Преобразование Фурье, пространство Шварца

Упр. 1. Доказать, что для любого многочлена $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, со значениями в $\mathbb{R}^m$ функция $P_m(x)e^{-|x|^2}$ лежит в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Упр. 2 (Коммутационные соотношения)**.** Показать, что для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются равенства

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\partial_x^\alpha u(x) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x)\,,$$
$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left[x^\alpha u(x)\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x)\,.$$

Упр. 3. Рассмотреть последовательность функций $\{h_p(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где

$$h_p(x) = \begin{cases} p\,, & |x| < \frac{1}{2p}\,,\\ 0\,, & |x| > \frac{1}{2p}\,. \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{h_p(x)\}$ фундаментальна по норме пространства $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ и что для всякой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{p\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1} h_p(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\,.$$

Упр. 4. Вычислить преобразование Фурье для следующих функций:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$;
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{n}{4\pi}}e^{-nx^2/4}$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}$.

Пространства Соболева

Упр. 5. Определить для какого максимального k функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $H^k(\mathbb{R}^1)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqslant 0 \text{ или } x \geqslant 2\,,\\ x\,, & 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\\ 2-x\,, & 1 \leqslant x \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Упр. 6. Дана функция $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$. Доказать, что последовательность $n\cdot f(nx)$ при $n\to\infty$ сходится в $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ к $\delta(x)$.

Упр. 7. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{x^2-k^2-i\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon > 0$.

Упр. 8. Обобщённая функция $\delta(|x|-a)$, $x \in \mathbb{R}^n$ из $H^{-[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$ определяется с помощью функционала, задаваемого равенством

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(|x|-a)\varphi(x)\,dx = \int_{|x|=a} \varphi(\xi)\,d\sigma_\xi\,,$$

где $\varphi(x) \in H^{[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$, $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности сферы радиуса a в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Доказать ограниченность функционала задачи и найти преобразование Фурье функции $\delta(|x|-a)$.

Упр. 9. Найти производную функции $\theta(x)e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

Упр. 10. Упростить выражения, вычислив входящие в них производные [1]:

1. $\dfrac{1}{4\pi}(-\Delta + 1)\dfrac{e^{-|x|}}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$;

2. $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\dfrac{\theta(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$, $x, t \in \mathbb{R}^1$;

3. $(\Delta + k^2)\dfrac{e^{ik|x|}}{2ik}$, $x \in \mathbb{R}^1$;

4. $\Delta\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Упр. 11. Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u(x) \equiv 0$ при $|x| > \frac{\pi}{2}$. Доказать, что норма

$$\|u\|'_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\sum |\hat{u}(k)|^2(1+k^2)^s}\,,$$

где $\hat{u}(k)$ есть k-ый коэффициент разложения функции u в ряд Фурье

$$u(x) = \sum \hat{u}(k)e^{ikx}\,,$$

эквивалентна норме $\|u\|_s$ пространства $H^k(\mathbb{R}^n)$.

[1] При вычислении производных от функций $f(x) \in H^k(\mathbb{R}^n)$ полезно использовать тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(i\xi_j \mathcal{F}_{x\to\xi} f(x))\,.$$

Псевдодифференциальные операторы

Упр. 12. Даны символы $a = f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2$ и $b = \left(f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{-1}$. Вычислить 3 первых слагаемых[2] символа оператора $\operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(b)$.

Упр. 13. Дан символ $b(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^3\xi_2^2$. Найти первые 2 слагаемых символа a такого, что $\operatorname{Op}(a)^2 = \operatorname{Op}(b)$.

Понятие гладкого многообразия

Упр. 14. Показать, что две стереографические проекции единичной сферы в $\mathbb{R}^3$ на плоскость, проходящую через центр этой сферы, определяют на ней гладкий атлас.

Теория Фредгольма

Упр. 15. Пусть H - комплексное гильбертово пространство и $x, y \in H$. Обозначим через $(\widehat{x, y})$ угол между x и y относительно естественно индуцированного скалярного произведения в овеществлении пространства H. Верно ли, что $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\operatorname{Re}(x,y)}{|x|\cdot|y|}$?

Упр. 16. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ - фиксированная последовательность комплексных чисел и оператор A в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ определяется формулой

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n, \ldots)\,.$$

Показать, что

1. $\|A\| = \sup_j |\lambda_j|$;
2. A — оператор конечного ранга $\iff$ последовательность $\{\lambda_j\}$ финитна;
3. если $\lambda_j \mapsto 0$ при $j \to \infty$, то A - компактный оператор.

Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$

Упр. 17. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Показать, что для любых $a \in \Lambda^k(V)$ и $b \in \Lambda^l(V)$ выполняется

$$ab = ba \cdot (-1)^{kl}\,.$$

[2] Имеются в виду первые слагаемые ряда, эквивалентого символу композиции операторов по теореме Кона-Ниренберга.

Упр. 18. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^n$ - базис в линейном пространстве V и $a_i = \sum_j a_{ij} e_j$ для $i \in \overline{1,n}$. Показать, что

$$a_1 \cdots a_n = k \cdot e_1 \cdots e_n \in \Lambda^n(V)\,,$$

где $k = \det(a_{ij})$.

Упр. 19. Пусть на сфере $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ вне северного и южного полюсов выбраны стандартные сферические координаты

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \sin\theta\,, \\ y &= \sin\varphi \sin\theta\,, \\ z &= \cos\theta\,. \end{aligned}$$

Показать, что дифференциальная 1-форма $\omega \coloneqq \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$, продолженная по непрерывности на полюса, гладка в каждой точке сферы.

Упр. 20. Найти числа Бетти и Эйлерову характеристику для следующих многообразий:

1. $[0,1]$,
2. $\mathbb{S}^1$,
3. $[0,1] \times [0,1]$,
4. $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Упр. 21. Вычислить когомологии де Рама с компактным носителем для многообразия $M = \mathbb{R}$.

Упр. 22. Показать, что

1. сфера ориентируема;
2. лист Мёбиуса не ориентируем.

Расслоения, связности

Упр. 23. Пусть $\nabla = d + a$ — связность. Вычислить кривизну ∇^2.

Упр. 24. Пусть S и N - южный и северный полюса сферы $\mathbb{S}^2$ и $U_+ \coloneqq \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, $U_- \coloneqq \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Тогда для любого отображения

$$A : U_+ \cap U_- \to \mathrm{Gl}(k, \mathbb{C})$$

имеем векторное расслоение $E = \left[U_+ \times \mathbb{C}^k\right] \amalg \left[U_- \times \mathbb{C}^k\right]$, в котором отождествляются элементы $(x, v) \in U_+ \times \mathbb{C}^k$ и $(x, A(x)v) \in U_- \times \mathbb{C}^k$ для всех $x \in U_+ \cap U_-$. Найти отображение $A(x)$ такое, что $E \simeq T\mathbb{S}^2$, где $T\mathbb{S}^2$ есть касательное расслоение сферы с комплексной структурой, определяемой поворотом на $\frac{\pi}{2}$.

Упр. 25. Пусть $E = \operatorname{Im} P$, где $P : X \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ есть гладкое семейство проекторов[3]. Доказать, что отображение

$$\nabla = Pd : C^\infty(X, E) \to \Omega^1(X, E)$$

есть связность в расслоении E. Найти кривизну этой связности.

Упр. 26. В условиях упражнения 25 вычислить кривизну связности ∇ для проектора Ботта $P : \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$, определяемого соотношением

$$P(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} \begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & |z|^2 \end{pmatrix} .$$

[3]Матрица $A \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ называется проектором, если $A^2 = A$.