Листок 6

Числовые ряды

1. Вычислить сумму ряда:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Исследовать ряд на сходимость (необход.усл.):

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)\operatorname{arctg} \frac{n+2}{n^2+n+1}$$

Знакопостоянные ряды

3. Исследовать ряд на сходимость (признаки сравнения):

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \sin \frac{1}{n}}$$

4. Исследовать ряд на сходимость (признаки Даламбера и Коши):

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\cdot 3^n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+6}\right)^{n^3}$$

5. Исследовать ряд на сходимость (признак Гаусса):

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n\cdot n!}$$

6. Исследовать ряд на сходимость (признак Вейерштрасса):

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+2}} \qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+3^n)\sin n}{2^n+n^2\cdot 3^n}$

7. Исследовать ряд на сходимость (признак Лейбница):

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$

8. Исследовать ряд на сходимость (признаки Дирихле и Абеля):

$a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{2}n}{2n-5} \qquad b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{2}n}{2n-5}\operatorname{arctg} n \qquad c)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 4n}{\ln n-\ln\ln n}$

$d)\ \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln n}\cos\frac{1}{n} \qquad e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n^2+2}} \qquad f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{arctg} e^n$

Домашнее задание

1. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$

2. Исследовать ряд на сходимость:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{n+1}{n^2+2} \qquad d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad g) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \qquad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$$

3. Исследовать ряд на сходимость:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3n-2} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n+\ln n} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n+n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{\sqrt{n+6}} \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{\ln\left(n^2+3\right)} e^{\frac{n+1}{n}}$$

Дополнительные теоретические задачи

1. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, если

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится?

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся?

2. Привести пример $\{a_n\}$, таких что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится.

3. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд сходится.

4. Докажите по определению, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится

5. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

6. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости ряда

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\min\{a_n,b_n\}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}?$$

7. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Верно ли обратное утверждение?

8. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_nb_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

9. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.