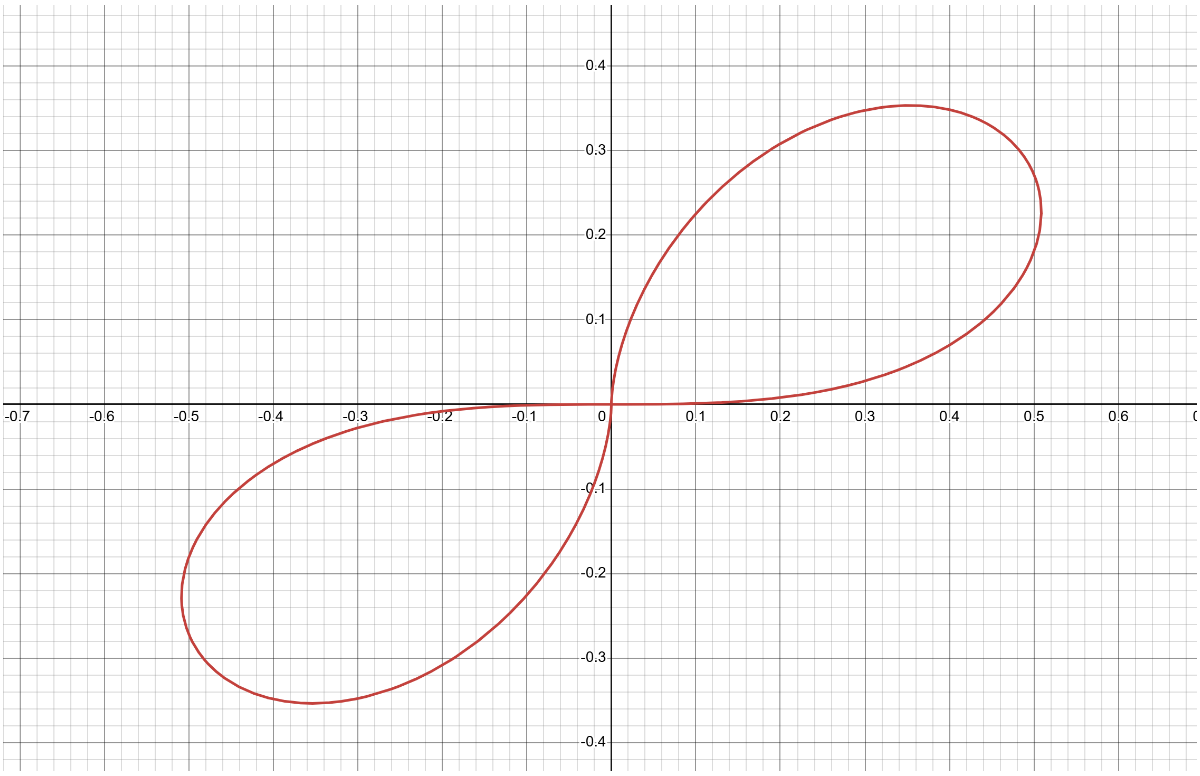
Домашняя работа

Задача 1

пункт а

$$(x^2 + y^2)^3 = x^3 y$$

Нарисуем эскиз графика:



Введем полярные корды:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$$

Тогда:

$$(x^2 + y^2)^3 = x^3 y \iff (r^2)^3 = r^3\cos^3\varphi \cdot r\sin\varphi \Rightarrow r^2 = \cos^3\varphi \cdot \sin\varphi$$

Так как $r^2 \geq 0$, то и $\cos^3\varphi \cdot \sin\varphi \geq 0$

Тогда выходит, что, чтобы это выполнялось, $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ должны быть одинаковых знаков.

Если нарисовать триг. окружность, то получим, что это происходит в I и III четверти триг. окружности.

Ну или если писать формально:

$$\cos^3\varphi \geq 0 \ \land \ \sin\varphi \geq 0 \iff \varphi \in [0 + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n] \cup [\pi + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k], n, k \in \mathbb{Z}$$

То бишь у нас есть две области для интегрирования хехех

Исходная площадь:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^3\varphi\sin\varphi}} |J| dr + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^3\varphi\sin\varphi}} |J| dr =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos^3\varphi\sin\varphi}} rdr + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_\pi^{\sqrt{\cos^3\varphi\sin\varphi}} rdr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi + \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

Вычислим сначала $\int \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi$:

$u = \cos\varphi$, тогда $du = -\sin\varphi d\varphi$

Тогда:

$$\int \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} = -\frac{\cos^4\varphi}{4}$$

Тогда:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ну и посчитаем второй:

$$\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

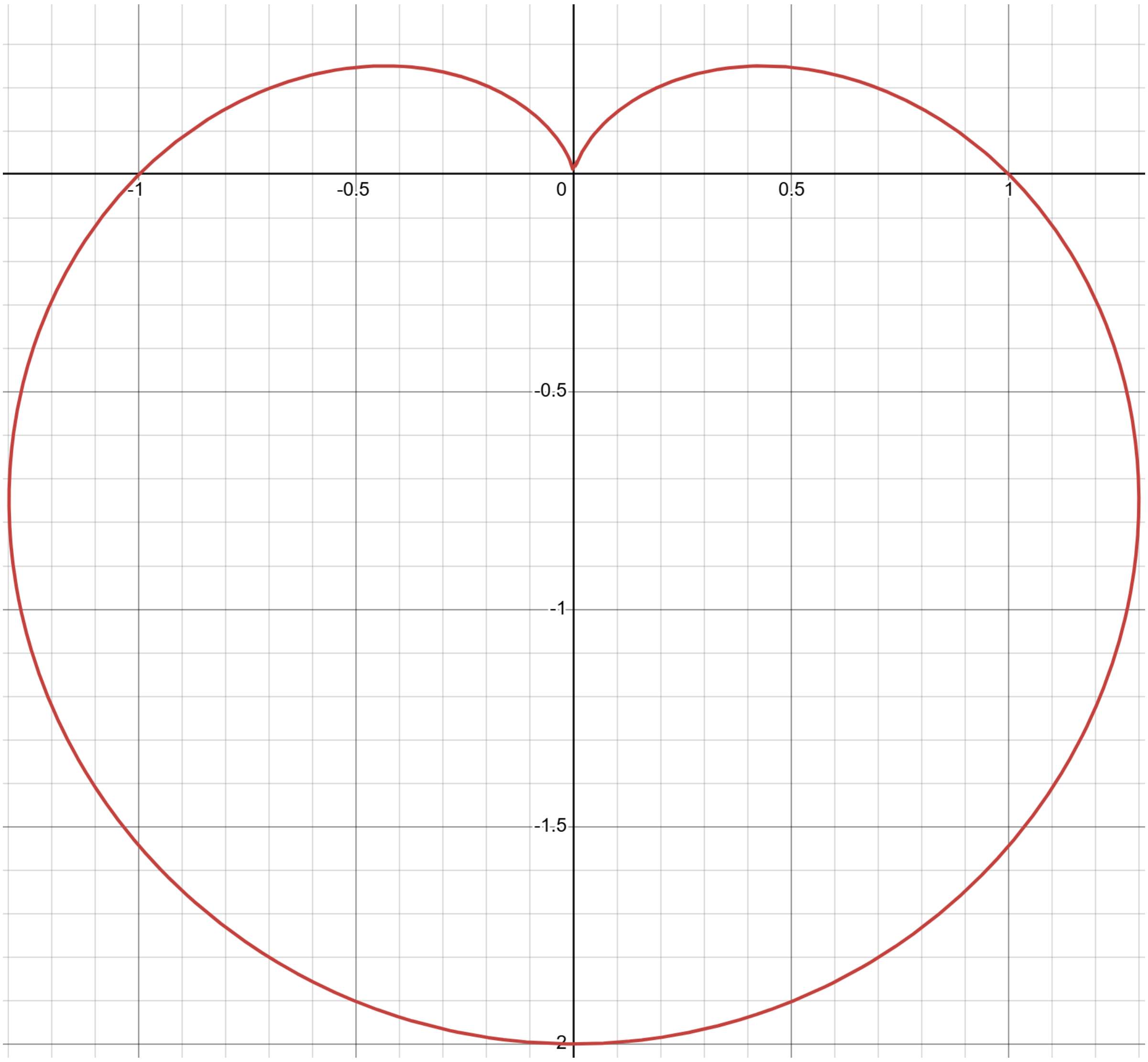
Тогда:

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

пункт б

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$$



Введем полярные корды:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$$

Тогда:

$$(r^2 + r\sin\varphi)^2 = r^2,\ r \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} r^2 + r\sin\varphi = r \\ r^2 + r\sin\varphi = -r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 - \sin\varphi \\ r = -1 - \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow r = 1 - \sin\varphi$$

Ну и отсюда понятно, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда r меняется от 0 до $1 - \sin\varphi$. Короче получим интеграл:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\sin\varphi} r dr = \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi - 2\int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi =$$

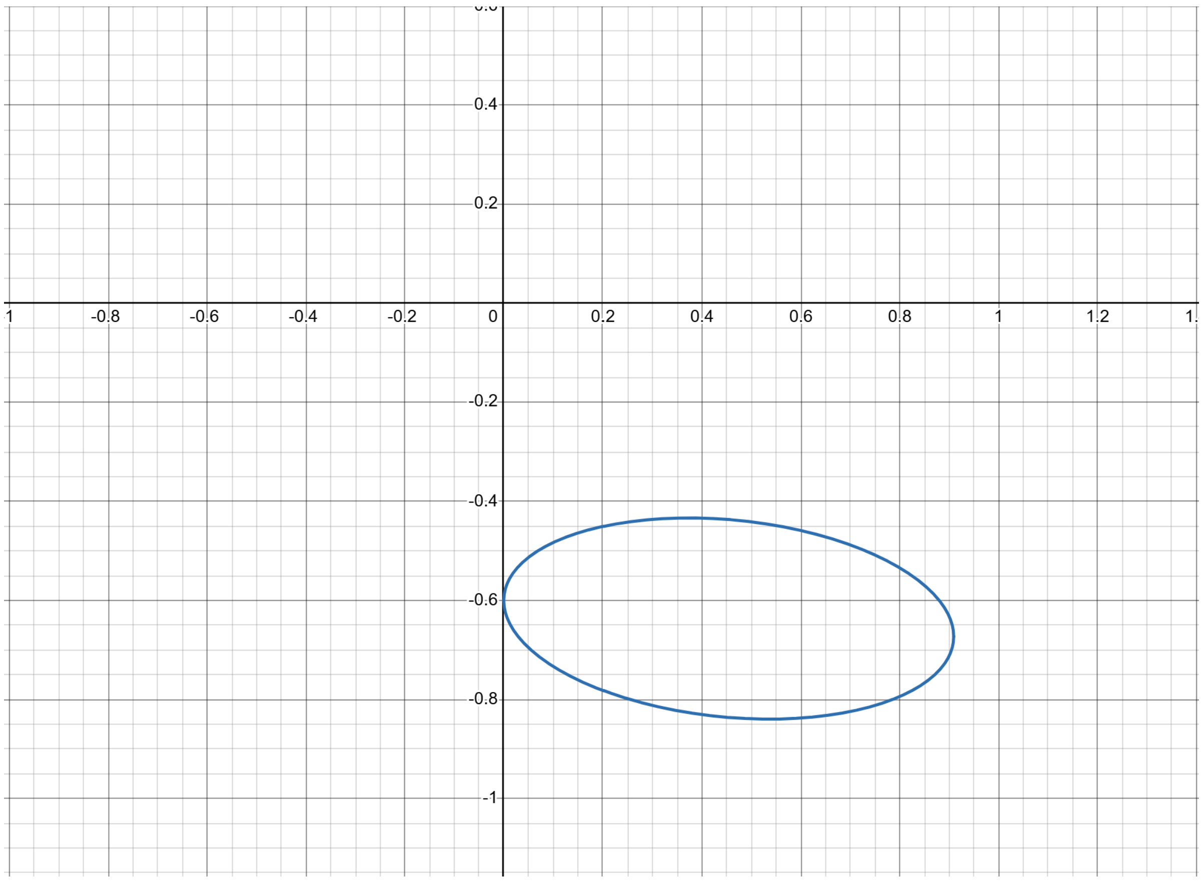
$$= 2\pi + 2 - 2 + \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = 2\pi + \pi + 0 = 3\pi$$

Ответ: 3π

пункт c

$$(2x + 3y + 1)^2 + (x - 4y - 3)^2 = 1$$

Аля график с десмоса:



Введем замену переменных:

$$u = 2x + 3y + 1 \quad v = x - 4y - 3$$

Выразим теперь x и y через u и v:

$$y = \frac{u - 2v - 7}{11} \quad x = v + \frac{4u - 8v - 28}{11} + 3$$

Найдем Якобиан данной замены переменных:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \end{vmatrix} = \left|-\frac{8}{121} - \frac{3}{121}\right| = \frac{1}{11}$$

Окей, тогда:

$$u^2 + v^2 = 1$$

Введем полярные корды:

$$u = r\cos\varphi \quad v = r\sin\varphi$$

$$u^2 + v^2 = 1 \iff r^2 = 1 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

Так как $r^2 \geq 0$, то и $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \geq 0$, что выполняется при $\varphi \in [0, 2\pi]$

Ну тогда посчитаем:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

(вообще я не дурачок и знаю, что это была формула окружности, но по приколу расписал)

Так, мы нашли площадь, заданную уравнением $u^2 + v^2 = 1$, тогда исходная плошадь по сути будет равна:

$$J \cdot \pi = \frac{1}{11} \cdot \pi = \frac{\pi}{11}$$

Ответ: $\frac{\pi}{11}$

Задача 2

пункт а

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Введем цилиндр. корды:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Тогда:

$$r^2 \leq z \leq r$$

что выполняется только при $r \in [0, 1]$. *(из того что $r^2 \leq r$)*

Ну а φ меняется от $[0, 2\pi]$. *(ни от чего не зависит, такая вся сильная и независимая)*

Окей тогда получим интеграл:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(r - r^2) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{6} \cdot \pi$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$

пункт б

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq z \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq z$$

Введем цилиндр. корды:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Тогда наши огр. будут иметь вид:

$$r \geq z \quad r^2 + z^2 \leq z$$

Окей, распишем их, чтобы сделать какие-то выводы:

$$r^2+z^2 \leq z \Rightarrow r^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq z \leq \frac{1}{2}$$

$$r^2+z^2 \leq z \Rightarrow r^2 \leq z-z^2 \Rightarrow r \leq \sqrt{z-z^2}$$

Ну тогда получили, что при фикс. z, r меняется от z до $\sqrt{z-z^2}$

Ну а φ опять от 0 до 2π. Ни от чего не зависит.

Тогда получим:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_z^{\sqrt{z-z^2}} r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z-z^2}{2} - \frac{z^2}{2} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} z dz - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} z^2 dz =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{24}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{24}$$

Ответ: $\frac{\pi}{24}$

Задача 3

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = z(x^2+y^2)$$

Введем сферические корды:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

Тогда наше ур-ие будет иметь вид:

$$(r^2)^2 = (r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\cdot r\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 = (r^2\sin^2\theta\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi))\cdot r\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sin^2\theta\cos\theta$$

Откуда мы понимаем, что $r \in [0,1]$, а $\sin^2\theta\cos\theta \geq 0$, тк $r \geq 0$, тк $\sin^2\theta \geq 0$, всегда то $\cos\theta \geq 0$, что происходит при $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

Но в сфер. кордах $0 \leq \theta \leq \pi$. Поэтому в нашем случае $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

А φ ни от чего не зависит, поэтому $0 \leq \varphi \leq 2\pi$!

Тогда получим вот такой интеграл:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\sin^2\theta\cos\theta} r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cdot\cos^3\theta \, d\theta$$

Введем замену:

$$u = \sin\theta \quad du = \cos\theta d\theta$$

Тогда:

$$\sin^7\theta\cdot\cos^3\theta\,d\theta = u^7\cdot\cos^2\theta\,du = u^7\cdot(1-\sin^2\theta)\,du = u^7\cdot(1-u^2)du = u^7-u^9$$

Тогда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\theta\cdot\cos^3\theta\,d\theta = \int_0^1 u^7du - \int_0^1 u^9du = \frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$$

Ну и тогда:

$$I=\frac{1}{120}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{60}$$

Ответ: $\frac{\pi}{60}$

задача 4

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\le 1,\ x_i\ge 0\right\}\quad (a_i>0)$$

Пусть $y_i=\frac{x_i}{a_i}$, тогда $x_i=a_i\cdot y_i$

Найдем Якобиан данной замены:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a_n\end{vmatrix}=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$$

Теперь выходит надо найти объем этой фигни:

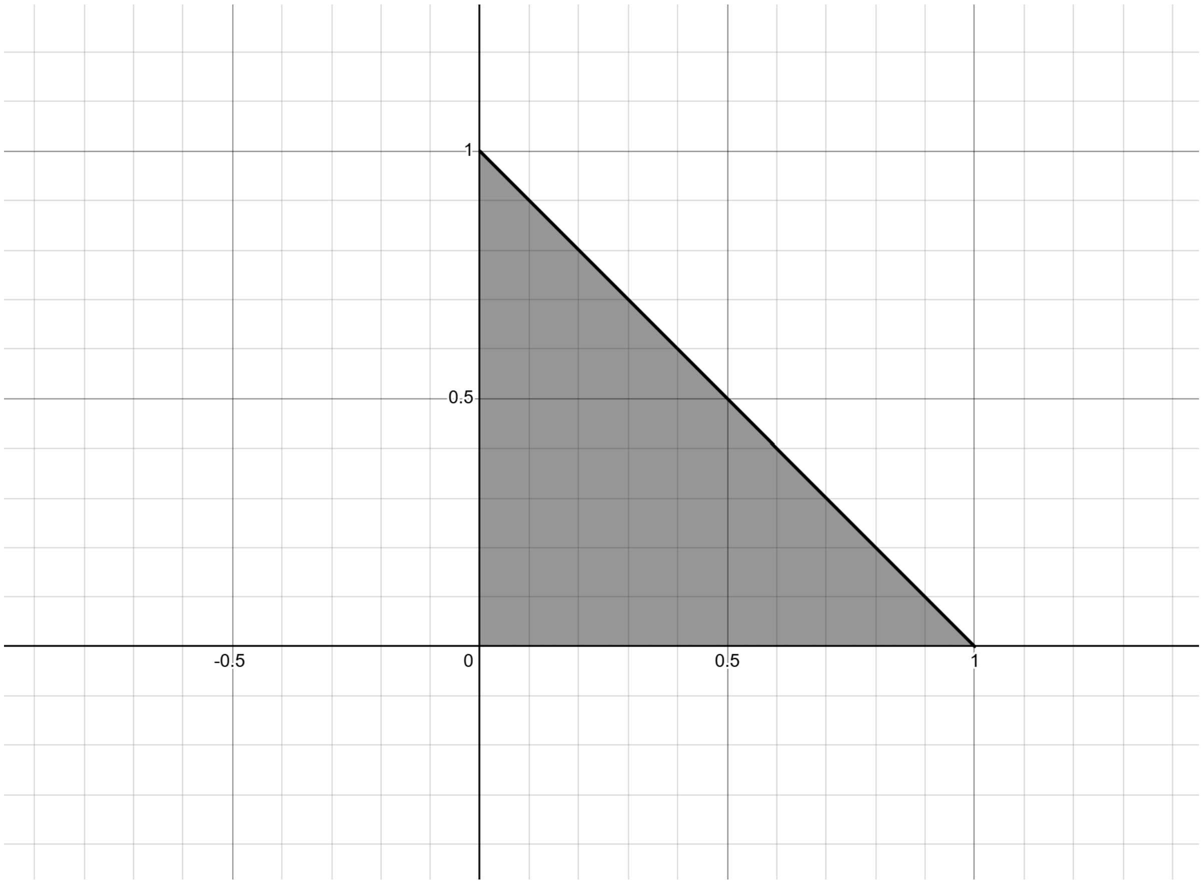
$$\left\{\sum_{i=1}^{n}y_i\le 1,\ y_i\ge 0\right\}$$

Давайте подумаем, как это сделать.

Сначала рассмотрим для 2D:

$y_1+y_2\le 1, y_i\ge 0$

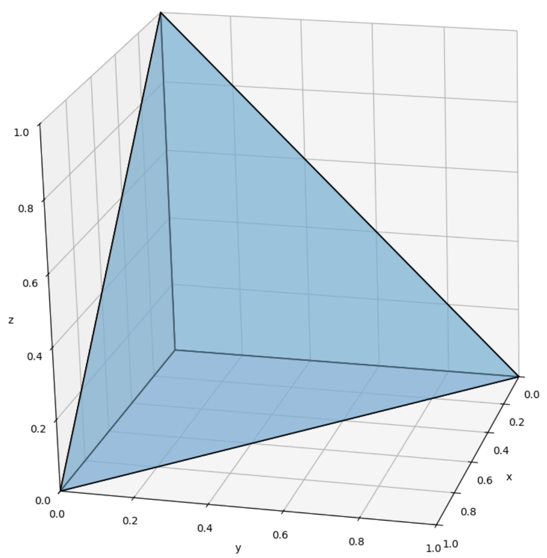
Получим вот такую картинку:



Это прямоугольный треугольник с катетами равными 1. Его площадь будет равна: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Окей, добавим y_3:

$y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$. То есть по сути у нас осталось такое же основание, имею в виду этот график который прикрепил выше, но добавилась еще высота и получилась такая вот пирамидка:



А объем этой пирамиды находится как: $\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\text{осн}} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$$y_1 \in [0, 1],\ y_2 \leq 1 - y_1,\ y_3 \leq 1 - y_1 - y_2$$

$$\int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} dy_2 \int_0^{1-y_1-y_2} dy_3 = \int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} (1-y_1-y_2)\ dy_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-y_1)^2 dy_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

(для перепроверки и понимания)

Окей, докажем, что объем в R^n такой штуки равен $\frac{1}{n!}$.

База: $n=1$, $n=2$, $n=3$ доказано!

Шаг: $n \to n+1$, что попробуем доказать через интеграл. То есть мы знаем, что:

$$\int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} dy_2 \int_0^{1-y_1-y_2} dy_3 \cdots \int_0^{1-y_1-y_2-\ldots-y_n} dy_n = \frac{1}{n!}$$

Надо доказать что:

$$\int_0^1 dy_1 \int_0^{1-y_1} dy_2 \int_0^{1-y_1-y_2} dy_3 \cdots \int_0^{1-y_1-y_2-\ldots-y_n} dy_n \int_0^{1-y_1-y_2-\ldots-y_n-y_{n+1}} dy_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Короче я не смогу это доказать, но я нашел в интернете формулу объема. Просто ей воспользуюсь :)

В общем, объем той фигни выходит равен $\frac{1}{n!}$.

Но тогда объем изначальной фигни в результате найденного Якобиана равен:

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$$

Ответ: $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{n!}$