Листок 7

Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей

1. Определите множество сходимости и найдите предельную функцию последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве сходимости, если

$$f_n = (1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad D = \mathbb{R}$$

2. Найдите предельную функцию последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве сходимости D:

   (a) $f_n = \frac{\sin n^2 x}{n} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad D = \mathbb{R}$

   (b) $f_n = \frac{\arctan nx}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad D = \mathbb{R}$

   (c) $f_n = 2(n+1)x(1-x^2)^n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad D = [0,1]$

3. Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (по определению):

   (a) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n},\ D = [-1,1]$

   (b) $f_n(x) = x^n - x^{2n},\ D = [0,1]$

   (c) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2},\ D = [1,+\infty)$

4. Исследовать функциональную последовательность $f_n(x)$ на равномерную сходимость на множестве D (граничная точка и всякие свойства):

   (a) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx},\ D_1 = [0,1],\ D_2 = (0,1]$

   (b) $f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2},\ D = (0,+\infty)$

5. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции? Рассмотреть пример:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x), \quad \text{где } \psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

6. Показать, что последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'\Bigg|_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1)$$

7. Показать, что последовательность $f_n(x) = nx(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0,1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

8. При каких значениях параметра α последовательность $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$
   (a) сходится на отрезке $[0,1]$
   (b) равномерно сходится на $[0,1]$
   (c) возможен предельный переход под знаком интеграла $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$?

Домашнее задание

1. Выясните, сходятся ли равномерно функциональные последовательности в задачах с семинара 2b и 2c.
2. Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:
   (a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3} \quad D_1 = [0,1], \quad D_2 = [1,+\infty)$
   (b) $f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x} \quad D_1 = [0,2], \quad D_2 = [2,+\infty)$
   (c) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad D_1 = [0,1], \quad D_2 = [1,+\infty)$
3. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx?$$

Дополнительные задачи

1. Доказать, что в пространстве функций, определенных на некотором множестве D, функция $g[f] = \sup\limits_D |f|$ задает норму.

2. Доказать, что если последовательность многочленов степени не выше n равномерно сходится на интервале (a,b), то предел этой последовательности – многочлен степени не выше n.

3. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на интервале (a,b), то последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = n\,(f(x+1/n) - f(x))$ сходится равномерно к $f'(x)$ на любом отрезке $[a_1, b_1]:\ a < a_1 < b_1 < b$.

4. Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$ и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a,b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет уравнению: $\varphi'(x) = \varphi(x)$.

5. Доказать, что $f_n \overset{D_1\cup D_2}{\rightrightarrows} f$ тогда и только тогда, когда $f_n \overset{D_1}{\rightrightarrows} f$ и $f_n \overset{D_2}{\rightrightarrows} f$.

6. Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ и $g: D \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция. Доказать, что $g \cdot f_n \overset{D}{\rightrightarrows} g \cdot f$

7. Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ и $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} g$. Доказать, что $f_n \pm g_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \pm g$

8. Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$, $g_n \overset{D}{\rightrightarrows} g$ и f, g – ограниченные. Доказать, что $f_n \cdot g_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \cdot g$

9. Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$, $f_n(x) \neq 0$ на D и $\inf\limits_D |f(x)| > 0$. Доказать, что $\frac{1}{f_n} \overset{D}{\rightrightarrows} \frac{1}{f}$