Домашняя работа

Задача 1

Сначала вспомним определение алгебры:

Мн-во $\mathcal{A}$ подмн-в Ω наз-ся алгеброй, если:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Опред. взял из книги Черновой, на лекциях не был просто ахах

Окей, имеем R - систему подмн-в Ω и она удовл. таким условиям:

- $\Omega \in R$
- $A_1, A_2 \in R \rightarrow A_1 \cap A_2 \in R$
- $A_1, A_2 \in R \rightarrow A_1 \Delta A_2 \in R$

Просто проверим условия из алгебры:

1. $\Omega \in R$ - выполнено
2. Пусть $A \in R$. Тогда тк $\Omega \in R$, то $A\Delta\Omega \in R$, а $A\Delta\Omega = A \setminus \Omega \cup \Omega \setminus A = \emptyset \cup \overline{A} = \overline{A} \Rightarrow \overline{A} \in R$ - доказано
3. Пусть $A \in R$ и $B \in R$, тогда $A \cap B \in R$ и $A\Delta B \in R$ по условию. Тогда выходит, что $(A \cap B)\Delta(A\Delta B) \in R$. А в прошлом дз мы доказали, что $(A \cap B)\Delta(A\Delta B) = A \cup B$, значит $A \cup B \in R$ - доказано

чтд

Задача 2

пункт а)

Проверим все пункты из опреда алгебры, которое было написано выше

1. $\Omega \in \mathcal{A}$, тк $\overline{\Omega} = \emptyset$ - конечное
2. Пусть $A \in \mathcal{A}$, то есть два случая:
    - A - конечно, тогда $\overline{\overline{A}} = A$ - тоже конечно, поэтому $\overline{A} \in \mathcal{A}$
    - $\overline{A}$ - конечно, тогда $\overline{A} \in \mathcal{A}$ просто по условию
3. Пусть $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$. Рассмотрим 4 случая:
    - A и B конечны. Тогда $A \cup B$ конечны, значит по условию $A \cup B \in \mathcal{A}$
    - A и $\overline{B}$ конечны. Тогда $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$. Поэтому $\overline{A \cup B}$ конечно, тогда по условию $A \cup B \in \mathcal{A}$
    - $\overline{A}$ и B конечны. Аналогично случаю выше :)

- $\overline{A}$ и $\overline{B}$ конечны. Тогда $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ конечно, поэтому по условию $A \cup B \in \mathcal{A}$

чтд

пункт б)

Чтобы алгебра была сигма алгеброй, она должна быть замкнута относительно счетных объединений. Покажем, что это не выполняется:

Рассмотрим мн-во $A_n = \{ n \} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Каждое из них конечно, поэтому $A_n \in \mathcal{A}$. Посмотрим теперь на их объединение:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$$

$\mathbb{N}$ не конечно, а счетное, а $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ тоже не конечно, оно вообще континуально

Поэтому $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$, получаем противоречие

Задача 3

Имеем $\Omega = [0, 1]$ и нужна мин. сигма алгебра

Уже есть два мн-ва:

- $A = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$
- $B = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Посмотрим на их дополнения:

$$\overline{A} = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$\overline{B} = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

Окей, теперь рассмотрим 4 мн-ва:

1. $L_1 = A \cap B = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
2. $L_2 = A \cap \overline{B} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
3. $L_3 = \overline{A} \cap B = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$
4. $L_4 = \overline{A} \cap \overline{B} = \left[0, \frac{1}{4}\right)$

Заметим, что $L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 = \Omega = [0, 1]$ и что $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ через объединения L_1, L_2, L_3, L_4 выражаются.

Поэтому любое мн-во, состоящее в мин. сигма алгебре Ω является объединением подмн-в из $\{ L_1, L_2, L_3, L_4 \}$, так как если X - некое объединение подмн-в, то $\overline{X}$ - объединение оставшихся подмн-в. А объединение объединений подмн-в то же самое, что и объединение некоторых подмн-в. Пересечение объединений = объединение, в котором элементы входят в оба оба объединения

У нас $|\{ L_1, L_2, L_3, L_4 \}| = 4$, а $2^{\{ L_1, L_2, L_3, L_4 \}} = 2^4 = 16$

Поэтому в мин. сигма алгебре будет 16 элементов

А минимальной она является, потому что если попытаться сделать ее меньше, то пришлось бы убрать какой-то L_i, что привело бы к потере св-ва алгебры

Ответ: 16

Задача 4

пункт а

$$C_1 = \{ x = 0.x_1x_2x_4 \ldots \in [0,1] : x_1 \neq 6 \}$$

Если мы рассматриваем мн-во, где $x_1 = 6$, то оно: $[0.6, 0.7)$

Тогда $C_1 = [0,1] \setminus [0.6, 0.7)$

А $[0.6, 0.7)$ и $[0,1]$ - борелевские мн-ва, то и C_1 - борелевское мн-во

пункт б

$$C_2 = \{ x = 0.x_1x_2x_4 \ldots \in [0,1] : x_2 \neq 6 \}$$

Попробуем построить мн-во, где $x_2 = 6$:

$$L = \bigcup_{i=0}^{9} [0.i6, 0.i7)$$

Делаем аналогично пункту а, но отличие в том, что на месте x_1 может стоять любая цифра, поэтому по итогу получим 10 мн-в

А тк L это объединение борелевских, то оно и само борелевское!

А $C_2 = [0,1] \setminus L$, поэтому оно и борелевское!

пункт с

$$C_3 = \{ x = 0.x_1x_2x_4 \ldots \in [0,1] : x_3 \neq 6 \}$$

Попробуем построить мн-во, где $x_3 = 6$:

Сделаем по аналогии с пунктом а и с б, но тут еще и x_2 может принимать любые значения от 0 до 9:

$$L = \bigcup_{i=0}^{9} \bigcup_{j=0}^{9} [0.ij6, 0.ij7)$$

По тем же причинам, как и в пунктах выше L - борелевское мн-во

А тк $C_3 = [0,1] \setminus L$, то оно тоже борелевское

пункт д

$$C_k = \{\, x = 0.x_1x_2x_4 \ldots \in [0,1] : x_k \neq 6 \,\}$$

По индукции можем вывести, что для произвольного $k \geq 2$ мн-во чисел, когда $x_k = 6$ - это объединение 10^{k-1} интервалов. Ну и потому что у нас до k-го разряда есть $k-1$ разрядов, которые могут принимать любое знач. от 0 до 9 *(очев натуральное)* и поэтому так. А так как это объединение борелевских мн-в, то и оно само борелевское и отсюда же следует, что и C_k борелевское!

пункт е

Мн-во C_* точек отрезка $[0,1]$, десятичная запись которых не оканчивается 6 в периоде

Рассмотрим тогда мн-во E, десятичная запись которых оканчивается 6 в периоде

Понятно тогда, что $[0,1] \setminus E = C_*$. Поэтому нужно как-то показать, что E - борелевское мн-во

Понятно, что $x \in E$ если $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; x_n = 6$, то есть:

$$E = \{\, x \in [0,1] : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \; x_n = 6 \,\}$$

Поэтому для каждого фикс. N рассмотрим мн-во:

$$E_N = \{\, x \in [0,1] : \forall n > N \; x_n = 6 \,\}$$

Тогда очев, что:

$$E = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

Теперь подробнее посмотрим на E_N. Если $x \in E_N$, то первые N разрядов могут быть любыми от 0 до 9, а все остальные обязаны быть 6. Поэтому:

$$E_N = \bigcup_{i_1=0}^{9} \bigcup_{i_2=0}^{9} \ldots \bigcup_{i_N=0}^{9} [0.i_1i_2 \ldots i_N666666\ldots, 0.i_1i_2 \ldots i_N66666\ldots7)$$

А так как E_N - объединение борелевских мн-в, то и оно само борелевское

А так как E - объединение борелевских мн-в, то и оно само борелевское

Ну тогда и $C_* = [0,1] \setminus E$ - борелевское мн-во по аналогии с прошлыми пунктами в общем случае

чтд!

пункт ф

Имеем мн-во C^* точек $[0,1]$, десятичная запись которых имеет конечное число цифр 6

Тогда для каждого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ определим мн-во:

$$A_k = \{ x = 0.x_1x_2x_3\ldots \in [0,1] : \text{в десятичной записи ровно } k \text{ цифр } 6 \}$$

Тогда понятно, что:

$$C^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$$

В пункте д мы рассматривали мн-ва $C_k = \{ x = 0.x_1x_2x_4\ldots \in [0,1] : x_k \neq 6 \}$ и мы доказали, что они борелевские

Тогда введем мн-во:

$$D_n = \{ x \in [0,1] : x_n = 6 \} = [0,1] \setminus C_n$$

Ну и понятно тоже, что D_n борелевское

Пусть $I = \{ i_1, i_2, \dots, i_k \}$ - набор из k различных натуральных чисел

Тогда рассмотрим мн-во:

$$G_I = D_{i_1} \cap D_{i_2} \cap \ldots \cap D_{i_k} \cap \bigcap_{j \notin I} C_j$$

То есть в G_I ровно k цифр 6, которые стоят на позициях из I

И G_I является борелевским, так как это пересечение борелевских мн-в

А мн-во A_k по сути это объединение G_I по всем возможным I размером k.

$$A_k = \bigcup_{\substack{I \subset \mathbb{N} \\ |I| = k}} G_I$$

Выходит, что A_k это борелевское мн-во, так как это счетное объединение борелевских мн-в

А так как $C^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$, то это счетное объединение борелевских мн-в, значит и C^* борелевское мн-во

чтд!

Задача 5

Пусть из отрезка $[0,1]$ извлекли наудачу точку $0.x_1x_2x_3\ldots$, где каждый x_i может принимать значения от 0 до 9

Так как в условии нас просят, чтобы 1 и 9 не были в десятичном разложении, то у нас остается только 8 допустимых значений: $\{\,0,2,3,4,5,6,7,8\,\}$

Поэтому вероятность, что x_i является допустимой равна: $\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

И так как все x_1, x_2 и т.д. должны быть допустимыми, то вероятность этого:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$$

Ответ: 0