Домашняя работа

Задача 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} \Rightarrow a_n = \frac{n}{(4n^2-1)^2}$$

$$a_n = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{A}{(2n-1)^2} + \frac{B}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow A(2n+1)^2 + B(2n-1)^2 = n$$

$$A4n^2 + A4n + A + B4n^2 - B4n + B - n = 0$$

$$n^2(A4 + B4) + n(A4 - B4 - 1) + (A + B) = 0$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ -2B = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{8} \\ A = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Окей, тогда получим:

$$a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

Теперь рассмотрим част. суммы или как их там:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \dots\right]$$

Видим, что эт телескопическая сумма ну и догадаемся, что:

$$8 \cdot S_N = 1 - \frac{1}{N^2}$$

Тк нам нужно найти сумму ряда, то ей будет равен этот предел:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 8$$

Ответ: $\frac{1}{8}$

Задача 2

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Посмотрим на необход. условие сход. ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}\neq 0$$

$$\Rightarrow \text{не сходится кайф}$$

Ответ: нет

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)\Rightarrow a_n=n\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$$

Пусть $t=\frac{n+1}{n^2+2}$, тогда $a_n=n\sin t=tn\frac{\sin t}{t}$

$$\text{при } n\to\infty: \ \frac{n+1}{n^2+2}\to 0\Rightarrow t\to 0\Rightarrow \frac{\sin t}{t}\to 1$$

Теперь посмотрим на необход. условие сход. ряда:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{t}=1\neq 0\Rightarrow \text{ряд не сход. ура!}$$

Ответ: нет

d)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)}\Rightarrow a_n=\frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)}$$

Рассмотрим ф-ию:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x\ln^2 x}=\frac{1}{x\ln x}$$

$$f'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2\ln^2 x}<0\ \ \forall x>1$$

Будем пользоваться этим короче, посмотрим на ряд: $\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i\ln i}$ и проверим его сходимость *(и $b_n=\frac{1}{n\ln n}$)*

Теорема (Интегральный признак Коши)
Пусть дана функция $f:\ [1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x)\geq 0$ и $f(x)$ монотонно (нестрого) убывающая. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)\sim\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx.$

Тогда вычислим интеграл:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{x\ln x}$$

Пусть $u = \ln x$, тогда $du = \frac{dx}{x}$:

$$\lim_{b\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = \infty$$

$$\Rightarrow \text{интеграл расходится}$$

$$\Rightarrow \text{ряд тогда тоже расходится}$$

Теперь рассмотрим такой вот предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n + 3n\ln n}{n(\ln^2 n + 2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln^2 n}{n\ln^2 n + 2n} + \lim_{n\to\infty}\frac{3n\ln n}{n\ln^2 n + 2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\ln^2 n + 2} + \lim_{n\to\infty}\frac{3\ln n}{\ln^2 n + 2} = 1 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow a_n \sim b_n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} b_n$$

Поэтому наш изначальный ряд расходится!

Пользовался этим выше:

Теорема (Второй признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.

Следствие: если $a_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n, n \to \infty$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ответ: расход пацаны

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \Rightarrow a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Попробуем Даламбергом, рассмотрим:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!\cdot(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится ура}$$

Ответ: сходка ребята

g)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \Rightarrow a_n = \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

По рад. Коши попробуем:

$$\sqrt[n]{a_n} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3n+1}{n+2}}$$

Рассм. предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \text{ряд расход.}$$

Ответ: расход

h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!} \Rightarrow a_n = \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$$

Попробуем Даламбергом:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+5)!! \cdot n^3(2n)!!}{(n+1)^3(2n+2)!! \cdot (2n+3)!!} = \frac{(2n+3)!! \cdot (2n+5) \cdot (2n)!! \cdot n^3}{(2n)!! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)!! \cdot (n+1)^3} =$$

$$= \frac{(2n+5)n^3}{(2n+2)(n+1)^3} \to 1 \text{ при } n \to \infty$$

К сожалению, не фортануло

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n = 2^n \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n) = 2^n n!$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Тогда:

$$a_n = \frac{(2n+3)(2n+1)!}{n^3 \cdot 4^n \cdot (n!)^2}$$

Теперь рассмотрим:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Тогда:

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

Покажу теперь, что $\int_1^n \ln x dx \leq \sum_{k=1}^n \ln k \leq \int_1^n \ln x dx + \ln n$

Типо верхняя как и нижняя оценка просто следует из опред. интеграла, но вот пояснение: на каждом отрезке $[k, k+1], \forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\ln k \leq \int_k^{k+1} \ln x dx$ просто из-за монотонного возрастания, суммируя по всем k получим: $\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \int_1^n \ln x dx$, к обоим частям просто прибавим $\ln n$ и получим верхнюю оценку:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^n \ln x dx + \ln n \text{ - доказано}$$

Теперь разберемся с нижней. По опреду интеграла понятно, что на каждом отрезке $[k, k+1]$ $\int_k^{k+1} \ln x dx \leq \ln(k+1)$, просто просуммируем и получим нижнюю оценку:

$$\int_1^n \ln x dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \text{ - доказано}$$

Ладно, теперь посчитаем сам интеграл:

$$\int_1^n \ln x dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1$$

Теперь рассмотрим предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n + 1}$$

Из наших оценок получим, что:

$$1 \leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n + 1} \leq 1 + \frac{\ln n}{n \ln n - n + 1}$$

Очевидно, что при $n \to \infty : \frac{\ln n}{n \ln n - n + 1} \to 0$, поэтому мы зажали предел изначальный по сути и поэтому:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n - n + 1} = 1$$

что показывает, что:

$$\ln(n!) \sim n \ln n - n + 1 \text{ при } n \to \infty$$

При $n \to \infty : n \ln n - n + 1 \sim n \ln n - n$

Теперь можем возвести все в экспоненту и тогда получим, что:

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \text{ при } n \to \infty$$

короче как я понял тут нельзя возводить в экспоненту поэтому я хз как решать *(типо эквивалентность не сохраняется)*

Рассмотрим заново:

$$a_n = \frac{(2n+3) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1)}{n^3 \cdot 4^n \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot (n-1)^2 \cdot n^2} =$$

$$= \frac{(2n+3)\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)}{n^3\cdot 4^n\cdot n!}$$

хз крч

Мне подсказали, что есть ф-ла Стирлинга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n} \sim \sqrt{n}\cdot n^n\cdot e^{-n}$$

Поэтому a_n эквивалентна:

$$b_n = \frac{(2n+3)\cdot\sqrt{2n+1}\cdot(2n+1)^{2n+1}\cdot e^{-2n-1}}{n^3\cdot 4^n\cdot n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}} = e^{-1}(2n+3)\cdot\frac{(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}}{4^n\cdot n^{2n+4}}$$

$$b_n \sim n\cdot\frac{4^n\cdot n^{2n}\cdot n^{\frac{3}{2}}}{4^n\cdot n^{2n}\cdot n^4} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$$

А ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится, так как $\frac{3}{2} > 1$

Ответ: сходится

Задача 3

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3n-2} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{3n-2}$$

Рассмотрим $b_n = \frac{\sqrt{n}}{3n-2}$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{3n-2} = 0$$

Теперь докажем, что $b_{n+1} < b_n$:

$$\frac{\sqrt{n+1}}{3n+1} < \frac{\sqrt{n}}{3n-2}$$

$$\sqrt{n+1}\cdot(3n-2) < \sqrt{n}\cdot(3n+1)$$

$$(n+1)(3n-2)^2 < n\cdot(3n+1)$$

$$-9n^2-9n+4 < 0$$

Ну тут очевидно становится, что $\forall n\in\mathbb{N}$ это истина

Поэтому доказали, что b_n монотонно убывает

Тогда по Лейбницу a_n сходится

Ответ: сход

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \ln n}$$

Пусть $a_n = \cos n$, и $b_n = \frac{1}{n+\ln n}$

Очев:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + \ln n} = 0$$

Тк $n + \ln n$ - это монотонно возрастающая ф-ия, хз если не очев могу расписать $\Rightarrow b_n$ монотонно убывает

$$b_n < b_{n+1}$$

$$n + \ln n < n + 1 + \ln(n+1)$$

$$\ln n < \ln(n+1) + 1$$

$$\ln n < \ln(n+1) + \ln e$$

$$\ln n < \ln(en + e)$$

$$n < en + e$$

$$n(1-e) < e$$

$$n > \frac{e}{1-e}$$

Понимаем, что $\frac{e}{1-e} < 0$, поэтому для $\forall n \in \mathbb{N}$ наше неравенство верно !

Да мне нечего делать, будет забавно если я там сделал ошибки, я прямо кекну

Теперь короче посмотрим на эту тему:

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n = \frac{\sin(N + \frac{1}{2}) - \sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}$$

Поэтому можем оценить:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \cos n\right| = \frac{|\sin(N + \frac{1}{2}) - \sin\frac{1}{2}|}{2\sin\frac{1}{2}} \le \frac{1+1}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

Ну вот константной оценили

Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ сходится, а это наш изначальный ряд!

Ответ: сходится

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n}$$

$|a_n| = \frac{1}{2^n+n}$

$$\frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

А ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится так как это по сути геом прогрессия

Тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, а значит a_n сходится абсолютно ну значит и по обычному он сходится

Ответ: сходится

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{\sqrt{n+6}}$$

Пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+6}}$ и она монотонно убывает к нулю, что очев

И пусть $b_n = (-1)^n \sin 2n = \cos(\pi n) \sin(2n) = \frac{1}{2}(\sin(n\pi + 2n) - \sin(n\pi - 2n))$

Поэтому:

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sin(n(\pi + 2)) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n(\pi - 2))$$

И можем это расписать по этой формуле:

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\alpha n) = \frac{\sin(\frac{\alpha N}{2}) \sin(\frac{\alpha(N+1)}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$$

В нашем случае $|\sin(\frac{\alpha N}{2}) \sin(\frac{\alpha(N+1)}{2})|$ мы оценим сверху единицей.

$$\sin\left(\frac{\pi + 2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \cos 1$$

И аналогично для второго ряда посчитаем знаменатель :)

$$\sin\left(\frac{\pi - 2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos 1$$

Поэтому:

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 1} \cdot (1+1) = \frac{1}{\cos 1}$$

Тогда по Дирихле ряд сходится!

Ответ: сходится

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{\pi}{3})}{\ln(n^2+3)} \cdot e^{\frac{n+1}{n}}$$

Пусть $a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}} \cdot e}{\ln(n^2+3)}$, $b_n = \sin(n+\frac{\pi}{3})$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} \cdot e}{\ln(n^2+3)} = 0$$

Теперь попробуем доказать, что a_n монотонно убывает:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e \cdot e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \ln(n^2+3)}{\ln((n+1)^2+3) \cdot e \cdot e^{\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{\ln(n^2+3)}{\ln((n+1)^2+3)}$$

Очев, что $\forall n > 0 : 0 < e^{-\frac{1}{n(n+1)}} < 1$

Также очев, что $\forall n > 0 : n^2+3 < (n+1)^2+3$

Поэтому $\ln((n+1)^2+3) > \ln(n^2+3) \Rightarrow \frac{\ln(n^2+3)}{\ln((n+1)^2+3)} < 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{\ln(n^2+3)}{\ln((n+1)^2+3)} < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

чтд

Теперь распишем b_n по ф-ле синуса суммы:

$$b_n = \sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin n + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos n$$

Теперь посмотрим на частичные суммы b_n:

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\sin n + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{N}\cos n$$

Как мы выше видели, есть закрытые формулы для рядов синуса и косинуса и мы их уже оценивали сверху, поэтому очев, что $|b_n| < M$, где M - константа

$\Rightarrow$ по Дирихле ряд сходится :)

Ответ: сходится!