Домашняя работа

Задание 1

пункт а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$$

У нас есть ф-ия $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$. Попробуем найти ее максимум. Для этого вычислим производную:

Исходная функция

$$\left(\frac{x}{n^4\,x^2+1}\right)'_x$$

Вычисленная производная

$$-\frac{n^4\,x^2-1}{n^8\,x^4+2\,n^4\,x^2+1}$$

Приравняем ее к нулю:

$$-n^4x^2+1=0 \quad n^4x^2=1 \quad x=\pm\frac{1}{n^2}$$

Хорошо, вычислим значения:

$$f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2n^2}$$

$$f_n\left(-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)=-\frac{1}{2n^2}$$

Теперь посмотрим повнимательнее на $f_n'(x)$. Знаменатель там положительный всегда. Поэтому $f_n'(x) > 0$, когда $n^4x^2 < 1$, то есть когда $|x| < \frac{1}{n^2}$. Соответственно $f_n' < 0$ при

$|x| > \frac{1}{n^2}$

Из этого делаем вывод, что т. $\frac{1}{n^2}$ - точка максимума

Также важно отметить будет, что $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ и что $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = 0$. Поэтому:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

А ряд $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому и f_n равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по Вейерштрассу

Ответ: да

пункт б

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

Имеем:

$$f_n = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$$

Рассмотрим:

$$|f_n| = \left| \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \right| = \frac{|x^n|}{1 + x^{2n}}$$

Так как у нас $D = (-1, 1)$, то разобьем на два случая:

1. $x > 0$:

   $$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - x^{2n})}{(1 + x^2n)^2}$$

   Тут у нас знаменатель всегда положительный. nx^{n-1} тоже всегда будет положительным при $n \in \mathbb{N}$ и $x \in (0, 1)$. А так как при таких n и x у нас $0 < x^{2n} < 1$, то выходит, что $1 - x^{2n} > 0 \Rightarrow f_n'(x) > 0$. То есть f_n у нас возрастает. Поэтому:

   $$\sup_{x \in (0,1)} f_n(x) = \lim_{x \to 1-} f_n(x) = \frac{1}{2} \neq 0$$

   Поэтому равномерной сходимости уже не будет!

Ответ: нет

пункт с

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(x)\cos(nx)}{\ln(n + x^2)}$$

Пусть:

$$a_n(x) = \frac{1}{\ln(n + x^2)} \quad b_n(x) = \sin(x)\cos(nx)$$

Посмотрим на част. суммы b_n:

$$S_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \sin(x)\cos(kx) = \sin x \sum_{k=2}^{\infty} \cos(kx)$$

Теперь пользуемся известной нам ф-ой и получаем:

$$S_n(x) = \sin(x)\left(\frac{\sin(0.5nx)\cos(0.5(n+1)x)}{\sin(0.5x)} - \cos(x)\right)$$

Теперь оценим:

$$|S_n(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{\sin(0.5x)}\right| + 1 \leq 10$$

Теперь перейдем к a_n. При каждом фикс. x у нас a_n монотонно убывает, ибо $\ln(n + x^2)$ монотонно возрастает. Также она равномерно сходится:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n + x^2)} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{\ln(n + x^2)} = \frac{1}{\ln n}$$

Поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

Поэтому по Дирихле наш ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$

Ответ: да

пункт д

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$$

Пусть:

$$a_n(x) = (-1)^n \quad b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$$

Сначала покажу ограниченность част. сумм a_n:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

То есть он у нас выглядит как:

$$(-1) + 1 + (-1) + 1 \dots$$

Поэтому, если n чет, то $S_n = 0$, если нечет, то $S_n = -1$

Поэтому можно сказать:

$$|S_n(x)| \le 100$$

Перейдем к $b_n(x)$

У нас $b_n(x)$ для каждого фикс. x из D монотонно убывает по n, так как $\sqrt{n}$ монотонно возрастает :)

Также:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}} = 0$$

Поэтому:

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \left| \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |b_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$\Rightarrow$ она равномерно сходится

По Дирихле ряд равномерно сходится на D!

Ответ: да

пункт е

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (x-n)^2}$$

Если искать $\sup_{x\in D} f_n(x)$, то понятно, что нам нужно будет минимизировать знаменатель, и $1 + (x-n)^2$ минимален только при $x = n$, ибо $(x-n)^2 \ge 0$ а зануляется он только при $x = n$

Но тогда мы получим, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1 \ne 0$$

Поэтому равномерной сходимости нет

Ответ: нет

Задание 2

пункт а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(-2)^{n+1}}$$

Рассмотрим сначала ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Продиф-м:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Можем домножить на x:

$$x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Продиф-м снова:

Исходная функция

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'_x$$

Вычисленная производная

$$\frac{2\ (1-x)\ x + (1-x)^2}{(1-x)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

Домножим заново на x :)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

И заметим, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

То есть:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

Домножим на иксик заново:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n+1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

А в нашем изначальном ряде у нас $x = -\frac{1}{2}$. Подставим!

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{27}{8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

Ответ: $\frac{4}{27}$

пункт б

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

До этого в прошлом пункте я получил:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad |x| < 1$$

В нашем случае $x = \frac{1}{3}$! Подставим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{8}{27}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{27}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$