Домашняя работа.

№1

$D = \{ (x, y, z) \mid y^2 \le z \le 4,\ x^2 + y^2 \le 16 \}$

z меняется от y^2 до 4, где $y^2 \ge 0$.

также понятно, что на y накл. огр.

$y^2 \le 4$, т.е. $|y| \le 2$.

Рассм. второе огр. $x^2 + y^2 \le 16$

Найдем т. пересечения $y = \pm 2$ и окр:

$x^2 + 4 = 16 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$.

Значит: 1) при $x \in [-4, -2\sqrt{3}]$:

$\sqrt{16 - x^2} \le 2 \Rightarrow y \in [-\sqrt{16 - x^2}, \sqrt{16 - x^2}]$.

2) при $x \in [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$:

$\sqrt{16 - x^2} \ge 2 \Rightarrow y \in [-2, 2]$

3) при $x \in [2\sqrt{3}, 4]$:

$\sqrt{16 - x^2} \le 2 \Rightarrow y \in [-\sqrt{16 - x^2}, \sqrt{16 - x^2}]$.

(т.к из огр. окр. x меняется от -4 до 4, мы рассм. все случаи).

$\Rightarrow$ изн. интеграл $= \int\limits_{-4}^{-2\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{y^2}^{4} dz +$

$+ \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} dx \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{4} dz + \int\limits_{2\sqrt{3}}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{y^2}^{4} dz$.

Ответ: ↑

№2.

$D = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 3\}$. – брусок $\Rightarrow$ порядок можно выбрать любой.

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (xy + z^2)\,dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^1 \left(xyz + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^3 dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (3xy + 9)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(\frac{3xy^2}{2} + 9y\right)\Big|_0^1 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{3x}{2} + 9\right) dx = \left(\frac{3x^2}{4} + 9x\right)\Big|_0^2 = 3 + 18 = 21$$

Ответ: 21.

№4.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y} F(x,y,z)\,dz = \iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},$
$0 \le z \le x^2+y\}$ (видно из пределов)

Из условий $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$
понимаем, что оно эквивалентно:

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le 1.$

Откуда можем получить:

$0 \le y \le 1$ и $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$

$\Rightarrow D = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2},$
$0 \le z \le x^2+y^2\}.$

$\Rightarrow$ можем поменять dx и dy:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{x^2+y} F(x,y,z)\,dz.$$

Ответ: $\nearrow$