Контрольная работа 24-25

Вариант 1

Задача 1

Дана функция $f(x) = \hat{k}$, где $\hat{k} = \min\{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x \,\}$. Необходимо вычислить интеграл: $\iint\limits_{\substack{1 \leq x \leq 4 \\ 3 \leq y \leq 5}} f(x+y)dxdy$

Решение:

Так как $f(x) = \hat{k}$, где $\hat{k} = \min\{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x \,\}$, то это эквивалентно тому, что $f(x) = \lceil x \rceil$

Поэтому интеграл превращается в:

$$\iint\limits_{\substack{1 \leq x \leq 4 \\ 3 \leq y \leq 5}} \lceil x+y \rceil dxdy$$

На нашей области интегрирования сумма $x+y$ меняется в пределах:

$$1+3 \leq x+y \leq 4+5 \iff 4 \leq x+y \leq 9$$

Разобьем нашу область интегрирования на 5 частей:

- $4 < x+y \leq 5 \implies \lceil x+y \rceil = 5$, площадь интегрирования: S_5
- $5 < x+y \leq 6 \implies \lceil x+y \rceil = 6$, площадь интегрирования: S_6
- $6 < x+y \leq 7 \implies \lceil x+y \rceil = 7$, площадь интегрирования: S_7
- $7 < x+y \leq 8 \implies \lceil x+y \rceil = 8$, площадь интегрирования: S_8
- $8 < x+y \leq 9 \implies \lceil x+y \rceil = 9$, площадь интегрирования: S_9

Случай, когда $\lceil x+y \rceil = 4$ получается, если $x = 1 \wedge y = 3$, но это мера нуль!

Тогда искомый интеграл разобьется на сумму!

$$\iint\limits_{\substack{1 \leq x \leq 4 \\ 3 \leq y \leq 5}} \lceil x+y \rceil dxdy = \sum_{n=5}^{9} n \cdot S_n$$

Осталось найти площади!

S_5:

$4 < x+y \leq 5 \implies y > 4-x \wedge y \leq 5-x \implies y \in (4-x, 5-x]$, при этом $x \in [1, 4]$

Но так как $y \in [3,5]$, то $y \in [3, 5-x]$, но тогда $x \in [1,2]$

Тогда:

$$S_5 = \int_1^2 dx \int_3^{5-x} dy = \int_1^2 (2-x)dx = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

S_6:

$5 < x+y \leq 6 \Longrightarrow y > 5-x \wedge y \leq 6-x \Rightarrow y \in (5-x, 6-x]$ для каждого фикс. $x \in [1,4]$

Тогда:

$$\int_1^2 dx \int_{5-x}^{6-x} dy + \int_2^3 dx \int_3^{6-x} dy = 1 + \int_2^3 (3-x)dx = 1 + 4,5 - 4 = 1,5$$

S_7:

$y \in (6-x, 7-x]$ для каждого фикс. $x \in [1,4]$

$$\int_1^2 dx \int_{6-x}^{5} dy + \int_2^3 dx \int_{6-x}^{7-x} dy + \int_3^4 dx \int_3^{7-x} dy =$$

$$\int_1^2 (x-1)dx + 1 + \int_3^4 (4-x)dx = \frac{1}{2} + 8 - 7,5 + 1 = 2$$

S_8:

$7 < x+y \leq 8 \Longrightarrow y > 7-x \wedge y \leq 8-x \Longrightarrow y \in (7-x, 8-x]$ для любого фикс. $x \in [1,4]$

$$\int_2^3 dx \int_{7-x}^{5} dy + \int_3^4 dx \int_{7-x}^{8-x} dy = 1 + \int_2^3 (x-2)dx = 1 + -\frac{3}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

S_9:

$8 < x+y \leq 9 \Longrightarrow y \in (8-x, 9-x]$ для каждого фикс $x \in [1,4]$

Тогда:

$$\int_3^4 dx \int_{8-x}^{5} dy = \int_3^4 (x-3)dx = -4 + 4,5 = \frac{1}{2}$$

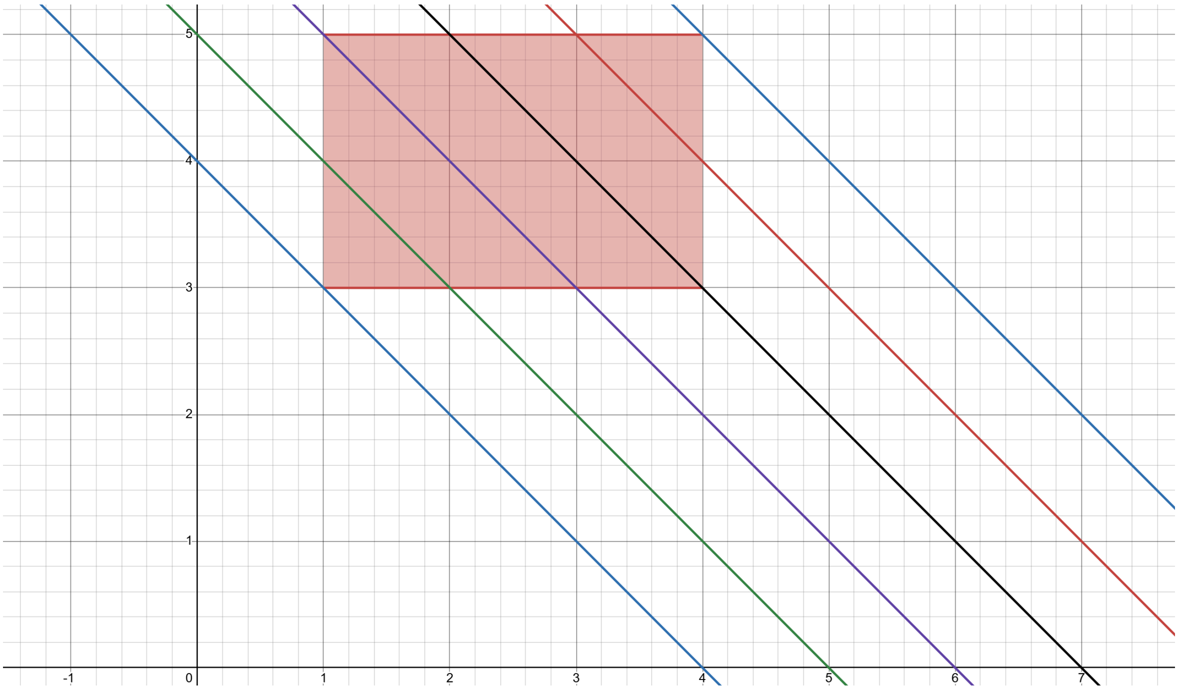
Тогда искомый интеграл равен:

$$\sum_{n=5}^{9} n \cdot S_n = 5 \cdot 0,5 + 6 \cdot 1,5 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1,5 + 9 \cdot 0,5 =$$

$$2,5 + 9 + 14 + 12 + 4,5 = 19 + 23 = 42$$

Ответ: 42

На самом деле мы интегрировали как раз по этой области. Прямые здесь - ограничения. Поэтому с графиком становится понятнее, как именно надо расставлять пределы интегрирования!



Задача 2

Вычислить интеграл:

$$\int_{-2}^{1} dz \int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)}\, dx$$

Интеграл $\int \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)}\, dx$ решается крайне сложно. Если он вообще выражается через элементарные функции. Поэтому попробуем сменить порядок интегрирования!

Заметим, что z ни от чего не зависит. А вот $\arcsin(y) \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Из $\arcsin(y) \leq x$ получим: $y \leq \sin(x)$

При $y \in [0,1]$: x принимает значения из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Поэтому для каждого фикс. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y будет принимать значения $[0, \sin(x)]$

Поэтому получим новые пределы интегрирования:

$$I = \int_{-2}^{1} dz \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{0}^{\sin(x)} \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)} dy$$

Очевидно, что тут x выступает как константа, поэтому:

$$\int_{0}^{\sin(x)} \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)} dy = \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)}\sin(x)$$

Теперь вычислим:

$$J = \int \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)}\sin(x)dx$$

Пусть $u = \cos(x)$, тогда $du = -\sin(x)$, получим:

$$J = -\int u^5\sqrt{1+u^6}du$$

Пусть $t = 1 + u^6$, тогда $dt = 6u^5du$, получим:

$$J = -\frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{9}t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{9}(1+u^6)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{9}(1+\cos^6(x))^{\frac{3}{2}} + C$$

Тогда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x)\sqrt{1+\cos^6(x)}\sin(x)dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}2\sqrt{2} = \frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

Тогда имеем:

$$I = \frac{1}{9}(2\sqrt{2}-1)\int_{-2}^{1} dz = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Ответ: $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$

Задача 3

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой:

$$(x^2+y^2+2y+1)^2 = x^2-y^2-2y-1$$

Посмотрим повнимательнее на равенство выше и заметим:

$$(x^2+(y+1)^2)^2 = x^2-(y+1)^2$$

Сделаем замену: $u = y + 1$, тогда имеем:

$$(x^2+u^2)^2 = x^2-u^2$$

Введем полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ u = r\sin\varphi \end{cases}$$

где $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $x^2 + u^2 = r^2$

Тогда получим уравнение кривой в полярных кордах:

$$r^4 = r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \iff r^4 = r^2(\cos 2\varphi)$$

$$\implies r^2 = \cos 2\varphi$$

Так как $r^2 \geq 0$, то и $\cos 2\varphi \geq 0$, что выполняется при $\frac{3\pi}{2} \leq 2\varphi < 2\pi$ и при $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Тогда получим два промежутка: $\varphi \in [\frac{3\pi}{4}, \pi) \cup [0, \frac{\pi}{4}]$

Перейдем к поиску площади:

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} rdr =$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ответ: 1

Задача 4

Нам дана поверхность, заданная уравнением:

$$z = 1 + x - \frac{6}{5} y^{\frac{5}{2}}$$

Необходимо найти площадь части, вырезанной циллиндром:

$$D = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{x} \leq y \leq 1 \,\}$$

Для начала вспомним формулу площади поверхности:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{\left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2 + 1} \, dxdy$$

Прекрасно, найдем тогда частные производные!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^{\frac{3}{2}}$$

Пределы интегрирования нам уже даны, поэтому просто найдем площадь:

$$S = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{2 + 9y^3} dy$$

Выглядит чутка сложно, поэтому попробуем изменить пределы интегрирования:

Из $y \geq \sqrt{x}$ следует, что $y^2 \geq x \iff x \leq y^2$

Для каждого фикс. $y \in [0, 1]$ имеем $x \in [0, y^2]$. Поэтому получим:

$$S = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} \sqrt{2 + 9y^3} dx = \int_0^1 y^2 \sqrt{2 + 9y^3} dy$$

Пусть $u = 2 + 9y^3$, тогда $du = 27y^2 dy$, тогда имеем:

$$S = \frac{1}{27}\int_2^{11} \sqrt{u}\, du = \frac{2}{81}(11\sqrt{11} - 2\sqrt{2})$$

Задача 5

Вычислить интеграл:

$$I = \iiint\limits_D e^y \frac{x-2z}{3x-z} dxdydz$$

D образован плоскостями:

$$x - 2z = 2 \quad x - 2z = 3$$

$$3x - z = 2 \quad 3x - z = 8$$

$$y = 1 \quad y = 2$$

Введем замену:

$$\begin{cases} u = x - 2z \\ v = 3x - z \end{cases}$$

Выразим теперь x и z через u и v. Это потребуется для нахождения матрицы Якоби и Якобиана в последствии.

$$\begin{cases} x = u + 2z \\ z = \frac{v-3u}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2v-u}{5} \\ z = \frac{v-3u}{5} \end{cases}$$

Вычислим Якобиан замены:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{25} + \frac{6}{25} = \frac{1}{5}$$

После замены выходит, что D образован плоскостями:

$$u = 2 \quad u = 3$$

$$v = 2 \quad v = 8$$

$$y = 1 \quad y = 2$$

Поэтому пределы интегрирования становятся очевидны.

$$I = \int_2^8 dv \int_2^3 du \int_1^2 e^y \frac{u}{v} \cdot |J| dy =$$

$$= \frac{1}{5} e(e-1) \int_2^8 dv \int_2^3 \frac{u}{v} du =$$

$$\frac{1}{2}e(e-1)\int_2^8 v^{-1}dv = \frac{1}{2}e(e-1)(\ln 8 - \ln 2)$$

Ответ: $\frac{1}{2}e(e-1)\ln 4$