Листок 4

Геометрические приложения интегралов

1. Нарисуйте эскиз графика и вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой(кривыми):

   (a) $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)$ — Лемниската Бернулли

   (b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллипс

   (c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\ x=y,\ x=9y$

   (d) $x^4=x^2-y^2$ — Лемниската Жеронó

2. Найти объем тела, заданного неравенствами:

   (a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$

   (b) $x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2-z^2\ge 1$

   (c) $x^2+y^2+z^2\le 3,\ x^2+y^2\le 2z$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=xyz$$

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ и координатными плоскостями, используя замену $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w^2$.

5. Найти объем пирамиды:

$$\{0\le x_n\le x_{n-1}\le\ldots\le x_1\le a\}\qquad (a>0)$$

6. Найти объем параллелипипеда, ограниченного плоскостями

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\pm h_i,\ h_i>0,\qquad \det(a_{ij})\ne 0$$

Домашнее задание

1. Нарисуйте эскиз и вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой(кривыми):
   (a) $(x^2 + y^2)^3 = x^3 y$
   (b) $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ — Улитка Паскаля / кардиоида
   (c) $(2x + 3y + 1)^2 + (x - 4y - 3)^2 = 1$
2. Найти объем тела, заданного неравенствами:
   (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$
   (b) $\sqrt{x^2 + y^2} \geq z,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq z$
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2)$$
4. Найти объем пирамиды:
$$\{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \leq 1,\ x_i \geq 0\} \qquad (a_i > 0)$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что любое конечное объединение, пересечение, разность допустимых множеств – допустимое множество.
2. Доказать, что граница допустимого множества – компакт
3. Пусть E – ограниченное множество. Когда существует интеграл $\int\limits_E 1\ dx$?
4. Пусть E – ограниченное множество и граница ∂E не меры нуль. Интегрируема ли функция $f = const$?
5. Доказать, что измеримое по Жордану множество без внутренних точек имеет нулевой объем.
6. Пусть E – множество меры нуль по Лебегу, $f : E \to \mathbb{R}$ – непрерывная и ограниченная функция. Всегда ли функция f Интегрируема на E? Если да, то чему равен интеграл? Тот же вопрос при условии, что E – множество меры нуль по Жордану.
7. Пусть E – измеримое по Жордану множество ненулевой меры, $f : E \to \mathbb{R}$ – непрерывная, неотрицательная интегрируемая функция на E и $M = \sup\limits_E f$. Доказать:
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_E f^n(x)\ dx \right)^{1/n} = M$$
8. Доказать, что любое конечное объединение, пересечение допустимых множеств – допустимое множество.