Преобразование Фурье, пространство Шварца

Упражнение 1. Доказать, что для любого многочлена $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, функция $P_m(x)e^{-\|x\|^2}$ лежит в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Упражнение 2 (Коммутационные соотношения)**.** Показать, что для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются равенства

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\partial_x^\alpha u(x) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)\,,$$
$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left[x^\alpha u(x)\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi}u(x)\,.$$

Упражнение 3. Рассмотреть последовательность функций $\{h_p(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где

$$h_{p(x)} = \begin{cases} p\,, & |x| < \frac{1}{2p}\,, \\ 0\,, & |x| > \frac{1}{2p}\,. \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{h_p(x)\}$ фундаментальна по норме пространства $H_{-1}(\mathbb{R}^1)$ и что для всякой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{p\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1} h_p(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\,.$$

Упражнение 4. Вычислить преобразование Фурье для следующих функций:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0);$
2. TODO