Листок 3

Кратный интеграл Римана, замена переменных

1. Выведите якобиан полярной замены координат

2. Вычислите:

$$a) \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\geq 1,\\ x^2+y^2\leq 4}} (3x+4y^2)\,dxdy \qquad b) \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \qquad c) \iint\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 2x} \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy$$

$$d) \iint\limits_{x^2+y^2\leq x+y} (x+y)\,dxdy \qquad e) \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)dy \qquad f) \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dy$$

3. Выведите якобианы цилиндрической и сферической замены координат.

4. Вычислите с помощью сферической замены:

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$$

5. Вычислите с помощью циллиндрической замены:

$$\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xzdz$$

6. Вычислите:

$$a) \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq 2z,\\ z\leq 2}} (x^2+y^2)\,dxdydz \qquad b) \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 2z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

$$c) \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leq 1,\\ y^2+z^2\leq x^2,\\ x\geq 0}} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \qquad d) \iiint\limits_{\substack{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\leq 4xy,\\ x,y,z\geq 0}} \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$$

7. Вычислите интеграл

$$\iiint\limits_{D} \cos(y)\frac{x-3z}{2x-z}dxdydz,$$

если область D – параллелепипед, образованный плоскостями

$$x-3z=-3, \quad x-3z=-2,$$
$$2x-z=1, \quad 2x-z=4,$$
$$y=0, \quad y=1.$$

Домашнее задание

1. Вычислите с помощью циллиндрической замены:

$$\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}dz$$

2. Вычислите с помощью сферической замены:

$$\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2z+y^2z+z^3)dz$$

3. Вычислить интегралы:

$$a) \iint\limits_{\substack{1\leq x^2+y^2\leq 49,\\ y\geq 0}} \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\, dxdy \qquad b) \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2x} \frac{x\, dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$c) \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq z^2,\\ 0\leq z\leq 1}} (z-xy)\, dxdydz \qquad d) \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\geq 1,\\ x^2+y^2+z^2\leq 2z}} z^2\, dxdydz$$

4. Вычислите интеграл

$$\iiint\limits_{D} e^x \frac{z-2y}{5z-y} dxdydz,$$

если область D – параллелепипед, образованный плоскостями

$$z-2y=4, \quad z-2y=5,$$

$$5z-y=1, \quad 5z-y=4,$$

$$x=1, \quad x=2.$$

Дополнительные задачи

1. Рассмотрим множество $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Определить множество внутренних, внешних, граничных, предельных и изолированных точек.

2. Пусть E – произвольное множество. Доказать, что множество всех предельных точек E – замкнуто.

3. Привести пример такого множества E, что множество его предельных точек E' непусто, а множество предельных точек множества E' – пусто.

4. a) Может ли множество, состоящее только из изолированных точек, иметь предельные точки?
   b) Пусть множество E содержится в множестве своих предельных точек. Может ли E иметь изолированные точки?

5. Пусть E – множество, а E' – множество предельных точек E. Привести примеры:

   a) $E' = E$

   b) $E' \subset E,\ E' \neq E$

   c) $E' \supset E,\ E' \neq E$

   d) $E \cap E' = \emptyset$

6. Привести примеры покрытия, не допускающего конечного подпокрытия:

   a) отрезка системой отрезков

   b) интервала системой интервалов

   c) интервала системой отрезков

   d) числовой прямой системой интервалоы