Задачи для подготовки

Задача 1

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 3}} x^3 y \, dxdy$$

Необходимо вычислить данный интеграл как предел интегральной суммы

Разобьем отрезок $[0, 4]$ на n равных частей. Тогда получим, что длина одной части будет равна: $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$

Также разобьем отрезок $[0, 3]$ на n равных частей, длина одной части будет: $\frac{3}{n}$

Тогда вся область разобьется на n^2 прямоугольников! Площадь любого будет равна: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n} = \frac{12}{n^2}$

Тогда любой прямоугольник в разбиении описывается так:

$$\left[\frac{(i-1)4}{n}, \frac{4i}{n}\right] \times \left[\frac{(j-1)3}{n}, \frac{3j}{n}\right]$$

где $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Так как в качестве ξ_i мы выбираем верхние правые ячейки, то в нашем случае это будет соответствовать точкам:

$$\xi_{ij} = \left(\frac{4i}{n}, \frac{3j}{n}\right)$$

Перейдем к вычислению интеграла!

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{12}{n^2} \cdot \frac{64i^3}{n^3} \cdot \frac{3j}{n} = \frac{2304}{n^6} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^3 j =$$

$$= \frac{1152(n+1)}{n^5} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{288(n+1)^3}{n^3}$$

Перейдем к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{288(n+1)^3}{n^3} = 288$$

Ответ: 288

Задача 2

Имеем такое задание:

2. Вычислите интеграл $\iint\limits_D y \quad dxdy$

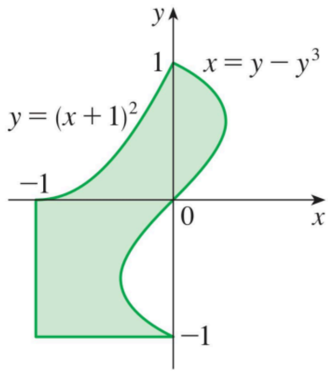


Фото вставил, чтобы была видна область интегрирования

Видим, что $y \in [-1, 1]$. Разобьем данную область на две.

В первой $y \in [-1, 0]$. Справа x ограничен кривой $x = y - y^3$, а слева прямой $x = -1$

Поэтому для фикс. $y : x \in [-1, y - y^3]$

Во второй $y \in [0, 1]$. Справа x также ограничен кривой $x = y - y^3$

Слева же имеем $y = (x+1)^2$. Так как у нас $y \geq 0$, то $x = \sqrt{y} - 1$

Поэтому слева x уже ограничен кривой $x = \sqrt{y} - 1$

Поэтому для фикс. $y : x \in [\sqrt{y} - 1, y - y^3]$

Так как мы получили по сути пределы интегрирования, то посчитаем сам интеграл:

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{y-y^3} y dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} y dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (y^2 - y^4 + y) dy + \int_{0}^{1} (y^2 - y^4 - y\sqrt{y} + y) dy =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{2}{15}$$

Ответ: $-\frac{2}{15}$

Задача 3

Вычислить интеграл:

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x dx \int_{x}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} dy$$

Заметим, что вычисление интеграла $\int \frac{\operatorname{arctg} y}{y} dy$ может быть достаточно трудоеким. А точнее он вообще не выражается через элементарные функции. Поэтому попробуем сменить пределы интегрирования

Для каждого фикс. $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ имеем $y \in [x, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Из $y \geq x$ понимаем, что $x \leq y$

Поэтому получим пределы интегрирования: $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 \leq x \leq y$

Получим:

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} dy \int_0^y x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} y \operatorname{arctg} y \, dy$$

Вычислим $J = \int y \operatorname{arctg} y \, dy$

Используем интегрирование по частям:

Пусть $u = \operatorname{arctg} y$, тогда $du = \frac{dy}{y^2+1}$, $dv = ydy$, тогда $v = \frac{y^2}{2}$

$$J = \frac{y^2 \operatorname{arctg} y}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{y^2}{y^2+1} dy = \frac{y^2 \operatorname{arctg} y}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{y^2+1}\right) dy =$$

$$= \frac{y^2 \operatorname{arctg} y}{2} - \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y (y^2+1) - \frac{1}{2} y + C$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Поэтому:

$$I = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{36} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Задача 4

$$(x^2 + y^2 - y)^2 = x^2 + y^2$$

Введем полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

где $r \geq 0$ и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Тогда:

$$(r^2 - r \sin \varphi)^2 = r^2$$

Избавимся от квадратов, но это породит два случая:

- $r^2 - r\sin\varphi = r \leftrightarrow r(r - \sin\varphi - 1) = 0$
- $r^2 - r\sin\varphi = -r \leftrightarrow r(r - \sin\varphi + 1) = 0$

В первом случае получим, что или $r = 0$, или $r = \sin\varphi + 1$. Так как $r \geq 0$ это наложит ограничение: $\sin\varphi \geq -1$, что выполняется $\forall\varphi \in [0, 2\pi]$

Во втором случае: или $r = 0$, или $r = \sin\varphi - 1$. Так как $r \geq 0$ это наложит ограничение: $\sin\varphi \geq 1$, что выполняется только при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Таким образом понимаем, что кривая описывается так:

$$r = \sin\varphi + 1$$

Найдем площадь фигуры:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sin\varphi+1} rdr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + 2\sin\varphi + 1)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi + \pi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi + \pi =$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

Задача 5

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$$

Введем циллиндрические координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Рассмотрим область интегрирования. $-1 \leq y \leq 0 \Rightarrow -1 \leq r\sin\varphi \leq 0$. Из $r\sin\varphi \leq 0$ следует, что $\sin\varphi \leq 0 \Rightarrow \varphi \in [\pi, 2\pi)$. А из $r\sin\varphi \geq -1$ следует, что $r \in [0, 1]$

Также из второго имеем $r\cos\varphi \leq 0$. Поэтому $\varphi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Получим:

$$I = \int_0^1 rdr \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 dz$$

Посчитаем сначала внутренний:

$$\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z^2 dz = \frac{(2-r^2)^{\frac{3}{2}} - r^3}{3}$$

Тогда:

$$I = \frac{\pi}{6}\int_0^1 r(2-r^2)^{\frac{3}{2}} dr - \frac{\pi}{6}\int_0^1 r^4 dr$$

По очереди вычислим.

$$J = \int_0^1 r(2-r^2)^{\frac{3}{2}} dr$$

Пусть $u = 2 - r^2$, тогда $du = -2r$, тогда имеем:

$$J = -\frac{1}{2}\int_2^1 u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{5}\cdot(4\sqrt{2}-1)$$

К следующему:

$$\int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{5}$$

Тогда:

$$I = \frac{\pi}{30}(4\sqrt{2}-2) = \frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$$

Ответ: $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$

Задача 6

Необходимо найти площадь поверхности:

$$2y + 4z - x^2 = 5$$

Выразим отсюда z:

$$z = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$$

Вспомним формулу площади поверхности:

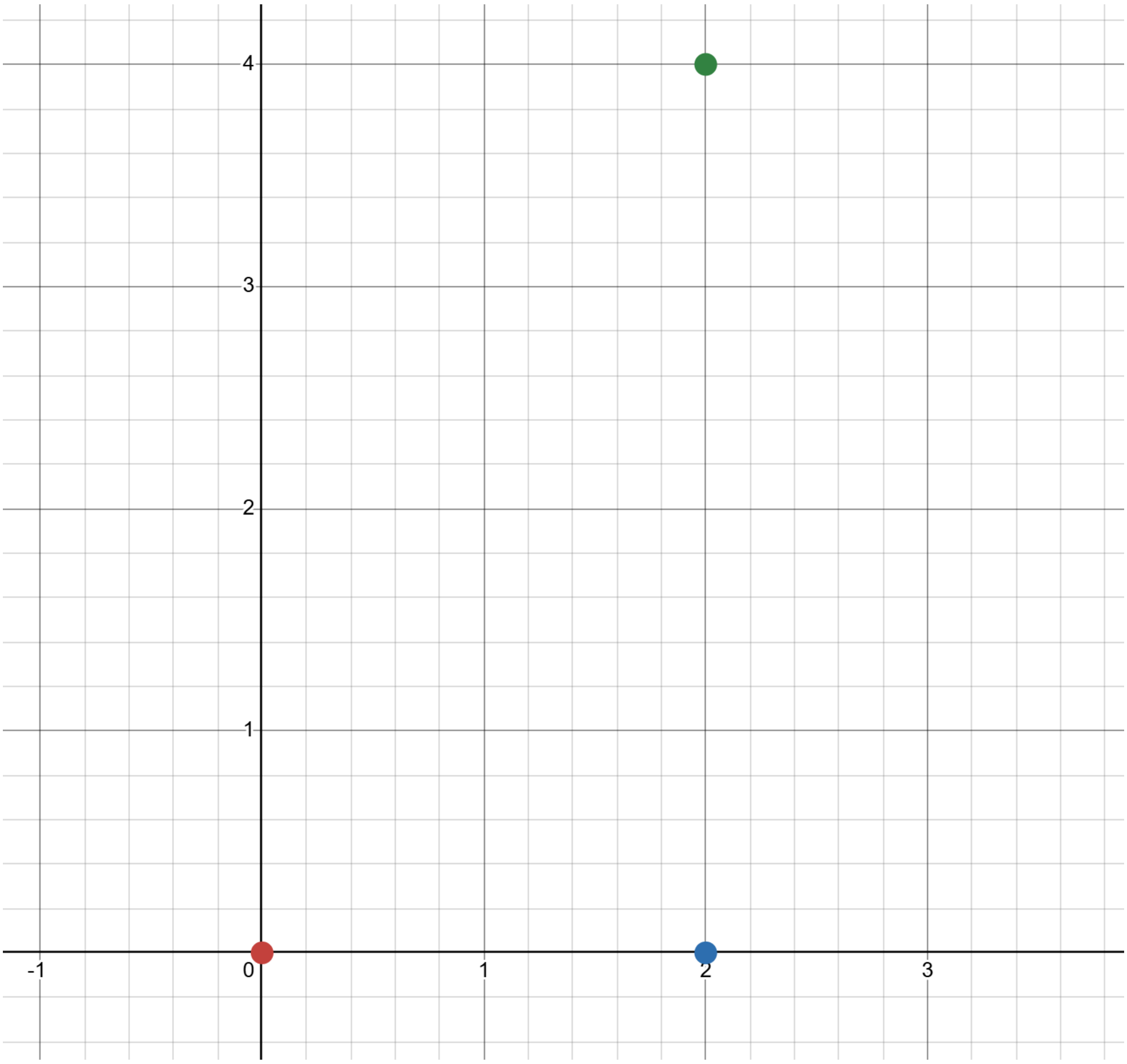
$$S = \iint\limits_D \sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2 + 1}\, dxdy$$

Найдем тогда частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}$$

Теперь проанализируем область интегрирования D. Это треугольник с вершинами $(0,0),\ (2,0)$ и $(2,4)$.

Посмотрим на его график:



Несложно понять, что прямая, проходящая через точки $(0, 0)$ и $(2, 4)$ это $y = 2x$

Поэтому для каждого фикс. x из $[0, 1]$ y принимает значения: $0 \leq y \leq 2x$

Прекрасно! Теперь найдем тогда площадь!

$$S = \int_0^2 dx \int_0^{2x} \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}}\, dy =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2} 2x \sqrt{x^2 + 5}\, dx = \int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5}\, dx$$

Пусть $u = x^2 + 5$, тогда $du = 2x$, получим:

$$S = \frac{1}{2} \int_5^9 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}(9\sqrt{9} - 5\sqrt{5})$$

Ответ: $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$