Домашняя работа

задача 3:

$$I = \int_0^2 dz \int_0^{z^2} dy \int_0^{y-z} (2x-y)dx$$

Будем считать внутренние, потом подставлять и так получим ответ:

$$\int_0^{y-z} (2x-y)dx = (x^2 - yx)\big|_0^{y-z} = (y-z)^2 - y(y-z) = z^2 - yz$$

$$\int_0^{z^2} (z^2 - yz)dy = (z^2 y - \frac{z}{2}y^2)\big|_0^{z^2} = z^4 - \frac{1}{2}z^5$$

$$\int_0^2 (z^4 - \frac{1}{2}z^5)dz = (\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{12}z^6)\big|_0^2 = \frac{32}{5} - \frac{16}{3} = \frac{16}{15}$$

$$\Rightarrow I = \frac{16}{15}$$

Ответ: $\frac{16}{15}$

задача 5:

$$I = \int_0^4 dz \int_{-z}^{z} dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 x y^2 dy$$

$$\int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 x y^2 dy = \frac{z^2 x}{3} \cdot y^3\big|_0^{\sqrt{z^2-x^2}} = \frac{z^2}{3} \cdot x(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Выходит теперь надо вычислить: $J = \int_{-z}^{z} \frac{z^2}{3} \cdot x(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$

Пусть $f(x) = \frac{z^2}{3} \cdot x(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, где z - константа.

Тогда $f(-x) = -\frac{z^2}{3} \cdot x(z^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -f(x) \Rightarrow f(x)$ - нечетная функция.

Тогда $J = \int_{-z}^{z} f(x)dx = 0 \Rightarrow I = 0$

Ответ: 0

задача 6:

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz = \iiint_D e^{z^3} dxdydz$$

где $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1,\ y \leq z \leq 1\}$, отсюда получаем: $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

Выходит, если хотим поменять порядок интегрирования, то видим, что z меняется от 0 до 1, при фикс. z, x меняется от 0 до z, а при фикс. x и z, y меняется от x до z.

Итого $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x \leq z,\ x \leq y \leq z\}$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_x^z e^{z^3} dy =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^z (z \cdot e^{z^3} - x \cdot e^{z^3}) dx =$$

$$= \int_0^1 (z^2 e^{z^3} - \frac{z^2 e^{z^3}}{2}) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z^2 e^{z^3} dz$$

Пусть $u = z^3$, тогда $du = 3z^2 dz$

Тогда $\int z^2 e^{z^3} dz = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{z^3} + C$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{6} (e^{z^3}) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \cdot (e - 1)$$

Ответ: $\frac{1}{6}(e - 1)$