Листок 1

Двойной интеграл Римана, сведение к повторному

(во всех задачах этого листка функция f предполагается непрерывной)

1. Считая, что кратный интеграл существует, вычислите его, рассматривая как предел интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата $D = [0,1] \times [0,1]$ на ячейки – квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i **нижние правые** вершины ячеек:
$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} xy \quad dxdy$$

2. Вычислите двойной интеграл
$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx$$

3. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y) dxdy$, где D-компакт, край которого задан уравнениями:
$$y^2 = 2x, \quad x + y = 4, \quad x + y = 12$$

4. Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y) dxdy$ к повторному в нескольких различных порядках:

   a) D - замкнутый треугольник с вершинами $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$

   b) D - замкнутый треугольник с вершинами $(0,0),\ (-2,1),\ (1,2)$

5. Вычислить интеграл:
$$a)\ \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx, \qquad b)\ \int\limits_0^{\pi} x dx \int\limits_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy, \qquad c)\ \iint\limits_{|x|+|y| \le 1} x^2 y^2 \, dxdy, \qquad d)\ \iint\limits_{|x|+|y| \le 1} xy^3 \, dxdy$$

6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

   a) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_{\frac{x^2}{6}-1}^{x-1} f(x,y) dy$ *b)* $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2y-y^2} f(x,y) dx$

   c) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y) dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y) dx$ *d)* $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{x}} f(x,y) dy$

7. Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y) dxdy$ к повторному в нескольких различных порядках:

   a) $D = \{(x,y) \mid x, y \in [0,1],\ x^2 + y^2 \ge 1\}$

   b) $D = \{(x,y) \mid 0 < xy \le 1, x \ge 0, y \ge 0, y - 2x \le 0, 2y - x \ge 0\}$

   c) $D = \{(x,y) \mid y^2 \le 2x + 4,\ y^2 \ge 4x + 4\}$

8. Пусть $f(x) = \hat{k}$, где $\hat{k} = \min\{m \in \mathbb{Z} | m \ge x\}$. Вычислите интеграл:
$$\iint\limits_{\substack{1 \le x \le 4, \\ 3 \le y \le 5}} f(x+y) dxdy$$

Домашнее задание

1. Вычислите интеграл, рассматривая его как предел интегральной суммы при сеточном разбиении прямоугольника $D = [0,2] \times [0,3]$ на ячейки – квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i **верхние правые** вершины ячеек:

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 3}} xy^3 \quad dxdy$$

2. Вычислите двойной интеграл

$$\int_1^2 \int_0^3 xy^3 \, dy \, dx$$

3. Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному во всех возможных порядках, где $D = \{(x,y) \mid x \in [0,1/2], y \in [0,1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 1\}$

4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

5. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_x^2 \ln{(1+y^2)} dy$$

6. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2 y \, dxdy$, где $D-$замкнутый треугольник с вершинами $(0,0),\ (2,1),\ (1,-2)$.

7. Пусть $f(x) = \hat{k}$, где $\hat{k} = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \le x\}$. Вычислите интеграл:

$$\iint\limits_{\substack{1\le x\le 3,\\ 2\le y\le 5}} f(x+y)dxdy$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что мера n-мерного промежутка

   a) n-однородна: $|I_{\lambda a, \lambda b}| = \lambda^n |I_{a,b}|$

   b) аддитивна: $|\bigsqcup\limits_{i=1}^{K} I_i| = \sum\limits_{i=1}^{K} |I_i|$

   c) удовлетворяет свойству: если $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{K} I_i$, то $|I| \le \sum\limits_{i=1}^{K} |I_i|$

2. Может ли множество лебеговой меры нуль содержать внутренние точки?

3. Если множество не содержит внутренних точек, обязательно ли оно имеет лебегову меру нуль?

4. Постройте такое множество меры нуль, замыкание которого совпадает со всем пространством $\mathbb{R}$.