right)$는 발산한다.

16. $xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}$이므로

$\int_0^x te^t dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^x t^{n+1}dt=xe^x-e^x+1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}$

$x=3$일 때 $2e^3+1=9\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)n!}$, 구하는 값 $\frac{2e^3+1}{9}$.

17. $(\tan^{-1}t)'=\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$이므로

$\tan^{-1}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$.

$\int_0^x\tan^{-1}t\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2}$이므로

$x=1$일 때, $\int_0^1\tan^{-1}t\,dt=[t\cdot\tan^{-1}t]_0^1-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$.

18. $|x|<1$일 때 $(1+x)^{\frac{1}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^n=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{81}x^3-\cdots$이므로

구하는 극한값은 $\frac{1}{81}$.

19. $\|f_m(x)-f_n(x)\|\le\left|\frac{1}{2e^{2m}}-\frac{1}{2e^{2n}}\right|\ \to\ 0\ (m,\ n\ \to\ \infty)$이므로

코시 판정에 따라 $\{f_n\}$는 균등수렴한다. f_n은 연속이므로

$\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^{2t}}=\frac{1}{2}$.

20. $\left|\frac{1}{2^k}\cos(13^k\pi x)\right|\le\frac{1}{2^k},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$이므로 바이어슈트라스 M판정에 따라

균등수렴하고, $\frac{1}{2^k}\cos(13^k\pi x)$는 연속이므로 f는 연속함수이다.

적분에 관한 평균값 정리에 따라

$g_n(x)=n\int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(u)du-\int_0^x f(u)du$

$=n\left[\int_x^{x+\frac{1}{n}}f(u)du-\int_0^{\frac{1}{n}}f(u)du\right]$

$=f(x_n)-f(y_n)$인 $x_n\in\left(x,x+\frac{1}{n}\right),\ y_n\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 있다.

f는 연속이므로

$g(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=f(x)-f(0)$.

$g(1)=f(1)-f(0)=-2$.

21. $\left(\frac{x}{x^2+n^2}\right)'=0\ \Leftrightarrow\ x=\pm\sqrt{n}$.

$\frac{|x|}{x^2+n^2}\le\frac{\sqrt{n}}{2n^2}=\frac{1}{2n^{3/2}}$는 $p-$급수 판정에 따라 수렴하므로

바이어슈트라스 M판정에 따라 주어진 급수는 균등수렴하고

$\frac{|x|}{x^2+n^2}$은 $\mathbb{R}$에서 연속이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 연속이다.

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}, & x>0\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{x^2+n^2}, & x<0\end{cases}$ 이며

두 함수항급수는 $\mathbb{R}$에서 균등수렴한다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\ne-\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}$이므로

f는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

22. $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n - \int_0^1 f_n\right) = 0.$

$\Leftrightarrow\ 0 = \lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx.$

적분에 관한 평균값 정리에 따라

$\int_{1-\frac{1}{n}}^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n}f_n(x_n)$인 $x_n \in \left(1-\frac{1}{n}, 1\right)$ 있다.

조임정리에 따라 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

f는 연속이고 $\{f_n\}$은 f로 균등수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f_n(x_n) = f(1)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

23. f는 $[-1,2]$에서 연속이므로 균등연속이다.

$\varepsilon > 0$이 주어질 때 $\delta > 0$가 존재해서

$|x-y| < \delta$, x, $y \in [-1,2]$이면 $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

$\frac{1}{N} < \delta$인 자연수 N을 택할 때, $n \geq N$라 하자.

적분에 관한 평균값 정리에 따라

$f_n(x) = f(x_n)$인 $x_n \in \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ 있다.

$|f_n(x) - f(x)| = |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$

24. $f(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}.$

$\left(x^k - x^{2k}\right)' = 0$인 $x = \frac{1}{\sqrt[k]{2}}$에서 $x^k - x^{2k} = \frac{1}{4} \not\to 0$이므로 균등수렴 X.

$\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2} = \infty$이므로 연속확장정리에 따라 균등연속 X.

25. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(0) = 0$, $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$은 비판정, 수렴.

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\{f_n'\}$는 균등수렴.

$\{f_n\}$는 미분가능함수열이므로 f는 $\mathbb{R}$에서 미분가능하고,

$f'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 1^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \cdots = \sin 1.$

26. $f_n(x) = \sin x + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{x^k}.$

① $0 < \alpha \leq 1$: $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{x^k} = \infty$이므로 균등수렴 X.

② $\alpha > 1$: $\left|\frac{n^2}{x^n}\right| \leq \frac{n^2}{\alpha^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\alpha^n}$은 비판정, 수렴 / W-M판정, 균등수렴 O

$\therefore\ \alpha > 1.$

27. $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, $a_2 = \frac{3}{8} < a_1$.

$n = k$일 때 $a_k > 0$, $a_{k+1} < a_k$라 하자.

$a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k^2 + a_k) > 0,$

$a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1}^2 + a_{k+1}) < \frac{1}{2}(a_k^2 + a_k) = a_{k+1}$이므로

수학적 귀납법에 따라 모든 자연수 n에 대해 $a_n > 0$, $a_{n+1} < a_n$.

단조수렴정리에 따라 $\{a_n\}$은 수렴한다. 극한값 α라 하면 $\alpha = 0$.

$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+a_n} = 2.$

28. 주어진 급수가 수렴하고 f는 $x=0$에서 연속이므로

$0 = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\ln n}\right) = f(0)$, 즉 수렴한다.

f가 $x=0$에서 미분가능하므로 $f'(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n\ln n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n\ln n}}$.

$f'(0) \neq 0$라 하면 극한 비교판정에 따라 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$은 수렴한다.

$\left\{\frac{1}{n\ln n}\right\}$는 감소하는 양항수열이므로 코시응집판정에 따라

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n\ln 2^n}\cdot 2^n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2}$는 $p-$급수 판정에 따라 발산하므로 모순.

그러므로 $f'(0) = 0$.

29. 거듭제곱(멱, power)급수 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$의 수렴반경 ∞이므로

수렴반경내 항별미분, 항별적분, 코시곱 가능.

$$
\begin{aligned}
\text{코시곱 } f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2(n-k)}}{(2(n-k))!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= \cosh x\cdot\sinh x \\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^n - (-2)^n)}{4}\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{이므로}
\end{aligned}
$$

$f^{(4)}(0) = 0 = f^{(6)}(0)$, $f^{(5)}(0) = \frac{(2^5 - (-2)^5)}{4} = 16.$

구하는 값 16.

30. 테일러 정리에 따라

$f(x) = f(0) + \frac{f^{(4)}(t_x)}{4!}x^4$인 t_x가 0과 x사이에 존재한다.

$x^4 f^{(4)}(t_x) = 4!\cdot(f(x) - f(0)).$

$f^{(4)}(0) = 1 > 0$이므로 $x=0$ 근방에서 증가한다.

$\exists\delta > 0$ s.t. $\forall x \in (-\delta, \delta)$ $f^{(4)}(x) > 0.$

$\forall x \in (-\delta, \delta)$, $(f(x) - f(0)) \geq 0$ $f(x) \geq f(0).$

$\therefore$ $x=0$에서 극소.

31. $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

$f'(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = 0.$

테일러정리에 따라

$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(x_n)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2$인 $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 있다.

조임정리에 따라 $\lim x_n = 0$, $f''(x_n) = 2n^2\left\{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right\} = \frac{-2n^2}{1+n^2}$이므로

$f''(0) = \lim_{n\to\infty} f''(x_n) = -2.$

32. 테일러 정리에 따라 자연수 n에 대하여

$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + f'(0)\frac{1}{n} + \frac{f''(x_n)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{f''(x_n)}{2n^2}$인 $x_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ 있다.

f''은 $[0,1]$에서 연속이므로 $|f''(x)| \leq M$인 $M > 0$ 있다. (최대최소정리)

$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{f''(x_n)}{2n^2}\right| \leq \frac{M}{2n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2n^2} = \frac{M\pi^2}{12}$이므로 비교판정에 따라

주어진 급수는 수렴한다.

33. f는 $[0,2]$에서 균등연속이므로 $\varepsilon>0$이 주어질 때 $\delta>0$가 존재해서 $|x-y|<\delta$, x, $y\in[0,2]$이면 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

$\frac{1}{N}<\delta$인 자연수 N을 택하자.

<정리>에 따라 $n\geq N$일 때

$$\left|f_n-\int_x^{x+1}f\right|=\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x+\frac{k}{n}\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}f(t)dt\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(x_n)\right]\right| \text{인 } x_n\in\left(\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right) \text{ 있다.}$$

$$\therefore\ \left|f_n(x)-\int_x^{x+1}f(t)dt\right|<\frac{1}{n}\cdot n\varepsilon=\varepsilon.$$

34. $x=0$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$은 교대급수판정에 따라 수렴.

$\left|\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n}{n+x}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 바이어슈트라스 M판정, 균수.

따라서 주어진 함수항 급수는 $[0,\infty)$에서 점별수렴.

$|f'(x)|\leq\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$이므로 f는 균등연속.

35. $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\sqrt{x^2}=|x|$.

$\|f_n(x)-f(x)\|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\to0$ $(n\to\infty)$ 이므로 $\{f_n\}\rightrightarrows f$.

$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0$이고 만약 $\{f_n{}'\}$가 균등수렴하면

$f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로 모순이다.

36. 적분에 관한 평균값 정리에 따라

$f_n(x)=e^{-x_n^2}$인 $x_n\in\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]$ 있다.

조임정리에 따라 $\lim x_n=x$, e^{-x^2}은 $\mathbb{R}$에서 연속이므로

$f(x)=\lim f_n(x)=e^{-x^2}$.

적분에 관한 평균값 정리에 따라

$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\int_0^{\frac{2}{n}}\frac{n}{2}e^{-t^2}dt=e^{-y_n^2}$인 $y_n\in\left[0,\frac{2}{n}\right]$ 있다.

조임정리에 따라 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

37. $\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leq\frac{1}{k(k+1)}$, $\sum\frac{1}{k(k+1)}=1$이므로

바이어슈트라스 M판정에 따라 $T_n(x)$는 $[-1,1]$에서 균등 수렴.

$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$는 $[-1,1]$에서 연속이므로 $T(x)$는 $[-1,1]$에서 연속이므로

$\lim_{n\to\infty}T\left(\frac{n}{n+1}\right)=T(1)=1$.

$0=\lim_{n\to\infty}\left|T_n\left(\frac{n}{n+1}\right)-T\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|$이므로

$\lim_{n\to\infty}T_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}T\left(\frac{n}{n+1}\right)=T(1)=1$.

38. $f(x)=\int_0^1\frac{x}{(x+t)^2}dt=\frac{1}{x+1}$, $\int_1^2\frac{dx}{1+x}=\ln\frac{3}{2}$.

39. $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$, $f_n{}'(x)=0 \Leftrightarrow x=n$.

$\|f_n(x)-0\|_{\mathbb{R}}\leq\frac{1}{n}e^{-1}\to0$ $(n\to\infty)$. $\therefore$ $\{f_n\}\rightrightarrows f\equiv0$.

$$\int_0^{\infty}f_n=\left[\frac{x}{n^2}(-ne^{-\frac{x}{n}})\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{1}{n^2}(-ne^{-\frac{x}{n}})dx=1\neq0.$$

40. $\int_a^1f_n(x)dx=\int_a^1n^2xe^{-nx}dx=\left[n^2x\cdot\frac{-1}{n}e^{-nx}\right]_a^1-\int_a^1n^2\cdot\frac{-1}{n}e^{-nx}dx$

$=-ne^{-n}+nae^{-na}-e^{-n}+e^{-an}\to\begin{cases}1, & a=0\\0, & a>0\end{cases}$.

g는 $x=0$에서 연속이므로

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $|x-0|<\delta\Rightarrow|g(x)-g(0)|<\varepsilon$.

g는 $[0,1]$에서 연속이므로 최대최소정리에 따라 $|g(x)|\leq M$인 $M>0$ 있다.

$\left|\int_0^1f_n(x)g(x)dx-g(0)\right|=\left|\int_0^1f_n(x)[g(x)-g(0)]dx\right|$

$\leq\int_0^1\left|f_n(x)\right|\,|g(x)-g(0)|\,dx$

$\leq\int_0^{\delta}|f_n(x)|\,|g(x)-g(0)|\,dx+\int_{\delta}^1|f_n(x)|\,|g(x)-g(0)|\,dx$

$\leq\varepsilon\int_0^1f_n(x)dx+2M\int_{\delta}^1f_n(x)dx$

$\Rightarrow 0\leq\liminf\int_0^1f_n(x)|g(x)-g(0)|dx$

$\leq\limsup\int_0^1f_n(x)|g(x)-g(0)|\,dx\leq\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1f_n(x)(g(x)-g(0))\,dx=0$.

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1f_n(x)g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1f_n(x)(g(x)-g(0))\,dx+\int_0^1f_n(x)g(0)dx\right)$

$=g(0)$

41. $\varepsilon>0$이 주어질 때, (고정된) $x\in[0,\infty)$에 대하여 $x<N$인 자연수 N 있다.

$n\geq N$일 때 $|f_n(x)-e^{-x}|=0<\varepsilon$. $\therefore$ $\{f_n\}\to e^{-x}$.

$\lim\int_0^{\infty}f_n=\lim\left(\int_0^ne^{-x}+\int_n^{n+e^n}e^{-2n}(e^n+n-x)\right)$

$=\lim\left[(1-e^{-n})+\frac{1}{2}\right]=\frac{3}{2}$.

$\int_0^{\infty}\lim f_n=\int_0^{\infty}e^{-x}=1\neq\frac{3}{2}$.

구하는 값 $\frac{5}{2}$.

42. $\lim_{n\to\infty}f_n=\lim\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\cdot x=x=f(x)$. $\|f_n-f\|_{[0,1]}=\left|n\sin\frac{1}{n}-1\right|\to0$

$\left(\frac{d}{dx}(n\sin\frac{x}{n}-x)\leq0\Rightarrow\text{단조감소}\right)$

43. $f_n{}'=\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(nx)+\frac{2x}{\pi}\cdot\frac{n}{1+n^2x^2}\to\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$.

$f(x):=\lim f_n(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\\\frac{2x}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}=\begin{cases}x, & x\geq0\\-x, & x<0\end{cases}=|x|$.

$\lim_{n\to\infty}(f_n{}'(-1))+\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'(-1)=-1+(-1)=-2$.

44. $\left|\frac{f(nx)}{n(n+1)}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$이므로 바이어슈트라스 M 판정에 따라

$\sum\frac{f(nx)}{n(n+1)}$: 균수.

$$\sum\int_0^1\frac{f(nx)}{n(n+1)}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\int_0^1f(nx)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\int_0^1nx\,dx-\int_0^1[nx]\,dx\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}.$$

45. 미적분 기본정리에 따라 $\{f_n\}$은 $[0,1]$에서 미분가능하고

$f_n{}'(x)=f_{n-1}(x)$. f_0는 $[0,1]$에서 연속이므로 $|f_0(x)|\le M$인 $M>0$ 있다.

$|f_n{}'(x)| \le \frac{M}{(n-1)!}x^{n-1} \le \frac{M}{(n-1)!}$, $\sum \frac{M}{(n-1)!}$은 비판정에 따라 수렴.

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum f_n{}'$은 균등수렴.

46. $\left|2^{-n}f_n(x)\right| \le \frac{n}{2^n}$, $\sum\frac{n}{2^n}$은 비판정에 따라 수렴.

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}f_n(x)$는 균등수렴하므로

f는 $(0,\infty)$에서 연속이고,

$\varepsilon>0$에 대하여 $N\in\mathbb{N}$이 존재해서 $\left|f(x)-\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$K=1,\ 2,\ \cdots,\ N$에 대하여 $\lim_{K\to\infty}(2^{-K}f_K(x))=0$이므로

$M>0$이 존재해서 $x\ge M$이면 $\left|2^{-K}f_K(x)\right|\le \frac{\varepsilon}{2\max\{1,2,\cdots,N\}}=\frac{\varepsilon}{2N}$.

따라서 $x\ge M$이면

$$|f(x)-0| = \left|f(x)-\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} 2^{-k}f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2N}\cdot N=\varepsilon.$$

47. $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ s.t. $|x-y|<\delta$, $x,\ y\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Choose $N\in\mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{N}<\delta$.

$$n\ge N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{n}{2}\int_{x-\frac1n}^{x+\frac1n} f(t)dt - \frac{n}{2}\int_{x-\frac1n}^{x+\frac1n} f(x)dt\right|$$

$$\le \frac{n}{2}\int_{x-\frac1n}^{x+\frac1n}|f(t)-f(x)|\,dt$$

$$< \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot\varepsilon=\varepsilon.$$

48. $f_n(0)=\frac{1}{n}\int_{-n}^{n} g(t)\,dt$는 수렴하고,

$\left|f_n{}'(x)\right|=\frac{1}{n}|g(x+n)-g(x-n)|\le\frac{2}{n}\to0\ (n\to\infty)$이므로

$\lim_{n\to\infty}f_n{}'(x)=f'(x)=0$. 따라서 f는 상수함수이다.

49. $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}x(1-x^2), & |x|<1\\ 0, & x=\pm1\\ 0, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}x-x^3, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge1\end{cases}.$$

$\{f_n\}$, f는 $[0,2]$에서 연속이고 $f_{n+1}\le f_n$이므로 Dini 정리에 따라

$[0,2]$에서 $\{f_n\}\rightrightarrows f$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2\frac{x}{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}\,dx=\int_0^2 f=\int_0^1 x-x^3+\int_1^2 0=\frac14.$$

50. $f(x)-g(x)$는 $[0,1]$에서 연속이므로 바이어슈트라스 다항식 근사 정리에 따라 $f(x)-g(x)$로 균등수렴하는 다항함수열 $\{P_n(x)\}$ 있다.

가정에 의해 $0=\int_0^1 P_n(x)\{f(x)-g(x)\}dx$.

$(f-g)^2\ge0$, $f-g$는 $[0,1]$에서 연속이며

$0=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 P_n(x)dx\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$이므로

$f-g\equiv0$, $f\equiv g$.

51. 테일러 정리에 따라 $g(x)=\frac{g''(t_x)}{2}x^2$인 $t_x\in(0,x)$ 있다.

따라서 $[0,1]$에서 $|g(x)|\le\frac12$.

$x\in(0,1]$일 때 평균값 정리에 따라

$|g'(x)-g'(0)|=|g''(s_x)\cdot x|\le1$인 $s_x\in(0,x)$ 있다.

$x=y$이면 주어진 부등식이 성립한다.

$x\ne y$일 때 $|g(x)-g(y)|=|g'(r_x)||x-y|\le|x-y|$인 r_x가 x, y 사이에 있다.

52. 수학적 귀납법에 따라 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}$.

$f(x)=\lim f_n=e^{-x}$.

$[0,r]$에서 $\left|\frac{(-x)^k}{k!}\right|\le\frac{r^k}{k!}$, $\sum\frac{r^k}{k!}$은 비판정에 따라 수렴하므로

바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\{f_n\}\rightrightarrows f$.

53. $p_3(x)=f(0)+f'(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3=x-\frac12x^2+\frac13x^3$.

$x\ne0$일 때 $\frac{x}{n}>-1$인 임의의 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 테일러 정리에 따라

$$\ln g_n(x)=-nx+n^2\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=-nx+n^2\left(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3(1+t_n)^3n^3}\right)$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3n(1+t_n)^3}$$ 인 $t_n\in\left(0,\frac{x}{n}\right)$ 있다.

$\lim_{n\to\infty}\ln g_n(x)=-\frac{x^2}{2}$, $g_n(0)=1$이므로 $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

54. 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여 $f_{n+1}(x_{n+1})\le f_n(x_{n+1})\le f_n(x_n)$이므로,

$\{f_n(x_n)\}$은 단조감소하고, ㉡에 의해 $f_n(x_n)\ge0$.

단조수렴정리에 따라 $\{f_n(x_n)\}$는 수렴.

$L:=\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)$라 하면 $\{f_n(x_n)\}$는 음이 아닌 수열이므로 $L\ge0$.

$\{x_n\}\subset[0,1]$이므로 볼자노 바이어슈트라스 정리에 따라

$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha\in[0,1]$인 부분수열 $\{x_{n_k}\}$ 있다.

㉠에 따라 모든 $n\in\mathbb{N}$에 대하여

$f_n(\alpha)=\lim_{k\to\infty}f_n(x_{n_k})\ge\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x_{n_k})=L$. 즉, $0=\lim_{n\to\infty}f_n(\alpha)\ge L$, $L=0$.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\|f_n-0\|_{[0,1]}=\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=0$이므로

$\{f_n\}$은 $[0,1]$에서 0으로 균등수렴.

55. $g(t)=x\cos(tx)$, $t\in[0,1]$는 연속이므로 리만적분가능.

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac1n=\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1 x\cos t(tx)dt=\sin x.$$

따라서 극한함수 $f(x)=\sin x$, $x\in[0,\pi]$.

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac1n-\int_0^1 g(t)dt\right|\le\frac{2\pi}{n}.$$

$\|f_n-f\|\le\frac{\pi}{n}$이므로 $\lim\|f_n-f\|=0$.

$$\lim\int_0^\pi f_n=\int_0^\pi\sin x\,dx=2.$$

56. 임의의 자연수 $k\in\mathbb{N}$일 때 $n_k=k$, $x_k=k^2\pi$, $\varepsilon_0=1$라 하자.

$\left|\frac{(k^2\pi)^{3/2}\cos(k\cdot k^2\pi)}{k^{5/2}}\right|=\sqrt{k}\pi^{3/2}\ge\varepsilon_0$이므로 $\frac{x^{3/2}\cos(nx)}{n^{5/2}}$는

$(0,\infty)$에서 0으로 균등수렴하지 않는다.

따라서 f_n은 균등수렴하지 않는다.

$a\in(0,\infty)$일 때 $J=(0,a+1)$라 하자.

$\left|\frac{a^{3/2}\cos(na)}{n^{5/2}}\right|\le a^{3/2}\frac{1}{n^{5/2}}$, $\sum\frac{a^{3/2}}{n^{5/2}}$는 수렴하므로

비교 판정에 따라 $\sum\frac{a^{3/2}\cos(na)}{n^{5/2}}$는 수렴한다.

$g_n(x)=\frac{x^{3/2}\cos(nx)}{n^{5/2}}$라 하면 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in J=(0,a+1)$일 때,

$$|g_n{}'(x)|\le\left|\frac{\frac32x^{\frac12}\cos(nx)}{n^{5/2}}\right|+\left|\frac{x^{3/2}\sin(nx)}{n^{3/2}}\right|\le\frac{\frac32(a+1)^{\frac12}}{n^{5/2}}+\frac{(a+1)^{\frac32}}{n^{3/2}}$$ 이므로

바이어슈트라스 M 판정에 따라 $\sum g_n{}'(x)$는 J에서 균등수렴하므로

f는 J에서 미분가능하다. 그러므로 $(0,\infty)$에서 f는 미분가능.

57. 모든 $n\in\mathbb{N}$과 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

바이어슈트라스 M판정에 따라 주어진 함수항 급수는 평등수렴한다.

$g(x)=\sin x$라 하면 모든 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $|g'(x)|\le 1$이므로

g는 균등연속이다. 따라서 $\varepsilon>0$이 주어질 때 $\delta>0$가 존재해서

$|x-y|<\delta$인 임의의 $x,\ y\in\mathbb{R}$에 대하여 $|g(x)-g(y)|<\varepsilon$.

$N\in\mathbb{N}$이 존재해서 $n\ge N$이면 $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos(kx)}{k^2}\right|<\delta$이므로

$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

58. ①, ②로부터 f_n은 유계이고 균등수렴하므로

$\{f_n\}$는 균등유계이고, 극한함수 f는 유계이다.

이때 $\sup(f(x))=M$라 하자. f_n이 f로 균등수렴하므로

$\varepsilon>0$이 주어질 때 양의 정수 K가 존재하여 $K<n$이면

$|f_n(x)-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $x\in\mathbb{R}$이므로 $f(x)-\dfrac{\varepsilon}{2}<f_n(x)<f(x)+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

따라서 모든 $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)<f(x)+\dfrac{\varepsilon}{2}\le M+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$M_n<M+\dfrac{\varepsilon}{2}$, $\sup(f(x))=M$이므로 $M-\dfrac{\varepsilon}{2}\le f(a)$인 $a\in\mathbb{R}$ 있다.

$f(a)-\dfrac{\varepsilon}{2}<f_n(a)\le M_n$, $\left(M-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)-\dfrac{\varepsilon}{2}\le M_n$.

$M-\varepsilon<M_n\le M+\dfrac{\varepsilon}{2}<M+\varepsilon$, 즉 $|M_n-M|<\varepsilon$.

따라서 $\{M_n\}$는 M으로 수렴한다.

59. $\left|\dfrac{1}{k!}\cos\left(\dfrac{2\pi}{k!}x\right)\right|\le\dfrac{1}{k!}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$는 수렴한다.

바이어슈트라스 M판정에 따라 $\{f_n\}$는 균등수렴.

$\{f_n\}$의 극한함수 f라 하자.

$A=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}f_m(n!)=\lim_{n\to\infty}f(n!)$,

$f_n(n!)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cos\left(\frac{2\pi}{k!}n!\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(n!)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e-1$.

$\{f_n\}$이 f로 균등수렴하므로 $A=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n!)=e-1$.

$B=\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}f_m(n!)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e-1$.

($\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cos\left(\frac{2\pi}{k!}n!\right)$에서 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{k!}n!\right)=1$, 즉 n이 충분히 크므로)

60. $nx=u$라 치환하면

$n\displaystyle\int_{-1}^{1}f(nx)g(x)dx=\int_{-n}^{n}f(u)g\left(\frac{u}{n}\right)du=\int_{-1}^{1}f(u)g\left(\frac{u}{n}\right)du$.

f는 $[-1,1]$에서 연속이므로 $\varepsilon>0$가 주어질 때,

$\delta>0$가 존재해서 $|x|<\delta$이면 $|g(x)-g(0)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

$\dfrac{1}{N}<\delta$인 자연수 N을 택하자. $n\ge N$, $u\in[-1,1]$일 때

$\left|f(u)g\left(\dfrac{u}{n}\right)-f(u)g(0)\right|\le M\left|g\left(\dfrac{u}{n}\right)-g(0)\right|<\varepsilon$이므로

함수열 $\left\{f(x)g\left(\dfrac{x}{n}\right)\right\}$는 $[-1,1]$에서 $f(x)g(0)$로 평등수렴한다.

따라서 주어진 결과가 성립.