

1 Вклад конической точки в формуле Лефшеца в терминах преобразования Фурье-Лапласа

1.1 Общие определения

Рассмотрим некомпактное многообразие \hat{M} , составленное из компактного основания M с границей Ω и присоединённого к нему бесконечного цилиндра $[0, +\infty) \times \Omega$. Ему соответствует многообразие \mathcal{M} с конической точкой α . Рассмотрим на \hat{M} соболевские пространства $H^s(\hat{M}) := H^{s,0}(\mathcal{M})$. (См. [3, р. 46, Definition 2.3].)

Пусть

$$D : H^s(\hat{M}) \rightarrow H^{s-m}(\hat{M})$$

— дифференциальный оператор порядка m , совпадающий на $[0, +\infty) \times \Omega$ с оператором $D_\infty := D_\infty(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$,

$$D_\infty : H^s(\mathbb{R}_t \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}_t \times \Omega).$$

При сопряжении D_∞ с преобразованием Фурье мы получаем, фактически, конормальный символ оператора D :

$$\sigma_c(D)(p) = \mathcal{F}D_\infty\mathcal{F}^{-1} = D_\infty(p, \omega, -i\partial_\omega), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Нам удобно вместо преобразования Фурье рассмотреть преобразование Фурье-Лапласа (см. [4] и [1]):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z : L^2(\mathbb{R}_t \times \Omega) &\rightarrow L^2(\mathbb{S}_t^1 \times \mathbb{S}_z^1 \times \Omega), \\ (\mathcal{F}_z u)(t, z, \omega) &:= z^{\frac{t}{2\pi}} \sum_n z^n u(t + 2\pi n, \omega). \end{aligned}$$

Обратное преобразование тогда задаётся формулой

$$u(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{-\frac{t}{2\pi}} (\mathcal{F}_z u)(t, z, \omega) \frac{dz}{z}.$$

При этом преобразовании оператор D_∞ переходит в семейство операторов

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\infty(\theta) &:= \mathcal{F}_z D_\infty \mathcal{F}_z^{-1} = D_\infty(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}, \omega, -i\partial_\omega), \\ \tilde{D}_\infty(\theta) &: H^s(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}_t^1 \times \Omega), \end{aligned}$$

где для удобства $z := e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Определение 1.1. Оператор D называется эллиптическим, если

1. $\sigma(D)$ обратим на $T^*\hat{M}$ вне нулевого сечения;
2. $\tilde{D}_\infty(\theta)$ обратим для любого $\theta \in [0, 2\pi]$.

Из [6, Теорема 2] следует

Теорема 1.2. Если D — эллиптический, то он фредгольмов.

В дальнейшем нам так же понадобится понятие следа оператора в смысле сужения его на некоторое подмногообразие (см. [5].) Пусть

$$\begin{aligned} i : \Omega &\hookrightarrow \mathbb{R} \times \Omega, \quad i(\omega) = (0, \omega), \\ A : C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega). \end{aligned}$$

Определение 1.3. Следом оператора A на Ω называется композиция

$$\tau(A) : C^\infty(\Omega) \xrightarrow{i_*} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{A} \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \Omega) \xrightarrow{i^*} C^\infty(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} (i_* u)(t, \omega) &= u(\omega) \delta(t), \\ (i^* u)(\omega) &= u(0, \omega). \end{aligned}$$

1.2 Вклад конической точки α в формуле Лефшеца

Рассмотрим комплекс из одного эллиптического оператора

$$0 \rightarrow H^s(\hat{M}) \xrightarrow{D} H^{s-m}(\hat{M}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Пусть T_j , $j = 1, 2$, — геометрический эндоморфизм комплекса (1), заданный диффеоморфизмом $\hat{M} \rightarrow \hat{M}$, совпадающим на $[0, +\infty) \times \Omega$ с отображением $g : \mathbb{R}_t \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_t \times \Omega$ сдвига по переменной t на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Утверждение 1.4. Вклад неподвижной точки α в формуле Лефшеца выражается как

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = i \operatorname{Trace} \int_0^{2\pi} \tau \left(\tilde{T}_1(\theta) \tilde{D}_\infty^{-1}(\theta) \frac{\partial \tilde{D}_\infty}{\partial \theta}(\theta) \right) d\theta,$$

$$\text{где } \tilde{T}_1(\theta) = e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*.$$

Для доказательства обозначим за $B = B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$ псевдодифференциальный оператор с конормальным символом

$$\sigma_c(D)^{-1}(p) \frac{\partial \sigma_c(D)}{\partial p}(p).$$

Для краткости будем опускать зависимость от ω и писать, например, $B(-i\partial_t)$ вместо $B(-i\partial_t, \omega, -i\partial_\omega)$. Тогда, согласно [3, Theorem 11.3] (см. так же [2]),

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Trace} \int_{\mathbb{R}} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty(p) dp,$$

где интеграл понимается в смысле его регуляризации

$$\left(\frac{-1}{i\lambda} \right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp$$

для достаточно большого l .

Лемма 1.5. *Имеем, что*

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^l \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_c(T_1)(p) B_\infty^{(l)}(p) dp \\ = \left(\frac{-1}{i\lambda}\right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta, \end{aligned}$$

где след τ отвечает вложению $\Omega \hookrightarrow \mathbb{S}_t^1 \times \Omega$.

Доказательство. Подставляя разложение $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ikt}$ в определение следа, получаем

$$\begin{aligned} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) u(\omega) \\ = \left[e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) \delta(t) \right]_{t=0} \\ = \left[\frac{1}{2\pi} e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} \sum_k B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) u(\omega) e^{ik(t+\lambda)} \right]_{t=0} \\ = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i(k\lambda - \frac{\lambda\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right] u(\omega), \end{aligned}$$

то есть

$$\tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tau \left(e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^* B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) d\theta \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_k e^{i\lambda(k - \frac{\theta}{2\pi})} B_\infty^{(l)} \left(k - \frac{\theta}{2\pi} \right) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda p} B_\infty^{(l)}(p) dp. \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что $\sigma_c(T_1) = e^{i\lambda p}$. \square

Таким образом, если положить $\tilde{T}_1(\theta) = e^{-i\frac{\lambda\theta}{2\pi}} g^*$, то вклад в формуле Лефшеца принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \left(\frac{2\pi}{i\lambda} \right)^l \int_0^{2\pi} \tau \left(\tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) \right) d\theta, \quad (2)$$

поскольку

$$\tilde{B}_\infty^{(l)}(\theta) = \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} \left(B_\infty \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right) \right) = \left(\frac{-1}{2\pi} \right)^l B_\infty^{(l)} \left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi} \right).$$

Наконец, интегрируя по частям в выражении (2), получаем

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace} \int_0^{2\pi} \tau \left(\tilde{T}_1(\theta) \tilde{B}_\infty(\theta) \right) d\theta,$$

что есть в точности равенство из Утверждения (1.4), поскольку

$$\tilde{B}_\infty(\theta) = -2\pi \tilde{D}_\infty^{-1}(\theta) \frac{\partial \tilde{D}_\infty}{\partial \theta}(\theta).$$

Замечание 1.6. Последнюю формулу можно так же переписать в терминах цилиндра $\mathbb{R}_t \times \Omega$:

$$\mathcal{L}_{\text{sing}} = \frac{1}{2\pi i} \text{Trace } \tau \left(T_{1\infty} D_{\infty}^{-1} [D_{\infty}, t] \right) ,$$

где след τ отвечает вложению $\Omega \hookrightarrow \mathbb{R}_t \times \Omega$, $\omega \mapsto (0, \omega)$.

Замечание 1.7. Можно так же рассматривать и более общие диффеоморфизмы вида

$$g : (t, \omega) \mapsto (t + \lambda(\omega), g_{\alpha}(\omega)) , \\ \lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} , \quad g_{\alpha} : \Omega \rightarrow \Omega .$$

Утверждение (1.4) в таком случае остаётся в точности тем же, просто λ в выражении для $\widetilde{T}_1(\theta)$ будет зависеть от ω .

Список литературы

- [1] Tomasz Mrowka, Daniel Ruberman и Nikolai Saveliev. “An index theorem for end-periodic operators”. *Compositio mathematica* 152.2 (2016), с. 399—444.
- [2] Vladimir Nazaikinskii и др. “The Atiyah-Bott-Lefschetz theorem for manifolds with conical singularities”. *Annals of Global Analysis and Geometry* 17.5 (1999), с. 409.
- [3] Vladimir E Nazaikinskii и др. *Elliptic theory on singular manifolds*. Chapman и Hall/CRC, 2005.
- [4] Clifford Henry Taubes. “Gauge theory on asymptotically periodic $\{4\}$ -manifolds”. *Journal of Differential Geometry* 25.3 (1987), с. 363—430.
- [5] Сергей Петрович Новиков и Борис Юрьевич Стернин. “Следы эллиптических операторов на подмногообразиях и К-теория”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 170. 6. Российская академия наук. 1966, с. 1265—1268.
- [6] Владимир Самуилович Рабинович. “Об алгебре, порожденной псевдодифференциальными операторами на \mathbb{R}^n , операторами умножения на почти-периодические функции и операторами сдвига”. В: *Доклады Академии наук*. Т. 263. 5. Российская академия наук. 1982, с. 1066—1070.