Листок 5

Физические приложения интегралов

Масса тела

Пусть некоторое тело, занимающее объем $D \subset \mathbb{R}^n \quad (n = 1, 2, 3)$, имеет плотность $\rho(x_1, ...x_n)$, тогда масса тела m может быть рассчитана по формуле:

$$m = \iint\limits_D \rho(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

Центр масс тела

Пусть некоторое тело, занимающее объем $D \subset \mathbb{R}^n \quad (n = 1, 2, 3)$, имеет плотность $\rho(x_1, ...x_n)$ и массу m, тогда координаты центра масс могут быть рассчитана по формулам:

$$x_i^c = \frac{1}{m} \iint\limits_D x_i \rho(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

Площадь поверхности

Пусть поверхность $z = f(x, y)$ задана на области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $f'_x, f'_y \in C(D)$. Тогда площадь S поверхности может быть рассчитана по формуле:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{\left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2 + 1} \quad dxdy$$

1. Пусть плоская пластина имеет форму части диска радиуса a с центром в начале координат, лежащего в первой кординатной четверти. Найдите центр масс этой пластины.

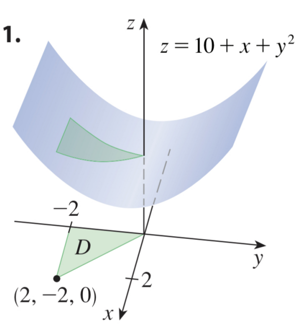
2. Найдите массу и центр масс тела, ограниченного областью

$$D = \{(x, y, z) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a\}$$

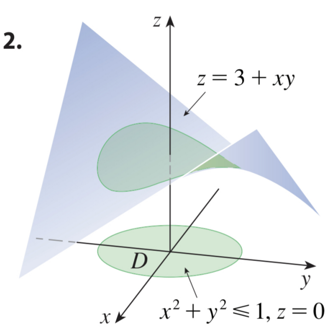
и с функцией плотности $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

3. Найдите площади фигур изображенных на рисунке 1 и 2:

1.

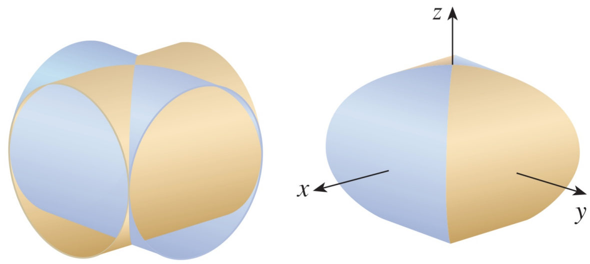


2.



4. Найдите площадь поверхности

$$z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$



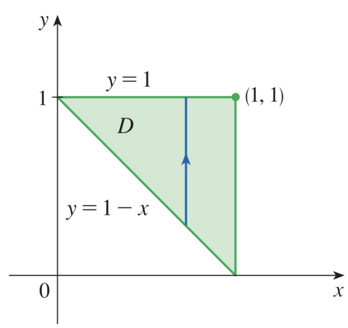
5. На рисунке показана поверхность, образованная в результате пересечения двух циллиндров:

$$y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \qquad x^2 + z^2 = 1$$

Найдите площадь этой поверхности.

Домашнее задание

1. Функция плотности пластины $\rho(x, y) = xy$ определена на области D (на рисунке), задающей форму и расположение данной пластины. Найдие массу и координаты центра масс этой пластины.



2. Найдите массу тела, ограниченного параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 4$ с функцией плотности $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.

3. Найдите площадь параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, лежащую выше плоскости $z = -2$.

4. Найдите площадь циллиндра $x^2 + z^2 = 4$, лежащую выше квадрата с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$, $D(1, 1)$.

Дополнительные задачи

1. Обозначим через $[[x]]$ наибольшее целое число по x. Вычислите интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{1\leq x\leq 3,\\ 2\leq y\leq 5}} [[x+y]]dxdy$$

2. Вычислите интеграл:

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\max\{x^2,y^2\}}dydx$$

3. Докажите, что

$$\int_0^2 \int_0^x 2e^{x^2-y^2}dydx = \int_0^2 \int_y^{4-y} e^{xy}dxdy$$

4. Найдите область D, для которой тройной интеграл примет максимальное значение:

$$\iiint\limits_D \left(1-x^2-2y^2-3z^2\right)dxdydz$$