# Домашняя работа

## Задача 1

### пункт а

$$f_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$$

На семинаре поняли, что предельная функция такая: $f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

Теперь попробуем воспользоваться этим фактом из лекции:

**2.16 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности**

**Теорема.** $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n\to\infty} \left( \sup\limits_{D} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

В нашем случае:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right|$$

Так как $|\sin x| \leq 1$, то получим оценку:

$$\left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

Попробуем понять, достигается ли значение $\frac{1}{n}$ вообще:

$$|\sin n^2 x| = 1 \iff \sin n^2 x = \pm 1$$

Отсюда сразу же понимаем, что существует такой $x$, когда достигается значение $\frac{1}{n}$

Тогда:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Ну теперь осталось посчитать предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Поэтому $f_n$ равномерно сходится на $D$

Ответ: да

### пункт б

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2}$$

На семинаре поняли, что предельная функция такая: $f(x) = 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

Решим теперь аналогично, как и в пункте а

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2} \right|$$

Тк $|\operatorname{arcctg} nx| \leq \frac{\pi}{2}$, то:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$$

Тк это верно $\forall x \in \mathbb{R}$, то это же и верно для супремума:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2} \right| \leq \frac{\pi}{2n^2}$$

Ну и очев, что:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2} \right| \geq 0$$

Тогда получим цепочку неравенств:

$$0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2} \right| \leq \frac{\pi}{2n^2}$$

Посчитаем два предельчика:

$$\lim_{n \to \infty} 0 = 0 \quad \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{2n^2} = 0$$

По лемме о зажатой последовательности получаем, что:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{arctg} nx}{n^2} \right| = 0$$

Поэтому она и равномерно сходится на $D$

Ответ: да

# Задача 2

## пункт а

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^3}$$

Найдем предельную функцию. То есть для каждого фикс. $x \geq 0$ посчитаем предел:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nx}{1 + n^3 x^3} = 0$$

Получается, что и на $D_1$, и на $D_2$ у нас пред. функция: $f(x) = 0$

С равномерной сходимостью разберемся аналогично при помощи супремального критерия

Сначала на $D_1 = [0, 1]$:

$$\sup_{x \in D_1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in D_1} \left| \frac{nx}{1 + n^3 x^3} \right| = \sup_{x \in D_1} \frac{nx}{1 + n^3 x^3}$$

Получается нам нужно найти макс. ф-ии $\frac{nx}{1+n^3x^3}$, зависящей от $x$

Честно, без понятия, как именно это делать, но можно попробовать взять производную и приравнять ее к нулю:

*$n$ считаем типо как параметр*

Воспользуемся калькулятором производных, сложно считать :)

Исходная функция

$$\left( \frac{n\, x}{n^3\, x^3 + 1} \right)'_x$$

Вычисленная производная

$$-\frac{n\, \left( 2\, n^3\, x^3 - 1 \right)}{n^6\, x^6 + 2\, n^3\, x^3 + 1}$$

Приравняем ее теперь к нулю:

$$n - 2n^4x^3 = 0 \iff x^3 = \frac{1}{2n^3} \iff x^* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}n}$$

Сначала заметим, что $0 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}n} \leq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, поэтому это подходит для нашего $D_1$

Теперь найдем значение функции в нашей найденной точке $x^*$:

$$\frac{n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2}\, n}}{1 + n^3 \cdot \frac{1}{2n^3}} = \frac{1/\sqrt[3]{2}}{1 + 1/2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{2/3}}{3}$$

Теперь попробуем понять, максимум ли это или минимум на $[0, 1]$. Для этого посчитаем значения ф-ии на границах:

В нуле:

$$\frac{n \cdot 0}{1 + n^3 \cdot 0} = 0 < \frac{2^{2/3}}{3}$$

В единичке:

$$\frac{n \cdot 1}{1 + n^3} = \frac{n}{1 + n^3} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и даже в } n = 1 \text{ оно равно } \tfrac{1}{2}$$

Ну и это макс выходит, теперь посчитаем наконец сам предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D_1} \frac{nx}{1 + n^3x^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2/3}}{3} = \frac{2^{2/3}}{3} \neq 0$$

Значит равномерно не сходится на $D_1$

Теперь разберемся с $D_2$

Мы выяснили уже, что производная в нуле равна:

$$x^* = \frac{1}{\sqrt[3]{2}n}$$

И что $x^*$ лежит только в интервальчике $[0, 1]$. Значит на $D_2$ нет крит. точек. Окей, попробуем понять, что ваще происходит на $D_2$ с нашей функцией. Попробуем понять, какой знак у производной на интервале $[1, +\infty]$. ВОт наша производная:

$$\frac{n - 2n^4x^3}{(1 + n^3x^3)^2}$$

Очев, что знаменатель у нас всегда $> 0$, значит знак зависит только от числителя, а числитель при $n \in \mathbb{N}$ и при $x \in [1, +\infty]$ только отрицательный. Значит ф-ия на $[1, +\infty]$ только убывает. Следовательно, макс. будет находиться в точке $x^* = 1$. Посчитаем значение:

В единичке:

$$\frac{n \cdot 1}{1 + n^3} = \frac{n}{1 + n^3} \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ и даже в } n = 1 \text{ оно равно } \tfrac{1}{2}$$

Ну тут мы уже поняли, что оно стремится к нулику, а значит, что $f_n$ равномерно сходится на $D_2$

Ответ: нет, да

## пункт б

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n + x}$$

Найдем сначала предельную ф-ию:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n + x} = x^2$$

И для $D_1$, и для $D_2$

Теперь разберемся с равномерной сходимостью аналогично, как и в пунктах выше :)

Сначала с $D_1$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2}{n+x} - x^2\right| = \left| - \frac{x^3}{n+x}\right| = \frac{x^3}{n+x}$$

Введем ф-ию для удобства: $g(x) = \frac{x^3}{n+x}$

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

Исходная функция

$$\left(\frac{x^3}{x+n}\right)'_x$$

Вычисленная производная

$$\frac{2\,x^3 + 3\,n\,x^2}{x^2 + 2\,n\,x + n^2}$$

$$2x^3 + 3nx^2 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}n \end{cases}$$

Тк $D_1 = [0, 2]$, то $x_2 \notin [0, 2]\ \forall n \in \mathbb{N}$, что кстати актуально и для $D_2$

Также можно понять, что при $x > 0$ у нас $g'(x) > 0$, ну тк $n \in \mathbb{N}$ и там только все с плюсиками. Поэтому у нас ф-ия только возрастает на $[0, 2]$, а значит макс. достигается при $x = 2$. Посчитаем:

$$g(2) = \frac{8}{n+2}$$

Тогда:

$$\sup_{x \in D_1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{8}{n+2} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Следовательно, есть равномерная сходимость $:)$

Разберемся теперь с $D_2$:

Как мы выяснили, при $x > 0$ у нас $g'(x) > 0$, поэтому $g(x)$ возрастает на $[2, +\infty]$. Ну тогда $\sup$ будет достигаться при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{n+x} = +\infty$$

Ну и отсюда становится понятно, что на $D_2$ никакой равномерной сходимости нет!

Ответ: да, нет