

# 1 Вклад конической точки в формуле Лефшеца в терминах преобразования Фурье-Лапласа

## 1.1 Общие определения

Рассмотрим некомпактное многообразие  $\hat{M}$ , составленное из компактного основания  $M$  с границей  $\Omega$  и присоединённого к нему бесконечного цилиндра  $[0, +\infty) \times \Omega$ . Ему соответствует многообразие  $\mathcal{M}$  с конической точкой  $\alpha$ . Рассмотрим на  $\hat{M}$  соболевские пространства  $H^s(\hat{M}) := H^{s,0}(\mathcal{M})$ . (См. [3, р. 46, Definition 2.3].)

Пусть

$$D : H^s(\hat{M}) \rightarrow H^{s-m}(\hat{M})$$

— дифференциальный оператор порядка  $m$ , совпадающий на  $[0, +\infty) \times \Omega$  с оператором  $D_\infty := D_\infty(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$ ,

$$D_\infty : H^s(\mathbb{R}_t \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}_t \times \Omega).$$

При сопряжении  $D_\infty$  с преобразованием Фурье мы получаем, фактически, конормальный символ оператора  $D$ :

$$\sigma_c(D)(p) = \mathcal{F}D_\infty\mathcal{F}^{-1} = D_\infty(p, \omega, -i\partial_\omega), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Нам удобно вместо преобразования Фурье рассмотреть преобразование Фурье-Лапласа (см. [4] и [1]):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z : L^2(\mathbb{R}_t \times \Omega) &\rightarrow L^2(\mathbb{S}_t^1 \times \mathbb{S}_z^1 \times \Omega), \\ (\mathcal{F}_z u)(t, z, \omega) &:= z^{\frac{t}{2\pi}} \sum_n z^n u(t + 2\pi n, \omega). \end{aligned}$$

Обратное преобразование тогда задаётся формулой

$$u(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{-\frac{t}{2\pi}} (\mathcal{F}_z u)(t, z, \omega) \frac{dz}{z}.$$

При этом преобразовании оператор  $D_\infty$  переходит в семейство операторов

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\infty(\theta) &:= \mathcal{F}_z D_\infty \mathcal{F}_z^{-1} = D_\infty(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}, \omega, -i\partial_\omega), \\ \tilde{D}_\infty(\theta) &: H^s(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega), \end{aligned}$$

где для удобства  $z := e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Определение 1.1.** Оператор  $D$  называется эллиптическим, если

1.  $\sigma(D)$  обратим на  $T^*\hat{M}$  вне нулевого сечения;
2.  $\tilde{D}_\infty(\theta)$  обратим для любого  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Из [6, Теорема 2] следует

**Теорема 1.2.** Если  $D$  — эллиптический, то он фредгольмов.

В дальнейшем нам так же понадобится понятие следа оператора в смысле сужения его на некоторое подмногообразие (см. [5].) Пусть

$$\begin{aligned} i : \Omega &\hookrightarrow \mathbb{R} \times \Omega, \quad i(\omega) = (0, \omega), \\ A : C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega). \end{aligned}$$

**Определение 1.3.** Следом оператора  $A$  на  $\Omega$  называется композиция

$$\tau(A) : C^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{A} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{i^*} C^\infty(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} (i_* u)(t, \omega) &= u(\omega) \delta(t), \\ (i^* u)(\omega) &= u(0, \omega). \end{aligned}$$

## 1.2 Вклад конической точки $\alpha$ в формуле Лефшеца

Рассмотрим комплекс из одного эллиптического оператора

$$0 \rightarrow H^s(\hat{M}) \xrightarrow{D} H^{s-m}(\hat{M}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Пусть  $T_j$ ,  $j = 1, 2$ , — геометрический эндоморфизм комплекса (1), заданный диффеоморфизмом  $\hat{M} \rightarrow \hat{M}$ , совпадающим на  $[0, +\infty) \times \Omega$  с отображением  $g : \mathbb{R}_t \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_t \times \Omega$  сдвига по переменной  $t$  на некоторое число  $\lambda \neq 0$ .

Обозначим за  $B = B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$  псевдодифференциальный оператор с конормальным символом

$$\sigma_c(D)^{-1}(p) \frac{\partial \sigma_c(D)}{\partial p}(p).$$

Для краткости будем опускать зависимость от  $\omega$  и писать, например,  $B(-i\partial_t)$  вместо  $B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$ . Тогда, согласно [3, Theorem 11.3] (см. так же [2]), вклад неподвижной точки  $\alpha$  в формуле Лефшеца выражается формулой

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \int_{\mathbb{R}} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty(p) dp,$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации

$$\left( \frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp$$

для достаточно большого  $l$ .

**Лемма 1.4.** Имеем, что

$$\begin{aligned} \left( \frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp \\ = - \left( \frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left( e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta, \end{aligned}$$

где след  $\tau$  отвечает вложению  $\Omega \hookrightarrow \mathbb{S}_t^1 \times \Omega$ .

*Доказательство.* Подставляя разложение  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ikt}$  в определение следа, получаем

$$\begin{aligned} \tau \left( e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) u(\omega) &= \left[ e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) \delta(t) \right]_{t=0} \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} \sum_k B_\infty^{(l)} \left( k - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) e^{ik(t+\lambda)} \right]_{t=0} \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i(k\lambda - \frac{\lambda\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left( k - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right] u(\omega), \end{aligned}$$

то есть

$$\tau \left( e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left( k - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tau \left( e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left( k - \frac{\theta}{2\pi} \right) d\theta = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda p} B_\infty^{(l)}(p) dp. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что  $\sigma_c(T_1) = e^{i\lambda p}$ . □

Таким образом, если положить  $\tilde{T}_1(\theta) = e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*$ , то вклад в формуле Лефшеца принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \text{Trace} \left( \frac{2\pi}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left( \tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) \right) d\theta, \quad (2)$$

поскольку

$$\tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) = \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \left( B_\infty \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \left( \frac{-1}{2\pi} \right)^l B_\infty^{(l)} \left( -i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

На выражение (2) можно смотреть как на равенство

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{-1}{2\pi i} \text{Trace} \int_0^{2\pi} \tau \left( \tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty(\theta) \right) d\theta,$$

понимаемое в определённом регуляризованном смысле. Последнюю формулу можно так же переписать в терминах цилиндра  $\mathbb{R}_t \times \Omega$ :

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = -\frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \tau \left( T_{1\infty} D_\infty^{-1} [D_\infty, t] \right),$$

где след  $\tau$  отвечает вложению

$$\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}_t \times \Omega, \quad \omega \mapsto (0, \omega).$$

## Список литературы

- [1] Tomasz Mrowka, Daniel Ruberman и Nikolai Saveliev. “An index theorem for end-periodic operators”. *Compositio mathematica* 152.2 (2016), с. 399—444.
- [2] Vladimir Nazaikinskii и др. “The Atiyah-Bott-Lefschetz theorem for manifolds with conical singularities”. *Annals of Global Analysis and Geometry* 17.5 (1999), с. 409.
- [3] Vladimir E Nazaikinskii и др. *Elliptic theory on singular manifolds*. Chapman и Hall/CRC, 2005.
- [4] Clifford Henry Taubes. “Gauge theory on asymptotically periodic  $\{4\}$ -manifolds”. *Journal of Differential Geometry* 25.3 (1987), с. 363—430.
- [5] Сергей Петрович Новиков и Борис Юрьевич Стернин. “Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и К-теория”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 170. 6. Российская академия наук. 1966, с. 1265—1268.
- [6] Владимир Самуилович Рабинович. “Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на  $\mathbb{R}^n$ , операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 263. 5. Российская академия наук. 1982, с. 1066—1070.