Espacios vectoriales

Matemáticas Empresariales
www.fcjs.urjc.es

1. Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$

- Podemos representar en el plano el vector $\boldsymbol{v} = (x, y) = (2, 1)$.
- Un vector en $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (x, y) que son las coordenadas o componentes del vector.
- El origen es el $(0, 0)$.

1.1. Operaciones básicas con vectores

1.1.1. Suma vectorial

Dados los vectores de $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ calcular $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

- $\boldsymbol{u} = (1, 3)$
- $\boldsymbol{v} = (2, 1)$
- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (1, 3) + (2, 1) = (1 + 2, 3 + 1) = (3, 4)$
- Otro ejemplo: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (-1, 4) + (2, -2) = (1, 2)$
- Otro ejemplo: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (5, -2) + (-5, 2) = (0, 0)$
- Vector cero: $\mathbf{0} = (0, 0)$

1.1.2. Multiplicación por escalar

- $c\boldsymbol{v} = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2)$
- Se multiplica el escalar por cada una de las componentes
  - si $c > 0$ entonces $c\boldsymbol{v}$ tiene la misma dirección que $\boldsymbol{v}$

- si $c < 0$ entonces $c\boldsymbol{v}$ tiene dirección opuesta a $\boldsymbol{v}$

- si multiplicamos por -1 al vector $\boldsymbol{v}$ obtenemos: $-1\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \rightarrow$ negativo de $\boldsymbol{v}$
- también podemos restar: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$

1.2. Propiedades de los vectores

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vectores del plano y c y d escalares.

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es un vector del plano $\rightarrow$ cerradura de la suma de vectores (operación interna)
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ propiedad conmutativa de la suma
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ propiedad asociativa de la suma
4. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$
5. $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
6. $c\boldsymbol{u}$ es un vector del plano $\rightarrow$ cerradura bajo producto por escalar (operación interna)
7. $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v} \rightarrow$ propiedad distributiva
8. $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u} \rightarrow$ propiedad distributiva
9. $c(d\boldsymbol{u}) = (cd)\boldsymbol{u}$
10. $1 \cdot (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$

2. Vectores en $\mathbb{R}^n$

Por analogía con los vectores en el plano.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} n - \text{ada} \\ n - \text{upla} \end{array} \right\} \text{Vector de } \mathbb{R}^n\text{, conjunto ordenado de } n \text{ componentes}$$

- $\mathbb{R}^1 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Espacio unidimensional} \\ \text{Conjunto de todos los números reales } \mathbb{R} \end{array} \right.$
- $\mathbb{R}^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Espacio bidimensional} \\ \text{Conjunto de todos los pares ordenados de números reales } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{array} \right.$
- $\mathbb{R}^3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Espacio tridimensional} \\ \text{Conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales} \end{array} \right.$
- $\mathbb{R}^4 \rightarrow$ Espacio tetradimensional
- $\vdots$
- $\mathbb{R}^n \rightarrow$ Espacio n-dimensional

2.1. Suma vectorial en $\mathbb{R}^n$ y producto por escalar

Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y c un escalar.
Siendo:
$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Se cumple que:

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$
- $c\boldsymbol{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$
- Negativo de $\boldsymbol{u}$
$$-\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \rightarrow \text{inverso aditivo de } \boldsymbol{u}$$
- Diferencia de vectores
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$$
- Vector cero de $\mathbb{R}^n$
$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \rightarrow \text{neutro aditivo, neutro de la suma de } \mathbb{R}^n$$

2.2. Propiedades de los vectores en $\mathbb{R}^n$

Las mismas 10 propiedades que vimos para vectores del plano.
Sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y c y d escalares.

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
4. $\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$
5. $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$
6. $c\boldsymbol{u}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$
7. $c(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{u} + c\boldsymbol{v}$
8. $(c + d)\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{u}$
9. $c(d\boldsymbol{u}) = (cd)\boldsymbol{u}$
10. $1 \cdot (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$

2.3. Propiedades del neutro aditivo y los inversos aditivos

Sea $\boldsymbol{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y sea c un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. El neutro aditivo es único. Es decir, si $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ entonces $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$
2. El inverso aditivo de $\boldsymbol{v}$ es único. Es decir, si $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{v}$
3. $0\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$
4. $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$
5. si $c\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ entonces $c=0$ o $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$
6. $-(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}$

2.4. Combinación lineal de vectores

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{v_1}+c_2\boldsymbol{v_2}+\cdots+c_n\boldsymbol{v_n}$$

El vector $\boldsymbol{x}$ es C.L. de los vectores $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_n}$ si al menos uno de los coeficientes $c_1,c_2,\ldots,c_n$ es distinto de cero.

Ejemplo. Ejemplo en $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{rcl}\boldsymbol{x} & = & (-1,-2,-2)\\ \boldsymbol{u} & = & (0,1,4)\\ \boldsymbol{v} & = & (-1,1,2)\\ \boldsymbol{w} & = & (3,1,2)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{encuentre los escalares } a,b,c \text{ teles que}\\ \boldsymbol{x}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}+c\boldsymbol{w}\end{array}$$

Solución.

$$(-1,-2,-2)=a(0,1,4)+b(-1,1,2)+c(3,1,2)$$

Igualando componentes.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & - & b & + & 3c & = & -1\\ a & + & b & + & c & = & -2\\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Resolviendo}}\left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=-2\\ c=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{por tanto}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$$

3. Definición de espacio vectorial

Sea $\mathbb{V}$ un conjunto sobre el que estan definidas dos operaciones: la suma vectorial y la multiplicación por escalar. Si los siguientes axiomas se cumplen para $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ en $\mathbb{V}$ y todo escalar c y d entonces $\mathbb{V}$ tiene estructura de espacio vectorial.

para la suma

1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ está en $\mathbb{V} \to$ cerradura bajo la adición
2. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} \to$ propiedad conmutativa de la suma
3. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \to$ propiedad asociativa de la suma
4. $\mathbb{V}$ contiene un vector cero $\mathbf{0}$ (neutro aditivo) tal que para todo $\boldsymbol{u}$ en $\mathbb{V}$ se cumple que $\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u}$
5. $\forall \boldsymbol{u}$ en $\mathbb{V}$ hay un vector en $\mathbb{V}$ denotado por $-\boldsymbol{u}$ (inverso aditivo) tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0}$

para la multiplicación escalar

6. $c\boldsymbol{u}$ esta en $\mathbb{V} \to$ cerradura bajo multiplicación por escalar
7. $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v} \to$ propiedad distributiva
8. $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u} \to$ propiedad distributiva
9. $c(d\boldsymbol{u})=(cd)\boldsymbol{u} \to$ propiedad asociativa
10. $1\cdot(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\to$ identidad escalar

3.1. Ejemplos de espacios vectoriales

Son espacios vectoriales:

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^3$
- $\vdots$
- $\mathbb{R}^n$
- Los polinomios de grado ≤ 2
- $\vdots$
- Los polinomios de grado $\leq n$
- Las matrices de orden $m\times n$
- Funciones contínuas $C(-\infty,+\infty)$ definidas sobre toda la recta real $\to$ Conjunto de <u>todas</u> las funciones contínuas $C(-\infty,+\infty)$
- también las funciones contínuas definidas en un intervalo cerrado $C[a,b]$

3.2. No son espacios vectoriales

- Los puntos de una circunferencia de radio 4, ya que no se cumple que la suma de los vectores de este tipo sea interna, y tampoco se cumple que el producto por escalar sea interno.
- El conjunto $\mathbb{V}$ siguiente no es espacio vectorial.

  $$\mathbb{V} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)\right\}$$

  Este conjunto $\mathbb{V}$ satisface los nueve primeros axiomas pero no el décimo.

  $$1 \cdot (1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$$

  El décimo axioma decía: $1 \cdot (\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$