Домашнее задание 1

1. Выразите операцию разности множеств «$\setminus$» через операции пересечения «$\bigcap$» и симметрической разности «Δ». Докажите формально получившееся тождество.

2. Выразите операцию объединения множеств «$\bigcup$» через операции пересечения «$\bigcap$» и симметрической разности «Δ». Докажите формально получившееся тождество.

3. ***Верхним пределом последовательности множеств*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество $\limsup A_n$, состоящее из точек, принадлежащих бесконечному числу множеств последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. С помощью операций $\bigcup$ и $\bigcap$ выразите множество $\limsup A_n$ через множества A_n.

4. ***Нижним пределом последовательности множеств*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество $\liminf A_n$, состоящее из точек, принадлежащих всем множествам последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, кроме, быть может, конечного числа множеств. С помощью операций $\bigcup$ и $\bigcap$ выразите множество $\liminf A_n$ через множества A_n.

5. Пусть $\Omega = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Дополните следующие системы множеств так, чтобы они стали σ - алгебрами с единицей Ω. Отметим, что в общем случае вы можете дополнить указанные системы до σ - алгебр не единственным способом.

(a) $\mathcal{S}_1 = \{\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\},\ \{\clubsuit\}\}$;

(b) $\mathcal{S}_2 = \{\{\clubsuit\}\}$;

(c) $\mathcal{S}_3 = \{\{\heartsuit, \spadesuit\},\ \{\diamondsuit, \clubsuit\}\}$;

(d) $\mathcal{S}_4 = \{\{\heartsuit, \spadesuit\}\}$;

(e) $\mathcal{S}_5 = \{\{\heartsuit, \spadesuit\},\ \{\diamondsuit\},\ \{\clubsuit\}\}$;

(f) $\mathcal{S}_6 = \{\{\heartsuit, \spadesuit\},\ \{\clubsuit\}\}$.