

Домашнее задание 2

1. Пусть \mathcal{R} — система подмножеств множества Ω , которая удовлетворяет условиям
(r1) $\Omega \in \mathcal{R}$,

(r2) если $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, то $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}$,

(r3) если $A_1, A_2 \in \mathcal{R}$, то $A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{R}$.

Докажите, что в этом случае \mathcal{R} является алгеброй.

2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$. Рассмотрим систему подмножеств \mathcal{A} множества Ω , состоящую из всех множеств $A \subseteq \Omega$, таких, что либо само множество A является конечным, либо его дополнение A^c является конечным.

(a) Докажите, что \mathcal{A} является алгеброй.

(b) Докажите, что \mathcal{A} не является σ -алгеброй.

3. Пусть $\Omega = [0; 1]$. Опишите минимальную σ -алгебру, содержащую множества $[1/4; 3/4]$ и $[1/2; 1]$. Сколько она содержит элементов?

4. Докажите, что следующие подмножества числовой прямой являются борелевскими:

(a) $C_1 := \{x = 0.x_1x_2x_3 \dots \in [0; 1] : x_1 \neq 6\}$ — множество точек отрезка $[0; 1]$, в разряде десятых десятичного разложения которых отсутствует цифра «6»;

(b) $C_2 := \{x = 0.x_1x_2x_3 \dots \in [0; 1] : x_2 \neq 6\}$ — множество точек отрезка $[0; 1]$, в разряде сотых десятичного разложения которых отсутствует цифра «6»;

(c) $C_3 := \{x = 0.x_1x_2x_3 \dots \in [0; 1] : x_3 \neq 6\}$ — множество точек отрезка $[0; 1]$, в разряде тысячных десятичного разложения которых отсутствует цифра «6»;

(d) $C_k := \{x = 0.x_1x_2x_3 \dots \in [0; 1] : x_k \neq 6\}$ — множество точек отрезка $[0; 1]$, в k -ом ($k \geq 2$) разряде десятичного разложения которых отсутствует цифра «6»;

(e) множество C_* точек отрезка $[0; 1]$, десятичное разложение которых не оканчивается цифрой «6» в периоде;

множество C^* точек отрезка $[0; 1]$, в десятичном разложении которых встречается цифра «6» конечное число раз.

5. Пусть все числа из отрезка $[0; 1]$ представлены в виде бесконечных десятичных дробей. Из данного отрезка наудачу извлекается одна точка. Найдите вероятность того, что десятичное разложение выбранной точки не содержит цифры «1» и «9».