Матрица Якоби и Якобиан

Дано отображение:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Матрица Якоби $J_{\mathbf{F}}$ данного отображения определяется как:

$$J_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Что такое Якобиан?

Якобиан — это определитель матрицы Якоби когда матрица Якоби квадратная, то есть $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Определение

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

Для $\mathbf{F}$ **Якобиан** определяется как:

$$J = \det(J_{\mathbf{F}}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Принято обозначать так:

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

Применение в кратных интегралах

При замене переменных в кратных интегралах, якобиан появляется как множитель, учитывающий изменение объема или площади, по которой мы интегрировали!

Для двойного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Для тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$

Чтобы лучше понять интуицию, рассмотрим двумерный случай!

Двумерный случай

Рассмотрим отображение из плоскости (u, v) в плоскость (x, y):

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Якобиан — определитель этой матрицы:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Геометрически поймем

Рассмотрим маленький прямоугольник в плоскости (u, v) со сторонами Δu и Δv. Его площадь: $\Delta A_{uv} = \Delta u \cdot \Delta v$.

При отображении в плоскость (x, y) этот прямоугольник превращается в параллелограмм. Векторы сторон:

- $\vec{a} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right)$
- $\vec{b} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)$

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения:

$$\Delta A_{xy} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| \Delta u \Delta v = |J| \Delta A_{uv}$$

То есть мы увидели что, **якобиан показывает коэффициент изменения площади** при отображении.

Обобщим на n-мерный случай :)

Рассмотрим $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$

Линейное приближение:

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{F}(\mathbf{u}_0) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$$

где $J_{\mathbf{F}}$ — матрица Якоби.

Рассмотрим n-мерный параллелепипед в \$U\$-пространстве с ребрами:

$$\vec{e}_1 = (\Delta u_1, 0, ..., 0), \quad \vec{e}_2 = (0, \Delta u_2, ..., 0), \quad ..., \quad \vec{e}_n = (0, 0, ..., \Delta u_n)$$

Его объем: $\Delta V_u = \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$

При отображении векторы преобразуются по правилу:

$$\vec{v}_k = J_{\mathbf{F}} \cdot \vec{e}_k$$

Это означает, что столбцы матрицы, задающей преобразованный параллелепипед, — это в точности столбцы матрицы Якоби, умноженные на соответствующие Δu_k.

Объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$, равен модулю определителя матрицы, составленной из этих векторов как столбцов:

$$\Delta V_x = |\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n)| = |\det(J_{\mathbf{F}})| \cdot \Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n$$

Но $\det(J_{\mathbf{F}})$ — это якобиан J, а $\Delta u_1 \Delta u_2 \cdots \Delta u_n = \Delta V_u$, поэтому:

$$\Delta V_x = |J| \cdot \Delta V_u$$

Полярные координаты

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Матрица Якоби:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Якобиан:

$$J = \det(J) = \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta) \cdot \sin\theta = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Таким образом, при переходе к полярным координатам:

$$dxdy = |J|drd\theta = rdrd\theta$$

Цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

где:

- $\rho \geq 0$ — расстояние до точки
- $0 \leq \varphi < 2\pi$ — угол в плоскости XY
- $z \in \mathbb{R}$ — высота

Матрица Якоби

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан

Вычислим определитель:

$$\det(J) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Тогда:

$$dxdydz = |J| d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

Сферические координаты

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

где:

- $r \geq 0$ — расстояние до точки
- $0 \leq \theta \leq \pi$ — угол от оси Z
- $0 \leq \varphi < 2\pi$ — угол в плоскости XY

Матрица Якоби

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Якобиан

$$\det(J) = r^2\sin\theta$$

Ну сами пересчитайте если не верите :)

$$dxdydz = |J| drd\theta d\varphi = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$