Advanced Laboratory Course

Wintersemester 09/10

Protokoll zu

Holographie

Philip Pütsch, Benedikt Sauer Gruppe p17

> Universität Bonn 22. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einf	ührung und Theorie	3
	1.1	Theoretischer Hintergrund	3
	1.2	Holographie	3
		1.2.1 Grundprinzip	3
		1.2.2 Rekonstruktion der Objektwelle	3
		1.2.3 Realisierung des Aufbaus	4
		1.2.4 Weitere Begriffe	4
	1.3	Photorefraktiver Effekt bei Lithiumniobat	4
	1.4	Beugungswirkungsgrad	5
2	Vers	suchsdurchführung und Auswertung	5
	2.1	Dünne Hologramme	5
		2.1.1 Transmissionshologramme	5
		2.1.2 Reflexionshologramme	6
			7
	2.2	Volumenhologramme in Lithiumniobat	8
		2.2.1 Schreibkurve	9
		2.2.2 Löschkurve	10
		2.2.3 Winkelabhängigkeit der Beugungseffizienz	
Α	Mes	sswerte	13
	A.1	Schreibkurve	13
	A.2		
		Rockingkurve	

1 Einführung und Theorie

Dieser Versuch ist eine Einführung in die Holographie. Es werden zunächst am ersten Versuchstag selbst Reflexions- und Transmissionshologramme hergestellt. Am zweiten Versuchstag werden dann Lese- und Schreibeigenschaften des photorefraktiven Lithiumniobat-Kristalls untersucht.

1.1 Theoretischer Hintergrund

1.2 Holographie

Ein Hologramm ist die Aufzeichnung einer Lichtwelle, ähnlich einer gewöhnlichen Photographie. Im Gegensatz zu dieser werden aber durch Interferenz auch Phaseninformation der Lichtwelle gespeichert, wodurch eine räumliche Rekonstruktion der aufgezeichneten Objektwelle möglich ist.

1.2.1 Grundprinzip

Es werden zwei zueinander kohärente Wellen verwendet. Die erste wird auf das zu holographierende Objekt gerichtet, wovon sie zur Photoplatte reflektiert wird und heißt entsprechend *Objektwelle*, die zweite wird direkt auf die Photoplatte gerichtet, die *Referenzwelle*. Dabei werden auf der Platte aufgrund der Kohärenz Interferenzmuster erzeugt, die dann bei genügend hoher Auflösung der photoempfindlichen Schicht (für sichtbares Licht sind etwa 5000 Linien pro mm nötig) gespeichert werden.

Sind S und R Signal- und Referenzwelle, so gilt:

$$I \propto |R + S|^2 = |R|^2 + |S|^2 + 2\operatorname{Re}(RS)$$

wobei I die Intensitätsverteilung des Interferenzmusters ist. Im letzten Term ist also die Phasendifferenz von R und S erhalten (da $Re(RS) = |RS| \cos(\phi_R + \phi_S)$).

1.2.2 Rekonstruktion der Objektwelle

Entwickelt man nun die Photoplatte oder den Film, so erhält man zunächst ein sogenanntes Am-plitudenhologramm. Ändert man nun den Aufbau leicht indem man das Objekt wegnimmt und die Objektwelle gegebenenfalls abdunkelt, so sieht man beim Blick durch das Filmmaterial an der selben Stelle, an der vorher das Objekt stand ein virtuelles dreidimensionales Bild von diesem. Es entsteht dadurch, dass die Referenzwelle an den geschwärzten Stellen auf dem entwickelten Bildträger (Film oder Photoplatte) gebeugt (genauer: beim Entwickeln wurde die lokal die Transmittivität des Materials geändert). Nehmen wir an, dass die Transmittivität des Films linear mit der Intensität abnimmt, also $\tau = a - b(|R + S|^2)$, so ergibt sich, in dem beschriebenen Aufbau:

$$R\tau = R(a - b(|R|^2 + |S|^2 + \bar{R}S + S\bar{R})$$
(1)

Der entscheidende Term ist nun $R\bar{R}S=|R|^2S$, der offenbar die selbe Phase und relative Intensität hat wie die Signalwelle. Damit wurde S vollständig rekonstruiert.

Ein *Phasenhologramm* hingegen (wie es in diesem Versuch durch Bleichen aus dem Amplitudenhologramm entsteht) erreicht die Rekonstruktion der Objektwelle durch eine lokale Änderung der

optischen Weglänge $s=n\cdot d$. Diese realisiert man entweder durch Änderung des Brechungsindexes n oder Änderung der Materialdicke d, wie es zum Beispiel bei sogenannten Prägehologrammen, die oft als Sicherheitsmerkmal eingesetzt werden ausgeführt wird.

1.2.3 Realisierung des Aufbaus

Treten Objekt- und Referenzwelle auf der gleichen Seite in den Film ein, so spricht man von einem *Transmissionshologramm*, da hier die Objektwelle aus der transmittierten Welle entsteht. Die zwei benötigten kohärenten Wellen werden dabei durch einen Strahlteiler erzeugt.

Beim Reflexionshologramm treten die Wellen auf entgegengesetzten Seiten ein, weshalb die Objektwelle aus dem reflektierten Licht rekonstruiert wird. Die kohärenten Wellen sind hierbei tatsächlich einfach die selbe Welle, die Referenzwelle wird direkt am Objekt, das hinter der Photoplatte steht reflektiert und interferiert dann auf dieser mit sich selbst.

1.2.4 Weitere Begriffe

Sind Objekt- und Referenzwelle ebene Wellen, so spricht man auch von einem elementaren Hologramm.

Man unterscheidet Hologramme auch noch nach der Dicke des Aufzeichnungsmaterials. Liegt diese im Bereich der Wellenlänge der Lichtwelle, so spricht man von einem dünnen Hologramm. Bei dickeren Materialien spricht man von einem Volumenhologramm, für die man Beugungseffekte, insbesondere Auslöschung durch Beugung an den Gitterebenen berücksichtigen. Je dicker dabei das Hologramm ist, umso schärfer muss die Braggbedingung zum Lesen eines Hologramms erfüllt sein:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} \tag{2}$$

wobei θ der Einfallswinkel, λ die Wellenlänge und d der Abstand der Hologrammgitterebenen.

1.3 Photorefraktiver Effekt bei Lithiumniobat

Im zweiten Versuchsteil verwenden wir zur Aufzeichnung eines elementaren Hologrammes einen Kristall aus LiNbO₃(Fe), also mit Eisen dotiertes Lithiumniobat.

Mit diesem Material kann man (im Gegensatz zu gewöhnlichen Bildträgern) Hologramme sowohl wiederholt schreiben als auch löschen. Möglich wird dies durch den sogenannten *photorefraktiven Effekt*, der sich aus mehreren Einzeleffekten zusammensetzt.

Beleuchtet man einen photorefraktiven Kristall inhomogen (beispielsweise mit einer kosinusförmigen Intensitätsverteilung wie in (1)), so werden an den hellen Stellen mehr Elektronen herausgelöst als an den dunkleren, an diesen erhält man also einen Elektronenüberschuss (2). Durch Diffusion, Drift und den volumenphotovoltaischen Effekt wandern die Elektronen zu den dunkleren Stellen und werden von Störstellen eingefangen (3), so dass sich ein inhomogenes Raumladungsfeld E ausbildet (4). Über den elektrooptischen Effekt wird dann der Brechungsindex n moduliert (5).

Nach dem Schreiben des Hologramms gilt für den Brechungsindex

$$n(z) = n_0 + \Delta n_0 \cos Kz \tag{3}$$

Der Mittelwert des Brechungsindexes ist n_0 und wird mit der Raumfrequenz $K = \frac{2\pi}{\Lambda}$ um die Amplitude Δn_0 entlang der z-Achse moduliert. Wir erwarten für die Schreib- und Lesekurven exponentielle Änderungen von Δn_0 :

$$\Delta n_0(t) = A \left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}) \right) \text{ bzw.}$$
(4)

$$\Delta n_0(t) = B \exp(-\frac{t}{\tau}) \tag{5}$$

1.4 Beugungswirkungsgrad

Um die Effizienz der Beugung des Referenzstrahles zum Signalstrahl und damit ein Maß für die "Lesbarkeit" des Hologramms zu haben, bedienen wir uns dem Beugungswirkungsgrad, der definiert ist als:

$$\eta := \frac{I_{\text{diff}}}{I_{\text{trans}} + I_{\text{diff}}} \tag{6}$$

Aus der Theorie der gekoppelten Schwingungen nach Kogelnik folgt nach dem Skript für den Beugungswirkungsgrad:

$$\eta(\theta) = \nu^2 \frac{\sin^2 \sqrt{\nu^2 + \xi^2}}{\nu^2 + \xi^2} \tag{7}$$

Dabei sind $\xi = \frac{Kd}{2}(\theta - \theta_{\rm Bragg}), \ \nu = \frac{\pi d\Delta n_0}{\lambda \cos \theta}$ und θ der Einfallswinkel des Referenzstrahls.

Ist die Braggbedingung erfüllt, so ist $\xi = 0$ und damit

$$\eta(\theta) = \sin^2 \nu = \sin^2 \left(\frac{\pi d\Delta n_0}{\lambda \cos \theta} \right)$$

2 Versuchsdurchführung und Auswertung

2.1 Dünne Hologramme

Am ersten Versuchstag wurden eigene Hologramme hergestellt. Aus der Fülle an Überraschungseierfiguren wählten wir zunächst eine rote Lokomotive aus, da mit einem roten Laser gearbeitet wurde. Da die Hologramme bei diesem noch nicht hinreichend stark waren führten wir die weiteren Aufnahmen mit einem stark reflektierenden Männchen und einem Objekt mit Kippbild durch.

2.1.1 Transmissionshologramme

Zur Aufnahme der Transmissionshologramme verwenden wir genauer den folgenden Aufbau:

Der Laser wird zunächst mit dem Strahlteiler aufgeteilt und dann mit spiegeln so geleitet, dass der aufgeweitete Referenzstrahl direkt auf den Film trifft und der aufgeweitete Objektstrahl möglichst gut das Objekt ausleuchtet.

Der OD-Filter dient dazu, die Intensitäten von Referenz- und Objektstrahl anzugleichen. Bei der Anordnung der Elemente auf dem optischen Tisch wird auf eine möglichst homogene Ausleuchtung

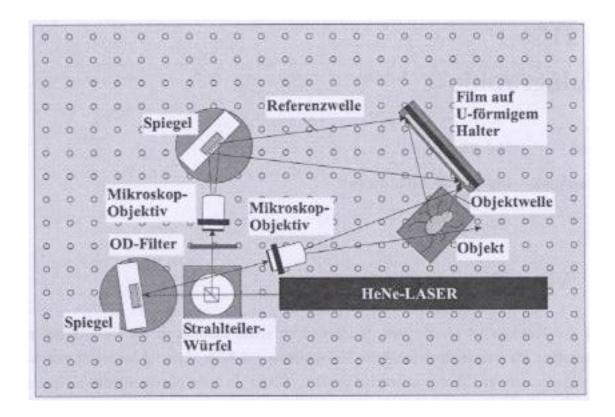


Abbildung 1: Aufbau Transmissionshologramm

des Objektes und des Filmes geachtet. Außerdem muss die Weglängendifferenz der beiden Teilstrahlen deutlich unter der Kohärenzlänge des Lasers von etwa 30 cm liegen, um an der Position des Films Kohärenz zu gewährleisten, was aber kein Problem darstellte.

Nun wird der Film zunächst belichtet (wobei die Zeiten im Skript tendenziell zu hoch angesetzt waren) indem zunächst der Strahl vom Laser geblockt wird und dann für einige Sekunden der Strahlblocker angehoben wird um Vibrationen zu vermeiden. In den bereitgestellten Wannen mit Entwickler, Stoppbad und Bleichmittel wird der Film dann entwickelt und zuletzt gebleicht. Dabei war bis zum Stoppbad der Raum nur durch eine blaue LED beleuchtet.

Nach einigen Minuten Trocknen konnten wir das dreidimensionale Abbild beobachten, indem wir das Hologramm wieder an der selben Stelle einspannten und den Referenzstrahl darauf richteten. Nach etwas längerer Zeit war an der Kaltlichtlampe das Bild zumindest zu erahnen (man sah die Reflexionen, aber nicht genau das zugehörige Objekt), genau zu erkennen war es allerdings nicht. Gut zu sehen war aber, dass wie erwartet nur rotes Licht gebeugt wurde.

2.1.2 Reflexionshologramme

Für das Reflexionshologramm änderten wir den Aufbau leicht ab:

Es wird also im Prinzip nur das Objekt hinter dem Filmträger platziert, der Objektstrahl geblockt und der Film durch eine Photoplatte ersetzt.

Die weiter Durchführung ist identisch zu der vorigen.

In diesem Versuchsteil benutzten wir wie schon erwähnt andere Objekte, die stärker reflektierten.

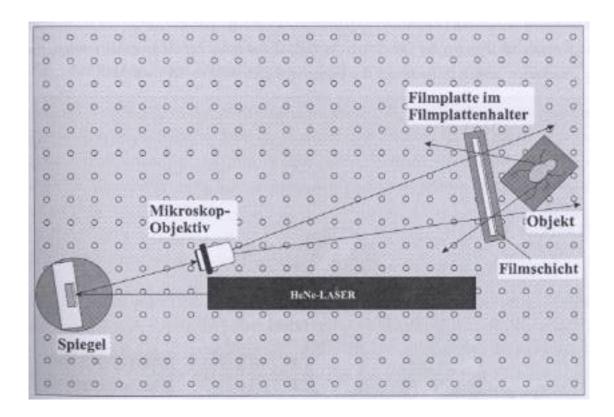


Abbildung 2: Aufbau Reflexionshologramm

Außerdem verwendeten wir ein kleines Auto mit Kippbild, um zu sehen, ob dies auf dem Hologramm auch zu erkennen ist.

Unsere Reflexionshologramme wurden deutlich besser, nach entsprechend langer Trocknungszeit waren die Hologramme auch ohne Laser sehr gut unter der Kaltlichtlampe zu erkennen. Das Kippbild allerdings zeigte nicht das erwünschte Verhalten, es war aber deutlich zu sehen, dass es bei einem bestimmten Winkel zumindest dunkel wurde, ohne aber das "neue" Bild zu zeigen. Vermutlich reichte die Winkelausleuchtung einfach nicht aus, da diese Kippbilder ab einem bestimmten Winkel mit ihren Prismen schräg einfallendes Licht reflektieren, das in diesem Fall ja nicht vorhanden war.

2.1.3 Reflexionshologramm mit Quellmittel

Im letzten Versuchsteil des ersten Versuchstages haben wir mit dem selben Aufbau wie im vorigen Abschnitt ein weiteres Hologramm aufgenommen, diesmal aber auf einer Photoplatte, die vor Versuchsbeginn in ein Quellmittel gelegt wurde. Zu Erwarten ist dabei, dass wenn die photosensitive Schicht nach dem Entwickeln und Bleichen wieder abquillt, was in Gleichungen einer nachträgliche Verringerung der Gitterkonstanten bewirkt. Daher muss das Hologramm um etwas zu sehen unter kurzwelligerem Licht betrachtet werden. Uns gelang es in der Tat auch nicht, das Hologramm mit dem roten Laser zu rekonstruieren. Unter der Kaltlichtlampe war aber leider auch nichts zu sehen, was uns vermuten ließ, dass wir möglicherweise zu lange haben Quellen lassen, weshalb sich der Bereich, in dem das Hologramm zu sehen ist in den UV-Bereich verschob.

2.2 Volumenhologramme in Lithiumniobat

Am zweiten Versuchstag wird ein elementares Transmissionshologramm zuerst in einen Lithiumniobatkristall geschrieben und dann wieder gelöscht, wobei in beiden Fällen über die Zeit die Intensität des transmittierten und des gebeugten Strahls gemessen wird. Im letzten Versuchsteil wird dann nach einem weiteren Schreibvorgang die Winkelabhängigkeit der Beugungseffizienz untersucht. Der Versuchsaufbau ist bei allen Teilen identisch:

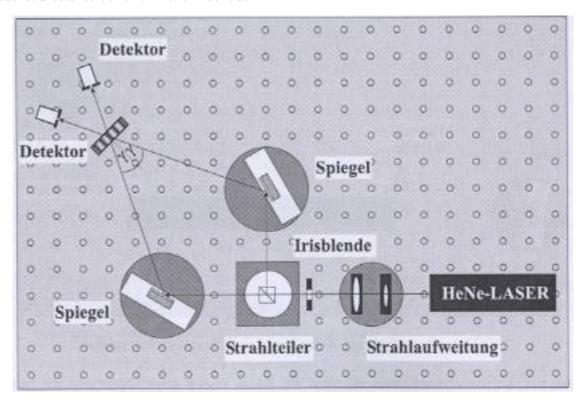


Abbildung 3: Aufbau Volumenholographie

Um den Kristall zwischen zwei Schreibvorgängen möglichst "hologrammfrei" zu haben, wird er zunächst mit einer starken Kaltlichtlampe beleuchtet, wodurch sich über die Zeit eine homogene Verteilung der Ladungsträger ausbildet.

Beim Aufbau soll darauf geachtet werden, einen Winkel von etwa $20\,^{\circ}$ zwischen den Strahlen zu und ein möglichst gleichmäßiges Ausleuchten des Kristalls zu erhalten. Aus dem genauen Winkel von $20,1\pm0,1\,^{\circ}$ und den bekannten Brechungsindizes von Luft und Kristall lässt sich mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz der Winkel im Kristall errechnen:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Kristall}}}\sin\gamma\right) = (8,631 \pm 0,012)^{\circ}$$
 (8)

Da dies nun der Braggwinkel im Kristall ist, können wir daraus die Raumfrequenz bestimmen (mit

 $\Lambda = \frac{2\pi}{K}$):

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2n\sin(\theta)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{4\pi n \sin(\theta)}{\lambda} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \Lambda = (920.9 \pm 2.1) \,\text{nm} \tag{11}$$

$$\Rightarrow K = (6.822 \pm 0.02) \,\text{MHz}$$
 (12)

Wir messen zunächst den Untergrund durch, für beide Verstärkungen, die wir in diesem Versuch verwendeten $(10^{-4}\,\mathrm{W})$ und $10^{-3}\,\mathrm{W})$ ergab sich ein identischer Untergrund, den wir dann mit den reglern wegregelten. Auch die Maxima beider Detektoren waren identisch. Wir gehen also davon aus, dass der systematische Fehler, den wir durch direktes Verwenden der Werte bekommen könnten vernachlässigbar sind.

2.2.1 Schreibkurve

Im ersten Versuchsteil nehmen wir etwa vierzig Minuten lang eine Schreibkurve auf, wobei jede Minute der Strahl einmal unterbrochen und die Beugungseffizienz gemessen wird. Daraus können wir wie beschrieben die Brechungsindexänderung Δn_0 berechnen:

$$\Delta n_0 = \arcsin\left(\sqrt{\eta}\right) \frac{\lambda \cos \theta}{\pi d} \tag{13}$$

Die Schwierigkeit hierbei bestand darin, die Apparatur wirklich völlig still zu halten. Die ersten 6 min im Graphen zeigen, was passiert, wenn einem das nicht gelingt: Das eigentliche Hologramm wird langsam gelöscht und erst danach wieder mit einem neuen überschrieben.

Die im Graphen gezeigten Fehlerbalken sind mit einem Fehler von $\pm 0.1^{\circ}$ und $\pm 1\,\text{mV}$ mithilfe Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet.

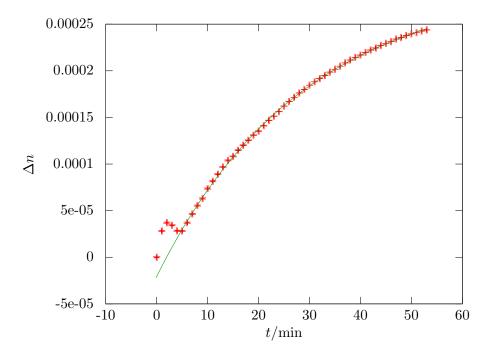


Abbildung 4: Schreibkurve und exponentieller Fit

Wie im Theorieteil beschrieben fitten wir daran die Funktion $\Delta n(t) = \Delta n_{\text{max}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

In Abbildung 4 ist die Schreibkurve mit dem Fit zu sehen. Wir erhalten aus dem Fit die Werte:

$$\Delta n_{\text{max}} = (3.158 \pm 0.11) \, 10^{-4} \tag{14}$$

$$\tau = (28.78 \pm 39) \,\text{min} \tag{15}$$

2.2.2 Löschkurve

Die Löschkurve wird aufgenommen, indem über eine lange Zeit nur der Lesestrahl auf das Hologramm gerichtet ist. Durch diese homogene Beleuchtung wird gleichzeitig das geschriebene Hologramm wieder gelöscht. Da die Wellenamplitude nur noch halb so groß ist wie beim Schreiben und damit die Intensität nur noch ein Viertel beträgt erwarten wir, dass τ in diesem Fall 4 mal so groß ist wie beim schreiben. Die Löschkurve sieht wie folgt aus:

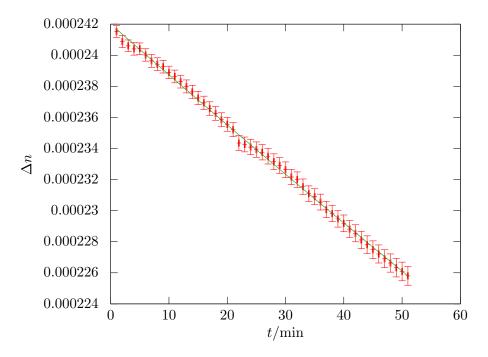


Abbildung 5: Löschkurve und exponentieller Fit

Diesmal fitten wir mit der einfachen Exponentialfunktion $\Delta n(t) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Daraus erhalten wir die folgenden Werte:

$$\Delta n_0 = (2,4201 \pm 0,0006) \, 10^{-4} \tag{16}$$

$$\tau = (735.8 \pm 4.2) \,\text{min} \tag{17}$$

Der für Δn_0 erhaltene Wert stimmt dabei mit der Erwartung überein, er entspricht nämlich gut dem Endwert der Schreibkurve. Die Fehler sind hier weit geringer als bei der Schreibkurve, weil de facto nur ein linearer Fit berechnet wurde. Der Wert für τ hingegen liegt weit über dem Erwartungswert, dies erklären wir damit, dass einer der Strahlen den Kristall wohl deutlich weniger ausgeleuchtet hat als der andere. Aus den Werten ergibt sich, dass die Intensität wohl etwa 1/5 betrug. Möglicherweise war auch der Strahlteiler nicht so gut wie angenommen. Außerdem war ein Spiegel recht verschmutzt, was in den vorigen Experimenten ohne aufgeweiteten Strahl nicht so stark auffiel.

2.2.3 Winkelabhängigkeit der Beugungseffizienz

Im letzten Versuchsabschnitt wird eine Rockingkurve aufgenommen. Diese gibt einem Informationen über die Winkelabhängigkeit der Beugungseffizienz, insbesondere können wir damit den Braggwinkel und die Hologrammgitterkonstante berechnen. Um das Hologramm dabei nicht zu schnell zu löschen, wird der Lesestrahl durch einen OD-Filter geschickt. Wir fanden folgenden Beziehung zwischen den Skalenteilen der Mikrometerschraube und dem Winkel:

$$\phi = (0.228 \pm 0.005) \frac{x}{\text{Skt}} \tag{18}$$

Leider schafften wir es nicht, daran eine vernünftige Kurve zu fitten. Wir können allerdings aus der

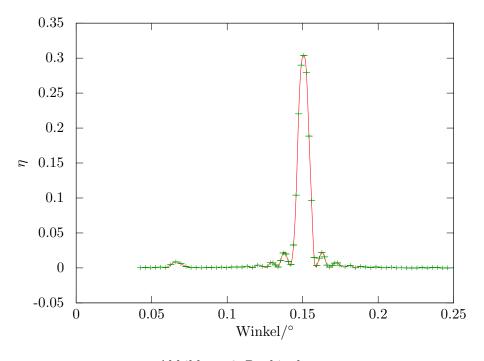


Abbildung 6: Rockingkurve

Höhe des Peaks auf das Δn_0 an dieser Stelle schließen, was etwa $(1.13 \pm 0.01) \cdot 10^{-4}$ beträgt und damit auf jeden Fall in der richtigen Größenordnung liegt.

A Messwerte

A.1 Schreibkurve

t/\min	Detektor links	Detektor rechts	t/\min	Detektor links	Detektor rechts
0	0	200	27	263	194
1	4	197	28	283	190
2	7	197	29	309	192
3	6	198	30	340	192
4	4	194	31	369	193
5	4	197	32	395	192
6	7	197	33	422	191
7	11	195	34	457	191
8	16	196	35	489	191
9	21	196	36	526	191
10	29	193	37	568	190
11	37	197	38	610	190
12	45	196	39	653	190
13	55	197	40	694	190
14	64	194	41	744	190
15	71	195	42	789	189
16	81	192	43	831	188
17	91	192	44	898	189
18	102	192	45	948	188
19	115	193	46	1000	189
20	125	192	47	1070	187
21	140	191	48	1120	187
22	159	193	49	1180	185
23	173	192	50	1250	186
24	190	191	51	1290	185
25	214	191	52	1350	183
26	240	194	53	1400	183

A.2 Löschkurve

t/\min	Detektor links	Detektor rechts	t/\min	Detektor links	Detektor rechts
1	128,8	180,8	27	101	179,3
2	125,1	179,1	28	99,9	179,1
3	126	181,9	29	99,4	179,4
4	123,2	178,9	30	99,3	180,6
5	125,9	182,8	31	99,1	182,6
6	122,7	180,3	32	98,2	181,8
7	120,7	179,4	33	97,4	182,6
8	120	179,5	34	96,1	182,4
9	120,3	180,8	35	$95,\!6$	182,4
10	119,9	182,2	36	94,8	182,6
11	118,6	181,6	37	93,2	181,9
12	117,7	182	38	$92,\!6$	182
13	116,5	181,8	39	$91,\!6$	181,7
14	115,5	182,1	40	90,9	181,7
15	114,5	182,6	41	89,7	181,1
16	113,4	182,5	42	88,9	180,8
17	112,2	182,5	43	87,6	180,2
18	111	182,2	44	$86,\!6$	179,6
19	109,4	181,7	45	86	179,9
20	109,2	182,9	46	85	179,1
21	108,2	183	47	84,6	179,7
22	104,6	181,3	48	83,7	179,1
23	104,1	180,9	49	82,9	178,8
24	102,8	179,5	50	82,1	178,2
25	102,1	179,1	51	$81,\!5$	178,2
26	101,9	179,6			

A.3 Rockingkurve

Winkel/°	Detektor	Winkel/°	Detektor	Winkel/°	Detektor
50	0	-9	209	_9	209
48	0	-10	61	-10	61
46	1	-11	8,7	-11	8,7
44	1	-12	16,5	-12	16,5
42	0	-13	36,6	-13	36,6
40	1	-14	$39,\!5$	-14	$39,\!5$
38	0	-15	19	-15	19
36	0	-16	2,4	-16	2,4
34	0	-17	7,7	-17	7,7
32	$0,\!4$	-18	13,2	-18	13,2
30	0,3	-19	$13,\!5$	-19	$13,\!5$
28	1,8	-20	4	-20	4
26	$0,\!5$	-22	4,1	-22	4,1
24	0,6	-24	7	-24	7
22	2,6	-26	1,1	-26	1,1
20	0,7	-28	4,3	-28	4,3
18	2,2	-30	2,2	-30	2,2
16	3,7	-32	2,1	-32	2,1
14	0,3	-34	2,1	-34	2,1
12	$6,\!5$	-36	0,4	-36	0,4
10	3	-38	1,8	-38	1,8
8	6,9	-40	0,4	-40	0,4
7	13,2	-42	0,9	-42	0,9
6	12,5	-44	0,8	-44	0,8
5	6,6	-46	0,3	-46	0,3
4	1,9	-48	0,8	-48	0,8
3	7,2	-50	0,6	-50	0,6
2	29	-52	3,6	-52	3,6
1	40,7	-54	11	-54	11
0	$25,\!4$	-56	15,6	-56	15,6
-1	6	-58	8,3	-58	8,3
-2	27,2	-60	1,1	-60	1,1
-3	191,4	-62	1,9	-62	1,9
-4	418	-64	1,3	-64	1,3
-5	697	-66	0,3	-66	0,3
-6	786	-68	1,3	-68	1,3
-7	735	-70	$0,\!4$	-70	$0,\!4$
<u>-8</u>	509				