Преобразование Фурье, пространство Шварца

1. Доказать, что для любого многочлена $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, функция $P_m(x)e^{-\|x\|^2}$ лежит в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2 (Коммутационные соотношения)**.** Показать, что для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются равенства

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\partial_x^\alpha u(x) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x)\,,$$
$$\mathcal{F}_{x\to\xi}\left[x^\alpha u(x)\right] = \left[i\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^\alpha \mathcal{F}_{x\to\xi} u(x)\,.$$

3. Рассмотреть последовательность функций $\{h_p(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где

$$h_{p(x)} = \begin{cases} p\,, & |x| < \frac{1}{2p}\,,\\ 0\,, & |x| > \frac{1}{2p}\,. \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{h_p(x)\}$ фундаментальна по норме пространства $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ и что для всякой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{p\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1} h_p(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)\,.$$

4. Вычислить преобразование Фурье для следующих функций:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0)$;
2. $f(x) = \sqrt{\dfrac{n}{4\pi}}e^{-nx^2/4}$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin nx}{x}$.

Пространства Соболева

5. Определить для какого максимального k функция $\varphi(x)$ принадлежит пространуству $H^k(\mathbb{R}^1)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0\,, & x \leqslant 0 \wedge x \geqslant 2\,,\\ x\,, & 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\\ 2-x\,, & 1 \leqslant x \leqslant 2\,. \end{cases}$$

6. Дана функция $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\,dx = 1$. Доказать, что последовательность $n \cdot f(nx)$ при $n \to \infty$ сходится в $H^{-1}(\mathbb{R}^1)$ к $\delta(x)$.

7. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - k^2 - i\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon > 0$.

8. Обобщённая функция $\delta(|x| - a)$, $x \in \mathbb{R}^n$ из $H^{-[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$ определяется с помощью функционала, задаваемого равенством

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(|x| - a)\varphi(x)\, dx = \int_{|x|=a} \varphi(\xi)\, d\sigma_\xi \,,$$

где $\varphi(x) \in H^{[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$, $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности сферы радиуса a в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат. Доказать ограниченность функционала задачи и найти преобразование Фурье функции $\delta(|x| - a)$.

9. Найти производную функции $\theta(x)e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0\,, \\ 0\,, & x < 0\,. \end{cases}$$

10. Упростить выражения, вычислив входящие в них производные [1]:

1. $\dfrac{1}{4\pi}(-\Delta + 1)\dfrac{e^{-|x|}}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^3$;
2. $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\dfrac{\theta(t)e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$, $x, t \in \mathbb{R}^1$;
3. $(\Delta + k^2)\dfrac{e^{ik|x|}}{2ik}$, $x \in \mathbb{R}^1$;
4. $\Delta\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

11. Пусть $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u(x) \equiv 0$ при $|x| > \frac{\pi}{2}$. Доказать, что норма

$$\|u\|'_s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum |\hat{u}(k)|^2(1 + k^2)^s}$$

эквивалентна норме $\|u\|_s$ пространства $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Псевдодифференциальные операторы

12. Даны символы $a = f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2$ и $b = \left(f(x_1, x_2)\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^{-1}$. Вычислить 3 первых слагаемых[2] символа оператора $\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b)$.

[1]При вычислении производных от функций $f(x) \in H^k(\mathbb{R}^n)$ полезно использовать тождество

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}(i\xi_j \mathcal{F}_{x \to \xi} f(x))\,.$$

[2]Имеются в виду первые слагаемые ряда, эквивалентого символу композиции операторов по теореме Кон-Ниренберга.

13. Дан символ $b(x,\xi)=\xi_1^2+x_1^3\xi_2^2$. Найти первые 2 слагаемых символа a такого, что $\mathrm{Op}(a)^2=\mathrm{Op}(b)$.

Понятие гладкого многообразия

14. Показать, что две стереографические проекции единичной сферы в $\mathbb{R}^3$ на плоскость, проходящую через центр этой сферы, определяют на ней гладкий атлас.

Теория Фредгольма

15. Пусть H - комплексное гильбертово пространство и $x,y\in H$. Обозначим через $(\widehat{x,y})$ угол между x и y относительно естественно индуцированного скалярного произведения в овеществлении пространства H. Верно ли, что $\cos(\widehat{x,y})=\frac{\mathrm{Re}\,(x,y)}{|x|\cdot|y|}$?

16. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ - фиксированная последовательность комплексных чисел и оператор A в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ определяется формулой

$$A(x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots)=(\lambda_0x_0,\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n,\ldots)\,.$$

Показать, что

1. $\|A\|=\sup_j|\lambda_j|$;
2. A — оператор конечного ранга $\iff$ последовательность $\{\lambda_j\}$ финитна;
3. если $\lambda_j\mapsto 0$ при $j\to\infty$, то A - компактный оператор.