Домашняя работа

Задача 1

Вспомним определения из дискретной математики:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \land x \notin B \,\}$$

$$A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = \{\, x \mid x \in A \land x \notin B \lor x \in B \land x \notin A \,\}$$

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \land x \in B \,\}$$

Окей, теперь докажем:

$$A \setminus B = (A\Delta B) \cap A$$

Пусть $x \in A \setminus B$, тогда $x \in A \land x \notin B$. По опред. симм. разности: $A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$, тогда т.к. $x \in A \setminus B$, то $x \in A\Delta B$!

Выходит, что наш x лежит и в A и в $A\Delta B$, что значит, что $x \in A \cap (A\Delta B)$.

Доказали, что $A \setminus B \subseteq A \cap (A\Delta B)$!

Пусть теперь $x \in (A\Delta B) \cap A$, что значит, что $x \in A$ и $x \in A\Delta B$. По опред. симм. разности: $A\Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$.

Если наш x лежит в $B \setminus A$, то это значит, что $x \in B \land x \notin A$, но так как $x \in A$, то такого не может быть.

Выходит, остается только, что $x \in A \setminus B$, что значит $x \in A \land x \notin B$, что согласуется с условием $x \in A$

Следовательно, $(A\Delta B) \cap A \subseteq A \setminus B$

чтд

Задача 2

Докажем, что $A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$

Пусть $x \in A \cup B$, тогда $x \in A \lor x \in B$. Рассмотрим два случая:

Если $x \in A \cap B$, тогда $x \in A \land x \in B$. Так как $x \in A \cap B$, то $x \notin A\Delta B$. Тогда $x \in (A \cap B) \setminus (A\Delta B)$. Выходит, что тогда $x \in (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$ по опреду симм. разности

Если же $x \notin A \cap B$, тогда возможны два подслучая:

- $x \in A \land x \notin B$, то тогда $x \in A \setminus B \subseteq A\Delta B$

- $x \in B \land x \notin B$, то тогда $x \in B \setminus A \subseteq A\Delta B$

Во всех подслучаях $x \in A\Delta B$ и при этом $x \notin A \cap B$, тогда $x \in (A\Delta B) \setminus (A \cap B)$, что по опред. симм. разности значит, что $x \in (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$!

Следовательно, $A \cup B \subseteq (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$.

Теперь пусть $x \in (A\Delta B)\Delta(A \cap B)$, что значит, что $x \in (A\Delta B) \setminus (A \cap B)$ или $x \in (A \cap B) \setminus (A\Delta B)$. Рассмотрим эти два случая:

- $x \in A\Delta B \land x \notin A \cap B$, тогда $x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A$, что значит $x \in A \cup B$!
- $x \in A \cap B \land x \notin A\Delta B$, что значит, что $x \in A \land x \in B$, откуда следует, что $x \in A \cup B$

Ну и тогда $(A\Delta B)\Delta(A \cap B) \subseteq A \cup B$

чтд

Задача 3

Имеем беск. последовательность мн-в: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$

Если $x \in \limsup A_n$, то это значит, что существуют $n_1, n_2, n_3, \dots$ такие, что $x \in A_{n_1}$ и $x \in A_{n_2}$ и $x \in A_{n_3}$ и т.д. и этих индексов бесконечность

Нам как-то нужно выразить через $\cap$ и $\cup$ все такие x

Попробуем рассмотреть объединение всех множеств:

$$B_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Но в B_1 есть и те элементы, которые появляются конечное количество раз. Попробуем убрать A_1 и посмотрим, что останется:

$$B_2 = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

Если элемент был только в A_1, то в B_2 его уже не будет!

Уберем теперь и A_2:

$$B_3 = A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$

В B_3 уже не будет элементов, которые встретились только в A_2 и/или в A_3

Тут можем понять, что те элементы, которые встречаются бесконечное количество раз должны быть и в B_1 и в B_2 и в B_3 и так далее!

То есть сколько бы начальных множеств мы не отбросили, этот элемент всегда должен появляться в оставшейся части :)

То есть $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$

Ну а B_n, как мы поняли, равен $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Тогда:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Докажем, что это так:

Пусть:

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Что значит, что $\forall n \geq 1 \ x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Пусть x появился только конечное количество раз. Тогда существует какой-то номер множества, в котором он появился последний раз, то есть $\exists N : \forall k > N \ x \notin A_k$

Рассмотрим тогда множество $\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k$. Согласно нашему предположению, $x \notin \bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k$, но получаем противоречие с тем, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Следовательно, x встречается беск. кол-во раз, тогда $x \in \limsup A_n$! Ну и тогда:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \limsup A_n$$

Теперь пусть:

$$x \in \limsup A_n$$

Возьмем произвольный $m > 0$ и рассмотрим мн-во $\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$

Поскольку $x \in \limsup A_n$, то $\exists N \geq m : x \in A_N$, что значит, что $x \in \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$

А так как это верно для любого $m > 0$, то x должен принадлежать $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Следовательно:

$$\limsup A_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

чтд

Задача 4

Имеем беск. последовательность мн-в: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$

Если $x \in \liminf A_n$, то это значит, что существует 0 или конечное число номеров $n_1, n_2, \dots n_k$ таких, что $x \notin A_{n_1}$ и $x \notin A_{n_2}$ и $\dots$ и $x \notin A_{n_k}$

Попробуем рассмотреть мн-во:

$$B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

B_1 включает в себя все элементы, которые принадлежат всем множествам последовательности, но в нем нет, например, тех элементов, которые бы принадлежали всем множествам последовательности, за исключением, например, одного или там двух или там трех. Логика понятна в общем

Тогда рассмотрим такое мн-во:

$$B_2 = A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

В B_2 есть все элементы, которые находятся во всех мн-вах послед-сти, кроме мн-ва A_1

Продолжим цикл:

$$B_3 = A_3 \cap A_4 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$

Тут понимаем, что $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

Ну а B_n, как мы поняли ранее, равен $\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k$

Тогда:

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Ну теперь докажем это:

Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, тогда $\exists N > 0 : x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, что по сути значит, что x принадлежит бесконечному кол-ву мн-в послед-сти, кроме конечного числа, т.е. $x \in \liminf A_n$

Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \liminf A_n$

Пусть $x \in \liminf A_n$, значит $\exists N > 0 : \forall m \geq N \; x \in A_m$, то есть $x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, что буквально значит, что $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

Получили, что $\liminf A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

чтд

Задача 5

Я не знаю, как писать эти масти карт в техе, поэтому введу замену ахах:

- пики: A

- бубны B
- крести: C
- черви: D

Вспомним опред. σ-алгебры:

Множество $\mathcal{F}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все), называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

$(S1)$ $\Omega \in \mathcal{F}$

$(S2)$ если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$

$(S3)$ если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

пункт a

$$S_1 = \{\{D, B, A\}, \{C\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_1)$
- $\overline{\{D, B, A\}} = \{C\} \Rightarrow \{C\} \in \sigma(S_1)$, $\overline{\{C\}} = \{D, B, A\} \Rightarrow \{D, B, A\} \in \sigma(S_1)$, $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_1)$
- $\{D, B, A\} \cup C = \Omega$

Получается, что $\sigma(S_1) = \{\Omega, \emptyset, \{D, B, A\}, \{C\}\}$

пункт b

$$S_2 = \{\{C\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_2)$
- $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_2)$, $\overline{\{C\}} = \{D, B, A\} \Rightarrow \{D, B, A\} \in \sigma(S_2)$

Ну тут теперь стало все аналогично как в пункте a, поэтому

$\sigma(S_2) = \{\Omega, \emptyset, \{D, B, A\}, \{C\}\}$

пункт c

$$S_3 = \{\{A, D\}, \{B, C\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_3)$

- $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_3)$, $\overline{\{A, D\}} = \{B, C\} \Rightarrow \{B, C\} \in \sigma(S_3)$, $\overline{\{B, C\}} = \{A, D\} \Rightarrow \{A, D\} \in \sigma(S_3)$
- $\{A, D\} \cup \{B, C\} = \Omega$

(с пустым мн-вом не проверяю, потому что ну очев)

Получаем, $\sigma(S_3) = \{\Omega, \emptyset, \{A, D\}, \{B, C\}\}$

пункт d

$$S_4 = \{\{A, D\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_4)$
- $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_4)$, $\overline{\{A, D\}} = \{B, C\} \Rightarrow \{B, C\} \in \sigma(S_4)$

Ну тут теперь дальше точно также как и в прошлом пункте, поэтому

Получаем, $\sigma(S_4) = \{\Omega, \emptyset, \{A, D\}, \{B, C\}\}$

пункт e

$$S_5 = \{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_5)$
- $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{A, D\}} = \{B, C\} \Rightarrow \{B, C\} \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{B, C\}} = \{A, D\} \Rightarrow \{A, D\} \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{B\}} = \{A, C, D\} \Rightarrow \{A, C, D\} \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{C\}} = \{A, B, D\} \Rightarrow \{A, B, D\} \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{A, C, D\}} = \{B\} \Rightarrow \{B\} \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{A, B, D\}} = \{C\} \Rightarrow \{C\} \in \sigma(S_5)$
- Тут достаточно рассмотреть объединения только тех множеств, чье объединение дает мн-во по мощности меньшее 4, ну иначе мы просто получим Ω: $\{A, D\} \cup \{B\} = \{A, B, D\} \Rightarrow \{A, B, D\} \in \sigma(S_5)$ и $\{A, D\} \cup \{C\} = \{A, C, D\} \Rightarrow \{A, C, D\} \in \sigma(S_5)$

Получаем, $\sigma(S_5) = \{\Omega, \emptyset, \{A, D\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}\}$

пункт f

$$S_6 = \{\{A, D\}, \{C\}\}$$

Проверим условия из опреда.

- $\Omega \in \sigma(S_5)$

- $\overline{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \sigma(S_5)$, $\overline{\{A, D\}} = \{B, C\} \Rightarrow \{B, C\} \in \sigma(S_6)$, $\overline{\{B, C\}} = \{A, D\} \Rightarrow \{A, D\} \in \sigma(S_6)$, $\overline{\{C\}} = \{A, B, D\} \Rightarrow \{A, B, D\} \in \sigma(S_6)$, $\overline{\{A, B, D\}} = \{C\} \Rightarrow \{C\} \in \sigma(S_6)$
- $\{A, D\} \cup \{C\} = \{A, C, D\} \Rightarrow \{A, C, D\} \in \sigma(S_6)$. Все остальные объединения ничего нового не дадут, но тут мы получили одно новое мн-во. Тогда $\overline{\{A, C, D\}} = \{B\} \Rightarrow \{B\} \in \sigma(S_6)$. Ну а дополнение $\{B\}$ нам даст $\{A, C, D\}$, что уже есть

Получаем, $\sigma(S_6) = \{\Omega, \emptyset, \{A, D\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B, D\}, \{A, C, D\}\}$

Ответ: ответы даны выше после каждого пункта