Домашняя работа

задача 2

$$I = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 z + y^2 z + z^3) dz$$

Несложно догадаться, что область интегрирования - шар радиуса 2:

y идет от -2 до 2, для каждого фикс. y, $x \in [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}]$, то есть $x^2 + y^2 \le 4$.

А для каждого фикс. x и y, $z \in [-\sqrt{4-x^2-y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}]$, то есть $x^2+y^2+z^2 \le 4$

Сферическая замена:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

Теперь разберемся с функцией:

$$x^2 z + y^2 z + z^3 = z(x^2+y^2+z^2) = r\cos(\theta)\cdot r^2 = r^3\cos(\theta)$$

Факт, который мы знаем:

$$dxdydz = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$

Тогда:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^3 \cos(\theta)\cdot r^2 \sin(\theta) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^2 r^5 \cos(\theta)\sin(\theta) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{32}{3}\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{32}{6}\sin(2\theta) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{32}{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)\Big|_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 d\varphi = 0$$

Ответ: 0

задача 3

a)

$$I = \iint\limits_{\substack{1 \le x^2+y^2 \le 49 \\ y \ge 0}} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

Знаем, что $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 49,\ y \geq 0\}$

Полярные координаты:

$x = r\cos(\varphi)$

$y = r\sin(\varphi)$

Тогда так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $r \geq 0$, то из огр. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 49$ следует, что $1 \leq r^2 \leq 49 \ \Rightarrow\ 1 \leq r \leq 7$.

А так как $y \geq 0$, то $r\sin(\varphi) \geq 0$, но тк $r > 0 \ \Rightarrow\ \sin(\varphi) \geq 0 \ \Rightarrow\ \varphi \in [0, \pi]$.

Разберемся с функцией:

$$\frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\ln(r^2)}{r^2}$$

Известный факт:

$$dxdy = rd\varphi dr$$

$$\Rightarrow\ I = \int_0^\pi d\varphi \int_1^7 \frac{\ln(r^2)}{r^2} \cdot r\ dr =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_1^7 \frac{\ln(r^2)}{r}\ dr =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \int_1^7 2 \cdot \frac{\ln(r)}{r}\ dr$$

Посчитаем внутренний:

$\int_1^7 2 \cdot \frac{\ln(r)}{r}\ dr$

Пусть $t = \ln(r)$, тогда $dt = \frac{1}{r}dr$

$\Rightarrow\ \int 2 \cdot \frac{\ln(r)}{r}\ dr = \int 2t\ dt = t^2 + C = \ln^2(r) + C$

$\int_1^7 2 \cdot \frac{\ln(r)}{r}\ dr = \ln^2(r)\Big|_1^7 = ln^2(7) - ln^2(1) = \ln^2(7)$

Вернемся:

$$I = \ln^2(7) \int_0^\pi d\varphi = \ln^2(7)\pi$$

Ответ: $\ln^2(7)\pi$

б)

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2x} \frac{xdxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Из огр. имеем: $x^2 + y^2 \leq 2x \ \Rightarrow\ r^2 \leq 2r\cos\varphi$, тк $r \geq 0$ в полярных кордах, то $r \leq 2\cos\varphi$, то есть $\cos\varphi \geq 0\ \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Разберемся с функцией:

$$\frac{x}{\sqrt{4 - (x^2 - y^2)}} = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{4 - r^2}}$$

Известный факт:

$$dxdy = rd\varphi dr$$

$$\Rightarrow \ I = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} dr$$

Посчитаем внутренний:

$$J = \int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\, dr$$

Пусть $r = 2\sin t$, тогда $dr = 2\cos t\, dt$:

$$J = \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} \cdot 2\cos t\, dt = \int 4\sin^2 t\, dt = 2\int (1-\cos 2t)\, dt = 2t - \sin 2t + C$$

Так как $t = \arcsin(\frac{r}{2})$, то:

$$J = 2\arcsin\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2} + C$$

$$\int_0^{2\cos\varphi} \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\, dr = (2\arcsin\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2})\Big|_0^{2\cos\varphi} = 2\arcsin(\cos\varphi) - \cos\varphi \cdot \sqrt{4-4\cos^2\varphi} =$$

$$= 2\arcsin(\cos\varphi) - 2\cos\varphi|\sin\varphi|$$

Тогда:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi(2\arcsin(\cos\varphi) - 2\cos\varphi|\sin\varphi|)d\varphi$$

Функция четная, тк: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ и $\arcsin(\cos(-\varphi)) = \arcsin(\cos\varphi)$, $|\sin(-\varphi)| = |\sin\varphi|$. Поэтому:

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \cos\varphi(2\arcsin(\cos\varphi) - 2\cos\varphi\sin\varphi)d\varphi = 4\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\arcsin(\cos\varphi)\, d\varphi - 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

Тк $\arcsin(\cos\varphi) = \pi/2 - \varphi$, то

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi - 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

Сначала посчитаем первый:

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi - \int_0^{\pi/2} \varphi\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \varphi\cos\varphi\, d\varphi = (\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 1$$

Теперь посчитаем второй:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

Пусть $u = \cos\varphi$, тогда $du = -\sin\varphi\, d\varphi$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta = -\int_1^0 u^2\, du = \int_0^1 u^2\, du = \frac{1}{3}$$

Объединим результаты:

$$I = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Ответ: $\frac{8}{3}$

c)

$$I = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq z^2 \\ 0\leq z\leq 1}} (z - xy)\, dxdydz$$

Цилиндрические координаты:

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Рассм. огр.:

$x^2 + y^2 \leq z^2 \;\Rightarrow\; r^2 \leq z^2$, тк $r \geq 0$, то $r \leq |z|$

$0 \leq z \leq 1 \;\Rightarrow\; r \leq z$

Имеем:

z меняется от 0 до 1, при фикс. z, r от 0 до z. А φ от 0 до 2π, так как $x^2 + y^2 \leq z^2$ при фикс z представляет круг.

Разберемся с функцией:

$$z - xy = z - r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

Известный факт:

$$dxdydz = rdrd\varphi dz$$

$$\Rightarrow\; I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z (zr - r^3\cos\varphi\sin\varphi)\, dr =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z zrdr - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^z r^3\cos\varphi\sin\varphi dr =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{z^3}{2} d\varphi - \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{z^4}{4}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \pi z^3 dz - \int_0^1 \frac{z^4}{8} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \int_0^1 \frac{z^4}{8} \cdot \left(\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} dz =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \cdot \int_0^1 z^4 \cdot 0\, dz = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$

д)

$$I = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\geq 1 \\ x^2+y^2+z^2\leq 2z}} z^2\, dxdydz$$

Сферические координаты

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad z = r\cos\theta$$

Рассм. огр.:

$x^2+y^2+z^2 \ \geq \ 1 \Rightarrow r^2 \geq 1 \ \Rightarrow \ r \geq 1$

$x^2+y^2+z^2 \leq 2z \ \Rightarrow \ 2r\cos\theta \Rightarrow r \leq 2\cos\theta$, тк $r \geq 0$, то $\cos\theta \geq 0 \ \Rightarrow \ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Также необходимо, чтобы верхний предел r был больше нижнего, поэтому $2\cos\theta \geq 1 \ \Rightarrow \ \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Получаем такие пределы тогда:

r от 1 до $2\cos\theta$, θ от 0 до $\frac{\pi}{3}$, φ от 0 до 2π

Известный факт:

$dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$

Ну тогда получаем и решаем:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^2\cos^2\theta \cdot r^2\sin\theta\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^4\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\theta\sin\theta \cdot \frac{32\cos^5\theta - 1}{5}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (32\cos^7\theta\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta) d\theta$$

Решим внутренний:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (32\cos^7\theta\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta) d\theta$$

Пусть $u = \cos\theta$, тогда $du = -\sin\theta\, d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (32\cos^7\theta\sin\theta - \cos^2\theta\sin\theta) d\theta = \int_1^{\frac{1}{2}} (32u^7 - u^2)(-du) = \int_{\frac{1}{2}}^1 (32u^7 - u^2) du =$$

$$= (4u^8 - \frac{u^3}{3})\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{709}{192}$$

Вернемся:

$$I = \frac{1}{5} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{709}{192}\, d\varphi = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{709}{192} = \frac{709\pi}{480}$$

Ответ: $\frac{709\pi}{480}$

я решил порешать дальше

задача 1

$$I = \int_{-3}^{3} dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$$

где $D = \{(x,y,z) \mid -3 \leq 3, \ 0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}, \ 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\}$

цилиндрические корды:

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

понимаем, что для фикс. $x \in [-3,3] \quad y \in [0, \sqrt{9-x^2}]$, то есть это эквивалентно тому, что $x^2+y^2 \leq 9$ и $y \geq 0$ или в цилиндр. кордах: $r^2 \leq 9 \iff r \in [0,3]$ и $r\sin\theta \geq 0 \iff \sin\theta \geq 0 \iff 0 \leq \theta \leq \pi$

дальше, для фикс x и y, $z \in [9-x^2-y^2]$ или в цилиндр. кордах: $0 \leq z \leq 9-r^2$

Получаем, что в новых кордах пределы меняются так:

r от 0 до $3 \quad \theta$ от 0 до $\pi \quad z$ от 0 до $9-r^2$

известный факт:

$$dxdydz = rdrd\theta dz$$

разберемся с функцией:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = |r| = r$$

считаем интеграл выходит:

$$I = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^2 dr \int_0^{9-r^2} dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^2 \cdot (9-r^2)\, dr =$$
$$= 9\int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^2 dr - \int_0^\pi d\theta \int_0^3 r^4 dr =$$
$$= 81\int_0^\pi d\theta - \frac{243}{5}\int_0^\pi d\theta = \frac{162}{5}\int_0^\pi d\theta = \frac{162}{5}\pi$$

Ответ: $\frac{162}{5}\pi$

задача 4

$$I = \iiint\limits_D e^x \cdot \frac{z-2y}{5z-y} dxdydz$$

Знаем, что D образован плоскостями:

$$\begin{aligned} z-2y=4 &\quad z-2y=5 \\ 5z-y=1 &\quad 5z-y=4 \\ x=1 &\quad x=2 \end{aligned}$$

Сделаем замены:

$$u = z-2y \quad v = 5z-y$$

Отсюда выразим y и z:

$$y = \frac{v-5u}{9} \quad z = \frac{2v-u}{9}$$

Тогда:

$$I = \iiint\limits_{D'} e^x \frac{u}{v} |\det J|\, dxdudv$$

где D' образован плоскостями:

$$\begin{aligned} u=4 &\quad u=5 \\ v=1 &\quad v=4 \\ x=1 &\quad x=2 \end{aligned}$$

и понятно, что:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

тогда:

$$\det J = \begin{vmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{vmatrix} = -\frac{10}{81} + \frac{1}{81} = -\frac{1}{9}$$

Ну и тк теперь мы по сути интегрируем по бруску D', то порядок можем выбрать любой:

т.е. x меняется от 1 до 2, v от 1 до 4, u от 4 до 5

Тогда:

$$I = \int_1^4 dv \int_4^5 -\frac{u}{9v}\ du \int_1^2 e^x dx = -(e^2 - e) \int_1^4 \frac{1}{9v} dv \int_4^5 u\ du =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{2}(e^2 - e) \int_1^4 \frac{1}{v} dv = \frac{\ln 4}{2} \cdot (e^2 - e) = \ln 2(e^2 - e)$$

Ответ: $\ln 2(e^2 - e)$