Non-homogeneous Poisson process

FK

original June 2014
revised August 2025

1 Úvod

Dichotomický proces $Q(t)$ je proces, kde náhodná proměnná může nabývat dvou hodnot. Stavy označme E_1 a E_2. Pravděpodobnost, že se proces $Q(t)$ nachází v čase t ve stavu E_1 nebo E_2, popisují funkce $p_1(t)$, $p_2(t)$. Výskyt přechodů v čase mezi stavy E_1 a E_2 a naopak popisuje Poissonův proces. V případě homogenního procesu je hustota pravděpodobnosti doby do události, čili přechodu mezi stavy, popsána funkcemi

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ f_\mu(t) &= \mu\, \mathrm{e}^{-\mu t} \end{aligned}$$

kde λ a μ jsou tzv. rychlostní konstanty. Zde se však jedná o časově nehomogenní proces, a proto mluvíme obecně o intenzitách Poissonova procesu $\lambda(t)$ a $\mu(t)$. Hustota doby do dalšího přechodu se v takovém případě zřejmě v čase mění.

$$\begin{aligned} f_\lambda(t) &= \lambda(t)\, \mathrm{e}^{\,-\int \lambda(t')\mathrm{d}t'} \\ f_\mu(t) &= \mu(t)\, \mathrm{e}^{\,-\int \mu(t')\mathrm{d}t'} \end{aligned}$$

V dalším případném zobecnění mohou být i samotné intenzity náhodnými proměnnými.

2 Analytické řešení

Obecné řešení

Vyjdeme z Pauliho řídící rovnice, která nám dává soustavu dvou lineárních obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu s nekonstatními koeficienty:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_1(t) = -\lambda(t)p_1(t) + \mu(t)p_2(t) \tag{1}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_2(t) = +\lambda(t)p_1(t) - \mu(t)p_2(t). \tag{2}$$

Pomocí normovací podmínky pravděpodobnosti

$$1 = p_1(t) + p_2(t) \tag{3}$$

upravíme soustavu na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_1(t) + [\lambda(t) + \mu(t)]\, p_1(t) = \mu(t) \tag{4}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_2(t) + [\lambda(t) + \mu(t)]\, p_2(t) = \lambda(t). \tag{5}$$

Vztah (3) nám také dovolí zavést veličinu $y(t)$

$$y(t) = p_1(t) - p_2(t), \tag{6}$$

která bude jednoznačně popisovat průběh pravděpodobností $p_1(t)$ a $p_2(t)$. Dále zavedeme označení:

$$\xi(t) = \mu(t) + \lambda(t) \tag{7}$$

$$\eta(t) = \mu(t) - \lambda(t). \tag{8}$$

Rozdíl rovnic (4) a (5) přejde použitím těchto vztahů na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + \xi(t) y(t) = \eta(t). \tag{9}$$

Řešením této diferenciální rovnice dostaneme obecně vyjádřenou funkci $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{\phi(t)} \int \eta(t)\ \phi(t)\ \mathrm{d}t. \tag{10}$$

kde

$$\phi(t) = \mathrm{e}^{\int \xi(\mathrm{t}) \mathrm{dt}}. \tag{11}$$

V průběhu integrace (10) je nutné pamatovat na integrační konstantu c. Integrační konstanta z (11) se zkrátí nebo absorbuje do c (změnou označení).

Konstantní intenzity

První vyřešíme jednodušší model s konstantními intenzitami (homogenní proces).

$$\lambda = \text{const.} \tag{12}$$

$$\mu = \text{const.} \tag{13}$$

$$y(t) = \frac{\eta}{\xi} + c\ \mathrm{e}^{-\xi \mathrm{t}} = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} + \mathrm{c}\ \mathrm{e}^{-(\mu+\lambda)\mathrm{t}} \tag{14}$$

Vidíme, že řešení se v čase blíží ke stacionárnímu bodu. Systém zapomíná svůj počáteční stav daný integrační konstantou c exponenciálně s rychlostí odpovídající intenzitě přechdů mezi oběma stavy.

Exponenciální intenzity

Zvolme exponenciální časové průběhy intenzit Poissonova procesu $\lambda(t)$ a $\mu(t)$. Pro jednoduchost volíme v obou exponenciálách stejný parametr a. Kdybychom zvolili různá čísla $a \neq b$, nemohli bychom analytické řešení vyjádřit explicitně pomocí elementárních funkcí

$$\lambda(t) = \nu\ \mathrm{e}^{-at} \tag{15}$$

$$\mu(t) = \nu\ (1 - \mathrm{e}^{-at}). \tag{16}$$

Dosazením do (10) dostáváme explicitní analytické řešení úlohy pro tyto $\lambda(t)$ a $\mu(t)$.

$$y(t) = 1 - \frac{2\nu}{\nu - a}\ \mathrm{e}^{-at} + c\ \mathrm{e}^{-\nu t} \tag{17}$$

c je integrační konstanta, která závisí na počáteční podmínce $y(0)$

$$y(0) = 1: \quad c = \frac{2\nu}{\nu - a} \tag{18}$$

$$y(0) = 0: \quad c = \frac{\nu + a}{\nu - a} \tag{19}$$

$$y(0) = -1: \quad c = \frac{2a}{\nu - a}. \tag{20}$$

Výše uvedené řešení nemá smysl v případě rovnosti $a = \nu$, přestože není důvod, aby proces s takovými parametry neexistoval. Tehdy má řešení tvar

$$y(t) = 1 - 2at\ \mathrm{e}^{-at} + c\ \mathrm{e}^{-at} \tag{21}$$

a pro c platí

$$y(0) = 1: \quad c = 0 \tag{22}$$

$$y(0) = 0: \quad c = -1 \tag{23}$$

$$y(0) = -1: \quad c = -2. \tag{24}$$

Harmonické intenzity
Tentokrát volíme harmonické průběhy intenzit přeskoků $\lambda(t)$ a $\mu(t)$

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \nu\sin^2(\omega t) && (25)\\ \mu(t) &= \nu\cos^2(\omega t). && (26)\end{aligned}$$

Řešením je pak funkce

$$y(t) = \frac{1}{1+\frac{4\omega^2}{\nu^2}}\left(\cos(2\omega t)+\frac{2\omega}{\nu}\sin(2\omega t)+c\,\mathrm{e}^{-\nu t}\right) \tag{27}$$

a pro c tentokrát platí

$$\begin{aligned} y(0)=1: &\quad c = \frac{4\omega^2}{\nu^2} && (28)\\ y(0)=0: &\quad c = -1 && (29)\\ y(0)=-1: &\quad c = -2-\frac{4\omega^2}{\nu^2}. && (30)\end{aligned}$$

3 Simulace

Základní algoritmus
Časové okamžiky, ve kterých dochází ke změně stavu, simulujeme následujícím způsobem. V daném čase t_0 generujeme náhodnou proměnnou X s uniformním rozdělením pravděpodobonosti na intervalu [0,1). Pak hledáme takový čas t, kterému odpovídá funkční hodnota kumulativní distribuční funkce $F(t_0,t)$ v čase t_0, která se rovná generovanému číslu X. Distribuční funkce má tvar

$$F_\lambda(t_0,t) = 1-\ \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t}\lambda(t')\mathrm{d}t'} \tag{31}$$

pro přechody ze stavu E_1 do stavu E_2, resp.

$$F_\mu(t_0,t) = 1-\ \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t}\mu(t')\mathrm{d}t'} \tag{32}$$

a zřejmě se tak její průběh s časem t_0 vyvíjí. Základní algoritmus tedy vypadá následovně:

1. inicializace.
2. generuj náhodné číslo X.
3. vyřeš implicitní rovnici pro t:
$$X = F(t_0,t) \tag{33}$$
4. udělej krok: $t_0 = t$, přehod' stav náhodné proměnné Q.
5. pokračuj bodem 2.

Tak získáme jednu trajektorii nehomogenního dichotomického procesu. Pro porovnání s analytickými výsledky budeme potřebovat statisticky zpracovat velký počet trajektorií.

Časový krok
V případě intenzity $\lambda(t) = \nu\,\mathrm{e}^{-at}$ má distribuční funkce tvar

$$F_\lambda(t_0,t) = 1-\ \mathrm{e}^{\frac{\nu}{a}\left(\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-at_0}\right)} \tag{34}$$

a inverzní funkci můžeme vyjádřit explicitně

$$t = F_\lambda^{-1}(t_0,X) = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a}{\nu}\log\left(1-X\right)+\mathrm{e}^{-at_0}\right). \tag{35}$$

V případě, že argument vnějšího logaritmu není kladné číslo, bereme za výsledek $t = \infty$, tj. libovolný čas za koncovým časem simulace. Naproti tomu pro $\mu(t) = \nu\ (1 - \mathrm{e}^{-at})$ a příslušnou distribuční funkci

$$F_\mu(t_0, t) = 1 - \ \mathrm{e}^{\,-\nu(t-t_0) - \frac{\nu}{a}\left(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-at_0}\right)} \tag{36}$$

již rovnici (33) pro t řešit explicitně neumíme. Použitím Newtonova algoritmu tedy numericky řešíme transcendentní rovnici

$$0 = at + \mathrm{e}^{-\mathrm{at}} - \mathrm{at_0} - \mathrm{e}^{-\mathrm{at_0}} + \frac{\mathrm{a}}{\nu}\log(1 - \mathrm{X}). \tag{37}$$

Ani v případě harmonických intenzit $\lambda(t) = \nu\ \sin^2(\omega \mathrm{t}), \mu(\mathrm{t}) = \nu\ \cos^2(\omega \mathrm{t})$ nemůžeme k distribuční funkci

$$F_{\lambda,\mu}(t_0, t) = 1 - \ \mathrm{e}^{-\frac{\nu}{2}\left[\mathrm{t} - \mathrm{t_0} \mp \frac{1}{2\omega}(\sin\, 2\omega \mathrm{t} - \sin\, 2\omega \mathrm{t_0})\right]} \tag{38}$$

vyjádřit inverzi explicitně.

$$0 = \left(t \mp \frac{1}{2\omega}\sin\, 2\omega \mathrm{t}\right) - \left(t_0 \mp \frac{1}{2\omega}\sin\, 2\omega \mathrm{t_0}\right) + \frac{2}{\nu}\log\,(1 - X) \tag{39}$$

Vzhledem ke tvaru funkce na pravé straně (nulová derivace v periodicky se vyskytujících bodech) hledáme její kořeny tentokrát metodou bisekce intervalu.

Funkce $F_\lambda, \mu(t_0, t)$ jsou vynesené v grafech na obr. 1 a 1. Vybrané simulované trajektorie se nachází na obr. 3 a 4.

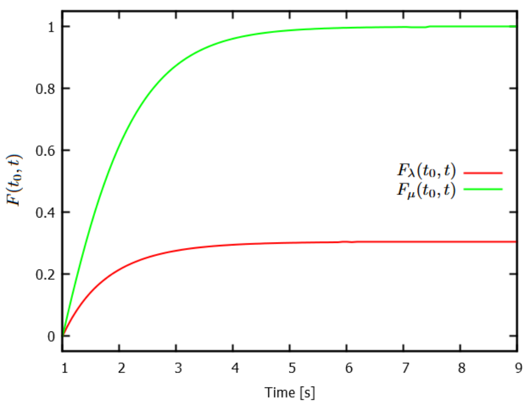

Figure 1: Kumulativní distribuční funkce, exponenciální závislosti, $t_0 = 1$ s.

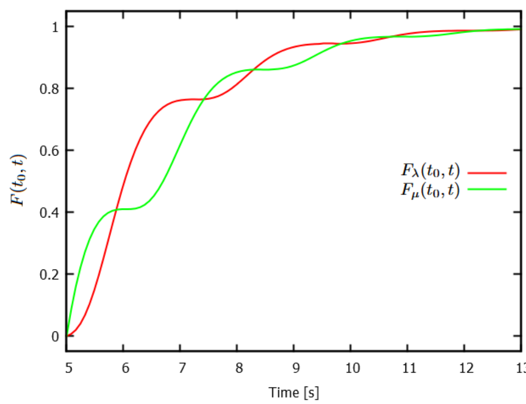

Figure 2: Kumulativní distribuční funkce, harmonické závislosti, $t_0 = 5$ s.

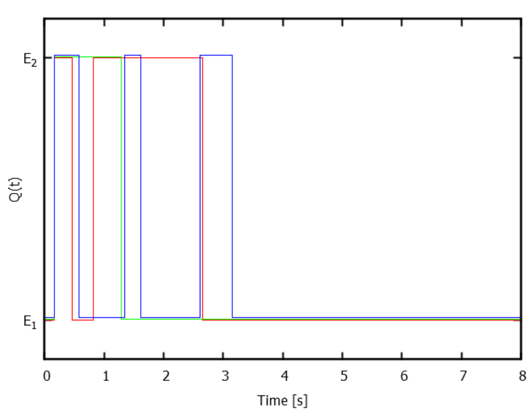

Figure 3: 3 vybrané trajektorie, exponenciální závislosti, poč. podm. $y(0) = 1$

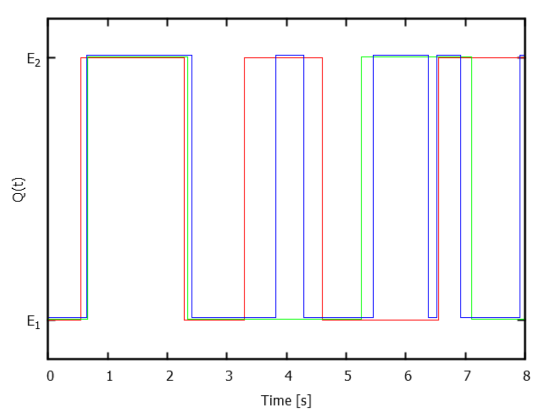

Figure 4: 3 vybrané trajektorie, harmonické závislosti, poč. podm. $y(0) = 1$

4 Diskuze a závěr

Srovnání výsledků

Analytická řešení a výsledky simulací srovnávají obrázky 5 a 6. Číselné nastavení parametrů exponenciálních koeficientů jsme volili

$$a = 1,1 \tag{40}$$
$$\nu = 1,2 \tag{41}$$

Simulaci jsme prováděli v časovém intervalu od 0 do 8 jednotek. Simulovali jsme milion trajektorií pro každou ze tří počátečních podmínek. Počáteční podmínka $y(0) = 0$ odpovídá počátečním podmínkám s hodnotami 1 a -1, každé v polovině pokusů.

Harmonické koeficienty jsme nastavili pomocí parametrů

$$\omega = 1,3 \tag{42}$$
$$\nu = 1,2 \tag{43}$$

a dále byla simulace stejná.

V obou případech exponenciálních i harmonických koeficientů se simulace shoduje s analytickým řešením pro $y(t)$ (a tedy pravděpodobnosti $p_1(t)$ a $p_2(t)$) velmi dobře.

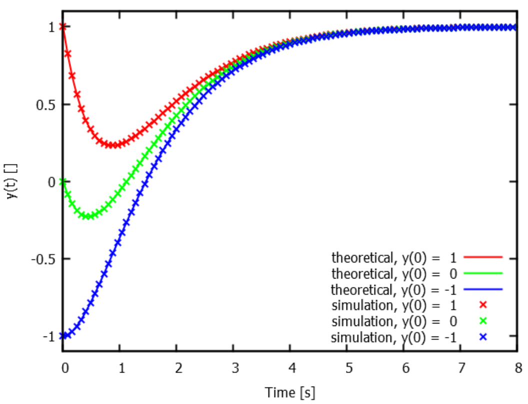

Figure 5: Analytické a simulované výsledky, exponenciální závislosti.

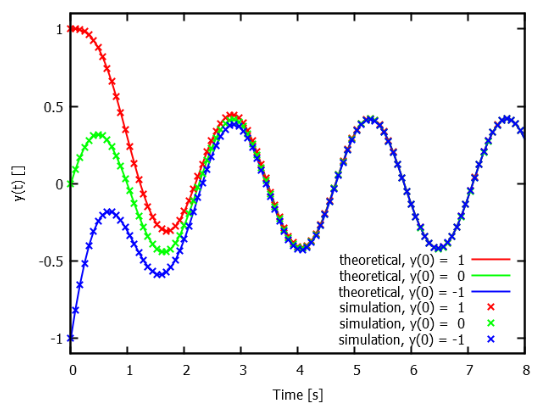

Figure 6: Analytické a simulované výsledky, harmonické závislosti.

Závěr

Ověřili jsme, že výsledky Monte Carlo simulace se shodují s analyticky vypočtenou předpovědí pravděpodobností, kterou bylo možné explicitně vypočítat pro zvolené funkce $\lambda(t)$, $\mu(t)$. Kdybychom však parametry volili jinak (např. méně symetricky, kdy $\lambda(t) + \mu(t) \neq \nu$), nebylo by možné explicitní analytické řešení získat. Na druhou stranu simulace není na volbě parametrů nikterak závislá. Bez dalších úprav ji bude možné aplikovat pro libovolné hodnoty parametrů.