Монополия

Задача 1

Перепишем инфу из условия:

$$p(y) = 24 - y \quad c(y) = y^2 + 12$$

Пункт 1

Найдем функции выручки и предельной выручки:

$$R(y) = p(y) \cdot y = (24 - y) \cdot y = 24y - y^2$$

$$MR(y) = \frac{dR(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(24y - y^2) = 24 - 2y$$

Найдем функцию предельных издержек:

$$MC(y) = \frac{dc(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(y^2 + 12) = 2y$$

Функция прибыли у монополии имеет вид:

$$\pi(y) = R(y) - c(y)$$

Чтобы ее максимизировать, берем производную и приравниваем ее к нулю:

$$\pi'(y) = MR(y) - MC(y) = 0$$

$$\Rightarrow MR(y) = MC(y) - \text{условие макс. прибыли у монополии}$$

Окей, приравняем:

$$24 - 2y = 2y \iff 4y = 24 \iff y^* = 6$$

Тогда:

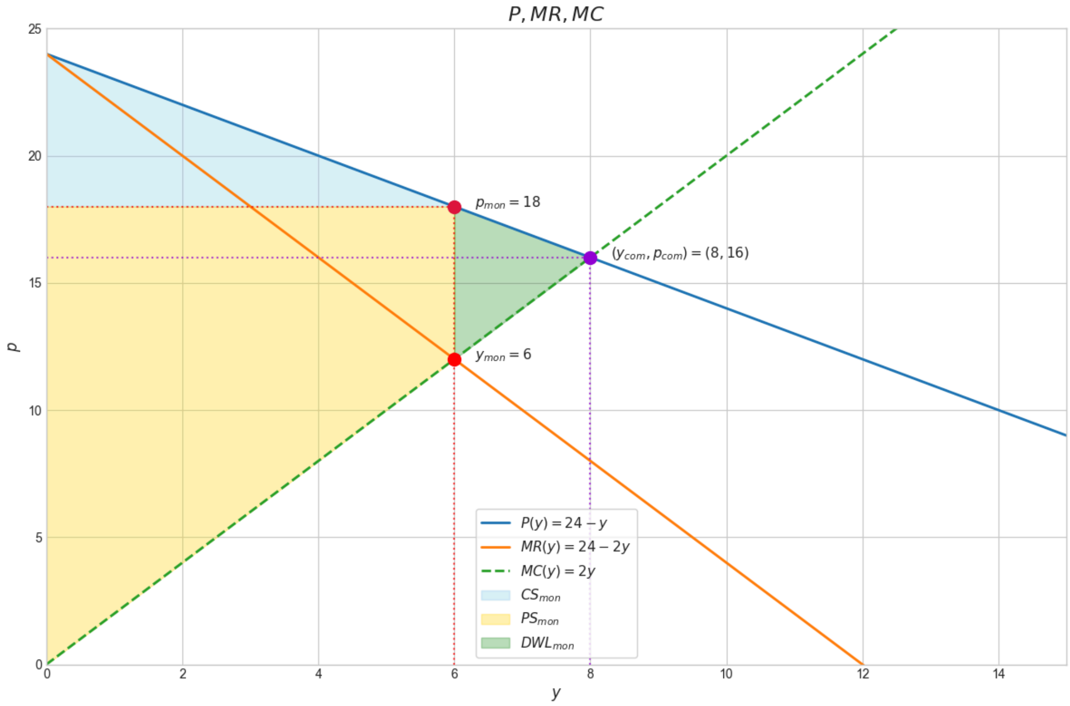
$$p^* = p(6) = 24 - y^* = 24 - 6 = 18$$

И:

$$\pi(6) = 60 \text{ (ну тут сами посчитайте, если не верите)}$$

Снизу будет график:

\



\

Пункт 2

Давайте найдем сначала выпуск и цену фирмы в условиях совершенной конкуренции:

Функция прибыли в таком случае имеет вид:

$$\pi(y) = py - c(y) \text{ где } p \text{ - константа}$$

$$\pi'(y) = p - MC(y) = 0 \text{ - условие максимизации}$$

Тогда:

$$MC(y) = p$$

Подставим:

$$2y = 24 - y \Longrightarrow y_{comp} = 8$$

Откуда получим цену:

$$p_{comp} = 24 - 8 = 16$$

Теперь рассчитаем CS, PS, DWL:

Вспомним определения CS и PS:

CS *(consumer surplus)* - это по сути **денежное измерение чистой выгоды**, которую потребитель получает от покупки товара. То есть, это разница между тем, сколько потребитель был **максимально готов заплатить за товар**, и тем, сколько он **заплатил в действительности**.

Как его рассчитать?

$I)$

$$CS(p) = v(x(p)) - p \cdot x(p), \text{ где}$$

$x(p) - \text{объем спроса при цене } p$
$v(x(p)) - \text{общая ценность этого объема потребления для потребителя}$
$p \cdot x(p) - \text{реальные расходы на покупку этого объема}$

$II)$

$\text{Так как } v'(x) = p(x), \text{ то } v(x) = \int_0^x v'(q)dq = \int_0^x p(q)dq$

Подставим это в формулу (I):

$$CS(p) = \int_0^{x(p)} p(q)dq - p \cdot x(p) = \int_0^{x(p)} (p(q) - p)\; dq$$

Что по сути является площадью фигуры, зажатой между кривой спроса и прямой цены.

Имея данную теорию на руках, найдем CS:

$$CS_{mon} = \int_0^6 (24 - y - 18)dy = \left(-\frac{y^2}{2} + 6y \right)\Bigg|_0^6 = 18$$

Теперь разберемся с PS также:

PS *(producer surplus)* - это **денежное измерение** чистой выгоды, которую производитель получает от продажи товара на рынке. То есть, это разница между **ценой, по которойпроизводитель продает товар** и **минимальной ценой, по которой он был бы готов его продать**. *(а мин. цена, по которой производитель был бы готов продать доп. единицу товара это $-MC$)*

Как его рассчитать?

$I)$

$$PS = R - VC, \text{ где}$$

$R = p \cdot y \; - \; \text{общая выручка}$
$VC \; - \; \text{переменные издержки}$

$II)$

Знаем, что $VC'(y) = MC(y)$, тогда $VC(y) = \int_0^y MC(q)dq$

Тогда получим, подставив это в (I):

$$PS = p \cdot y - \int_0^y MC(q)dq = \int_0^y \Big(p - MC(q) \Big) dq$$

Отсюда, кстати, можно вывести красивый факт, что $PS = \pi + FC$

То есть, по сути это площадь фигуры, зажатой между прямой цены и кривой предельных издержек *(в совершенной конкуренции - кривой предложения)*.

Тогда рассчитаем PS для нашей задачи:

$$PS = \int_0^6 \Big(18 - 2y\Big)dy = \Big(-y^2 + 18y\Big)\Big|_0^6 = 72$$

Теперь разберемся с DWL:

DWL - это **потеря экономической эффективности**, когда на рынке производится и покупается неоптимальное колво товара.

Немного интуиции: представьте, что в экономике есть возможность совершить взаимовыгодные сделки, но они почему-то не происходят:

Например, потребитель готов купить товар за 15 рупий, а производителю его производство обходится в 10 рупий. Сделка при любой цене между 10 и 15 рублями выгодна обоим и увеличила бы общественное благосостояние на $15 - 10 = 5$ рупий, но эти 5 рупий исчезают, например из-за монополной цены в 20 рупий. То есть по факту они не достаются ни производителю, ни потребителю, поэтому это и есть мертвый груз!

Как рассчитать DWL?

$I)$

$$DWL = W_{comp} - W_{mon}, \text{ где :}$$

$W_{comp} = CS_{comp} + PS_{comp}$
$W_{mon} = CS_{mon} + PS_{mon}$

$II)$

DWL - сумма всех потерянных выгод от несовершенных сделок:

$$\int_{y_{mon}}^{y_{comp}} \Big(p(y) - MC(y)\Big)dy$$

То есть это площадь фигуры, **зажатой кривой спроса и кривой предельных издержек**.

Окей, рассчитаем:

$$DWL = \int_6^8 \Big(24 - y - 2y\Big)dy = \Big(24y - \frac{3}{2}y^2\Big)\Big|_6^8 = 96 - 90 = 6$$

Пункт 3

Вводится налог 8 баксов на каждую единицу товара. Тогда теперь $c_t(y)$ будет иметь вид:

$$c_t(y) = y^2 + 8y + 12 \Longrightarrow MC(y) = 2y + 8$$

Тогда аналогично, как и выше, решим задачу монополии:

$$MR = MC - \text{ условие оптимума}$$

$$24 - 2y = 2y + 8 \Longleftrightarrow y_t = 4$$

Теперь найдем p:

$$p(4) = 24 - 4 = 20 \Rightarrow p_t = 20$$

Теперь найдем π:

$$\pi(y) = 24y - y^2 - y^2 - 8y - 12 = 16y - 2y^2 - 12$$

$$\pi(4) = 20 \Rightarrow \pi_t = 20$$

Давайте теперь тогда рассчитаем CS, PS, и W:

$$CS_t = \int_0^4 (24 - y - 20)dy = \left(\frac{-y^2}{2} + 4y\right)\Bigg|_0^4 = 8$$

$$PS_t = \int_0^4 (20 - 2y - 8)dy = (-y^2 + 12y)\Big|_0^4 = 32$$

Но в данном случае $W_t \neq CS_t + PS_t$, так как те деньги, которое забрало государство с налогов, не являются DWL и никуда не испаряются и их тоже надо учесть в благосостоянии общества, тогда:

$$W_t = CS_t + PS_t + T$$

Где:

$$T = 8 \cdot 4 = 32,\ 4\ -\ \text{выпуск},\ 8\ -\ \text{налог.}$$

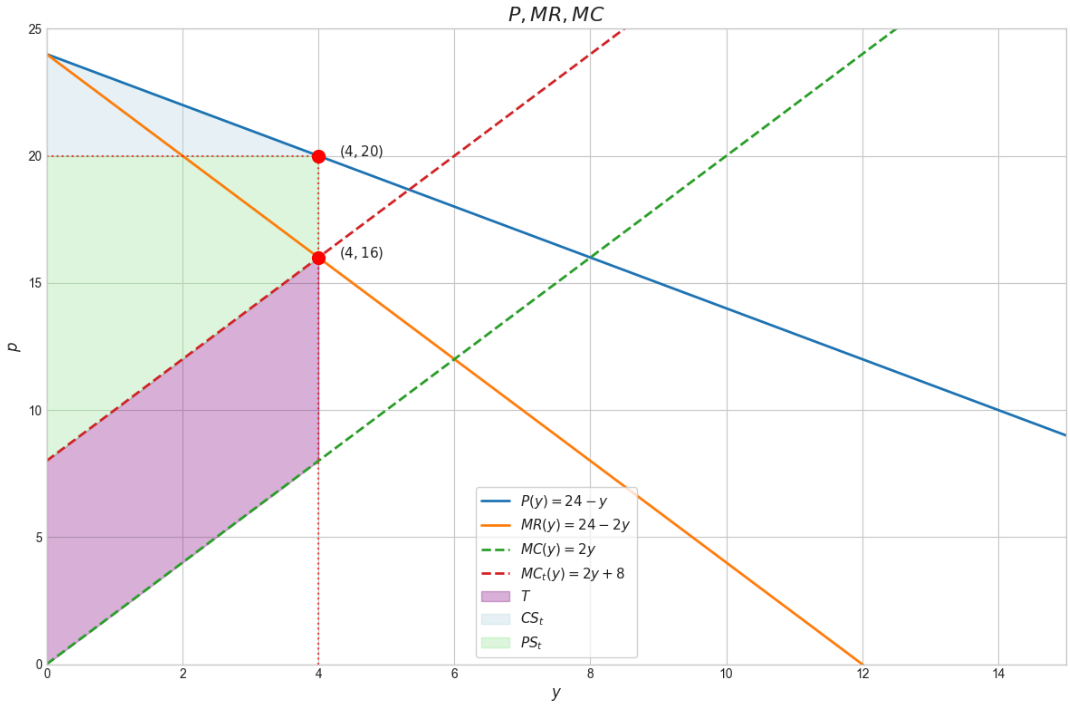
Итого:

$$W_t = 8 + 32 + 32 = 72$$

еще тут T можно рассчитать и понять как площадь фигуры на графике зажатой между кривыми MC и MC_t при $y \in [0, 4]$ ибо она описывает ту область, когда потребители могли приобрести товар и производитель был готов им его продать, но из-за введения налога не смог, то есть $T = \int_0^4 (MC(y) - MC_t(y))dy = \int_0^4 (2y + 8 - 2y)dy = \int_0^4 8dy = 8 \cdot 4 = 32$, ура сошлось!

можете полюбоваться на график, который я любезно нарисовал:

\



\

пункт 4

Прибыль до налога имела вид:

$$\pi(y) = R(y) - c(y)$$

После введения пропорционального налога (τ) прибыль будет равна:

$$\pi_{pr} = (1 - \tau)\pi(y)$$

То есть у нас просто добавляется множитель $1 - \tau$, который не меняет нули производной $\pi'(y) \Rightarrow$ оптимальный выпуск и цена не изменяются $\Rightarrow y^* = 6,\ p^* = 18$

А так как CS зависит только от p и y, то он не изменяется!

$$CS_{pr} = \frac{1}{2}(24 - 18) \cdot 6 = 18$$

PS же, очевидно, изменится и уменьшится в $1 - \tau$ раз

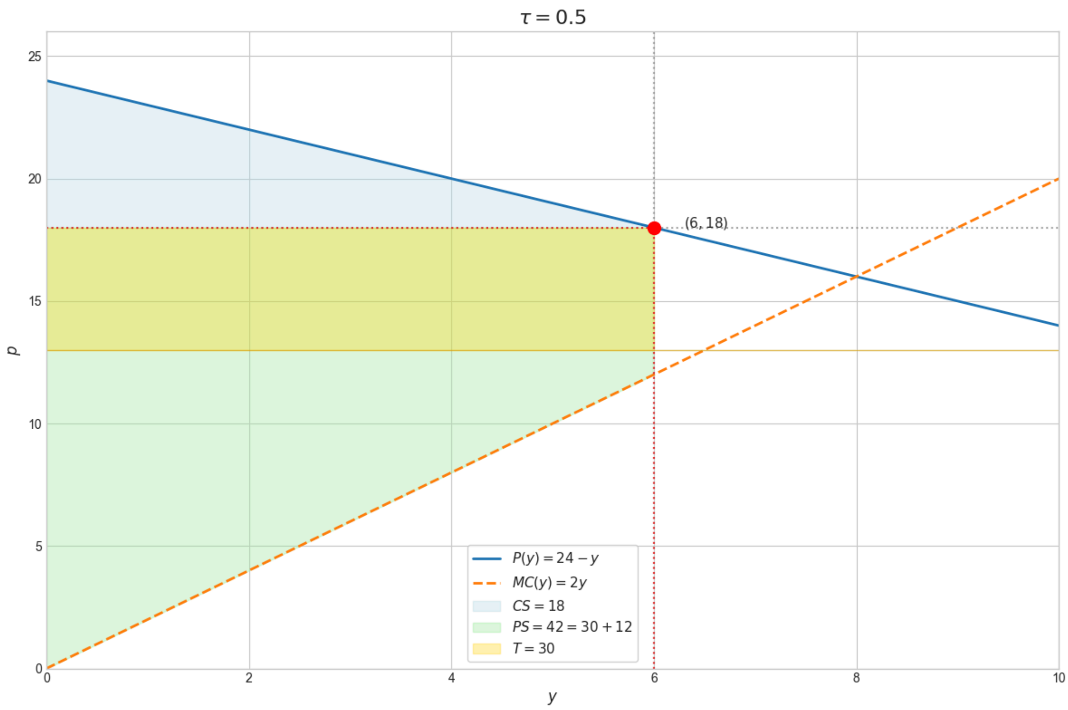
$$PS_{pr} = R - VC = \pi_{pr} + FC = (1 - \tau)\pi(y) + FC = (1 - \tau) \cdot 60 + 12 = (1 - \tau) \cdot PS_{old}$$

Касаемо общественного благосостояния, оно не изменится:

$$W_{pr} = CS_{pr} + PS_{pr} + T_{pr} = 18 + (72 - 60\tau) + 60\tau = 90$$

Смотрите график:

\



\

Задача 2

пункт 1

Перепишем инфу из условия:

$$c(y) = \frac{5}{3}y^2 \quad p_1(y_1) = 10 - y_1 \quad p_2(y_2) = 13 - \frac{1}{2}y_2$$

$$y_1(p_1) = 10 - p_1 \quad y_2(p_2) = 26 - 2p_2$$

$\Longrightarrow$ при $p \in [0, 10]$ потребляют 2 рынка и $y(p) = y_1(p) + y_2(p) = 10 - p + 26 - 2p = 36 - 3p \Rightarrow p(y) = 12 - \frac{1}{3}y$

а при $p \in (10, 13]$ потребляет только 2-ой рынок и $y(p) = 26 - 2p \Rightarrow p(y) = 13 - \frac{1}{2}y$

$0 \leq 12 - \frac{1}{3}y \leq 10 \Rightarrow y \in [6, 36]$

$10 < 13 - \frac{1}{2}y \leq 13 \Rightarrow y \in [0, 6)$

Тогда получим кусочную обратную кривую спроса:

$$p(y) = \begin{cases} 13 - \frac{1}{2}y, \ 0 \leq y < 6 \\ 12 - \frac{1}{3}y, \ 6 \leq y \leq 36 \end{cases}$$

Теперь решим самую обычную задачу монополии:

$$MR = MC - \text{ условие максимизации}$$

$$MR(y) = R'(y) = (p(y) \cdot y)' = \begin{cases} (13y - \frac{1}{2}y^2)', \ 0 \le y < 6 \\ (12y - \frac{1}{3}y^2)', \ 6 \le y \le 36 \end{cases} = \begin{cases} 13 - y, \ 0 \le y < 6 \ \ (1) \\ 12 - \frac{2}{3}y, \ 6 \le y \le 36 \ \ (2) \end{cases}$$

$$MC(y) = c'(y) = \left(\frac{5}{3}y^2\right)' = \frac{10}{3}y$$

Приравняем сначала (1) к MC:

$$13 - y = \frac{10}{3}y \Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow p_1 = 13 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{23}{2}$$

Найдем тогда прибыль с таким выпуском и такой ценой:

$$\pi_1(y) = R(y) - c(y) = 13y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{5}{3}y^2 = 13y - \frac{13}{6}y^2 - \text{при } y \in [0, 6)$$

$$\Rightarrow \pi_1(3) = 39 - \frac{13 \cdot 9}{6} = \frac{39}{2}$$

Теперь приравняем (2) к MC:

$$12 - \frac{2}{3}y = \frac{10}{3}y \Rightarrow y_2 = 3, \text{ но тут } y \in [6, 36]$$

Посмотрим на функцию прибыли в случае с двумя рынками:

$$\pi_2(y) = 12y - \frac{1}{3}y^2 - \frac{5}{3}y^2 = 12y - 2y^2$$

это парабола с ветвями вниз, вершина в $y = 3$, но так как $y \in [6, 36]$, то макс. значение будет достигаться тогда при $y = 6$.

Проверим, какая именно прибыль будет:

$$\pi_2(6) = 0 < \pi_1(3) = \frac{39}{2}$$

Тогда получаем, что **оптимальный выпуск, оптимальная цена и прибыль** равняются:

$$y^* = 3 \quad p^* = \frac{23}{2} \quad \pi^* = \frac{39}{2}$$

пункт 2

Для того, чтобы рассчитать DWL, решим задачу фирмы в условиях совершенной конкуренции:

$$MC = p - \text{условие максимизации}$$

Сначала приравняем к (2)

$$\frac{10}{3}y = 12 - \frac{1}{3}y \Rightarrow y = \frac{36}{11}$$

Но тут $y \in [6, 36] \Rightarrow$ нет пересечения!

Поэтому теперь приравняем к (1):

$$\frac{10}{3}y = 13 - \frac{1}{2}y \Rightarrow y_{comp} = \frac{78}{23}$$

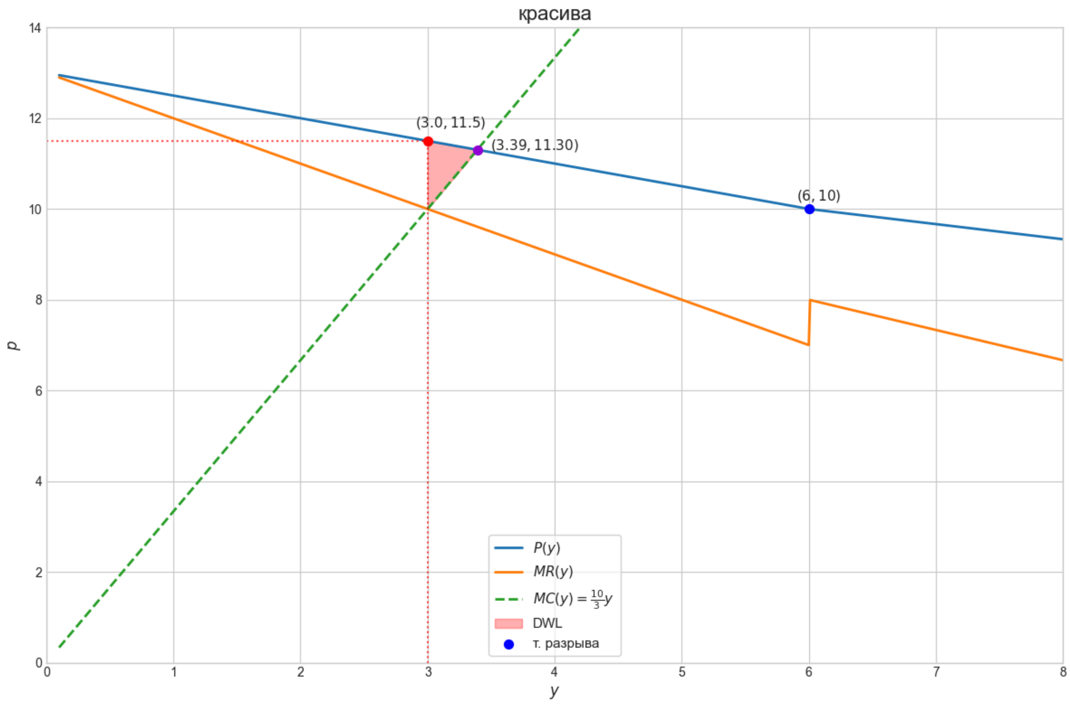
$y_{comp} \in [0, 6) \Rightarrow$ подходит!

Найдем тогда теперь DWL:

$$DWL = \int_3^{\frac{78}{23}} \left(13 - \frac{1}{2}y - \frac{10}{3}y\right) dy = \frac{27}{92}$$

Любуйтесь на график теперь:

\



\

пункт 3

Теперь мы выбираем объемы выпусков для двух рынков, то есть y_1 и y_2.

Тогда ф-ия прибыли имеет вид:

$$\pi(y_1, y_2) = p_1y_1 + p_2y_2 - c(y_1 + y_2) = p_1(y_1) \cdot y_1 + p_2(y_2) \cdot y_2 - \frac{5}{3}(y_1 + y_2)^2 =$$

$$= p_1(y_1) \cdot y_1 + p_2(y_2) \cdot y_2 - \frac{5}{3}y_1^2 - \frac{5}{3}y_1y_2 - \frac{5}{3}y_2^2 =$$

$$= 10y_1 - y_1^2 + 13y_2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{5}{3}y_1^2 - \frac{5}{3}y_1y_2 - \frac{5}{3}y_2^2 =$$

$$= 10y_1 - \frac{8}{3}y_1^2 + 13y_2 - \frac{13}{6}y_2^2 - \frac{5}{3}y_1y_2$$

Можем поступить 2мя способами:

- просто в тупую найти y_1 и y_2 при которых $\pi(y_1, y_2) \to \max$
- воспользоваться тем фактом, что $MR_1(y_1) = MC(y_1 + y_2)$ и $MR_2(y_2) = MC(y_1 + y_2)$, которое берется отсюда:

$$\frac{\partial \pi(y_1, y_2)}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}(p_1(y_1) \cdot y_1) + \frac{\partial}{\partial y_1}(p_2(y_2) \cdot y_2) - \frac{\partial c(y_1 + y_2)}{\partial y_1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}R_1(y_1) + \frac{\partial}{\partial y_1}R_2(y_2) - C'(y_1 + y_2) =$$

$$= MR_1(y_1) - MC(y_1 + y_2) = 0$$

Дифф. по y_2 происходит точно также. Можете сами перепроверить и убедиться

Короче получаем систему:

$$\begin{cases} \Big((10 - y_1) \cdot y_1\Big)' = \frac{10}{3}(y_1 + y_2), \\ \Big((13 - \frac{1}{2}y_2) \cdot y_2\Big)' = \frac{10}{3}(y_1 + y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 10 - 2y_1 = \frac{10}{3}(y_1 + y_2), \\ 13 - y_2 = \frac{10}{3}(y_1 + y_2) \end{cases} \iff (y_1^*, y_2^*) = (0, 3)$$

Отсюда еще и получим цены, подставив в ф-ии обратного спроса:

$$(p_1^*, p_2^*) = (10, \frac{23}{2})$$

Ну и получим прибыль:

$$\pi(0, 3) = \frac{39}{2}$$

пункт 4

ну тут выводы делайте сами собственно!

Задача 4

пункт 1

У нас есть две группы потребителей. Данный пункт о двухставочном тарифе. Для каждой группы мы устанавливаем:

- Фикс плату A за право покупки
- Цену за единицу товара p

Для начала нам надо рассчитать потребит. излишки для каждой группы.

Для лин. функции спроса $y = a - p$ потреб. излишек вычисляется как $CS(p) = \frac{1}{2} \cdot (a - p)^2$

Тогда для группы H:

$$y^H(p) = 4 - p \Rightarrow CS_H = \frac{1}{2}(4-p)^2$$

Для группы L:

$$y^L(p) = 3 - p \Rightarrow CS_L = \frac{1}{2}(3-p)^2$$

В данном случае мы устанавливаем фикс. плату равную потреб. излишку:

$$A = CS(p)$$

Тогда прибыль монополиста от одного потреб. i:

$$\pi_i = A_i + (p_i - MC) \cdot y_i, \text{ где } MC = 1 \text{ по условию задачи}$$

Для группы H:

$$\pi_H(p) = \frac{1}{2}(4-p)^2 + (p-1)\cdot(4-p) = 4 + p - \frac{1}{2}p^2 \text{ — парабола с ветвями вниз}$$

$$\pi_H(p) \to \max$$

$$\frac{d\pi_H(p)}{dp} = 1 - p = 0 \Rightarrow p_H^* = 1$$

$$A_H^* = CS_H(1) = \frac{1}{2}\cdot 9 = 4.5$$

$$\pi_H(1) = 4.5$$

Для группы L:

$$\pi_L(p) = \frac{1}{2}(3-p)^2 + (p-1)(3-p) = 1.5 + p - 0.5p^2$$

$$\pi_L(p) \to \max$$

$$\frac{d\pi_L(p)}{dp} = 1 - p = 0 \Rightarrow p_L^* = 1$$

$$A_L^* = CS_L(1) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

$$\pi_L(1) = 2$$

Тогда общая прибыль будет иметь вид:

$$\pi_{total} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 4.5 = 3.25$$

пункт 2

Теперь мы должны установить одинаковый двухставочный тариф для обеих групп.

У нас есть две стратегии:

- Обслуживать две группы. Тогда должно выполняться условие: $A \le CS_L(p)$ *(чтобы низкий тип смог участвовать)*. Но мы поставим $A = CS_L(p)$, ибо мы макс. прибыль и хотим забрать весь излишек потребителя!
- Обслуживать только самых богатых и крутых, то есть группу H. Тогда мы поставим $A = CS_H(p)$

Функции потреб. излишка мы уже вывели:

$$CS_L = \frac{1}{2}(3-p)^2$$

$$CS_H = \frac{1}{2}(4-p)^2$$

Разберемся сначала с 1-ой стратегией:

$$\pi_1(p) = (m_H + m_L) \cdot A + (p-1) \cdot (m_H \cdot y_H(p) + m_L \cdot y_L(p))$$

m_L и m_H это просто соотношение количества людей в группах

$$\pi_1(p) = CS_L(p) + (p-1) \cdot \frac{1}{2}(y_H(p) + y_L(p)) =$$

$$= \frac{1}{2}(3-p)^2 + \frac{1}{2}(p-1)(7-2p) =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}p^2$$

— парабола с ветвями вниз!

$$\pi_1(p) \to \max$$

$$\pi_1'(p) = \frac{3}{2} - p = p_1^* = \frac{3}{2}$$

Тогда:

$$A_1^* = CS_L(1.5) = 1.125$$

$$\pi_1^* = 2.125$$

мб я где-то ошибся в рассчетах, перессчитайте сами, пожалуйста

Разберемся со стратегией 2:

$$\pi_2(p) = m_H \cdot A + (p-1)m_H \cdot y_H(p) = \frac{1}{4}(4-p)^2 + \frac{1}{2}(p-1)(4-p) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{4}p^2$$

— парабола с ветвями вниз

$$\pi_1(p) \to \max$$

$$\Rightarrow \frac{d\pi_2(p)}{dp} = 0.5 - 0.5p = 0 \Rightarrow p_2^* = 1$$

Тогда:

$$A_2^* = CS_H(1) = 4.5$$

$$\pi_2^* = 2.25$$

Тогда т.к. $\pi_2^* > \pi_1^*$ мы выбираем 2-ую стратегию и обслуживаем только высокий тип!

пункт 3

В данном случае мы предлагаем два тарифа (A_H, p_H) и (A_L, p_L), но **каждый потребитель сам выбирает, какой тариф использовать!**

У нас должны быть соблюдены след. ограничения:

- **Participation constraints (PC):**
  - $PC_H: \quad CS_H(p_H) \geq A_H$
  - $PC_L: \quad CS_L(p_L) \geq A_L$
- **Incentive constraints (IC):**
  - $IC_H: \quad CS_H(p_H) - A_L \geq CS_H(p_L) - A_L$
  - $IC_L: \quad CS_L(p_L) - A_L \geq CS_L(p_H) - A_H$

Немного о смысле данных ограничений. Тут будет предложена некая интуиция. К прочтению необязательно.

Представьте, что мы знаем, что существует два типа потребителей в экономике L и H. Мы знаем доли каждого типа *(то есть сколько их и их соотношение к общему числу)*. Но мы не можем определить, к какому типу относится конкретный потребитель, когда он к нам приходит что-то покупать, например.

Тогда мы создаем такие тарифы: (A_H, p_H) и (A_L, p_L). Для чего мы это делаем? Чтобы потребители добровольно выбирали тариф, предназначенный для их типа, который мы создали специально! И создали их так, чтобы замаксить свою прибыль.

Participation constraints (PC) гарантируют, что потребителю будет вообще выгодно приобретать товар, а не отказываться от покупки. Например, если $CS_i(p) - A_i < 0$, то потребитель тогда получит отриц. полезность от покупки и тогда зачем ему эту сделку совершать?

Incentive constraints (IC) гарантируют, что потребителю выгоднее брать "свой" тариф, а не тариф, предназначенный для другого типа. Это короче нам нужно, чтобы эффективо дискриминировать. Без IC у нас могла бы происходить нежелательная селекция.

В нашем случае у нас один тип (H) имеет более высокий спрос, чем второй (L). В таком случае связывающими огр. являются PC_L и IC_H.

$$PC_L : A_L = CS_L(p_L)$$

$$IC_H : CS_H(p_H) - A_H = CS_H(p_L) - A_L$$

Тогда получим:

$$A_L = \frac{1}{2}(3 - p_L)^2$$

$$A_H = CS_H(p_H) - CS_H(p_L) + A_L = \frac{1}{2}(4 - p_H)^2 - \frac{1}{2}(4 - p_L)^2 + \frac{1}{2}(3 - p_L)^2$$

Прибыль от одного потребителя типа i, выбирающего тариф (A_i, p_i):

$$\pi_i(p_i) = A_i + (p_i - 1) \cdot y_i(p_i)$$

Тогда общая прибыль будет иметь вид:

$$\pi(p_L, p_H) = \frac{1}{2}\bigg(A_H + (p_H - 1)(4 - p_H)\bigg) + \frac{1}{2}\bigg(A_L + (p_L - 1)(3 - p_L)\bigg) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}p_H - \frac{1}{4}p_H^2 + p_L - \frac{1}{4}p_L^2$$

Найдем частные производные и так найдем максимум:

$$\frac{\partial\pi(p_L, p_H)}{\partial p_L} = 1 - \frac{1}{2}p_L = 0 \Rightarrow p_L^* = 2$$

$$\frac{\partial\pi(p_L, p_H)}{\partial p_H} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_H = 0 \Rightarrow p_H^* = 1$$

(проверять через матрицу Гессе является ли эта стационарная точка максимумом или нет я не буду, поверьте, ну и это микра так-то)

Найдем A_L^* и A_H^*:

$$A_L^* = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$A_H^* = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} = 3$$

Найдем прибыли:

$$\pi_H = 3 + (1 - 1)(4 - 1) = 3$$

$$\pi_L = \frac{1}{2}(2 - 1)(3 - 2) = \frac{3}{2}$$

$$\pi_{total} = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2.25$$

пункт 4

ну тут все аналогично решается!