Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Виногродский Серафим

9 марта 2022 г.

Содержание

1 Введение

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Векторное пространство L над полем F, дополненное операцией $L \times L \to L$, которая обозначается $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называется *скобкой Ли* или *коммутатором* x и y, называется *алгеброй Ли* над полем F, если выполнен следующий ряд аксиом:

($L1$) Скобка Ли билинейна.

($L2$) $[x, x] = 0$ для любого $x \in L$.

($L3$) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (x, y, z \in L)$.

Аксиома ($L3$) называется *тождеством Якоби*. Из аксиом ($L1$) и ($L2$), применённых к скобке $[x + y, x + y]$, следует антикоммутативность скобки Ли:

($L2'$) $[x, y] = -[y, x]$ для любых $x, y \in L$.

Обратно, если $\mathrm{char}\, \mathrm{F} \neq 2$, то из ($L2'$) тривиально следует ($L2$) и потому для таких полей ($L2$) эквивалентна ($L2'$).

Определение 1.2. Две алгебры Ли L, L' называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм векторных пространств $\phi : L \to L'$, что

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in L.$$

Само отображение ϕ при этом называется *изоморфизмом* алгебр Ли.

Определение 1.3. Подпространство K алгебры Ли L называется *подалгеброй* алгебры L, если K замкнуто относительно скобки Ли, т.е.

$$\forall x, y \in K \quad [x, y] \in K.$$

Нетрудно показать, что само подпространство K вместе с индуцированными операциями также является алгеброй Ли.

Любая алгебра Ли L имеет как минимум две тривиальные (*несобственные*) подалгебры отвечающие тривиальным подпространствам: $\{0\}$ и L. Помимо этого любой ненулевой элемент $v \in L$, если таковой имеется, определяет одномерную подалгебру Fv с тривиальным умножением, поскольку в силу ($L1$) и ($L2$) имеем $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in Fv$.