Sistemas lineales y matrices

Matemáticas Empresariales
www.fcjs.urjc.es

1. Sistemas lineales

En sistemas de orden 2×2 solo hay tres casos.

1. Rectas secantes (se cortan en un punto)
2. Rectas paralelas (no se cortan)
3. Rectas coincidentes (se cortan en infinitos puntos)

Ejemplo

Veamos un ejemplo por cada uno de los tres puntos anteriores.

1. Sistema de solución única

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ x-y & = & 1 \end{array}\right\}$$

2. Sistema incompatible

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 10 \end{array}\right\}$$

3. Infinitas soluciones (todos los puntos de la recta)

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 6 \end{array}\right\}$$

2. Notación y definiciones

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & k_m \end{array}\right\}$$

Usamos subíndices para las incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ mejor que x, y, z.
Coeficiente a_{ij} donde

- $i \to$ fila $\to$ ecuación. para $i = 1, 2, \ldots, m$
- $j \to$ columna $\to$ incógnita. para $j = 1, 2, \ldots, n$

Término independiente k_i. Los coeficientes y los términos independientes son números reales: $a_{ij}, k_i \in \mathbb{R}$.

Sistema homogéneo

Cuando los términos independientes son cero.

Ejemplo. El sistema homogénero siempre tine la solución $(0, 0, \cdots, 0)$, al menos.

$$\left.\begin{array}{ccc} x - 3y & = & 0 \\ -x + 7y & = & 0 \\ 2x - y & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución del sistema

Son n números reales ordenados $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisfacen el sistema. Esto es, al sustituir se cumplen las igualdades.

Conjunto de soluciones del sistema

Conjunto formado por todas las soluciones.

Sistema incompatible

Cuando no hay ninguna solución.

Sistema compatible

Cuando hay alguna solución sea o no única.

- única solución $\rightarrow$ Sistema determinado
- infinitas soluciones $\rightarrow$ Sistema indeterminado

Ejemplo. Veamos un sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ x-y+3z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Pasamos z al segundo miembro.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 4-z \\ x-y & = & 2-3z \end{array}\right\}$$

Sumando y restando las ecuaciones anteriores obtenemos x e y. La solución queda en función de z que actúa como parámetro.

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 3-2z \\ y & = & 1+z \end{array}\right\}$$

Se puede comprobar la solución sustituyendo en el sistema. Vamos a dar valores a z para obtener tres soluciones a modo de ejemplo.

- Para $z=0 \rightarrow x=3, y=1$
- Para $z=1 \rightarrow x=1, y=2$
- Para $z=5 \rightarrow x=-7, y=6$

Las anteriores son tres soluciones numéricas obtenidas dando valores a z que actúa como parámetro, pero existen infinitas soluciones.

3. Sistemas equivalentes

3.1. Concepto

- mismo número de incógnitas
- mismo conjunto de soluciones
- no es necesario que tengan el mismo número de ecuaciones

3.2. Operaciones

Veamos las operaciones que se pueden hacer con las ecuaciones de un sistema para que no se altere el conjunto de soluciones del sistema.

3.2.1. Uno

Multiplicando los dos miembros de una ecuación por una constante distinta de cero.

3.2.2. Dos

Sustituyendo una ecuación por la suma de ella y alguna otra ecuación multiplicada por una constante, dejando sin alterar las otras ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = & k_2 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Si a la 2ª ecuación se le suma la 1ª multiplicada por una constante c y dejamos igual la 1ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = & k_1 \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + c(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) & = & k_2 + ck_1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Si x_1, x_2, x_3 cumple (1) también cumple (2).
Si $c = 0$ también se cumple.

3.2.3. Tres

Cambiar el orden de las ecuaciones no altera el conjunto de las soluciones.

3.2.4. Cuatro

Al hacer sumas de ecuaciones multiplicadas por constantes pudieran resultar algunos de los coeficientes cero, pudiéndose dar alguno de los siguientes casos extremos.

Caso $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ Cuando $0x_1 + 0x_2 + \cdot + 0x_n = 0$ se dice que es una ecuación trivial.
Cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cumplen la ecuación trivial, por lo que puede suprimirse.

Ejemplo. Tomemos el caso de rectas coincidentes.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 6 \end{array}\right\}$$

Restamos de la 2ª ecuación la 1ª multiplicada por 2.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\}$$

La ecuación $0 = 0$ se puede suprimir. El sistema se puede reducir a una sola ecuación.
Sistema compatible indeterminado $\rightarrow$ Infinitas soluciones.

Caso $\mathbf{0 = k}$ Cuando $0x_1 + 0x_2 + \cdot + 0x_n = k$ donde k es un número distinto de cero. En este caso el sistema no tiene solución.
Desde el momento en que aparece $0 = k$ sabemos que el sistema es incompatible y los cálculos para resolverlo terminan.

Ejemplo. Tomemos el caso de dos rectas paralelas.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 2x+2y & = & 10 \end{array}\right\}$$

Restamos de la 2ª ecuación la 1ª multiplicada por 2.

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & 3 \\ 0 & = & 4 \end{array}\right\}$$

La ecuación $0 = 4$ indica que estamos ante un sistema incompatible. $\rightarrow$ no existe solución.

4. Matriz de un sistema

Tomamos los coeficientes en el mismo orden en el que se encuentran en el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{Matriz de los coeficientes} \\ \text{matriz de orden } m \times n \\ m \text{ filas y } n \text{ columnas.} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & k_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & k_m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \text{Matriz ampliada} \\ \text{A la matriz de los coeficientes añadimos} \\ \text{una columna más con los términos independientes} \end{array}$$

5. Tipos de matrices

5.1. Matriz fila

Vector fila: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Tiene dimensión 1.

5.2. Matriz columna

Vector columna:

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Tiene dimensión 1.

5.3. Matriz cuadrada

Mismo número de filas y de columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

El orden de la matriz A es 3×3.
La diagonal principal está formada por los elementos a_{ij} donde $i = j$. En este ejemplo son: 4, -2 y -3.

Traza La traza es la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$\text{Traza} = \sum_{i=j} a_{ij}$$

En nuestro ejemplo la traza es: $4 - 2 - 3 = -1$.

5.4. Matriz rectangular

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

El orden de la matriz A es 2×3.
El orden siempre es: filas $\times$ columnas.

5.5. Matriz transpuesta

La transpuesta de la matriz A se denomina A^t o también se le puede ver como A', y se obtiene cambiando filas por colomnas de forma que el elemento a_{ij} de la matriz A se convierte en el elemento a_{ji} de la transpuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^t = A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades

1. Propiedad involutiva $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

5.6. Matrices simétricas

Este concepto es únicamente aplicable a matrices cuadradas.
Una matriz es simétrica cuando $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Si A es simétrica $\Rightarrow A = A^t$.

5.7. Matriz antisimétrica

Si A es antisimétrica se cumple $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$.
Esto implica que en la diagonal principal todos los elementos tienen que ser cero.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Si A es antisimétrica $\Rightarrow A^t = -A$.

5.8. Matriz nula

Todos los elementos son cero.

5.9. Matriz diagonal

La diagonal principal puede tener los números que se quiera y el resto son cero. Veamos una matriz diagonal de orden 3×3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos una matriz diagonal de orden 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.10. Matriz identidad

Es una matriz diagonal donde los elementos de la diagonal principal son todos 1.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.11. Matriz triangular

Matriz triangular superior: todos los elementos por encima de la diagonal superior son cero.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: todos los elementos por debajo de la diagonal superior son cero.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Operaciones con matrices

6.1. Suma de matrices

Veamos un ejemplo de suma de matrices.

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo donde se restan dos matrices.

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

6.2. Producto de escalar por matriz

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ 6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

6.3. Producto de matrices

Debe existir congruencia de ordenes para que puedan ser multiplicables las matrices A y B.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

En general no se cumple la propiedad conmutativa: $AB \neq BA$

$$A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -6 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ -2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = C_{3\times 4}$$

7. Ecuaciones matriciales

Algunas reglas válidas al operar con números reales dejan de serlo al operar con matrices.

7.1. Cuadrado de un binomio

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$$

7.2. Suma por diferencia

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$$

7.3. Sacar factor común

$$AB + AC = A(B+C)$$
$$AB + CA \neq A(B+C)$$

7.4. Si se cumple la propiedad asociativa

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \cdot C_{p\times q} = (A \cdot B)_{m\times p} \cdot C_{p\times q} = A_{m\times n} \cdot (B \cdot C)_{n\times q}$$

7.5. Si se cumple la propiedad distributiva respecto a la suma

$$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

8. Expresión matricial de sistemas lineales

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & k_m \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\cdot n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\cdot 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}_{m\cdot 1}$$

$$A \cdot X = B$$

9. Rango de una matriz (Método de Gauss)

9.1. Rango

El rango de una matriz nos indica el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes (que no son proporcionales o no dependen unas de otras).

9.2. Si son linealmente dependientes

En el siguiente ejemplo podemos decir que la 2ª fila depende de la 1ª, aunque también podríamos decir que la 1ª fila depende de la 2ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Solo hay una fila l.i. ya que la 2ª fila es el doble de la 1ª}$$

9.3. Si existe una fila de ceros

En una matriz siempre que tengamos una fila (o columna) nula (de ceros) se puede tachar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.4. Si existen dos proporcionales

Si existen dos proporcionales podemos tachar una.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

9.5. Para el cálculo del rango

Para el cálculo del rango se puede multiplicar una fila (o columna) por un escalar y también se pueden sumar unas con otras no alterándose el rango de la matriz.

9.6. Método de Gauss

Consiste en "hacer ceros"por debajo de la diagonal (si es cuadrada). Procuraremos convertir la matriz en una matriz **escalonada**. Para ello, sumaremos una fila con otra multiplicada por un número.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-7F_1]{F_2-4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango(A)=2}$$

Ejemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Eliminamos la 3ª fila por resultar igual a la 2ª.

$$\xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango=2}$$

Eliminamos la 3ª fila por ser todos ceros.

10. Determinantes

Solo para matrices cuadradas
El determinante asigna un número real a cada matriz cuadrada.

10.1. Orden 2

Dada la matriz A calcular su determinante.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-2) - 2\cdot 3 = -4$$

10.2. Orden 3

Regla de Sarrus.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 25 + (-2) + (-4) - 20 - 5 - 2 = -8$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 3 - 6 - 4 - (-9) - (-3) = 5$$

Comprobar que el determinante de C es cero.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -9 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

10.3. Determinante de orden n (por adjuntos)

- Se elige una fila (o columna).
- El menor complementario de un elemento a_{ij} se obtiene tachando su fila i y su columna j.
- Es preferible elegir la que tenga más ceros.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -45$$

- Incluso los determinantes de orden 3 se pueden poner en función de determinantes de orden 2. En general lo que podemos hacer es poner los determinantes de orden n en función de los determinantes de orden $n-1$.
- Se llama **adjunto** de un elemento a su **menor complementario** provisto del signo:

$$(-1)^{i+j}$$

- Signos

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

- El adjunto de a_{ij} es A_{ij}

$$A_{11} = \alpha_{11} \quad A_{12} = -\alpha_{12} \quad A_{13} = \alpha_{13} \quad A_{21} = -\alpha_{21} \quad \cdots$$

siendo los alfas los menores complementarios.

10.4. Propiedades de los determinantes

Propiedad 1 Al transponer una matriz su determinante no varía. $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

Propiedad 2 Al cambiar entre si dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. En el ejemplo vamos a permutar las filas 1 y 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Propiedad 3 Si dos filas (o columnas) son iguales el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 4 Cuando una fila (o columna) está multiplicada por un número se puede sacar ese número fuera. En el ejemplo nos centramos en la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 5 & 4 & 20 \\ 2 & 1 & 30 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Propiedad 5 Si una fila (o columna) es una suma, el determinante se puede descomponer en suma de determinantes. En el ejemplo, observamos la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 2+3 \\ 5 & 4 & 4+5 \\ 2 & 1 & 1+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Nota Considerando conjuntamente las propiedades 5 y 6 podemos efectuar la siguiente transformación de un determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c+kd \\ a' & b' & c'+kd' \\ a'' & b'' & c''+kd'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

Propiedad 6

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Propiedad 7 Si existen dos filas (o columnas) proporcionales el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 10 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 8 Si una fila (o columna) es C.L. (combinación lineal) de $\boxed{\text{todas}}$ las restantes el determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Si vemos que } F_3 = F_1 + F_2 \text{ podemos afirmar que } |A| = 0$$

Propiedad 9 Si una matriz tiene toda una fila (o columna) de ceros entonces el determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 10 El determinante no varía cuando cambiamos una fila (o columna) por ella misma más una C.L. de una o varias de las restantes.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

Si la F_4 es ella misma más la suma de todas las restantes. $F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 9 & -15 \end{vmatrix} = 6$$

Veamos otro ejemplo. Hacemos $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

11. Matriz inversa

11.1. Definición

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

- Solo para matrices cuadradas.
- La matriz inversa se puede calcular por su definición o por determinantes. Es mejor calcularla por determinantes ya que no todas las matrices tienen inversa, únicamente aquellas cuyo determinante es distinto de cero.
- En este caso, vamos a calcular la inversa por su definición.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Atendiendo a la definición establecemos una ecuación matricial.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Convertimos la ecuación matricial en un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 1 \\ 2y - t & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ y + t & = & 1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x = 1/3,\ y = 1/3,\ z = -1/3,\ t = 2/3$
Obtenemos la inversa.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Podemos realizar la comprobación $A \cdot A^{-1} = I$ o bien $A^{-1} \cdot A = I$.

11.2. Matriz inversa (por determinantes)

Necesitaremos calcular el determinante de A, sus adjuntos y transponer.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(\mathrm{adj}\,(A)\right)^t$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante. $|A| = 4$
Calculamos la matriz de los adjuntos.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -5 \\ 6 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Transponemos

$$(\operatorname{adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -5/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.3. Matriz inversa con parámetros (ejercicio)

- Determinar para que valores de t la matriz A tiene inversa.
- Si para $t = 2$ la matriz A tiene inversa, calcúlese.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

Para que una matriz cuadrada tenga inversa es condición necesaria y no suficiente que su determinante sea distinto de cero. Veamos en que casos se anula el determinante de A.

$$|A| = -t^2 - 3 + 4t = -t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\exists A^{-1} \; \forall t - \{t = 1, \, t = 3\}$$

Si $t = 2$ calculamos la inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1$

$$\text{adj}\,(A) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponemos

$$(\text{adj}\,(A))^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la inversa de A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11.4. Rango de una matriz por determinantes

- Este método es para matrices cuadradas. Si no lo es se ha de usar Gauss.
- El rango es el número de filas (o columnas) L.I. (linealmente independientes).
- Si son filas (o columnas) dependientes es porque son proporcionales. Esto es, paralelas o iguales en el caso de dos vectores, o coplanarias en el caso de más de dos vectores.
- El rango de una matriz de orden n como máximo puede ser n.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$$

- Si $|A| = 0 \Rightarrow$ La matriz A tiene filas (o columnas) DEPENDIENTES (proporcionales), lo cual supone que el rango ya no puede ser 3. $\Rightarrow \quad r(A) < 3$.
- Si $|A| \neq 0 \Rightarrow$ Todas las filas (o columnas) son L.I. $\Rightarrow \quad r(A) = 3$. Los tres vectores no son coplanarios, entre los tres generan un espacio.
- Otro ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) < 3$$

Veamos el menor de orden 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

La 3ª fila es C.L. de las filas 1 y 2. Luego, la 3ª fila puede tacharse.
Otra forma de verlo. La 2ª fila menos la 3ª nos da la 1ª, luego la 1ª es C.L. de las otras dos y por lo tanto podemos tachar la primera.

- Si el determinante del menor de orden 2 que hemos tomado $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ hubiera salido cero, tendríamos que probar con todos los menores de orden 2 posibles y si todos salen cero nos indicaría que el rango es 1. Por ejemplo, aquí $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

11.5. Ejemplos. Cuadrados y cubos de matrices

Ejemplo. Calcular A^3 siendo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Calcular B^2 siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

12. Teorema de Rouché

Denominamos A a la matriz de los coeficientes y A^* a la matriz ampliada.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

- $r(A) \neq r(A^*) \Rightarrow$ Incompatible
- $r(A) = r(A^*) <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones
- $r(A) = r(A^*) =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución única

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 12 + 6 - 6 - 12 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) < 3$$

Veamos el menor principal de orden 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Las columnas 1ª y 2ª son L.I. y la columna 3ª es dependiente de ellas, por lo que no la tomamos y en su lugar tomamos la columna de la ampliada (la de términos independientes).

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad r(A^*) < 3$$

Veamos el menor de orden 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A^*) = 2$$

Se cumple que

$r(A) = r(A^*) < 3 = n \quad \Rightarrow \quad$ Sistema compatiple indeterminado $\rightarrow$ Infinitas soluciones.

- Resolvamos. Puedo suprimir la 3ª ecuación ya que hemos comprobado que el primer menor es distinto de cero, lo cual implica que las dos primeras ecuaciones son L.I.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Llamemos B a la siguiente matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Convertimos z en un parámetro: $z = t$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 - t \\ 2x & + & y & = & 2 - 2t \end{array}\right\} \rightarrow \text{S.C.I.} \rightarrow \text{Infinitas soluciones que dependen de } t$$

Por ejemplo, podemos dar una solución para $t = 0$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo obtenemos $x = 1$, $y = 0$.

13. Método de Cramer

- La regla de Cramer nos permite resolver cualquier S.C.D. (sistema compatible determinado).
- El determinante de A debe ser distinto de cero: $|A| \neq 0$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z = & 7 \\ x & & & + & z = & 4 \\ 3x & - & 2y & + & z = & 2 \end{array}\right\}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 4 - 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{12}{4} = 3$$

14. Resolución de sistemas por el método de Gauss-Jordan

Aplique el proceso de Gauss-Jordan al siguiente sistema de ecuaciones y determine la solución general si existe.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & 5x_4 & + & 2x_5 & = & -6 \\ -3x_1 & + & & - & 6x_3 & - & 9x_4 & - & 3x_5 & = & -9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{4 ecuaciones} \\ \text{5 incógnitas} \end{array}$$

Con 4 ecuaciones y 5 incógnitas $\Rightarrow \nexists$ solución única. $\rightarrow$ No será S.C.D.

Existen dos posibilidades:

1. o bien, es S.C.I. con infinitas soluciones, si $r(A) = r(A^*)$
2. o bien, es INCOMPATIBLE y entonces $\nexists$ solución.

Construimos la matriz de los coeficientes ampliada.

$$A^* = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & -5 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & -6 & -9 & -3 & -9 \end{array}\right)$$

El método de Gauss-Jordan consiste en ir haciendo ceros.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Podemos eliminar las filas 3ª y 4ª.
Las ecuaciones 1ª y 2ª son L.I.. Se puede comprobar haciendo el menor de orden 2 y viendo que es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$r(A) = r(A^*) < 5 = n \Rightarrow$ S.C.I. $\Rightarrow$ *INFINITAS SOLUCIONES.*

Resolución por Rouché

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \end{array}\right\}$$

Buscamos un menor $\neq 0$ y el resto de incógnitas se pasan a la derecha.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Parametrizamos x_3, x_4, x_5 $\quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_3 = a \\ x_4 = b \\ x_5 = c \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & 3 - 2a - 3b - c \\ -x_1 & + & x_2 & = & 3 - 3a - 4b - 5c \end{array}\right\}$$

Resolvemos por Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 2a - 3b - c & 0 \\ 3 - 3a - 4b - 5c & 1 \end{vmatrix}}{1} = 3 - 2a - 3b - c$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - 2a - 3b - c \\ -1 & 3 - 3a - 4b - 5c \end{vmatrix}}{1} = 3 - 3a - 4b - 5c + 3 - 2a - 3b - c = 6 - 5a - 7b - 6c$$

Solución del sistema

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3 - 2a - 3b - c \\
x_2 &= 6 - 5a - 7b - 6c \\
x_3 &= a \\
x_4 &= b \\
x_5 &= c
\end{aligned}$$

Ejercicio propuesto

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & = & -2 \\
-x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & & - & x_5 & = & -3 \\
5x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & - & x_5 & = & 5 \\
-3x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & - & 6x_4 & + & 6x_5 & = & 6
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{4 ecuaciones} \\ \text{5 incógnitas} \end{array}$$

Si existe, obtener la solución del sistema aplicando el método de Gauss-Jordan.

15. Resolución de ecuaciones matriciales

Dadas las matrices A y B obtener x, si $AB - 3B = D$ y $d_{32} = 13$. Siendo d_{32} el elemento de la matriz D que se encuentra en la posición: fila=3 y columna=2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & y & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver el ejercicio vamos a plantear la expresión $AB - 3B = D$ desarrollando todos los elementos de las matrices que intervienen.

$$\begin{pmatrix} 3 & y & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3y & 3x & -6 \\ 9 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}$$

Sabemos que la matriz D es necesariamente de orden 3×3 ya que la ecuación matricial no permite otra opción.
No es necesario hacer el producto completo de matrices y la resta. Sabiendo que $d_{32} = 13$ obtenemos la siguiente expresión que nos permitirá calcular x.

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 - (-3) &= 13 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm\sqrt{9} \\
x &= \pm 3
\end{aligned}$$

15.1. Ejercicio de matrices

Dadas las matrices A y B indique cuál de las cuatro respuestas del test es la correcta.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) $AB - BA = 0$

(b) $|(AB)^2| = 512$

(c) $r(A) = r(B)$

(d) $r(A - B) = 2$

Respuesta correcta: (c).

16. Resolución de sistemas: S.C.D.

Ejemplo. Resolver.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{3 ecuaciones} \\ \text{3 incógnitas} \end{array}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -8 \end{array}\right)$$

$|A| = 4 \neq 0 \to r(A) = 3 \Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$ Solución única

Permutamos 1ª y 2ª fila.

$$\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_2]{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 + 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}F_3]{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F2 + F_3]{F_1 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Ejercicio propuesto

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \\ -4 & -5 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

Solución:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Otro ejercicio propuesto

$$A^* = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

Solución:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

17. Calcular el rango por el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

- El rango nos proporciona el númerode filas (o columnas) L.I.
- Todo lo que se diga para filas vale para columnas.
- El método de Gauss consiste en buscar la matriz triangular equivalente
- $\boxed{\text{El rango por filas es igual al rango por columnas}}$
- Las matrices triangulares son del siguiente tipo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Sabemos que la matriz anterior es de rango 3 porque no es posible hacer combinaciones lineales entre sus filas debido a la existencia de los ceros debajo de la diagonal principal.
  - Por ejemplo, no podemos multiplicar por ningún número la fila 1 para obtener el primer cero de la fila 2, debido precisamente a la existencia de ese cero.
  - Tampoco podemos encontrar un escalar que permita multiplicar la F3 para obtener la F2 debido al segundo cero existente en la fila 3.

17.1. Operaciones que no alteran el rango

Las siguientes operaciones no alteran el rango de una matriz.

1. Permutar dos filas (o columnas)
2. Multiplicar una fila (o columna) por un escalar (distinto de cero)
3. Sumarle a una fila otra multiplicada por un escalar
4. Eliminar filas (o columnas) nulas o proporcionales a otra

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{6}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 8-\frac{6}{5}8 \end{pmatrix}$$

Vemos que el número $8-\frac{6}{5}8$ va complicando la matriz por lo que abandonamos esta vía y nos vamos por otro camino, permutando las columnas 2 y 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3 \rightarrow \text{todas son L.I.}$$

18. Cálculo de la inversa por el método de Gauss

$$(A|I) \xrightarrow{Gauss} \left(I|A^{-1}\right)$$

Tres fases:

1. Hacemos ceros debajo de la diagonal principal de A
2. Hacemos ceros encima de la diagonal principal de A
3. Conseguimos que la diagonal principal sea de unos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+2F_3]{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F_1+2F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{\substack{F_1/3 \\ F_2/-3}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $|A| = -3$

Ejercicio propuesto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 7 & 1 \\ -5 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Otro ejercicio propuesto

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -13 & -8 & 10 \\ 3 & 2 & -2 \\ -24 & -14 & 18 \end{pmatrix}$$