Домашняя работа

Задание 1

Введем след. обозначения:

- червы: w_1
- бубны: w_2
- пики: w_3
- трефы: w_4

Тогда:

$$\Omega = \{ w_1, w_2, w_3, w_4 \}$$

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{ w_1 \}, \{ w_2 \}, \{ w_3, w_4 \}, \{ w_1, w_2 \}, \{ w_1, w_3, w_4 \}, \{ w_2, w_3, w_4 \}, \Omega \}$$

Окей, будем пользоваться этим:

> Замечание. Вообще, пусть функция f действует из множества X в множество Y, и заданы σ-алгебры $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ подмножеств X и Y соответственно. Функция f называется *измеримой*, если для любого множества $B \in \mathcal{G}$ его полный прообраз $f^{-1}(B)$ принадлежит $\mathcal{F}$.

Тк у нас ф-ии с конечным числом значений $\{ a_k \}$, то:

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{a_k \in B} f^{-1}(\{ a_k \})$$

Поэтому достаточно будет проверить прообразы одноточечных мн-в для определения измеримости :)

Начнем с ξ:

$$\xi^{-1}(\{1\}) = \{w_1\} \in \mathcal{F}, \quad \xi^{-1}(\{2\}) = \{w_2\} \in \mathcal{F}, \quad \xi^{-1}(\{3\}) = \{w_3, w_4\} \in \mathcal{F}$$

Отсюда вывод, что ξ измеримая!

Теперь разберемся с η:

$$\eta^{-1}(\{2\}) = \{w_3\} \notin \mathcal{F}$$

Поэтому она неизмеримая!

Ответ: изм., неизм.

Задание 2

Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Если $a \in B$, тогда $\xi(w) \in B \ \forall w \in \Omega$. Поэтому:

$$\xi^{-1}(B) = \Omega \in \mathcal{F}$$

А если $a \notin B$, тогда:

$$\xi^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{F}$$

Поэтому по опред. ф-ия измеримая

Ответ: измеримая

Задание 3

Сначала докажем достаточность. Как мы поняли из прошлого задания, постоянная ф-ия измерима относительно любой сигма алгебры, поэтому и для $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ она будет измерима. доказано $:)$

Докажем необходимость теперь. У нас есть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ и ξ является измеримой относительно $\mathcal{F}$

От противного. $\exists w_1, w_2 \in \Omega : \xi(w_1) \neq \xi(w_2)$. Обозначим $a = \xi(w_1)$. Мн-во $\{a\} \subset \mathbb{R}$ и является борелевским, поэтому:

$$\xi^{-1}(\{a\}) = \{w \in \Omega : \xi(w) = a\}$$

Но мы знаем, что $\xi^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$, так как, как минимум, $w_1 \in \xi^{-1}(\{a\})$, но и $\xi^{-1}(\{a\}) \neq \Omega$, так как $w_2 \notin \xi^{-1}(\{a\})$, ибо $a \neq \xi(w_2)$

Поэтому получаем, что $\xi^{-1}(\{a\}) \notin \mathcal{F}$, противоречие!

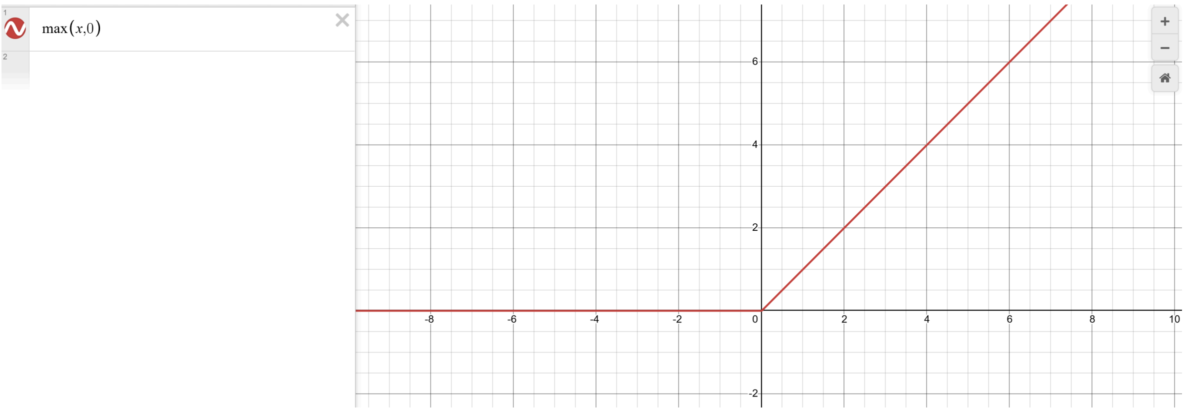
доказано $:)$

Задание 4

пункт а

$$\xi_+(w) = \max(\xi(w), 0)$$

Рассм. ф-ию $g(x) = \max(x, 0)$. Она у нас непрерывная, поэтому является борелевско измеримой. Можно посмотреть на график. *(вообще она является измеримой, так как у непрерывной функции прообраз любого открытого множества открыт, а борелевская сигма алгебра порождается всеми открытыми мн-ми, вот и все)*



Окей, супер. Теперь заметим, что $\xi_1(w) = g(\xi(w))$. Тогда для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ будет выполняться:

$$\xi_+^{-1}(B) = \xi^{-1}(g^{-1}(B))$$

Но тк g измерима, то $g^{-1}(B)$ - борелевское мн-во. А так как ξ измерима относительно $\mathcal{F}$, то получаем, что $\xi^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$

чтд

пункт 6

Для этого пункта все то же самое :). Только вводим g как $g = -\min(x, 0)$. Все остальные рассуждения аналогичны.

Задача 5

Вспомним, что:

> **Распределение Пуассона.** Говорят, что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, и пишут: $\xi \in \Pi_\lambda$, если ξ принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $\mathsf{P}(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.
>
> Распределение Пуассона возникло в теореме Пуассона (с. 47) как предельное распределение для числа успехов в n испытаниях схемы Бернулли, когда число испытаний n увеличивается, а вероятность успеха уменьшается обратно пропорционально n. Поэтому распределение Пуассона называют иначе *распределением числа редких событий.*

Окей, пусть у нас есть $m \in \mathbb{N}$, тогда:

$$\mathbb{E}[X(X-1)\ldots(X-m+1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1) \cdot P(X = k)$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Заметим, что при $k < m$ у нас в скобочках где-то обязательно возникнет нолик и все занулит, поэтому:

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Или

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = e^{-\lambda}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{k!}{(k-m)!}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = e^{-\lambda}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-m)!}$$

Пусть $j = k - m$, тогда:

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j+m}}{j!}$$

По итогу получаем:

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = e^{-\lambda}\cdot\lambda^m\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Пользуемся подсказочкой :) и выходит:

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-m+1)] = e^{-\lambda}\cdot\lambda^m\cdot e^{\lambda} = \lambda^m$$

Пользуясь этим, получаем:

пункт а

$$\mathbb{E}[X] = \lambda$$

пункт б

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \lambda^2$$

пункт с

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)+X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = \lambda^2 + \lambda$$

пункт д

$$\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)] = \lambda^3$$

пункт е

$$X(X-1)(X-2)=X^3-3X^2-2X$$

Тогда

$$X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+3X-2X$$

Получим:

$$\mathbb{E}[X^3]=\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]+3\mathbb{E}[X(X-1)]+\mathbb{E}[X]=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$$

пункт эф

$$\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)(X-3)]=\lambda^4$$

пункт жэ

$$X(X-1)(X-2)(X-3)=X^4-6X^3+11X^2-6X$$

Тогда:

$$X^4=X(X-1)(X-2)(X-3)+6X(X-1)(X-2)+$$
$$+18X(X-1)+6X-11X(X-1)-11X+6X$$
$$=X(X-1)(X-2)(X-3)+6X(X-1)(X-2)+7X(X-1)+X$$

Тогда:

$$\mathbb{E}[X^4]=\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)(X-3)]+6\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]+$$
$$+7\mathbb{E}[X(X-1)]+\mathbb{E}[X]=$$
$$=\lambda^4+6\lambda^3+7\lambda^2+\lambda$$

Ответ: ответы написаны под каждым пунктом