Домашняя работа

задача 1

перепишем инфу из условия:

$$MC = 0.5 \quad v_l'(x) = \frac{1}{1+x} \quad v_h'(x) = \frac{2}{1+x}$$

Отсюда можем найти общую ценность потребления x единиц товара:

$$v_l(x) = \int_0^x v_l'(s)ds = \int_0^x \frac{1}{1+s}ds = \ln(1+x)$$
$$v_h(x) = \int_0^x v_h'(s)ds = \int_0^x \frac{2}{1+s}ds = 2\ln(1+x)$$

a)

Фирма предлагает два пакета (q_l, t_l) и (q_h, t_h), потребитель выбирает лучший или отказывается.

Функция прибыли:

$$\pi = \frac{1}{2}(t_l - 0.5x_l) + \frac{1}{2}(t_h - 0.5x_h) \longrightarrow max$$

Из лекции знаем, что должны быть соблюдены след. условия:

$$PC : v_l(x_l) \geq t_l \quad v_h(x_h) \geq t_h$$
$$IC : v_l(x_l) - t_l \geq v_l(x_h) - t_h \quad v_h(x_h) - t_h \geq v_h(x_l) - t_l$$

Было доказано на лекции, что должны будут выполняться только 2 ограничения:

$$v_l(x_l) = t_l$$
$$v_h(x_h) - t_h = v_h(x_l) - t_l$$

Откуда получим:

$$\begin{cases} t_l = \ln(1+x_l) \\ 2\ln(1+x_h) - t_h = 2\ln(1+x_l) - t_l \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_l = \ln(1+x_l) \\ 2\ln(1+x_h) - t_h = 2\ln(1+x_l) - \ln(1+x_l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_l = \ln(1+x_l) \\ t_h = 2\ln(1+x_h) - \ln(1+x_l) \end{cases}$$

Теперь подставим t_l и t_h в функцию прибыли:

$$\pi = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x_l) - 0.5x_l\right) + \frac{1}{2}\left(2\ln(1+x_h) - \ln(1+x_l) - 0.5x_h\right) = \ln(1+x_h) - 0.25x_h - 0.25x_l$$

тк $x_l \geq 0$, а $\pi \longrightarrow max$ и π убывает по x_l то $x_l^* = 0$

Следовательно, π максимизируем по x_h:

$$\frac{d\pi}{dx_h} = \frac{1}{1+x_h} - 0.25 = 0 \Longrightarrow x_h^* = 3$$

Теперь найдем t_l и t_h:

$$t_l^* = \ln(1+x_l^*) = \ln(1) = 0$$
$$t_h^* = 2\ln(1+x_h^*) - \ln(1+x_l) = 2\ln(4)$$

б)

двухчастный тариф:

$$T(x) = A + px$$

Мы можем поставить $A = CS_l(p)$, тогда мы будем обслуживать две группы потребителей или $A = CS_h(p)$, тогда низкий тип не сможет участвовать, но все равно. Проверим, что для монополии лучше:

$$A = CS_l(p) = \int_0^{x_l(p)} (v_l'(x) - p)dx$$

и

$$v_l'(x) = \frac{1}{1+x} = p \implies x_l(p) = \frac{1}{p} - 1 \text{ при } p \leq 1 \text{ - функция спроса}$$

$$v_h'(x) = \frac{2}{1+x} = p \implies x_h(p) = \frac{2}{p} - 1 \text{ при } p \leq 2 \text{ - функция спроса}$$

Тогда:

$$A_l(p) = CS_l(p) = v_l(x_l) - px_l = \ln(1+x_l) - px_l = \ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1 + p = p - \ln(p) - 1$$

Тогда:

$$\pi_l(p) = A_l(p) + (p - MC) \cdot \frac{x_l(p) + x_h(p)}{2} = (p - \ln p - 1) + (p - 0.5)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - 1 + \frac{2}{p} - 1\right)\right) =$$

$$= 1 - \ln p - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\pi_l(p) \to \max_{p \geq 0}$$

$$\pi_l'(p) = -\frac{1}{p} + \frac{3}{4p^2} = 0 \implies p_l = \frac{3}{4}$$

Тогда:

$$A_l = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$$

Теперь можем рассчитать прибыль:

$$\pi_l\left(\frac{3}{4}\right) = -\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{4}{3}$$

Теперь поставим $A = CS_h(p)$:

$$A_h(p) = CS_h(p) = v_h(x_h(p)) - p \cdot x_h(p) = 2\ln\frac{2}{p} - p \cdot \left(\frac{2}{p} - 1\right) = p - 2 + 2\ln 2 - 2\ln p$$

Тогда ф-ия прибыли будет иметь вид:

$$\pi_h(p) = \frac{1}{2} \cdot A_h(p) + \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} x_h(p) =$$

$$= \frac{1}{2}\left((p - 2 + 2\ln 2 - 2\ln p) + (p - \frac{1}{2})(\frac{2}{p} - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \ln 2 - \ln p - \frac{1}{2p}$$

$$\pi_h(p) \to \max$$

Найдем производную приравняем ее к нулю:

$$\pi_h'(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} = \frac{1 - 2p}{2p^2} = 0 \Rightarrow p_h = \frac{1}{2}$$

Посчитаем прибыль и найдем A_h:

$$A_h(0.5) = -\frac{3}{2} + 2\ln 2 - 2\ln\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 2\ln 2$$

$$\pi_2(0.5) = \frac{1}{4} + \ln 2 - \ln\frac{1}{2} - 1 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

Заметим, что:

$$\pi_h > \pi_l \text{ при опт. ценах}$$

$\Rightarrow$ монополист выберет поставить $A = CS_h \Rightarrow$ опт. цена и опт. тариф равны:

$$A^* = -\frac{3}{4} + 4\ln 2 \quad p^* = \frac{1}{2}$$

Ответ: $a)\ (0,0)$ и $(3, 2\ln(4)) \quad b)\ A^* = -\frac{3}{4} + 4\ln 2$ и $p^* = \frac{1}{2}$

задача 3

Вот мои примеры:

1. **Победа и пакетные тарифы**

Это нелинейное ценообразование, чувствительные к цене пассажиры берут базовый тариф. Тем, кому нужен багаж или другие плюшки, могут взять выгодный или максимум тариф! И по сути это позволяет фирме извлечь больше потребительского излишка без знания типа пассажира ну и понятно, что прибыль растет из-за того, что спрос сегментируется по готовности платить за доп плюшки - 2я степень дискриминации. *(хоть и победа не монополия, а олигополия, но можно привести такой пример)*

2. **Ozon premium**

Это также относится к нелинейному ценообразованию. Подписка предлагает разные услуги. Может давать скидки на товары или на доставку товаров. Тут это работает как двучастный тариф: $A + px$. Такая абонентская плата дает гарантию, что какая-то выручка будет, а также у клиента с ней появляется стимул больше потреблять, ибо цена на товары снизилась и появляется ощущение, что нужно деньги, вложенные за подписку, надо оправдать.

done :)

задача 4

перепишем инфу из условия:

$$Q_{A1} = 120 - P_1 \quad Q_{B1} = \frac{80 - P_1}{a}$$

$$Q_{A2} = \frac{80 - P_2}{a} \quad Q_{B2} = 120 - P_2$$

$$MC = 0$$

$$a > 0$$

Суммарный спрос на первом рынке:

$$Q_1(P) = \begin{cases} Q_{A1} + Q_{B1} = 120 + \frac{80}{a} - P\left(1 + \frac{1}{a}\right) \text{ при } 0 \le P \le 80 \\ Q_{A1} = 120 - P \text{ при } 80 < P \le 120 \end{cases}$$

$$\implies R_1(P) = P \cdot Q_1(P) = \begin{cases} P\left(120 + \frac{80}{a}\right) - P^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \text{ при } 0 \le P \le 80 \\ 120P - P^2 \text{ при } 80 < P \le 120 \end{cases} \longrightarrow \max_P$$

Суммарный спрос на втором рынке:

$$Q_2(P) = \begin{cases} Q_{A2} + Q_{B2} = 120 + \frac{80}{a} - P\left(1 + \frac{1}{a}\right) \text{ при } 0 \le P \le 80 \\ Q_{B1} = 120 - P \text{ при } 80 < P \le 120 \end{cases}$$

$$\implies R_2(P) = P \cdot Q_2(P) = \begin{cases} P\left(120 + \frac{80}{a}\right) - P^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \text{ при } 0 \le P \le 80 \\ 120P - P^2 \text{ при } 80 < P \le 120 \end{cases} \longrightarrow \max_P$$

Видим, что рынки у нас зеркальны и спрос и там и там одинаковый считай что. и так как у нас нет дискриминации, то мы ставим одну и ту же цену p на обоих рынках. Поэтому достаточно макс. доход только на одном рынке каком-то *(или же прибыль, так как $MC = 0$)*

Максимизируем *(сначала найдем максимум одной ф-ии, потом другой, потом сравним и выберем что больше)*:

$$(120P - P^2)' = 120 - 2P = 0 \implies P = 60$$

Это парабола с ветвями вниз, вершинка в точке $P = 60$, но нам можно ставить тут только $P \in (80, 120] \implies$ максимум будет достигаться при P стремящемся к 80 справа.

Ну это типо наше $R_1(P)$ при таком максимуме:

$$\lim_{P \to 80+} 120P - P^2 = 3200$$

Окей, теперь продиф. второе:

$$\left(P\left(120 + \frac{80}{a}\right) - P^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)' = \left(120 + \frac{80}{a}\right) - 2P\left(1 + \frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow P = \frac{20(3a+2)}{a+1} = 20 \cdot \frac{3a+2}{a+1}$$

при этом у нас $0 \le P \le 80$

тогда:

$$\frac{20(3a+2)}{a+1} \le 80 \Longleftrightarrow 3a+2 \le 4a+4 \Longleftrightarrow 0 \le a+2$$

что истина всегда, так как по условию $a > 0$, тогда это максимум. посчитаем выручку на этом рынке:

$$R_1\left(\frac{20(3a+2)}{a+1}\right) = \frac{400(3a+2)^2}{a(a+1)}$$

$$\frac{400(3a+2)^2}{a(a+1)} \ge 3200 \Longleftrightarrow a \in (-\infty, -1) \, \cup \, (0, +\infty)$$

Выходит, так как по условию, у нас $a > 0$, то мы выберем $p = \frac{20(3a+2)}{a+1}$, ибо при нем выручка *(прибыль)* выше!

Так как рынков у нас два, то итоговая прибыль фирмы будет:

$$\pi = 2 \cdot \frac{400(3a+2)^2}{a(a+1)} = \frac{800(3a+2)^2}{a(a+1)}$$

б)

Расчитаем потреб. излишки для каждой группы на каждом рынке:

Для группы A:

- на рынке $M_1: \; Q_{A1} = 120 - P_1 \Rightarrow CS_{A1}(P_1) = \frac{1}{2}(120 - P_1)^2$
- на рынке $M_2: \; Q_{A2} = \frac{80-P_2}{a} \Rightarrow CS_{A2}(P_2) = \frac{1}{2}\frac{(80-P_2)^2}{a}$

Для группы B:

- на рынке $M_2: \; Q_{B2} = 120 - P_2 \Rightarrow CS_{B2}(P_2) = \frac{1}{2}(120 - P_2)^2$
- на рынке $M_1: \; Q_{B1} = \frac{80-P_1}{a} \Rightarrow CS_{B1}(P_1) = \frac{1}{2}\frac{(80-P_1)^2}{a}$

Если группа A выбирает скидку x%, то цена на M_1 становится $P \cdot (1-x)$. На M_2 не меняется. Тогда посчитаем на сколько изменится потреб. излишек:

$$D_{Ax} = CS_{A1}(P(1-x)) - CS_{A1}(P) = \frac{1}{2}\left((120 - P(1-x))^2 - (120-P)^2\right)$$

Если же группа A выберет скидку y%, то цена на M_1 не изменится, а на M_2 станет $P \cdot (1-y)$. Тогда посчитаем на сколько изменится потреб. излишек:

$$D_{Ay} = CS_{A2}(P(1-y)) - CS_{A2}(P) = \frac{1}{2}\frac{(80 - P(1-y))^2 - (80-P)^2}{a}$$

Все то же самое проделаем и для группы B:

$$D_{Bx} = CS_{B1}(P(1-x)) - CS_{B1}(P) = \frac{1}{2}\frac{(80 - P(1-x))^2 - (80-P)^2}{a}$$

$$D_{By} = CS_{B2}(P(1-y)) - CS_{B2}(P) = \frac{1}{2}\left((120 - P(1-y))^2 - (120-P)^2\right)$$

При выборе скидки потребители смотрят, на сколько увеличился потреб. излишек, то есть смотрят на найденные D_{Ax} и т.д.

Окей, теперь рассмотрим следующие случаи:

- A выбирает x, B выбирает y:

Тогда прибыль имеет вид:

$$\pi = P(1-x)Q_{A1}(P(1-x)) + PQ_{A2}(P) + PQ_{B1}(P) + P(1-y)Q_{B2}(P(1-y))$$

Подставим:

$$\pi = P(1-x)(120 - P(1-x)) + P\frac{80-P}{a} + P\frac{80-P}{a} + P(1-y)(120 - P(1-y)) =$$

$$= P(1-x)(120 - P(1-x)) + P(1-y)(120 - P(1-y)) + 2P\frac{80-P}{a}$$

- Обе группы выбирают x:

Тогда прибыль имеет вид:

$$\pi = P(1-x)(Q_{A1}(P(1-x)) + Q_{B1}(P(1-x))) + P(Q_{A2}(P) + Q_{B2}(P)) =$$

$$= P(1-x)(120 + \frac{80}{a} - P(1-x)\left(1+\frac{1}{a}\right)) + P(120 + \frac{80}{a} - P\left(1+\frac{1}{a}\right))$$

- Все выбирают y:

Тут симметрично с прошлым рассмотренным случаем.

- A выбирает y, B выбирает x:

$$\pi = PQ_{A1}(P) + P(1-y)Q_{A2}(P(1-y)) + P(1-x)Q_{B1}(P(1-x)) + PQ_{B2}(P) =$$

$$= 2P(120-P) + P(1-y)\frac{80 - P(1-y)}{a} + P(1-x)\frac{80-P(1-x)}{a}$$

А без скидки ф-ия прибыли у нас такая:

$$\pi_{no} = 2P(120-P) + 2P\frac{80-P}{a}$$

короче дальше я без понятия как решать : (