

Числовые ряды

Опр: пусть дана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$ называется числовым рядом.

a_n называется общим членом ряда.

$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + \dots + a_N$ называется N -й частичной суммой.

$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$ называется N -м остатком ряда.

Опр: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если существует $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S \in \mathbb{R}$. В этом случае число S называют суммой этого ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется расходящимся, если предел $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ не существует (в том числе бесконечный предел).

Теорема (Критерий Коши):

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m : n > m > N \quad \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

Теорема (Необходимое условие сходимости ряда):

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Опр: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если он сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Утверждение (об абсолютной сходимости ряда): Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Теорема (о группировке членов ряда без изменения порядка):

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и строго возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем $k_1 = 1$. Обозначим

$b_n = a_{k_n} + \dots + a_{k_{n+1}-1}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд, полученный группировкой членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда

1) если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$, т.е. группировка сходящегося ряда не меняет сумму.

2) если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и существует $m : k_{n+1} - k_n < m \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (т.е. группируем не более, чем по m членов), то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = B$.

Знакопостоянные ряды

Опр: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопостоянным, если или $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, или $a_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема (Первый признак сравнения). Пусть $a_n \geq b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) если сходится $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
- 2) если расходится $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то расходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Следствие (Признак Вейерштрасса): если $|a_n| \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема (Второй признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.

Следствие: если $a_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (Признак Коши, Лобачевского-Коши). Пусть $a_n \geq 0$ и $\{a_n\}$ – монотонно (нестрого) убывающая последовательность. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Теорема (Интегральный признак Коши)

Пусть дана функция $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ и $f(x)$ монотонно (нестрого) убывающая. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sim \int_1^{\infty} f(x) dx$.

Теорема (радикальный признак Коши): пусть $a_n \geq 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда

- 1) если $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится,
- 2) если $q > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

Лемма. Пусть $a_n > 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Теорема (признак Даламбера)

Пусть $a_n > 0$, $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Тогда

- 1) если $d > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится
- 2) если $D < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема (Признак Гаусса)

Пусть $a_n > 0$. Если существуют $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ такие, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, т.е. при $\alpha > 1$ сходится и при $\alpha \leq 1$ расходится.

Знакопеременные ряды

Лемма (Преобразование Абеля)

Пусть даны две последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$. Тогда $\forall n, m \in \mathbb{N}: n > m$ выполнено

$$\sum_{k=m+1}^n (a_k - a_{k-1})b_k = a_n b_n - a_m b_{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n-1} a_k (b_{k+1} - b_k)$$

Теорема (Признак Дирихле) Пусть

- 1) существует $M > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq M$ (т.е. все частичные суммы ограничены сверху одной константой)
- 2) последовательность $\{b_n\}$ (нестрого) монотонная (возрастающая или убывающая)
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Теорема (Признак Абеля) Пусть

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
- 2) последовательность $\{b_n\}$ (нестрого) монотонная (возрастающая или убывающая)
- 3) $\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Теорема (Признак Лейбница)

Пусть $b_n \geq 0$, $\{b_n\}$ – монотонно (нестрого) убывающая последовательность и $b_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ сходится и верна следующая оценка на остаток этого ряда: $|r_n| \leq b_{n+1}$.