Листок 2

Тройной интеграл Римана, сведение к повторному

(во всех задачах этого листка функция f предполагается непрерывной)

1. Вычислите интеграл $\iiint\limits_D xyz^2\,dxdydz$, если $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}$.

2. Вычислите $\iiint\limits_D z\,dxdydz$, если D – трехмерная область в первом октанте, ограниченная поверхностью $z = 12xy$ и плоскостями $y = x,\ x = 1$.

3. Привести тройной интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ к одному из повторных:

   (a) $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2,\ 0 \le z \le y\}$

   (b) $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 4 - x^2,\ x^2 - y^2 \ge 0,\ x \ge 0\}$

   (c) $D = \{(x,y,z) \mid x + y + z \le 2,\ 0 \le 4z \le 4 - x^2 - y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

   (d) $D = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 4xy,\ x \ge 0,\ x + 4y + z \le 1\}$

4. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

5. Вычислить интеграл:

$$(a)\ \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 dx \int\limits_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} \qquad (b)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_y^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z}dz \qquad (c)\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{\sin \pi z}{z}dz$$

Многократный интеграл Римана

6. Вычислить:

   (a) $\iint\limits_{[0,1]^n}\!\dots\!\int (x_1^2 + \ldots + x_n^2)dx_1 \ldots dx_n$

   (b) $\iint\limits_{[0,1]^n}\!\dots\!\int (x_1 + \ldots + x_n)^2 dx_1 \ldots dx_n$

   (c) $\iint\limits_{\substack{x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,\\ x_1 + \ldots + x_n \le 1}}\!\dots\!\int dx_1 \ldots dx_n$

Домашнее задание

1. Приведите тройной интеграл $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ к одному из повторных, где $D = \{(x,y,z) \mid y^2 \leq z \leq 4,\ x^2+y^2 \leq 16\}$

2. Используя любой порядок интегрирования, перепишите и вычислите интеграл

$$\iiint\limits_D (xy+z^2)\ dxdydz,$$

если $D = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3\}$.

3. Вычислите интеграл

$$\int_0^2 dz \int_0^{z^2} dy \int_0^{y-z} (2x-y)\ dx.$$

4. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{x^2+y} f(x,y,z)dz$$

5. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^4 dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2xy^2\ dy$$

6. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_y^1 e^{z^3} dz$$

Дополнительные задачи

1. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция и $\int\limits_a^b (x-a)^2 f(x)\ dx = 1$. Вычислить $\int\limits_a^b dx \int\limits_x^b dy \int\limits_y^b f(z)\ dz$.

2. Известно, что $f(x)$ – непрерывная функция и $\int\limits_0^1 f(x)\ dx = 1$. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(x)f(y)f(z)\ dz$.

3. Известно, что $f(x,y,z)$ – непрерывная и симметричная функция своих аргументов и $\iiint\limits_{[0,1]^3} f(x,y,z)\ dxdydz = 1$. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(x,y,z)\ dz$.

4. Докажите, что множество ∂E всех граничных точек множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством

5. Покажите, что если $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ – последовательность вложенных компактов, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$