Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Виногродский Серафим

15 марта 2022 г.

Содержание

1 Введение

1.1 Основные понятия

Определение 1.1. Векторное пространство L над полем F, дополненное операцией $L \times L \to L$, которая обозначается $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называется *скобкой Ли* или *коммутатором* x и y, называется *алгеброй Ли* над полем F, если выполнен следующий ряд аксиом:

($L1$) Скобка Ли билинейна.

($L2$) $[x, x] = 0$ для любого $x \in L$.

($L3$) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (x, y, z \in L)$.

Аксиома ($L3$) называется *тождеством Якоби*. Из аксиом ($L1$) и ($L2$), применённых к скобке $[x + y, x + y]$, следует антикоммутативность скобки Ли:

($L2'$) $[x, y] = -[y, x]$ для любых $x, y \in L$.

Обратно, если $\operatorname{char} \mathrm{F} \neq 2$, то из утверждение ($L2'$) тривиально следует из аксиомы ($L2$) и потому для таких полей ($L2$) эквивалентна ($L2'$).

Определение 1.2. Две алгебры Ли L, L' называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм векторных пространств $\phi : L \to L'$, что

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in L.$$

Само отображение ϕ при этом называется *изоморфизмом* алгебр Ли.

Определение 1.3. Подпространство K алгебры Ли L называется *подалгеброй* алгебры L, если K замкнуто относительно скобки Ли, т.е.

$$\forall x, y \in K \quad [x, y] \in K.$$

Нетрудно показать, что само подпространство K вместе с индуцированными операциями также является алгеброй Ли.

Любая алгебра Ли L имеет как минимум две тривиальные (*несобственные*) подалгебры отвечающие тривиальным подпространствам: $\{0\}$ и L. Также, если $L \neq \{0\}$, то любой ненулевой элемент $v \in L$ задаёт одномерную подалгебру Fv. Умножение в такой алгебре тривиально, поскольку в силу аксиом ($L1$) и ($L2$) имеем $[x, y] = 0$ для любых $x, y \in Fv$.

1.2 Линейные алгебры Ли

Пусть V — конечномерное векторное пространство на полем F. Обозначим через $\operatorname{End} V$ множество всех эндоморфизмов в пространстве V. Тогда $\operatorname{End} V$ — векторное пространство размерности n^2 (где $n = \dim V$) над полем F и одновременно $\operatorname{End} V$ — кольцо относительно обычной операции умножения. Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, называемую *скобкой* или *коммутатором* элементов x и y. Вместе с ней $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над полем F: выполнение аксиом $(L1)$ и $(L2)$ очевидно, а аксиома $(L3)$ напрямую следует из $(L1)$ и $(L2)$. Чтобы отличать полученную алгебраическую структуру от изначальной ассоциативной структуры кольца, мы будем обозначать $\operatorname{End} V$ как $\mathfrak{gl}(V)$, когда она рассматривается как алгебра Ли.

Определение 1.4. Алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ называется *полной линейной алгеброй.*

Определение 1.5. Любая подалгебра $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли.*

Зафиксировав базис в пространстве V, можно отождествить $\mathfrak{gl}(V)$ с множеством всех матриц размера $n \times n$ над полем F, обозначаемым $\mathfrak{gl}(n, \mathrm{F})$, что удобно при выполнении вычислений в явном виде.

Рассмотрим теперь некоторые другие примеры, играющие основную роль в этой работе наряду с $\mathfrak{gl}(V)$. Они распадаются на четыре семейства: $\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l, \mathbf{D}_l$ (где $l \geqslant 1$) — и называются *классическими алгебрами Ли.* В примерах $\mathbf{B}_l - \mathbf{D}_l$ будем считать, что $\operatorname{char} \mathrm{F} \neq 2$.

$\mathbf{A}_l$**:** Пусть $\dim V = l + 1$. Обозначим через $\mathfrak{sl}(V)$ или $\mathfrak{sl}(l+1, \mathrm{F})$ множество всех эндоморфизмов в пространстве V, имеющих нулевой след. Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(xy) &= \operatorname{Tr}(yx), \\ \operatorname{Tr}(x+y) &= \operatorname{Tr}(x) + \operatorname{Tr}(y), \end{aligned}$$

множество $\mathfrak{sl}(V)$ замкнуто относительно коммутирования и потому является подалгеброй $\mathfrak{gl}(V)$, называемой *специальной линейной алгеброй.*

Найдём теперь размерность $\mathfrak{sl}(V)$. С одной стороны $\mathfrak{sl}(V)$ — собственная подалгебра $\mathfrak{gl}(V)$, так что её размерность не может быть больше $(l+1)^2 - 1$. С другой стороны нетрудно явно предоставить такое количество линейно независимых матриц с нулевым следом:

$$\{e_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{e_{ii} - e_{i+1,i+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant l\},$$

где e_{ij} — матрица у которой в позиции (i, j) стоит единица, а в остальных позициях — ноль. Этот базис будем считать стандартным в пространстве $\mathfrak{sl}(l+1, \mathrm{F})$.

$\mathbf{C}_l$: $\ldots$

$\mathbf{B}_l$: $\ldots$

$\mathbf{D}_l$: $\ldots$

Отметим также несколько примеров, играющих далее вспомогательную роль. Пусть $\mathfrak{t}(n, \mathrm{F})$ — множество всех верхнетреугольных матриц, $\mathfrak{n}(n, \mathrm{F})$ — множество строго верхнетреугольных матриц и $\mathfrak{d}(n, \mathrm{F})$ — множество всех диагональных матриц. Тривиально проверяется, что каждое из этих множеств замкнуто относительно коммутирования и потому является линейной алгеброй.