

# Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Виногородский Серафим

4 апреля 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.2	Линейные алгебры Ли . . . . .	3
1.3	Абстрактные алгебры Ли . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Идеалы и гомоморфизмы</b>	<b>5</b>
2.1	Идеалы . . . . .	5
2.2	Гомоморфизмы . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли</b>	<b>7</b>
3.1	Разрешимость . . . . .	7

# 1 Введение

## 1.1 Основные понятия

**Определение 1.1.** Векторное пространство  $L$  над полем  $F$ , дополненное операцией  $L \times L \rightarrow L$ , которая обозначается  $(x, y) \mapsto [x, y]$  и называется *скобкой Ли* или *коммутатором*  $x$  и  $y$ , называется *алгеброй Ли* над полем  $F$ , если выполнен следующий ряд аксиом:

(L1) Скобка Ли билинейна.

(L2)  $[x, x] = 0$  для любого  $x \in L$ .

(L3)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (x, y, z \in L)$ .

Аксиома (L3) называется *тождеством Якоби*. Из аксиом (L1) и (L2), применённых к скобке  $[x + y, x + y]$ , следует антикоммутативность скобки Ли:

(L2')  $[x, y] = -[y, x]$  для любых  $x, y \in L$ .

Обратно, если  $\text{char } F \neq 2$ , то из утверждение (L2') тривиально следует из аксиомы (L2) и потому для таких полей (L2) эквивалентна (L2').

**Определение 1.2.** Две алгебры Ли  $L, L'$  называются *изоморфными*, если существует такой изоморфизм векторных пространств  $\phi : L \rightarrow L'$ , что

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in L.$$

Само отображение  $\phi$  при этом называется *изоморфизмом алгебр Ли*.

**Определение 1.3.** Подпространство  $K$  алгебры Ли  $L$  называется *подалгеброй* алгебры  $L$ , если  $K$  замкнуто относительно скобки Ли, т.е.

$$\forall x, y \in K \quad [x, y] \in K.$$

Нетрудно показать, что само подпространство  $K$  вместе с индуцированными операциями также является алгеброй Ли.

Любая алгебра Ли  $L$  имеет как минимум две тривиальные (*несобственные*) подалгебры отвечающие тривиальным подпространствам:  $\{0\}$  и  $L$ . Также, если  $L \neq \{0\}$ , то любой ненулевой элемент  $v \in L$  задаёт одномерную подалгебру  $Fv$ . Умножение в такой алгебре тривиально, поскольку в силу аксиом (L1) и (L2) имеем  $[x, y] = 0$  для любых  $x, y \in Fv$ .

## 1.2 Линейные алгебры Ли

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство над полем  $F$ . Обозначим через  $\text{End } V$  множество всех эндоморфизмов в пространстве  $V$ . Тогда  $\text{End } V$  — векторное пространство размерности  $n^2$  (где  $n = \dim V$ ) над полем  $F$  и одновременно  $\text{End } V$  — кольцо относительно операции умножения операторов. Определим новую операцию  $[x, y] = xy - yx$ , называемую *скобкой* или *коммутатором* элементов  $x$  и  $y$ . Вместе с ней  $\text{End } V$  становится алгеброй Ли над полем  $F$ : выполнение аксиом  $(L1)$  и  $(L2)$  очевидно, а аксиома  $(L3)$  напрямую следует из  $(L1)$  и  $(L2)$ . Чтобы отличать полученную алгебраическую структуру от изначальной ассоциативной структуры кольца, мы будем обозначать  $\text{End } V$  как  $\mathfrak{gl}(V)$ , когда она рассматривается как алгебра Ли.

**Определение 1.4.** Алгебра  $\mathfrak{gl}(V)$  называется *полной линейной алгеброй*.

**Определение 1.5.** Любая подалгебра  $\mathfrak{gl}(V)$  называется *линейной алгеброй*.

Зафиксировав базис в пространстве  $V$ , можно отождествить  $\mathfrak{gl}(V)$  с множеством всех матриц размера  $n \times n$  над полем  $F$ , обозначаемым  $\mathfrak{gl}(n, F)$ , что удобно при выполнении вычислений в явном виде. Для дальнейших ссылок приведём здесь таблицу коммутирования для  $\mathfrak{gl}(n, F)$  в стандартном базисе, состоящем из матриц  $e_{ij}$  (у которых в позиции  $(i, j)$  стоит 1, а в остальных 0). Поскольку  $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$  (где  $\delta_{jk} \in \{0, 1\}$ ), мы получаем, что

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}.$$

Рассмотрим теперь некоторые примеры линейных алгебр, играющих основную роль в этой работе наряду с  $\mathfrak{gl}(V)$ . Они разделяются на четыре семейства:  $A_l, B_l, C_l, D_l$  (где  $l \geq 1$ ) — и называются *классическими алгебрами*. В примерах  $B_l - D_l$  будем считать, что  $\text{char } F \neq 2$ .

**$A_l$ :** Пусть  $\dim V = l + 1$ . Обозначим через  $\mathfrak{sl}(V)$  или  $\mathfrak{sl}(l + 1, F)$  множество всех эндоморфизмов в пространстве  $V$ , имеющих нулевой след. Поскольку

$$\begin{aligned} \text{Tr}(xy) &= \text{Tr}(yx), \\ \text{Tr}(x + y) &= \text{Tr}(x) + \text{Tr}(y), \end{aligned}$$

множество  $\mathfrak{sl}(V)$  замкнуто относительно коммутирования и потому является подалгеброй  $\mathfrak{gl}(V)$ , называемой *специальной линейной алгеброй*.

Найдём теперь размерность  $\mathfrak{sl}(V)$ . С одной стороны  $\mathfrak{sl}(V)$  — собственная подалгебра  $\mathfrak{gl}(V)$ , так что её размерность не может быть больше  $(l + 1)^2 - 1$ . С другой стороны нетрудно явно предоставить такое количество линейно независимых матриц с нулевым следом:

$$\{e_{ij} \mid i \neq j\} \cup \{e_{ii} - e_{i+1, i+1} \mid 1 \leq i \leq l\}.$$

Этот базис будем считать стандартным в пространстве  $\mathfrak{sl}(l + 1, F)$ .

$C_l: \dots$

$B_l: \dots$

$D_l: \dots$

Отметим также несколько примеров, играющих далее вспомогательную роль. Пусть  $t(n, F)$  — множество всех верхнетреугольных матриц,  $n(n, F)$  — множество строго верхнетреугольных матриц и  $d(n, F)$  — множество всех диагональных матриц. Тривиально проверяется, что каждое из этих множеств замкнуто относительно коммутирования.

### 1.3 Абстрактные алгебры Ли

Мы рассмотрели определённое количество естественных примеров линейных алгебр Ли. Иногда, однако, бывает полезно рассматривать и абстрактные алгебры Ли. Например, любое векторное пространство  $L$  над полем  $F$  можно превратить в алгебру Ли с тривиальным умножением, задав  $[x, y] = 0$  для любых  $x, y \in L$ . Такая алгебра называется *абелевой* (поскольку в линейном случае равенство  $[x, y] = 0$  означает, что  $x$  и  $y$  коммутируют.)

Из билинейности скобки Ли следует, что если  $L$  — алгебра Ли с базисом  $x_1, \dots, x_n$ , то всю её таблицу умножения можно восстановить по структурным константам  $a_{ij}^k$ , которые входят в выражения

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k x_k.$$

Более того, константы  $a_{ij}^k$ , для которых  $i \geq j$ , восстанавливаются по остальным в силу свойств (L2) и (L2'). Обратно, можно с нуля определить абстрактную алгебру Ли, задав семейство структурных констант  $\{a_{ij}^k\}$ . Естественно, подойдёт не всякое такое семейство. Чтобы заданная таким образом операция коммутирования удовлетворяла аксиомам (L2) и (L3), должны выполняться следующие соотношения:

$$a_{ii}^k = a_{ij}^k + a_{ji}^k = 0;$$
$$\sum_{k=1}^n (a_{ij}^k a_{kl}^m + a_{jl}^k a_{ki}^m + a_{li}^k a_{kj}^m) = 0.$$

## 2 Идеалы и гомоморфизмы

### 2.1 Идеалы

**Определение 2.1.** Подпространство  $I$  алгебры Ли  $L$  называется *идеалом* в  $L$ , если для любых  $x \in L$ ,  $y \in I$  имеем  $[x, y] \in I$ . (Поскольку  $[x, y] = -[y, x]$ , это условие можно записать и как  $[y, x] \in I$ .)

Очевидно, что любая алгебра Ли  $L$  имеет два тривиальных (*собственных*) идеала:  $\{0\}$  и  $L$ . Менее тривиальный пример — так называемый *центр*

$$Z(L) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in L \mid [x, z] = 0 \quad \forall x \in L\}.$$

**Определение 2.2.** Подалгебра всех линейных комбинаций коммутаторов произвольных элементов алгебры Ли  $L$  обозначается  $[L, L]$  и называется *производной алгеброй* алгебры  $L$ .

Очевидно, что  $[L, L]$  является идеалом алгебры  $L$ . Так же ясно, что алгебра  $L$  является абелевой тогда и только тогда, когда  $[L, L] = \{0\}$ .

Если  $I, J$  — идеалы в  $L$ , то и  $I + J$  — тоже идеал в  $L$ . Аналогично идеалом является и  $[I, J]$ , где

$$[I, J] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_i [x_i, y_i] : \{x_i\} \subset I, \{y_i\} \subset J \right\}.$$

Производная алгебра  $[L, L]$  — частный случай этой конструкции.

**Определение 2.3.** Если в алгебре Ли  $L$  нет идеалов, кроме самой  $L$  и  $\{0\}$ , и при этом  $[L, L] \neq \{0\}$  (т.е.  $L$  не является абелевой), то алгебра  $L$  называется *простой*.

Условие  $[L, L] \neq \{0\}$  накладывается для того, что бы не придавать излишнего значения одномерным алгебрам. Нетрудно показать, что для любой простой алгебры  $L$  всегда имеем  $Z(L) = \{0\}$  и  $[L, L] = L$ .

**Пример.** Пусть  $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Выберем тогда стандартный базис в  $L$ , состоящий из трёх матриц (см. параграф (1.2)):

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда таблица коммутирования в алгебре  $L$  полностью определяется следующими соотношениями:

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y.$$

Пусть  $I$  — ненулевой идеал в алгебре  $L$  и  $ax + by + ch$  — некоторый ненулевой элемент в  $I$ . Дважды применяя к нему оператор  $\text{ad } x$ , получаем  $-2bx \in I$ , а дважды применяя оператор  $\text{ad } y$ , получаем  $-2ay \in I$ . Поэтому, если  $a$  или  $b$  отлично от нуля, то  $I$  содержит  $y$  или  $x$ , но тогда из определения идеала следует, что  $x, y, h \in I$ , а значит  $I = L$ . С другой стороны, если  $a = b = 0$ , то  $0 \neq ch \in I$ , что аналогичным образом влечёт  $I = L$ . Получаем, что  $L$  — *простая алгебра*.

**Определение 2.4.** Пусть  $L$  — алгебра Ли,  $I$  — собственный идеал в  $L$ . Тогда факторпространство  $L/I$  с определённой на нём скобкой Ли:

$$[x + I, y + I] \stackrel{\text{def}}{=} [x, y] + I,$$

называется *факторалгеброй*  $L$  по идеалу  $I$  и так же обозначается  $L/I$ .

Определение скобки Ли в пространстве  $L/I$  корректно и не зависит от выбора представлений  $x$  и  $y$  для классов эквивалентности. Действительно, если  $x' = x + u$ ,  $y' = y + v$  (где  $u, v \in I$ ), откуда по линейности скобки Ли

$$[x', y'] = [x, y] + \underbrace{([u, y] + [x, v] + [u, v])}_{\text{элемент из } I},$$

а значит  $[x', y'] + I = [x, y] + I$ .

## 2.2 Гомоморфизмы

**Определение 2.5.** Пусть  $L, L'$  — две линейные алгебры над полем  $F$ . Линейное отображение  $\phi : L \rightarrow L'$  называется *гомоморфизмом* алгебр Ли, если

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \forall x, y \in L.$$

**Определение 2.6.** Гомоморфизм алгебр Ли  $\phi : L \rightarrow L'$  называется

- *мономорфизмом*, если  $\ker \phi = \{0\}$ ;
- *эпиморфизмом*, если  $\text{im } \phi = L'$ .

Очевидно, что  $\phi$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\phi$  одновременно и моно- и эпиморфизм. Легко так же проверяется, что  $\ker \phi$  — идеал в  $L$ , а  $\text{im } \phi$  — подалгебра алгебры  $L$ .

Как и в других алгебраических теориях, для алгебр Ли существует естественное взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами и идеалами: гомоморфизму  $\phi$  ставится в соответствие идеал  $\ker \phi$ , а идеалу  $I$  — *каноническое отображение*  $\pi : L \rightarrow L/I$ , заданное правилом  $x \mapsto x + I$ .

Для изоморфизмов алгебр Ли выполняются и классические теоремы об изоморфизме:

**Утверждение 2.1.** Если  $\phi : L \rightarrow L$  — гомоморфизм алгебр Ли, то  $L / \ker \phi \simeq \operatorname{im} \phi$ .

*Доказательство.* Легко показать, что отображение  $(x + \ker \phi) \mapsto \phi(x)$  есть изоморфизм алгебр  $L / \ker \phi$  и  $\operatorname{im} \phi$ .  $\square$

**Утверждение 2.2.** Если  $I$  и  $J$  — два идеала в алгебре  $L$  и  $I \subset J$ , то  $J/I$  — идеал в  $L/I$ , а алгебра  $(L/I)/(J/I)$  изоморфна  $L/J$ .

*Доказательство.* Пусть  $x + I \in J/I$  и  $y + I \in L/I$ . Тогда имеем

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I \in J/I,$$

а значит  $J/I$  — идеал в  $L/I$ . Рассмотрим теперь гомоморфизм  $\phi : x + I \mapsto x + J$ , действующий из  $L/I$  в  $L/J$ . Отображение  $\phi$  задано корректно, поскольку если  $x' + I = x + I$ , то  $x' = x + i$  (где  $i \in I \subset J$ ), а значит

$$\phi(x' + I) = (x + i) + J = x + J.$$

Очевидно, что  $\ker \phi = J/I$ ,  $\operatorname{im} \phi = L/J$ , но тогда по утверждению (2.1) имеем  $(L/I)/(J/I) \simeq L/J$ .  $\square$

**Утверждение 2.3.** Если  $I$  и  $J$  — два идеала в алгебре  $L$ , то  $(I + J)/J \simeq I/(I \cap J)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм  $\phi : i \mapsto i + J$ , действующий из  $I$  в  $(I + J)/J$ . Очевидно, что  $\ker \phi = I \cap J$ ,  $\operatorname{im} \phi = (I + J)/J$ , но тогда по утверждению (2.1) имеем  $I/(I \cap J) \simeq (I + J)/J$ .  $\square$

## 3 Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

### 3.1 Разрешимость

Определим прежде всего следующую последовательность идеалов алгебры Ли  $L$  (производный ряд):

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \quad (k > 0).$$

**Определение 3.1.** Алгебра Ли  $L$  называется *разрешимой*, если  $L^{(n)} = \{0\}$  при некотором  $n$ . В противном случае алгебра  $L$  называется *неразрешимой*.

В частности, абелевы алгебры всегда разрешимы, а простые алгебры заведомо неразрешимы.

Достаточно общим примером разрешимой алгебры Ли является алгебра  $L = \mathfrak{t}(n, F)$  верхнетреугольных матриц, введённая в параграфе (1.2). Базис в  $L$  состоит из матричных единиц  $e_{ij}$  для которых  $i \leq j$ . Размерность  $L$ , как

следствие, равна  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ . Чтобы показать, что алгебра  $L$  разрешима, вычислим в явном виде её производный ряд, используя формулу для коммутаторов из параграфа (1.2). В первую очередь, имеем  $[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$  для  $i < l$ , откуда следует, что  $\mathfrak{n}(n, F) \subset [L, L]$ , где  $\mathfrak{n}(n, F)$  — подалгебра строго верхнетреугольных матриц. Поскольку  $\mathfrak{t}(n, F) = \mathfrak{d}(n, F) + \mathfrak{n}(n, F)$  и  $\mathfrak{d}(n, F)$  абелева, можно заключить, что  $L^{(1)} = [L, L] = \mathfrak{n}(n, F)$ .

Работая далее в алгебре  $\mathfrak{n}(n, F)$  естественно определить «уровень» матрицы  $e_{ij}$ , как число  $j - i$ . Рассмотрим теперь произвольный коммутатор  $[e_{ij}, e_{kl}]$  базисных элементов в  $\mathfrak{n}(n, F)$ . Имеем  $i < j, k < l$ ; без ограничения общности можно так же полагать, что  $i \neq l$  (поскольку в обратном случае  $[e_{ij}, e_{kl}] = -[e_{ki}, e_{ij}]$  и, если здесь  $k = j$ , то коммутатор равен 0 и не представляет интереса). Тогда имеем

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} e_{il}, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

В частности любой элемент  $e_{il} \in L^{(2)}$  есть коммутатор двух базисных матриц, уровни которых в сумме дают уровень  $e_{il}$ , а значит  $L^{(2)}$  есть линейная оболочка элементов  $e_{ij}$ , уровень которых больше либо равен 2. Аналогично каждая последующая производная алгебра  $L^{(m)}$  есть линейная оболочка элементов  $e_{ij}$ , уровень которых больше либо равен  $2^{m-1}$ . Наконец, очевидно, что  $L^{(m)} = \{0\}$ , когда  $2^{m-1} > n - 1$ .

Приведём теперь несколько простых свойств разрешимых алгебр Ли.

**Утверждение 3.1.** *Если алгебра Ли  $L$  разрешима, то разрешимы и все её подалгебры.*

*Доказательство.* Если  $K$  — подалгебра в  $L$ , то из определения (1.3) имеем  $K^{(i)} \subset L^{(i)}$ . Тогда если для некоторого  $k$  имеем  $L^{(k)} = \{0\}$ , то и  $K^{(k)} = \{0\}$ .  $\square$

**Утверждение 3.2.** *Если алгебра Ли  $L$  разрешима, то разрешимы и все её гомоморфные образы.*

*Доказательство.* TODO (надо сначала ввести определение гомоморфизма)  $\square$

**Утверждение 3.3.** *Если  $I$  — разрешимый идеал в алгебре Ли  $L$  и алгебра  $L/I$  разрешима, то и сама  $L$  тоже разрешима.*

*Доказательство.* TODO (надо сначала ввести определение алгебры  $L/I$ )  $\square$

**Утверждение 3.4.** *Если  $I$  и  $J$  — разрешимые идеалы в алгебре Ли  $L$ , то идеал  $I + J$  тоже разрешим.*

*Доказательство.* TODO (тоже нужны гомоморфизмы)  $\square$