1 Вклад конической точки в формуле Лефшеца в терминах преобразования Фурье-Лапласа

1.1 Общие определения

Рассмотрим некомпактное многообразие $\hat{M}$, составленное из компактного основания M с границей Ω и присоединённого к нему бесконечного цилиндра $[0,+\infty)\times\Omega$. Ему соответствует многообразие $\mathcal{M}$ с конической точкой α. Рассмотрим на $\hat{M}$ соболевские пространства $H^s(\hat{M}) \coloneqq H^{s,0}(\mathcal{M})$. (См. [1, p. 46, Definition 2.3].)

Пусть

$$D : H^s(\hat{M}) \to H^{s-m}(\hat{M})$$

— дифференциальный оператор порядка m, совпадающий на $[0,+\infty)\times\Omega$ с оператором $D_\infty \coloneqq D_\infty(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$,

$$D_\infty : H^s(\mathbb{R}_t \times \Omega) \to H^{s-m}(\mathbb{R}_t \times \Omega)\,.$$

При сопряжении D_∞ с преобразованием Фурье мы получаем, фактически, конормальный символ оператора D:

$$\sigma_c(D)(p) = \mathcal{F} D_\infty \mathcal{F}^{-1} = D_\infty(p, \omega, -i\partial_\omega)\,, \quad p \in \mathbb{C}\,.$$

Нам удобно рассмотреть вместо преобразования Фурье преобразование Фурье-Лапласа:

$$\mathcal{F}_z : L^2(\mathbb{R}_t \times \Omega) \to L^2(\mathbb{S}^1_t \times \mathbb{S}^1_z \times \Omega)\,,$$
$$\left(\mathcal{F}_z u\right)(t,z,\omega) \coloneqq z^{\frac{t}{2\pi}} \sum_n z^n u(t+2\pi n, \omega)\,.$$

Обратное преобразование тогда задаётся формулой

$$u(t,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} z^{-\frac{t}{2\pi}} (\mathcal{F}_z u)(t,z,\omega)\,\frac{dz}{z}\,.$$

При этом преобразовании оператор D_∞ переходит в семейство операторов

$$\widetilde{D}_\infty(\theta) \coloneqq \mathcal{F}_z D_\infty \mathcal{F}_z^{-1} = D_\infty(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}, \omega, -i\partial_\omega)\,,$$
$$\widetilde{D}_\infty(\theta) : H^s(\mathbb{S}^1_t \times \Omega) \to H^{s-m}(\mathbb{S}^1_t \times \Omega)\,,$$

где для удобства $z \coloneqq e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Определение 1.1. Оператор D называется эллиптическим, если

1. $\sigma(D)$ обратим на $T^*\hat{M}$ вне нулевого сечения;

2. $\widetilde{D}_\infty(\theta)$ обратим для любого $\theta \in [0, 2\pi]$.

Из [3, Теорема 2] следует

Теорема 1.2. *Если D — эллиптический, то он фредгольмов.*

В дальнейшем нам так же понадобится понятие следа оператора в смысле сужения его на некоторое подмногообразие (см. [2].) Пусть

$$
\begin{gathered}
i : \Omega \hookrightarrow \mathbb{R} \times \Omega \,, \quad i(\omega) = (0, \omega)\,, \\
A : C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega) \to C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)\,.
\end{gathered}
$$

Определение 1.3. Следом оператора A на Ω называется композиция

$$
\tau(A) : C^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{A} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{i^*} C^\infty(\Omega)\,,
$$

где

$$
\begin{gathered}
(i_* u)(t, \omega) = u(\omega)\delta(t)\,, \\
(i^* u)(\omega) = u(0, \omega)\,.
\end{gathered}
$$

1.2 Вклад конической точки α в формуле Лефшеца

Рассмотрим комплекс из одного эллиптического оператора

$$
0 \to H^s(\hat{M}) \xrightarrow{D} H^{s-m}(\hat{M}) \to 0\,. \tag{1}
$$

Пусть T_j, $j = 1, 2$, — геометрический эндоморфизм комплекса (1), заданный диффеоморфизмом $\hat{M} \to \hat{M}$, совпадающим на $[0, +\infty) \times \Omega$ с отображением $g : \mathbb{R}_t \times \Omega \to \mathbb{R}_t \times \Omega$ сдвига по переменной t на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Обозначим за $B = B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$ псевдодифференциальный оператор с конормальным символом

$$
\sigma_c(D)^{-1}(p) \frac{\partial \sigma_c(D)}{\partial p}(p)\,.
$$

Для краткости будем опускать зависимость от ω и писать, например, $B(-i\partial_t)$ вместо $B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$. Тогда, согласно [1, Theorem 11.3], вклад неподвижной точки α в формуле Лефшеца выражается формулой

$$
\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Trace} \int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_c(T_1)(p)\, B_\infty(p)\, dp\,,
$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации

$$
\left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p)\, B_\infty^{(l)}(p)\, dp
$$

для достаточно большого l.

Лемма 1.4. *Имеем, что*

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p)\ B_\infty^{(l)}(p)\, dp \\
&\qquad\qquad = -\left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^l \int_0^{2\pi} \tau\left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*\, B_\infty^{(l)}\left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}\right)\right) d\theta\,,
\end{aligned}
$$

где след τ отвечает вложению $\Omega \hookrightarrow \mathbb{S}^1_t \times \Omega$.

Доказательство. Подставляя разложение $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_k e^{ikt}$ в определение следа, получаем

$$\begin{aligned}
\tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) u(\omega) \\
&= \left[e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega)\delta(t) \right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} \sum_k B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) e^{ik(t+\lambda)} \right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i(k\lambda - \frac{\lambda\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right] u(\omega) \,,
\end{aligned}$$

то есть

$$\tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) .$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) d\theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda p} B_\infty^{(l)}(p) \, dp \,.
\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $\sigma_c(T_1) = e^{i\lambda p}$. □

Таким образом, если положить $\widetilde{T}_1(\theta) = e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*$, то вклад в формуле Лефшеца принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \operatorname{Trace} \left(\frac{2\pi}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(\widetilde{T}_1(\theta) \, \widetilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) \right) \, d\theta \,, \tag{2}$$

поскольку

$$\widetilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) = \frac{\partial^l}{\partial\theta^l} \left(B_\infty \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \left(\frac{-1}{2\pi} \right)^l B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) .$$

На выражение (2) можно смотреть как на равенство

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \operatorname{Trace} \int_0^{2\pi} \tau \left(\widetilde{T}_1(\theta) \, \widetilde{B}_\infty(\theta) \right) \, d\theta \,,$$

понимаемое в определённом регуляризованном смысле. Последнюю формулу можно так же переписать в терминах цилиндра $\mathbb{R}_t \times \Omega$:

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{Trace} \tau \left(T_{1\infty} D_\infty^{-1} [D_\infty, t] \right) \,,$$

где след τ отвечает вложению

$$\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}_t \times \Omega \,, \quad \omega \mapsto (0, \omega) \,.$$

Список литературы

[1] Vladimir E Nazaikinskii и др. *Elliptic theory on singular manifolds*. Chapman и Hall/CRC, 2005.

[2] Сергей Петрович Новиков и Борис Юрьевич Стернин. “Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и K-теория”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 170. 6. Российская академия наук. 1966, с. 1265—1268.

[3] Владимир Самуилович Рабинович. “Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на $\mathbb{R}^n$, операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 263. 5. Российская академия наук. 1982, с. 1066—1070.