

Преобразование Фурье, пространство Шварца

Упр. 1. Доказать, что для любого многочлена $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, функция $P_m(x)e^{-\|x\|^2}$ лежит в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Упр. 2 (Коммутационные соотношения). Показать, что для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \partial_x^\alpha u(x) &= (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(x), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} [x^\alpha u(x)] &= \left[i \frac{\partial}{\partial \xi} \right]^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(x).\end{aligned}$$

Упр. 3. Рассмотреть последовательность функций $\{h_p(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где

$$h_p(x) = \begin{cases} p, & |x| < \frac{1}{2p}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2p}. \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{h_p(x)\}$ фундаментальна по норме пространства $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ и что для всякой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} h_p(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Упр. 4. Вычислить преобразование Фурье для следующих функций:

1. $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0);$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{n}{4\pi}} e^{-nx^2/4};$
3. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}.$

Пространства Соболева

Упр. 5. Определить для какого максимального k функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $H^k(\mathbb{R}^1)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \wedge x \geq 2, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Упр. 6. Дана функция $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^1} f(x) dx = 1$. Доказать, что последовательность $n \cdot f(nx)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится в $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ к $\delta(x)$.

Упр. 7. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - k^2 - i\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon > 0$.

Упр. 8. Обобщённая функция $\delta(|x| - a)$, $x \in \mathbb{R}^n$ из $H^{-[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$ определяется с помощью функционала, задаваемого равенством

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(|x| - a) \varphi(x) dx = \int_{|x|=a} \varphi(\xi) d\sigma_\xi,$$

где $\varphi(x) \in H^{[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$, $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности сферы радиуса a в \mathbb{R}^n с центром в начале координат. Доказать ограниченность функционала задачи и найти преобразование Фурье функции $\delta(|x| - a)$.

Упр. 9. Найти производную функции $\theta(x)e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Упр. 10. Упростить выражения, вычислив входящие в них производные ¹:

1. $\frac{1}{4\pi}(-\Delta + 1)\frac{e^{-|x|}}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$;
2. $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\frac{\theta(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$, $x, t \in \mathbb{R}^1$;
3. $(\Delta + k^2)\frac{e^{ik|x|}}{2ik}$, $x \in \mathbb{R}^1$;
4. $\Delta\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Упр. 11. Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u(x) \equiv 0$ при $|x| > \frac{\pi}{2}$. Доказать, что норма

$$\|u\|'_s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum |\hat{u}(k)|^2 (1 + k^2)^s}$$

эквивалентна норме $\|u\|_s$ пространства $H^k(\mathbb{R}^n)$.

¹При вычислении производных от функций $f(x) \in H^k(\mathbb{R}^n)$ полезно использовать тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(i\xi_j \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(x)).$$

Псевдодифференциальные операторы

Упр. 12. Даны символы $a = f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2$ и $b = (f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$. Вычислить 3 первых слагаемых² символа оператора $\text{Op}(a) \text{Op}(b)$.

Упр. 13. Дан символ $b(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^3 \xi_2^2$. Найти первые 2 слагаемых символа a такого, что $\text{Op}(a)^2 = \text{Op}(b)$.

Понятие гладкого многообразия

Упр. 14. Показать, что две стереографические проекции единичной сферы в \mathbb{R}^3 на плоскость, проходящую через центр этой сферы, определяют на ней гладкий атлас.

Теория Фредгольма

Упр. 15. Пусть H - комплексное гильбертово пространство и $x, y \in H$. Обозначим через $(\widehat{x}, \widehat{y})$ угол между x и y относительно естественно индуцированного скалярного произведения в оветествлении пространства H . Верно ли, что $\cos(\widehat{x}, \widehat{y}) = \frac{\text{Re}(x, y)}{|x| \cdot |y|}$?

Упр. 16. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty$ - фиксированная последовательность комплексных чисел и оператор A в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ определяется формулой

$$A(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, \dots).$$

Показать, что

1. $\|A\| = \sup_j |\lambda_j|$;
2. A — оператор конечного ранга \iff последовательность $\{\lambda_j\}$ финитна;
3. если $\lambda_j \mapsto 0$ при $j \rightarrow \infty$, то A - компактный оператор.

²Имеются в виду первые слагаемые ряда, эквивалентного символу композиции операторов по теореме Кон-Ниренберга.