

Преобразование Фурье, пространство Шварца

Упражнение 1. Доказать, что для любого многочлена $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, функция $P_m(x)e^{-\|x\|^2}$ лежит в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Упражнение 2 (Коммутационные соотношения). Показать, что для любой функции $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \partial_x^\alpha u(x) &= (i\xi)^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(x), \\ \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} [x^\alpha u(x)] &= \left[i \frac{\partial}{\partial \xi} \right]^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u(x).\end{aligned}$$

Упражнение 3. Рассмотреть последовательность функций $\{h_p(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^1$, где

$$h_{p(x)} = \begin{cases} p, & |x| < \frac{1}{2p}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2p}. \end{cases}$$

Доказать, что последовательность $\{h_p(x)\}$ фундаментальна по норме пространства $H_{-1}(\mathbb{R}^1)$ и что для всякой функции $\varphi(x) \in S(\mathbb{R}^1)$ справедливо равенство

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^1} h_p(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

Упражнение 4. Вычислить преобразование Фурье для следующих функций:

1. $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (\varepsilon > 0);$
2. $f(x) = \sqrt{\frac{n}{4\pi}} e^{-nx^2/4};$
3. $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}.$