

1 Вклад конической точки в формуле Лефшеца в терминах преобразования Фурье-Лапласа

1.1 Общие определения

Рассмотрим некомпактное многообразие \hat{M} , составленное из компактного основания M с границей Ω и присоединённого к нему бесконечного цилиндра $[0, +\infty) \times \Omega$. Ему соответствует многообразие \mathcal{M} с конической точкой α . Рассмотрим на \hat{M} соболевские пространства $H^s(\hat{M}) := H^{s,0}(\mathcal{M})$. (См. [1, р. 46, Definition 2.3].)

Пусть

$$D : H^s(\hat{M}) \rightarrow H^{s-m}(\hat{M})$$

— дифференциальный оператор порядка m , совпадающий на $[0, +\infty) \times \Omega$ с 2π -периодическим оператором $D_\infty := D_\infty(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$,

$$D_\infty : H^s(\mathbb{R}_t \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}_t \times \Omega).$$

При сопряжении D_∞ с преобразованием Фурье мы получаем, фактически, конормальный символ оператора D :

$$\sigma_c(D)(p) = \mathcal{F}D_\infty\mathcal{F}^{-1} = D_\infty(p, \omega, -i\partial_\omega), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Нам удобно рассмотреть вместо преобразования Фурье преобразование Фурье-Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z : L^2(\mathbb{R}_t \times \Omega) &\rightarrow L^2(\mathbb{S}_t^1 \times \mathbb{S}_z^1 \times \Omega), \\ (\mathcal{F}_z u)(t, z) &:= z^{\frac{t}{2\pi}} \sum_n z^n u(t + 2\pi n). \end{aligned}$$

Обратное преобразование тогда задаётся формулой

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{-\frac{t}{2\pi}} (\mathcal{F}_z u)(t, z) \frac{dz}{z}.$$

При этом преобразовании оператор D_∞ переходит в семейство операторов

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\infty(\theta) &:= \mathcal{F}_z D_\infty \mathcal{F}_z^{-1} = D_\infty(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}, \omega, -i\partial_\omega), \\ \tilde{D}_\infty(\theta) &: H^s(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega), \end{aligned}$$

где для удобства $z := e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Определение 1.1. Оператор D называется эллиптическим, если

1. $\sigma(D)$ обратим на $T^*\hat{M}$ вне нулевого сечения;
2. $\tilde{D}_\infty(\theta)$ обратим для любого $\theta \in [0, 2\pi]$.

Из [3, Теорема 2] следует

Теорема 1.2. Если D — эллиптический, то он фредгольмов.

В дальнейшем нам так же понадобится понятие следа оператора в смысле сужения его на некоторое подмногообразие (см. [2].) Пусть

$$\begin{aligned} i : \Omega &\hookrightarrow \mathbb{R} \times \Omega, \\ A : C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega). \end{aligned}$$

Определение 1.3. Следом оператора A на Ω называется композиция

$$\tau(A) : C^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{A} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{i^*} C^\infty(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} i_*(u)(t, \omega) &= u(\omega) \delta(t), \\ i^*(u)(\omega) &= u(0, \omega). \end{aligned}$$

1.2 Вклад конической точки α в формуле Лефшеца

Рассмотрим комплекс из одного эллиптического оператора

$$0 \rightarrow H^s(\hat{M}) \xrightarrow{D} H^{s-m}(\hat{M}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Пусть T_j , $j = 1, 2$, — эндоморфизм комплекса (1), заданный диффеоморфизмом $g : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$, совпадающим на $\mathbb{R} \times \Omega$ с отображением сдвига вдоль \mathbb{R} на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Обозначим за $B = B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$ псевдодифференциальный оператор с символом

$$\sigma(D)^{-1}(p) \frac{\partial \sigma(D)}{\partial p}(p).$$

Для краткости будем опускать зависимость от ω и писать, например, $B(-i\partial_t)$ вместо $B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$. Тогда вклад неподвижной точки α в формуле Лефшеца выражается формулой

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \int_{\mathbb{R}} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty(p) dp,$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации

$$\left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp$$

для достаточно большого l .

Лемма 1.4. *Имеем, что*

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp \\ = - \left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Доказательство. Подставляя разложение $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_l e^{ilt}$ в определение следа по Новикову получаем

$$\begin{aligned} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) u(\omega) &= \left[e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) \delta(t) \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} \sum_l B_\infty^{(l)} \left(l - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) e^{il(t+\lambda)} \right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \sum_l e^{i(l\lambda - \frac{\lambda\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(l - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right] u(\omega), \end{aligned}$$

то есть

$$\tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_l e^{i\lambda(l - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(l - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_l e^{i\lambda(l - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(l - \frac{\theta}{2\pi} \right) d\theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda p} B_\infty^{(l)}(p) dp. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $\sigma_c(T_1) = e^{i\lambda p}$. □

Таким образом, если положить $\tilde{T}_1(\theta) = e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*$, то вклад в формуле Лефшеца принимает вид

$$L_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \text{Trace} \left(\frac{2\pi}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(\tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) \right) d\theta, \quad (2)$$

поскольку

$$\tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) = \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \left(B_\infty \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \left(\frac{-1}{2\pi} \right)^l B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

На выражение (2) можно смотреть как на равенство

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \text{Trace} \int_0^{2\pi} \tau \left(\tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty(\theta) \right) d\theta,$$

понимаемое в определённом регуляризованном смысле.

Список литературы

- [1] Vladimir E Nazaikinskii и др. *Elliptic theory on singular manifolds*. Chapman и Hall/CRC, 2005.

- [2] Сергей Петрович Новиков и Борис Юрьевич Стернин. “Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и К-теория”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 170. 6. Российская академия наук. 1966, с. 1265—1268.
- [3] Владимир Самуилович Рабинович. “Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на \mathbb{R}^n , операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 263. 5. Российская академия наук. 1982, с. 1066—1070.