

1 Вклад конической точки в формуле Лефшеца в терминах преобразования Фурье-Лапласа

1.1 Общие определения

Рассмотрим некомпактное многообразие \hat{M} , составленное из компактного основания M с границей Ω и присоединённого к нему бесконечного цилиндра $[0, +\infty) \times \Omega$. Ему соответствует многообразие \mathcal{M} с конической точкой α . Пусть

$$D : H^s(\hat{M}) \rightarrow H^{s-m}(\hat{M})$$

— дифференциальный оператор порядка m , совпадающий на $[0, +\infty) \times \Omega$ с 2π -периодическим оператором $D_\infty := D_\infty(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$,

$$D_\infty : H^s(\mathbb{R}_t \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}_t \times \Omega).$$

При сопряжении D_∞ с преобразованием Фурье мы получаем, фактически, конормальный символ оператора D :

$$\sigma_c(D)(p) = \mathcal{F}D_\infty\mathcal{F}^{-1} = D_\infty(p, \omega, -i\partial_\omega), \quad p \in \mathbb{C}.$$

В контексте перспективы обобщения формулы Лефшеца на случай не цилиндрических, а периодических концов, нам удобно рассмотреть вместо преобразования Фурье преобразование Фурье-Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z : L^2(\mathbb{R}_t \times \Omega) &\rightarrow L^2(\mathbb{S}_t^1 \times \mathbb{S}_z^1 \times \Omega), \\ (\mathcal{F}_z u)(t, z) &:= z^{\frac{t}{2\pi}} \sum_n z^n u(t + 2\pi n). \end{aligned}$$

Обратное преобразование тогда задаётся формулой

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{-\frac{t}{2\pi}} (\mathcal{F}_z u)(t, z) \frac{dz}{z}.$$

При этом преобразовании оператор D_∞ переходит в семейство операторов

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\infty(\theta) &:= \mathcal{F}_z D_\infty \mathcal{F}_z^{-1} = D_\infty(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}, \omega, -i\partial_\omega), \\ \tilde{D}_\infty(\theta) : H^s(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega) &\rightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega), \end{aligned}$$

где для удобства $z := e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Определение 1.1. Оператор D называется эллиптическим, если

1. $\sigma(D)$ обратим на $T^*\hat{M}$ вне нулевого сечения;
2. $\tilde{D}_\infty(\theta)$ обратим для любого $\theta \in [0, 2\pi]$.

Теорема 1.2. Если D — эллиптический, то он фредгольмов.

В дальнейшем нам так же понадобится понятие следа оператора (в смысле сужения его на некоторое подмногообразие.) Пусть

$$\begin{aligned} i : \Omega &\hookrightarrow \mathbb{R} \times \Omega, \\ A : C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega). \end{aligned}$$

Определение 1.3. Следом оператора A на Ω называется композиция

$$\tau(A) : C^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{A} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{i^*} C^\infty(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} i_*(u)(t, \omega) &= \delta(t)u(\omega), \\ i^*(u)(\omega) &= u(0, \omega). \end{aligned}$$

1.2 Вклад конической точки α в формуле Лефшеца

Рассмотрим комплекс из одного эллиптического оператора

$$0 \rightarrow H^s(\hat{M}) \xrightarrow{D} H^{s-m}(\hat{M}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Пусть T_j , $j = 1, 2$, — эндоморфизм комплекса (1), заданный диффеоморфизмом $g : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$, совпадающим на $\mathbb{R} \times \Omega$ с отображением сдвига вдоль \mathbb{R} на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Обозначим за B псевдодифференциальный оператор с конормальным символом

$$\sigma_c(D)^{-1}(p) \frac{\partial \sigma_c(D)}{\partial p}(p).$$

Тогда вклад неподвижной точки α в формуле Лефшеца выражается по формуле

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \int_{\mathbb{R}} \sigma_c(T_1)(p) \sigma_c(B)(p) dp,$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \sigma_c(T_1)(p) \frac{\partial \sigma_c(B)}{\partial p}(p) dp$$

для достаточно большого l .

Лемма 1.4.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \sigma_c(T_1)(p) \frac{\partial \sigma_c(B)}{\partial p}(p) dp \\ = \left(-\frac{2\pi}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(g e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} \tilde{D}_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Доказательство. TODO

□