Домашняя работа

задача 1

Нам дан в общем треугольник с вершинами $(0,1),(1,1),(1,0)$. Пусть $x \in [0,1]$, тогда понимаем, что для фикс. x, y идет от $y = 1 - x$ до $y = 1$. Выходит, что нашу область можно описать как:

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 1 - x \le y \le 1\,\}$$

Как написано выше в листочке, масса тела вычисляется как

$$m = \iint_D \rho(x,y) dxdy$$

Посчитаем в общем:

$$\int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dydx = \int_0^1 x \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \cdot (1 - 2x + x^2)\right) dx =$$
$$= \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$$

это мы нашли массу

Теперь надо найти корды центра масс, то бишь (x_c, y_c)

Они ищутся согласно формулам из домашки вот так:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x \cdot \rho(x,y) dxdy$$
$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D y \cdot \rho(x,y) dxdy$$

Ну короче найдем их:

$$\frac{5}{24}x_c = \int_0^1 x^2 dx \int_{1-x}^1 ydy = \int_0^1 x^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot (1 - 2x + x^2)\right) dx =$$
$$= \int_0^1 x^3 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$
$$\Longrightarrow x_c = \frac{3}{20} \cdot \frac{24}{5} = \frac{18}{25}$$

Теперь игрек:

$$\frac{5}{24}y_c = \int_0^1 xdx \int_{1-x}^1 y^2 dy = \int_0^1 x \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_{1-x}^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x \cdot (1-x)^3\right) dx =$$

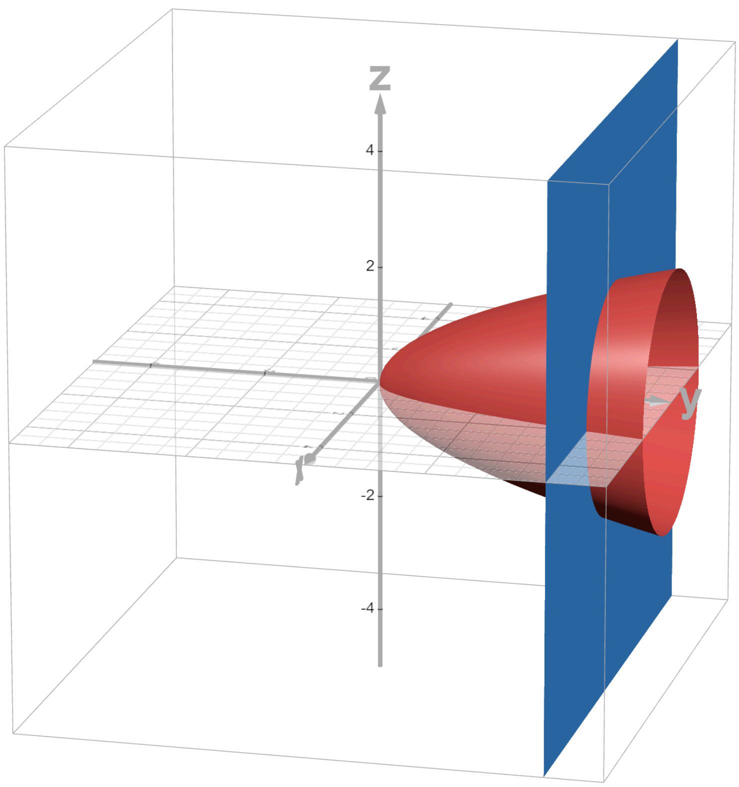
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^4dx - \int_0^1 x^3dx + \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$$

$$\Longrightarrow y_c = \frac{3}{20}\cdot\frac{24}{5} = \frac{18}{25}$$

Ответ: $\frac{5}{24}$; $\left(\frac{18}{25}, \frac{18}{25}\right)$

задача 2

Взглянем сначала на график, чтобы полюбоваться и понять, как выглядит область D:



$y = x^2 + z^2$ - красненькое, а $y = 4$ - синенькое

Понимаем, что D ограничен снизу параболоидом, что можно было и так понять, ведь $x^2 + z^2 \leq 0$, а сверху плоскостью $y = 4$. Ну тогда нашу область D можно описать так:

$$D = \{\, (x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq y \leq 4 \,\}$$

Тут мы видим симметрию относительно оси Oy, поэтому будем использовать цилиндр. корды, но с осью Oy:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ y = y \end{cases}$$

Понятно, что $r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ y \in \mathbb{R}$

Посчитаем Якобиан:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cdot(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r$$

Ну в целом и так понятно было, что Якобиан будет равен r, ибо это те же самые цилиндр. корды

Окей, тогда после замены наши огр. примут вид:

$$r^2 \le y \le 4$$

Откуда следует, что $r^2 \le 4$, а значит $r \in [0,2]$

Ну и тогда наша новая область интегр. будет иметь вид:

$$D' = \{\, (r,\varphi,y) \mid 0 \le r \le 2,\ \varphi \in [0,2\pi],\ r^2 \le y \le 4 \,\}$$

А ф-ия плотности примет вид:

$$\sqrt{x^2+z^2}=\sqrt{r^2}=r$$

Ну теперь уже найдем массу по формуле которую я указывал в первом задании:

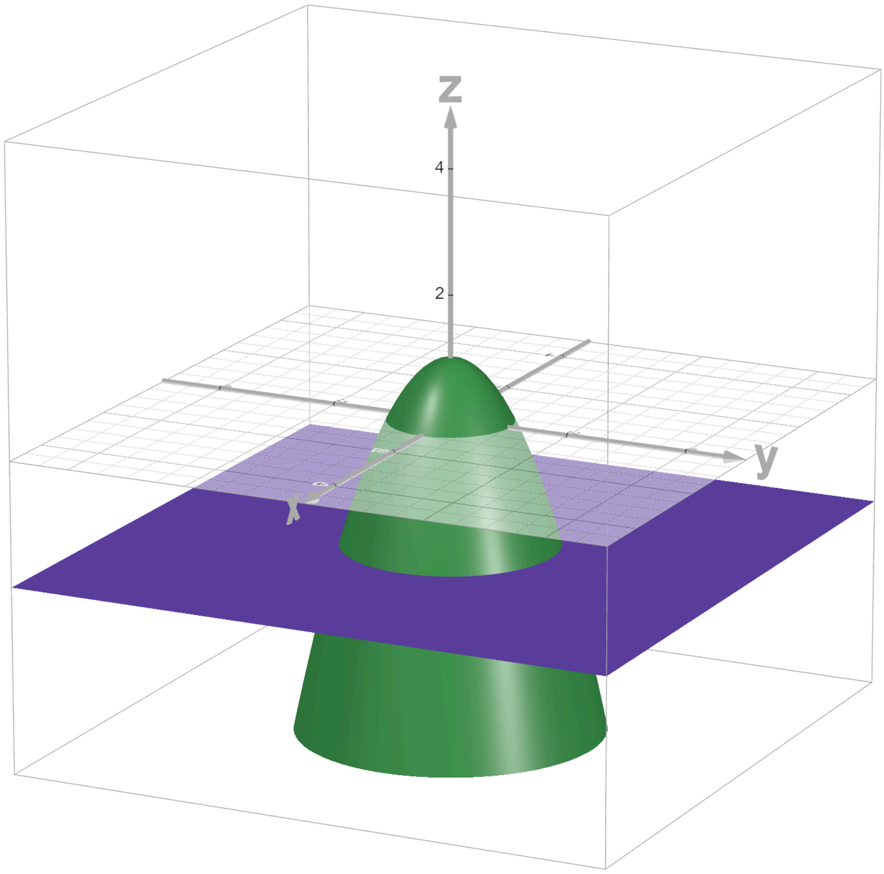
$$\int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r^2}^4 dy = \int_0^2 2\pi r^2\cdot(4-r^2)dr =$$

$$= 8\pi\int_0^2 r^2 dr - 2\pi\int_0^2 r^4 dr = \frac{64\pi}{3}-\frac{64\pi}{5}=\frac{128\pi}{15}$$

Ответ: $\frac{128\pi}{15}$

задача 3

Ну сначала опять налюбуемся на график, тщательно построенный в десмосе



Ф-ла площади поверхности из файлика с дз вот такая:

$$S = \iint_D \sqrt{(f_x'(x,y))^2 + (f_y'(x,y))^2 + 1}\, dxdy$$

В нашем случае $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, поэтому $f_x'(x,y) = -2x$ и $f_y'(x,y) = -2y$

Поэтому:

$$S = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy$$

Океюшки, из условия поверхность лежит выше плоскости $z = -2$, поэтому $1 - x^2 - y^2 \geq -2 \iff x^2 + y^2 \leq 3$

Поэтому наша область:

$$D = \{\, (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 3 \,\}$$

Перейдем к полярным кордам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

понятно, что $r \geq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]$

Якобиан: $dxdy = rdrd\varphi$

Из огр.: $r^2 \leq 3 \iff r \in [0, \sqrt{3}]$

Ну и $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{1 + 4r^2}$

В общем:

$$S = \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\, d\varphi = \pi \int_0^{\sqrt{3}} 2r\sqrt{1+4r^2}\, dr$$

Пусть $u = 4r^2$, тогда $du = 8rdr$, тогда:

$$S = \frac{\pi}{4} \int_0^{12} \sqrt{1+u}\, du$$

Пусть $t = 1 + u$, тогда $dt = du$, тогда:

$$S = \frac{\pi}{4} \int_1^{13} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2\pi}{12} \cdot \left(13^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{6} \left(13\sqrt{13} - 1\right)$$

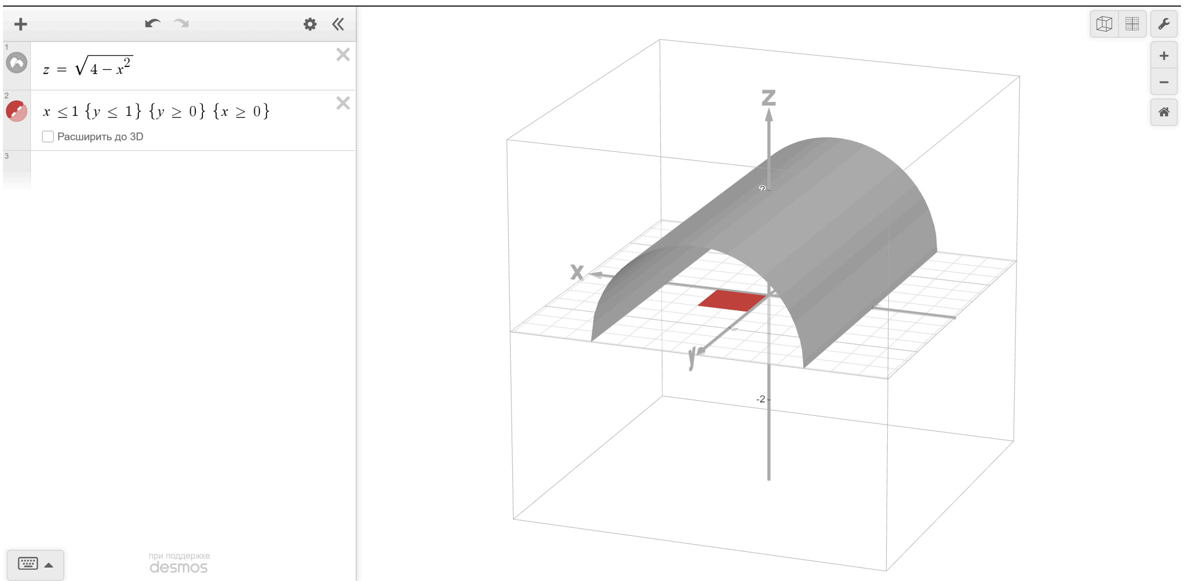
Ответ: $\frac{\pi}{6} \left(13\sqrt{13} - 1\right)$

задача 4

Поверхность цилиндра задана так: $x^2 + z^2 = 4$

Нам нужно найти ее площадь, которая лежит выше квадратика, он описывается так: $D = \{\, (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \,\}$

тк выше квадрата, то $z \geq 0$, поэтому из $x^2 + z^2 = 4$ выражаем z и получаем: $z = \sqrt{4 - x^2}$



Ну короче вот полюбуйтесь на график, красивый. красное - наша область интегрирования. Нижнюю часть цилиндра я срубил ибо она нафиг не нужна.

Короче теперь надо площадь найти поверхности, она ищется так:

$$S = \iint_D \sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2 + 1}\, dxdy$$

Посчитаем производные в нашем случае: $f'_x(x,y) = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, а $f'_y(x,y) = 0$

Поэтому:

$$S = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}+1}\,dxdy = \iint_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dxdy = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx \int_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left[2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$