Рябов Виктор Михайлович

12.02.2013.

2 Устойчивость

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

(x_0, y_0)

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) =$

$= a \cdot y + \varphi(x)$

$y' = ay + \varphi(x)$

$y' = ay$, $y(x_0) = y_0$ $\quad y(x) = y_0 \cdot e^{a(x - x_0)}$ - реш-е

1) $a >> 1$ $\quad$ 2) $a << -1$

реш. неогр. растёт скачкообр. $\quad$ реш-е устойчиво, стремится к 0.

Хотим, чтобы реш-е было устойчиво.

Вспомним методы:

– Эйлер: $y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) =$

$= y_n + h \cdot a \cdot y_n$ $\quad y_{n+1} = y_n \underbrace{(1 + ah)}_{R(ah)}$

Хотим, чтобы реш-е мон. убыв., т.е. $|R(ah)| < 1$

$|1 + ah| < 1$

$-1 < 1 + ah < 1$

$-2 < ah < 0$

$-\frac{2}{a} > h > 0$ (т.к. $a < 0$)

т.е. реш-е устойчиво только $0 < h < -\frac{2}{a}$

– Неявный Эйлер:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + ah\, y_{n+1}$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1-ah}$$

хотим: $\left|\frac{1}{1-ah}\right| < 1$

$$|1-ah| > 1$$

$$\left[\begin{array}{l} 1-ah>1 \\ 1-ah<-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} ah<0 \\ ah>2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} h>0 \\ h<\frac{2}{a} \end{array}\right. \qquad \underline{\forall h>0}.$$

$$y' = ay, \quad y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$$

– Рунге-Кутт:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \qquad RK45$$

$f(x,y) = ay$

Можно сделать, как и раньше

$$y_{n+1} = R(ah)\cdot y_n$$

Но мы: $y(x_{n+1}) = y_0 e^{a(x_{n+1}-x_0)} = e^{ah}\cdot y(x_n)$

$$x_{n+1} - x_0 = h + (x_n - x_0)$$

Точный метод даёт погреш. пор. h^5

$$R(ah) = 1 + \frac{ah}{1!} + \frac{(ah)^2}{2!} + \frac{(ah)^3}{3!} + \frac{(ah)^4}{4!}$$

Хотим: $|R(z)| < 1$ $\qquad z = ah$.

При всех z это невозм. (т.к. это многочлен, принимает сколь угодно большие знач.).

Явному абс. устойчивым быть не может.

Подробнее: книги Хайрер
Вагнер
Нёрсетт

/* Система ОДУ 1го пор. $\Leftrightarrow y^{(n)} + \ldots$

Реш. устойч: $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$ $\qquad e^{\lambda_i x}$

если $\frac{\max|\mathrm{Re}\,\lambda_i|}{\min|\mathrm{Re}\,\lambda_i|} \gg 1$, то система жёсткая */

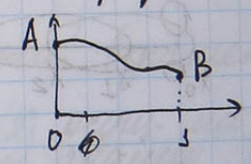
§ Решение краевых задач для д.у. 2-го порядка. Метод прогонки.

$$y'' + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad 0<x<1$$

$p, q, f \in C$

$x=0$: $y(0) = A$

$x=1$: $y(1) = B$



Суть метод дифф. прогонки.

Кр. задача сводится к нескольким задачам Коши.

3. Коши: $y(0) = A$, $y'(0) = \alpha$ $\qquad y(x,\alpha)$

хотим: $\alpha : y(1,\alpha) = B$

(ввели параметр α)

Берем разные α, подгоняем так, чтобы попасть в B.

n, $h=\frac{1}{n}$, $x_k = kh$, $k=\overline{0,n}$ - сетка

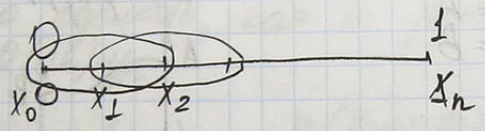
$0<x_k<1$: $y(x_0)=y(0)=A=y_0$, $y(x_k)=y(1)=B=y_n$

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} + p_k\dfrac{y_{k+1}-y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k \\ \text{(предпол. } y\in C^4) \quad (y\in C^3) \\ k=\overline{1,n-1} \\ y_0=A,\ y_n=B \end{cases}$$

Получим систему. Разрешима ли она?

$$y_{k-1}\underbrace{\left(\frac{1}{h^2}-\frac{p_k}{2h}\right)}_{a_k} + y_k\underbrace{\left(-\frac{2}{h^2}+q_k\right)}_{b_k} + y_{k+1}\underbrace{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{p_k}{2h}\right)}_{c_k} = f_k$$

$$(1)\ \begin{cases} a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, \quad k=\overline{1,n-1} \\ y_0=A \\ y_n=B \end{cases}$$



$k=1$: y_0, y_1, y_2

$k=2$: y_1, y_2, y_3

Реш. (1) ищем в виде:

$$y_k = \alpha_k y_{k+1} + \beta_k \quad (2)$$

$$a_k(\alpha_{k-1}y_k + \beta_{k-1}) + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k.$$

$$y_k(a_k\alpha_{k-1}+b_k) = -c_k y_{k+1} + f_k - a_k\beta_{k-1}$$

$$y_k = \underbrace{-\frac{c_k}{a_k\alpha_{k-1}+b_k}}_{\alpha_k} y_{k+1} + \underbrace{\frac{f_k - a_k\beta_{k-1}}{a_k\alpha_{k-1}+b_k}}_{\beta_k} \quad (3)$$

$y_0=A \iff y_0 = 0\cdot y_1 + A$ $\quad \alpha_0=0,\ \beta_0=A.$

Прямая прогонка:

α_0, β_0 - известны

α_1, β_1 - находим из (3)

....

$\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$

$y_{n-1} = \alpha_{n-1}y_n + \beta_{n-1}$

Обратная прогонка:

$y_k = \alpha_k y_{k+1} + \beta_k \quad k=n-1, n-2, \dots 0$

Осуществима ли прогонка? (знамен. $\neq 0$).

Def: Прогонка вида (2) осущ-ма и уст., если ни один из знамен. в (3) $\neq 0$ и $|\alpha_k|\leq 1\ \forall k$.

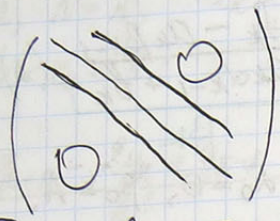
$y_k = \alpha_k y_{k+1} + \beta_k$

Система (1):

$$(1)\begin{cases} a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, & k=\overline{0,n} \\ a_0 = 0, \quad c_n = 0 \end{cases}$$

// расширим задачу

$AY = F$



– трехдиагон. матрица.

(T) $\forall\, k=\overline{0,n}$: $|b_k| > |a_k| + |c_k|$

Тогда прогонка осуществима и устойчива.

Док-во. (по индукции)

$y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0$ $\quad |\alpha_0| \le 1$ – предполагаем.

пусть: $\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}$: $|\alpha_j| \le 1$

покажем, что α_k такое же.

$$|\alpha_k| = \frac{|c_k|}{|b_k + a_k \alpha_{k-1}|} \le \frac{|c_k|}{|b_k| - |a_k \alpha_{k-1}|}$$

из (3):

$$\le \frac{|c_k|}{|b_k| - |a_k|} < 1.$$

т.е. мы док-ели, что знам. $\ne 0$ и $|\alpha_k| < 1$

ч.т.д.

$h \to 0$

$a_k > 0$
$b_k < 0$
$c_k > 0$

$|b_k| - -b_k = \frac{2}{h^2} - q_k$, $\quad |a_k| + |c_k| - a_k + c_k = \frac{2}{h^2}$

Чтобы вып. нер-во: $q_k < 0$

Вспомним: $y'' + py' + qy = f$

разные знаки.

Оператор – отр. опред, невырожд.

Глава I. Вычислительные методы линейной алгебры.

Д.К. Фадеев
В.Н. Фадеева

$A, A \pm B, AB, A^{-1}$
$x, Ax, \quad Ax = b, \quad Ax = \lambda x_1 \dots$ } это всё было в алгебре

§1. Норма векторов и матриц.

Def. $\|\cdot\|$ – норма.

$X = \{x\}$, $\quad x = (x_1, \dots x_n)$ $\quad x_i \in \mathbb{C}$

$\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ со св-вами:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$\forall x$, $\quad x - x = 0$

$0 = \|0\| = \|x - x\| \le \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$, т.е. $\|x\| \ge 0$

14.02.2013.

Def: Гельдерова норма.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$p = 1, 2, \infty$ — часто бывают

Def: $\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$ — нормы эквивалентны, если $\exists\, c_1, c_2 > 0$

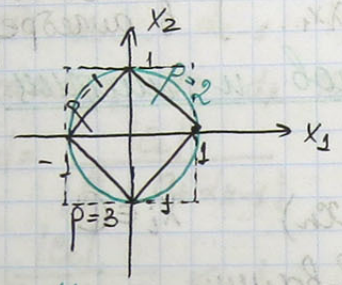
$$c\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta$$

$\underline{p=1}$ $\quad \|x\|_1 = \sum_1^n |x_k|$

$\underline{p=2}$ $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_1^n |x_k|^2}$

$\underline{p=\infty}$ $\quad \|x\|_\infty = \max_k |x_k|$

$n=2$ $\qquad \|x\|_p = 1$



Def: Матричная норма

удовл. 1), 2), 3)

1) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Если взять $\|A\| = \max_{k,j} |a_{kj}|$ — они вып-ся.

В def добавляется ещё усл-ие:

4) $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$ (мультипликат. усл-е).

А-м., х-в. Пусть $\|x\|$ — дана.

Пусть $\|A\|$: 1-3-удовл. Этого мало.

Def: $\|A\|$ и $\|x\|$ согласованы, если

$$\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \quad (1)$$

$x = 0$ — очев.

$x \neq 0$ делим на $\|x\|$:

$$\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \|A\| \quad (2) \qquad \forall x \neq 0$$

$$\sup_{\|x\|<1} \|Ax\| \leq \|A\| \quad (3)$$

Если м. и в. нормы согласованы, то вып-ся (3).

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \|A\|_{подч.} = \|A\|_{опер.}$$ — подчиненная (операторная) норма.

Проверить, что это норма!

3) $\|A+B\|_{подч.} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A+B)x\| \leq \sup\|Ax\| + \sup\|Bx\| = \|A\| + \|B\|$

Def: Евклидова норма (Фробениуса)

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2}$$

$\|E\|_E = \sqrt{n}$

$\|E\|_{подч.} = \sup\limits_{\|x\|\le 1} \|Ex\| = \sup \|x\| = 1.$

∡ $\|x\|_2$, $\|A\|_E$, покажем, что они согласованы:

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \|A\|_E^2 \cdot \|x\|_2^2$$

извлечь корень, получ. опр-е.

A, B. $\|A\|_E$, $\|B\|_E$

$$\|AB\|_E^2 = \sum_{k}^{n}\sum_{m}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jm}\right|^2 = \sum_k \sum_m \sum_j |a_{kj}|^2 \sum_j |b_{jm}|^2 =$$

$$= \|A\|_E^2 \cdot \|B\|_E^2$$

т.е. норма Фробениуса - мультипликат.

Вычисление $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

I. $p=\infty$, $\|x\|_\infty$

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|_\infty = \sup_{\|x\|\le 1} \max_{1\le k\le n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j\right| \le$$

$$\le \sup_x \max_k \sum_j |a_{kj}||x_j| \le$$

$$\le \sup_x \max_k \left(\sum_j |a_{kj}|\right) \cdot \underbrace{\max_j |x_j|}_{= \|x\|_\infty} \le$$

$\sup\limits_x = 1$ (т.к. $\|x\|\le 1$)

$$\le \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \sum_j |a_{k_0 j}| = \sum_j a_{k_0 j} \cdot \operatorname{sign} a_{k_0 j}$$

$A \ne 0$ - предпол.,

$\bar{x} = (\operatorname{sign} a_{k_0,1}, \dots \operatorname{sign} a_{k_0 n}) \ne 0$ ($-1, 0, 1$ или т.к. sign)

$\|\bar{x}\|_\infty = 1$

$\|A\bar{x}\|_\infty = \max\limits_k \sum\limits_j |a_{kj}|$ - т.е. тах реал-ся на $\bar{x}$.

Итого: $\|A\|_\infty = \max\limits_k \sum\limits_j |a_{kj}|$

II. $\|A\|_1 = \sup\limits_{\|x\|_1 \le 1} \|Ax\|_1 = \sup\limits_x \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\sum\limits_j a_{kj} x_j\right| \le$

$$\le \sup_x \sum_k \sum_j |a_{kj}||x_j| =$$

$$= \sup_x \sum_j \left(\sum_k |a_{kj}||x_j|\right) \le \left(\max_j \sum_k |a_{kj}|\right) \underbrace{\sup_x \sum_j |x_j|}_{=1}$$

$$\|A\|_1 \le \max_j \sum_k |a_{kj}| = \sum_k |a_{kj_0}|$$

∡ $\bar{x} = (0, \dots 0, \underset{j_0}{1}, 0, \dots 0)$

$\|A\bar{x}\| = \max \ldots$ — реализ-ся на $\bar{x}$

III $p=2$ $\|x\|_2$ $\|A\|_2$ — ?

$0 \le \|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x)$

транспонир, сопряж. матрица

A^*A; $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ — с.числа

Они $\in \mathbb{R}$, ≥ 0.

Упоряд.: $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n \ge 0$

$X_1 \ldots X_n$ — с.в.

$A^*AX_j = \lambda_j X_j$

берем X_j — ортонорм.

$\forall x = \sum_1^n c_j X_j$

$(A^*Ax, x) = \left(\sum_{j=1}^n c_j \lambda_j X_j, \sum_{k=1}^n c_k X_k\right) =$

$= \sum_j \sum_k \lambda_j c_j \overline{c_k} (X_j, X_k) = \sum_k \lambda_k |c_k|^2 \le$

$\le \lambda_1 \sum_k |c_k|^2 = \lambda_1 \|x\|_2^2$

$\|A\|_2^2 = \sup_{\|x\|_2 \le 1} \|Ax\|_2^2 \le \lambda_1$, где λ_1 — наиб. с.ч.

$x = X_1$ — возьмём., на нём реализ-ся.

$= \lambda_1$

Def: Спектр. радиус м. B

$\rho(B) = \max_k |\lambda_k(B)|$

с.числа

Итого: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$

Част. случай

A — симм. (эрмит.) в $\mathbb{R}$: $A^*A = A^2$

$\rho(A^2) = (\rho(A))^2$

$\|A\|_2 = \rho(A)$

Обратное неверно!

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\forall \|A\| > 0$

$\lambda_i(A) = 0$ $i = 1, 2$

$\rho(A) = 0$

$\forall A$, $Ax = \lambda x$, $\|A\|$, $|x|$ — сопр.

$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ $|\lambda| \le \|A\|$

$\rho(A) \le \|A\|$

Для $\|\cdot\|_2$: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} \le \sqrt{\|A^*A\|_1} \le$

$\le \sqrt{\|A^*\|_1 \|A\|_1} = \sqrt{\|A^*\|_\infty \|A\|_1}$

Круги Гершгорина.

Def: A – с диаг. преобладанием (по строчкам):

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, \quad \forall k=\overline{1,n}$$

Утв. A – с диаг. преобл. $\Rightarrow \exists A^{-1}$

Док-во. $Ax=0 \qquad x=(x_1, \dots x_n)\neq 0$

$$\max_j |x_j| = |x_k| > 0$$

k-ое ур-е: ~~$a_{kk}x_1+\dots+a_{kn}$~~

$$D := a_{k1}x_1+\dots+a_{k,k-1}x_{k-1}+a_{kk}x_k+\dots+a_{kn}x_n=0$$

$$|D| \geq |a_{kk}x_k| - \left|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right| \geq |a_{kk}||x_k| - \sum_{j\neq k}\underbrace{|a_{kj}||x_j|}_{\leq |x_k|} \geq |x_k|\left(|a_{kk}| - \sum_{j\neq k}|a_{kj}|\right) > 0$$

$\Rightarrow$ ~~$|x_k|$~~ но $D=0$?!

$\Rightarrow$ неверно т.е. $x_j=0 \rightarrow$ есть только трив. реш-е $\Rightarrow A$ – невырожд.

ч.т.д.

λ – с.ч.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Def: k-ый круг Гершгорина:

$$R_k = \left\{ z \;\middle|\; |z-a_{kk}| \leq \sum_{j\neq k}|a_{kj}| \right\}$$

$\measuredangle$ μ: $\mu \notin R$, $k=\overline{1,n}$, т.е:

$$|\mu - a_{kk}| > \sum_{j\neq k}|a_{kj}| \quad \forall k$$

$\measuredangle$ $A-\mu E$ – с диаг. преобл-ем $\Rightarrow$ невырожд. $\Rightarrow$ μ – не с.ч.

Утв. Все с.ч. $A \in \bigcup_{k=1}^{n} R_k$.

Зам-е A – симм.; ~~все с.ч.~~ круги вырожд. в отрезки.

Част. сл. Если кр. Γ пол. не пересек. то в каждом круге Γ лежит ровно по одному с.ч.

Если если k кругов имеют пересеч-я, то в их объед. ровно k с.ч.

~~В каждом кр~~

19.02.2013.

Оценка погрешности реш-я возмущ. системы. Число обусловленности.

$$E = A\cdot A^{-1}$$

$\|E\| \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$1 = \|E\|_{подч.} \Rightarrow \|E\| \ge 1$

т.е. $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \ge 1$, $\forall A$ - неособ.

$\triangle$ систему:

$x - Bx = y$, пусть $\|B\|_{подч.} < 1$

$x = Bx + y$ (далее $\| \ \|$ - это $\| \ \|_{подч.}$)

$\|x\| \le \|B\| \|x\| + \|y\|$,

$\|x\| \le \dfrac{\|y\|}{1 - \|B\|}$, $\forall x, y$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$

т.е. $x - Bx = 0$ - имеет только трив. реш-е

$(E - B)x = 0$

т.е. $E - B$ - неособ., т.е. $\exists (E-B)^{-1}$.

$(E - B)x = y$

$x = (E-B)^{-1} y$, подст. в нер-во:

$\|(E-B)^{-1} y\| \le \dfrac{\|y\|}{1 - \|B\|}$ // $: \|y\|$, берем sup.

$\Rightarrow \|(E-B)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1 - \|B\|}$

$\triangle$ Лин. ур-е:

$Ax = b$ (1), $\exists A^{-1}$, $x^* = A^{-1} b$

$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ (2)

(2) - возмущ-ое ур-е.

$\|\Delta x\|$, $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x^*\|} = \delta_x$ - относит. погреш.

абс. погреш.

$\cancel{Ax} + \Delta A x + (A + \Delta A)\Delta x = \cancel{b} + \Delta b$

$(A + \Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A \cdot x$ (*)

$A + \Delta A = A(E + A^{-1}\Delta A)$

предпол.: $\|A^{-1} \cdot \Delta A\| = q < 1$ (3)

$\|A^{-1} \cdot \Delta A\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| = q_1 < 1$ (4)

$E + A^{-1} \cdot \Delta A$, возьмем $B = -A^{-1} \cdot \Delta A$, $\|B\| = q < 1$

$\Rightarrow \exists (E + A^{-1} \cdot \Delta A)^{-1}$

(*): $\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}(\Delta b - \Delta A x) =$

$= (E + A^{-1}\Delta A)^{-1} \cdot A^{-1}(\Delta b - \Delta A x)$

$\|\Delta x\| \le \dfrac{1}{1 - q} \cdot \|A^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\|)$

$\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \cdot \|x\| = \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \cdot \underbrace{(\|b\| = \|Ax\|)}_{\text{boolean :)}} + \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \overbrace{\|A\| \|x\|}^{\le \|A\| \cdot \|x\|} \le$

$\le \delta_b \cdot \|A\| \|x\| + \delta_A \|A\| \|x\|$

$$\delta_x = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{1-q}(\delta_A + \delta_b)$$

Def: Числом обусловленности наз-ся величина

$$\mu(A) = \mathrm{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \qquad (\ge 1)$$

Показывает, во сколько увел. ошибки, допущ. в нач. данных.

$$\delta_x \le \frac{\mu(A)}{1-\mu(A)\delta_A}(\delta_A + \delta_b)$$

$$1 - q_1 = 1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| = 1 - \frac{\|A^{-1}\|\,\|A\|}{\|A\|}\|\Delta A\|$$

Пусть:

1) $\delta_A = 0 \qquad \delta_x \le \mu(A)\cdot\delta_b$

Def: Задача $Ax = b$ наз-ся хорошо обусловленной, если число об. невелико.

Плохо обусл. – в прот. случае.

Пример.

$\mu(A) = 10^5$

Заметим, что ч. об. зависит от выбора нормы!

$\mu_2(A) = \|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2$

◁ A – симм.

$\|A\|_2 = \rho(A) = \max\limits_k |\lambda_k(A)|$

$A: \ |\lambda_1| \ge \ldots \ge |\lambda_n| > 0$

$A^{-1}: \ \frac{1}{\lambda_i}$

$\|A^{-1}\|_2 = \max\limits_k \frac{1}{|\lambda_k(A)|}$

$\mu_2(A) = \frac{\max|\lambda_k(A)|}{\min|\lambda_k(A)|}$

◁ A – не симм.

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$

Задача.

1) $A = \begin{pmatrix} m & n \\ n & p \end{pmatrix}, \quad m, n, p \in \mathbb{N}$

$1 \le m, n, p \le 100$

A – невыр.

Найти матрицу с наиб. числом обусл-ти.

2) ~~SVD~~

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a > 0$, a – увелич.

$\mu_2(A) = \sqrt{\rho(A^TA)}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix}$

$\det(A^TA - \lambda E) = \lambda^2 - (a^2+2)\lambda + 1 = 0$

$\lambda_\pm = \dfrac{a^2+2 \pm \sqrt{(a^2+2)^2 - 4}}{2}$

$\lambda_+ \approx a^2$ $(a \to \infty)$ $\qquad a_- \approx \dfrac{1}{a^2}$ (т. Виета)

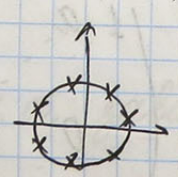
$\mu_2(A) = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\dfrac{\lambda_+}{\lambda_-}} \cong a^2$

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda_k(A) = 0 \quad k = \overline{1,n}$

$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$\det(A_\varepsilon - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n + \varepsilon(-1)^{n+1} = 0$

$|\lambda_k(A_\varepsilon)| = \sqrt[n]{|\varepsilon|}$



$\varepsilon = 10^{-15}$

$n = 30$

$\sqrt[n]{|\varepsilon|} \approx \dfrac{1}{\pi}$

§2 SVD. Singular value decomposition.

A - вещ. кв.

$B = A \cdot A^T$ - симм., неотр. опр.

с.ч. $B \geq 0$.

Преобр. подобия: $C \cdot A \cdot C^{-1}$ - сохр. с.ч.

~~Если A симм., берем C - ортогон.~~

B - симм. $\exists\, U$ - ортог.: $U^TBU = \mathrm{diag}[\mu_1^2 \ldots \mu_n^2] = D^2$ обозн.

$(\mu_1^2, \ldots \mu_n^2$ - с.ч.$)$

$\mu_1^2 \geq \ldots \geq \mu_n^2$

$U^TBU = (U^TA)(A^TU) = F \cdot F^T$, $\quad F = U^TA$

$F \cdot F^T = D^2 \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, где f_i - строка.

$\|f_i\|_2^2 = \mu_i^2 \Leftrightarrow \|f_i\|_2 = \mu_i$

Если $\det A = 0 \Rightarrow \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = 0$

$v_i = \dfrac{f_i}{\mu_i}, \quad i = \overline{1,r}$

$V^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \\ v_{r+1} \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ дополним единич. ортогон. вектор-ами

т.е. $V \cdot V^T = V^T \cdot V = E$

$f_i = \mu_i \cdot v_i$, $i = \overline{1,n} \iff \boxed{F = DV^T}$

$F = U^T A = DV^T$

$\boxed{A = UDV^T}$, $A^T = VDU^T$

$U^T A V = D$ это SVD-разложение

Def: μ_i – сингулярные зн-я м. A

Пример.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -5 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0 \\ & & & & 8 \end{pmatrix}$ $\mu_i(A) = 1, 5, 3, 0, 8$ (т.е. модули с.з)

$cond_2(A) = \frac{\max \mu_k}{\min \mu_k}$ – нельзя : 0!

$Ax = b$

$UDV^T x = b$

$D\underbrace{V^T x}_{y} = U^T b$

$Dy = U^T b$

$A = UDV^T$ $\quad AA^T = UD^2U^T$

$A^T = VDU^T$ $\quad A^TA = VD^2V^T$ преобр подобия $\Rightarrow$

с.з. одни и те же

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\rho(AA^T)}$ – док-ем.

2) $A_1 = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$ $\lambda_i(A_1) = 1+\varepsilon, 1-\varepsilon$

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda_i(A_2) = \lambda_i(A_1)$

4. $B(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon\cos\frac{2}{\varepsilon}, & \varepsilon\sin\frac{2}{\varepsilon} \\ \varepsilon\sin\frac{2}{\varepsilon}, & -\varepsilon\cos\frac{2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$

$B(0) = 0$

$A_\varepsilon = E + B(\varepsilon)$ $\quad \lambda_i(A_\varepsilon) = \lambda_i(A_1)$

$\left(\cos\frac{1}{\varepsilon}, \sin\frac{1}{\varepsilon}\right)$ – с.в.

$\left(\sin\frac{1}{\varepsilon}, -\cos\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Возмущение симметричных матриц.

21.02.2013.

A – симм., кв; B: $\|B\|_2 \le \varepsilon$, $A+B$.

$A = U^T \Lambda U$, $\Lambda = diag[\lambda_1, \dots \lambda_n]$

$(?)\, z \in \mathbb{C}$: $|z - \lambda_k| > \varepsilon$, $k = \overline{1,n}$

Покажем, что z - не с.ч. для $A+B$.

$A+B-zE = U^T\Lambda U + B - zE =$

$= U^T(\Lambda + UBU^T - zE)U =$

$= U^T(\underbrace{(\Lambda - zE)}_{\substack{\text{с.ч.} = \lambda_k - z \neq 0 \\ \Rightarrow \text{м.-обратима}}} + UBU^T)U = U^T(\Lambda - zE)^{-1}\cdot$

$\cdot\left(E + (\Lambda - zE)^{-1}UBU^T\right)\cdot U$ — обратима

$\triangleleft \|(\Lambda - zE)^{-1}UBU^T\|_2 \leq$

$\leq \|(\Lambda - zE)^{-1}\|\,\|U\|\,\|B\|\cdot\|U^T\|$

$\|U\|_2 = \sqrt{\rho(\underbrace{U^TU}_{E})} = 1 = \|U^T\|_2$

$\|B\|_2 \leq \varepsilon$

$\|(\Lambda - zE)^{-1}\|_2 = \max \frac{1}{|\lambda_k - z|} < \frac{1}{\varepsilon}$

т.е. норма < 1

Значит, скобка $(E + \ldots)$ - невырожд. тоже.

Т.е. $\forall$ с.ч. м. $A+B$ лежит в ε-окр-ти нек. с.ч. матрицы A.

(Т) A, B - произв. квадр. м.

$\lambda_k(A)$, $\lambda_k(B)$ - с.ч. (собств. ч.)

$A = (a_{kj})$ $\quad B = (b_{kj})$

$M = \max\{|a_{kj}|, |b_{kj}|\}$

Вып-ся: $\frac{1}{nM}\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj} - b_{kj}| = \delta$

Тогда: $\forall\ \lambda_k(A)$ можно сопост. $\lambda_j(B)$, т.ч.:

$|\lambda_k(A) - \lambda_j(B)| \leq (n+2)M\delta^{1/n}$.

Доп. U можно перенумеровать с.ч.:

$\lambda_1(A) \ldots \lambda_n(A)$

$\tilde{\lambda}_1(B) \ldots \tilde{\lambda}_n(B)$, так, что: $|\lambda_j(A) - \tilde{\lambda}_j(B)| \leq$

$\leq 2(n+1)^2 M\delta^{1/n}$.

Док-во (не будет)

(Т) $\forall A, B$; $\mu_j(A), \mu_j(B)$ - синг. ч. $j = \overline{1,n}$

Тогда: $|\mu_j(A) - \mu_j(B)| \leq \|A - B\|_2$ $\quad j = \overline{1,n}$

$\sum_{j=1}^{n}(\mu_j(A) - \mu_j(B))^2 \leq \|A - B\|_E^2$

§ 3. Возмущение произвольных матриц.

Def: м. имеет простую структуру, если $\exists$ базис из её с.в.

$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ – прост. структ. ($\forall$ вектор-собств. можем набрать из них базис).

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – не прост. (все с.в. лин. зав.)

A – прост. стр.:

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ – соб. з.

$u_1 \dots u_n$ – с.в.

$Au_i = \lambda_i u_i \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j$

$P_n(A, \lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$

$\lambda_1(A), \dots \lambda_n(A)$ – ~~непр. функц.~~

$P_n(A, \lambda)$ – непр.

$P_n(A, \lambda_1(A))$; $\quad \left.\dfrac{\partial P_n(A,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1} \neq 0$ (т.к. соб. з. простое)

$P_n(A, \lambda_k(A)) = 0. \qquad \lambda_k(A) \in C^1$ (по т. о неявной ф-ции).

$A + dA, \quad \lambda_i + d\lambda_i, \quad u_i + du_i$ – всё возмущается

— · — · — · —

$A \quad \begin{matrix} \lambda_1 \dots & \lambda_n \\ u_1 \dots & u_n \end{matrix}, \quad A^T \quad \begin{matrix} \lambda_1 \dots & \lambda_n \\ v_1 \dots & v_n \end{matrix}$

$(u_i, v_j) = 0, \quad i \neq j$

// т.к. $(Au_i, v_j) = \lambda_i (u_i, v_j) = (u_i, A^T v_j) = \lambda_j (u_i, v_j)$

но! $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow (u_i, v_j) = 0, \ i \neq j$.

при этом $(u_i, v_i) \neq 0$.

$dAu_i + Adu_i = d\lambda_i u_i + \lambda_i du_i \quad \cdot v_i$

$(dAu_i, v_i) + \underbrace{(Adu_i, v_i)}_{= \lambda_i (du_i, v_i)} = d\lambda_i (u_i, v_i) + \cancel{\lambda_i (du_i, v_i)}$

$d\lambda_i = \dfrac{(dAu_i, v_i)}{(u_i, v_i)}$

$|d\lambda_i| \leq \dfrac{\|dA\| \, \|u_i\| \, \|v_i\|}{|(u_i, v_i)|} = \|dA\| \dfrac{1}{|(u_i, v_i)| / (\|u_i\| \|v_i\|)} = \rho_i \|dA\|$

$\lambda_i, u_i, v_i \in \mathbb{R}$

$\rho_i = \dfrac{1}{|\cos(u_i, v_i)|} \geq 1$ – перекос

$\rho_i = 1 \Leftrightarrow$

Def: A – нормальная, если $A^* A = A A^*$

Утв. Для норм. м. величина перекоса $= 1$. (без док-ва).

$$(dAu_i, v_j) + (A\,du_i, v_j) \overset{*}{=} v_j \quad i \neq j$$

$$\cancel{d\lambda_i (u_i, v_j)} + \lambda_i (du_i, v_j)$$

$$(du_i, v_j) = \frac{(dAu_i, v_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$$

$\forall\, x = \sum_1^n c_i u_i \qquad (x, v_j) = c_j (u_j, v_j)$

$$c_j = \frac{(x, v_j)}{(u_j, v_j)};$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, v_i)}{(u_i, v_i)} u_i$$

$x = du_i$ – возьмём в кач-ве x. $\Rightarrow$

$$du_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(dAu_i, v_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)(u_j, v_j)} \cdot u_j$$

u_i

Можем счит. c_j – $\forall$. В частности, $c_i = 0$.

$$\|du_i\| \le \sum_{j \neq i} \frac{\|dA\|\,\|u_i\|\,\|v_j\|}{|(u_j, v_j)|\,|\lambda_i - \lambda_j|} \cdot \|u_j\|$$

$$\delta_{u_i} = \frac{\|du_i\|}{\|u_i\|} \le \|dA\| \cdot \sum_j \frac{\rho_j}{|\lambda_i - \lambda_j|}$$

если есть близкие соб. ч., будет плохо :(.

§4. Метод Гаусса и его трактовка как LU-разложение

LU, $\quad Ax = b$, $\quad \exists A^{-1}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \dots \quad (1) \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Def: Ниж. треуг. м. $\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

обозн.: L (= lower)
L (= left)

Верх. тр. м.: $\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ U (= upper)
R (= right).

Умн-е, обращение, комп. не меняет тип матрицы.

В сист. (1) первый столбец не нул. Переставим так, чтобы $a_{11} \neq 0$. Делим 1ю строку на a_{11}

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha_{ii} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} (i)$$

(i)

$M_i B$ – домнож. строки на число.

Т.е. наша операция это $M_1 A$.

Исключим x_1, с пом. первой строки:

$$a'_{22} x_2 + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2$$

$$\ldots$$

$$a'_{n2} x_2 + \ldots + a'_{nn} x_n = b'_n$$

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & \beta & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (i) \\ \\ \\ \\ \\ (j) \end{matrix}$$

$(i) \quad (j)$

– добавление строки i к стр. j с коэф. β.

$i < j$

Мы сделали $M_{1n} \ldots M_{13} M_{12} M_1 A$

Далее аналогично: делим на a'_{22}; выразим x_2 ...

$$R := M_n \ldots \underbrace{M_{2n} \ldots M_{23}}_{\text{исключ. } x_2} M_2 \underbrace{M_{1n} \ldots M_{12}}_{\text{исключ. } x_1} M_1 A$$

R – верх. треуг.

A пр-е всех, кроме A – левая.

т.е: $LA = R \Rightarrow A = L^{-1} R = L_1 R$

$A = L_1 R$

$Ax = b$

$L_1 R x = b$

$L_1 (Rx) = b \qquad Rx = y$

$L_1 y = b$

Ищем $y \Rightarrow$ ищем x.

М. Гаусса равносилен разлож-ю м. в пр-е левой и правой.

<u>Варианты исп.:</u>

I. Наиб. по модулю эл-т в канд. столбце.

II. На канд. шаге – наиб. эл-т по всей матрице (Жордан).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переставить – и справа единичная.

26.02.2013.

§5. Метод Крылова нахождения с.ч. и с.в. матрицы.

A, $\det(A-\lambda E) = (-1)^n(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - \ldots - p_n)$

$P_n(\lambda)=0 \Rightarrow$ нашли $\lambda_1 \ldots \lambda_n$

$c^{(0)}$ - вектор;

$c^{(1)} = Ac^{(0)}, \ldots c^{(n)} = Ac^{(n-1)}$

$n+1$ вектор, они лин. зав (т.к. длины n)

I Пусть $c^{(0)}, \ldots c^{(n-1)}$ - лин. нез.

$c^{(n)} = q_n c^{(0)} + q_{n-1} c^{(1)} + \ldots + q_1 c^{(n-1)}$ - сиг. лин. зависит отн-но q.

Т. Гамильтона - Кэли:

$P_n(A) = 0$ - хар. мн-н.

$A^n = p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} + \ldots + p_n \cdot E \quad / \cdot c^{(0)}$

$c^{(n)} = p_1 c^{(n-1)} + \ldots + p_n \cdot c^{(0)}$

$p_j = q_j$

II Если $c^{(0)} \ldots c^{(n-1)}$ - лин. зав.

1) изменить $c^{(0)}$

Но это не всегда поможет, например, если $A=E$.

$P_n(\lambda)$ - хар. мн-н $\quad \varphi_m(\lambda)$ - мин. мн-н.

пусть $m<n$

$\varphi_m(A) = 0$

$\varphi_m(\lambda) = \cancel{d_0}\lambda^m + \ldots + d_m =$ (до делаем $=1$)

$= \lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + \ldots + d_m$

Тогда $\varphi_m(A) = A^m + d_1 A^{m-1} + \ldots + d_m E$

$\varphi_m(A)c^{(0)} = c^{(m)} + d_1 c^{(m-1)} + \ldots + d_m c^{(0)} = 0$

т.е. $c^{(m)}$ - лин. комб. остальных т.е. m векторов лин. зав. (где $m<n$).

Т.е. если ст. мин. мн-на $< n$, то построить не получится.

Как построить $\varphi_m(\lambda)$?

$\varphi_m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2} \ldots$

(α_i размер ящика из формы Жордана).

$A=E \quad \lambda_i = E$

ф. Жорд.: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \varphi_1(\lambda) = \lambda - 1.$

Прим.

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$

1) $c^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ мн-н: $(\lambda-1)$

2) $c^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\lambda-2)$

3) $c^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\lambda-3)$

Нашли с.ч.

Предпол. $c^{(0)}, \dots c^{(n-1)}$ – лин. нез. Предпол., что м. – простой структуры (векторы лин. нез.)

$\lambda_1 \dots \lambda_n$
$u_1 \dots u_n$ – л/н

$$Au_i = \lambda_i u_i$$

$$\forall c^{(0)}: \quad c^{(0)} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad | \cdot \beta_0$$

$$Ac^{(0)} = \quad c^{(1)} = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n \quad | \cdot \beta_1$$

$$\dots$$

$$c^{(n-1)} = \alpha_1 \lambda_1^{n-1} u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{n-1} u_n \quad | \cdot \beta_{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j c^{(j)} = \alpha_1 u_1 (\beta_0 + \beta_1 \lambda_1 + \dots + \beta_{n-1} \lambda_1^{n-1}) +$$
$$+ \alpha_2 u_2 (\beta_0 + \beta_1 \lambda_2 + \dots + \beta_{n-1} \lambda_2^{n-1}) +$$
$$\dots$$
$$+ \alpha_n u_n (\beta_0 + \beta_1 \lambda_n + \dots + \beta_{n-1} \lambda_n^{n-1}).$$

Это верно $\forall \beta_i$. Хотим, чтобы он был $\parallel$ вектору u_1.

$$R_{n-1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \lambda^i$$

$$R_{n-1}(\lambda_2) = R_{n-1}(\lambda_3) = \dots = R_{n-1}(\lambda_n) = 0$$

$$R_{n-1}(\lambda_1) \neq 0$$

$$R_{n-1}(\lambda) = \frac{P_n(\lambda)}{\lambda_1 - \lambda} = \underline{\beta_0} + \underline{\beta_1}\lambda + \dots + \underline{\beta_{n-1}} \lambda^{n-1}$$

Нашли с.в. (u_1; потом аналогично u_2 ... и т.д.)

Полная проблема сб. зн-ий (наход. всех с.ч. и с.в.) решена.

§6. Степенной метод наход. наиб. по модулю сб. зн-я матрицы и соб. вект-а.

$\lambda_1 \dots \lambda_n \qquad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$
$u_1 \dots u_n$

Ищем $\lambda_1, u_1 \qquad |\lambda_i| \leq \|A\|$

$$\forall c^{(0)} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$Ac^{(0)} = c^{(1)} = \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n$$

$$\dots$$

$$c^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k u_n$$

$$c^{(k+1)} = \alpha_1 \lambda_1^{k+1} u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k+1} u_n$$

$$i \in 1:n \qquad \frac{c_i^{(k+1)}}{c_i^{(k)}} = \frac{(\alpha_1 \lambda_1^{k+1} u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k+1} u_n)_i}{(\alpha_1 \lambda_1^k u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k u_n)_i} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \delta_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} + \dots + \delta_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{1 + \delta_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \dots + \delta_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k} = \qquad \alpha_1 \neq 0, \ (u_1)_i \neq 0$$

Предпол., что $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots$

$$= \lambda_1 \frac{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}\right)}{1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)} = \lambda_1 \left(1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) = \qquad k \to \infty$$

$$// \ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2$$

$= \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right)$

1) если $|\lambda_1|>1$ – переполнение (числ. и знам. неогр. растут)

2) $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_1|=1$

Нашли $c^{(k)}, c^{(k+1)}$

$$\frac{c_i^{(k+1)}}{c_i^{(k)}} \approx \lambda_1, \quad \frac{c^{(k+1)}}{\|c^{(k+1)}\|}$$

$c^{(k)}$ почти $\parallel u_1$.

Это был степенной метод.

Если всё веществ., но с.ч. – компл.? Что это значит? Значит, посл-ть сходится не будет...

$|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geq\ldots$ – пусть теперь так.

а) $\cancel{|\lambda_1|=|\lambda_2|}$ $\lambda_1=\lambda_2$ (и вещ.)

компл. и = быть не могут, т.к. должны быть сопряж.

$$\frac{c_i^{(k+1)}}{c_i^{(k)}} \cong \frac{\alpha_1\lambda_1^{k+1}(u_1+\varepsilon_2 u_2)_i}{\alpha_1\lambda_1^{k}(u_1+\chi_2 u_2)_i} \longrightarrow \lambda_1$$

с.в. – лин. комбинация

б) $\lambda_1=-\lambda_2$

$$\frac{c_i^{(k+1)}}{c_i^{(k)}} \cong \frac{\alpha_1\lambda_1^{k+1}(u_1+(-1)^{k+1}\varepsilon_2 u_2)_i}{\alpha_1\lambda_1^{k}(u_1+(-1)^{k}\chi_2 u_2)_i}$$

если k – чет. – одно напр-е;
k – нечет – другое напр-е.

Нашли два вектора.

в) компл. (нет стабилизации)

$c^{(k)} \approx \alpha_1\lambda_1^k u_1 + \alpha_2\lambda_2^k u_2 + \ldots$ $\quad /q$

$c^{(k+1)} \approx \alpha_1\lambda_1^{k+1} u_1 + \alpha_2\lambda_2^{k+1} u_2 + \ldots$ $\quad /p$

$c^{(k+2)} \approx \alpha_1\lambda_1^{k+1} u_1 + \alpha_2\lambda_2^{k+2} u_2 + \ldots$ $\quad /1$

$c^{(k+2)} + pc^{(k+1)} + qc^{(k)} \approx$

$\approx \alpha_1\lambda_1^k u_1(q+p\lambda_1+\lambda_1^2) +$

$+ \alpha_2\lambda_2^k u_2(q+p\lambda_2+\lambda_2^2) = 0.$ (пусть лин. зав.)

$\lambda^2+p\lambda+q=0$

т.е. лин. зав-ть описывает комп. случай.

§7. Метод скалярных произведений.

A $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, $u_1 \ldots u_n$ – базис $\quad A^T$: $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, $v_1 \ldots v_n$

$|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\ldots$

$\forall c^{(0)} = \sum_1^n \alpha_i u_i \quad c^{(k)} = A^k c^{(0)},$

$\forall\, d^{(0)},\ d^{(k)} = (A^T)^k d^{(0)}$ $\qquad d^{(0)} = \sum \beta_j v_j$

$$\triangleleft\ \frac{(c^{(k+1)}, d^{(k)})}{(c^{(k)}, d^{(k)})} = \frac{\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i^{k+1} u_i, \sum_j \beta_j \lambda_j^k v_j\right)}{\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i^k u_i, \sum_j \beta_j \lambda_j^k v_j\right)} =$$

$$= \frac{\sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i^{2k+1} (u_i, v_i)}{\sum_i \alpha_i \beta_i \lambda_i^{2k} (u_i, v_i)} = \qquad \alpha_1, \beta_1 \neq 0$$

$$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$$

$$= \lambda_1 \cdot \frac{1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k+1}\right)}{1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)$$

Если $A = A^T \Rightarrow c^{(0)} = d^{(0)}$

28.02.2013. /* Замещаемая лекция */

Ст. методом можно вычислять:

1) Вычисл. наиб. по мод. с.з.;
2) Вычисл. наиб. с.з.;
3) Вычисл. наим. с.з.;
4) Вычисл. наим. по мод. с.з.;
5) Вычисл. с.з. наиб. близкого к заданному числу.

Утв. 1 $\left.\begin{matrix}\lambda_1, \dots \lambda_n - \text{с.з. } A \\ x_1, \dots x_n - \text{с.в. } A\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}-\lambda_1, \dots -\lambda_n - \text{с.з. } -A \\ x_1, \dots x_n - \text{с.в. } -A\end{matrix}$

Док-во. $Ax_i = \lambda_i x_i \quad (\cdot(-1))$

$(-A)x_i = (-\lambda_i)x_i$

Утв. 2 $\left.\text{— " —}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 - z, \dots \lambda_n - z - \text{с.з.} \\ x_1, \dots x_n - \text{с.в.} (A - zE)\end{matrix}$

Док-во. $z \in \mathbb{R}$ - скаляр.

$Ax_i = \lambda_i x_i$

$Ax_i - zx_i = \lambda_i x_i - zx_i$

$(A - zE)x_i = (\lambda_i - z)x_i$

Утв. 3 $\left.\text{— " —}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_n} - \text{с.з. } A^{-1} \\ x_1, \dots x_n - \text{с.в. } A^{-1}\end{matrix}$

Док-во. $Ax_i = \lambda_i x_i \quad (\cdot A^{-1} \text{ слев})$

$x_i = A^{-1}\lambda_i x_i$

$A^{-1}x_i = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)x_i$

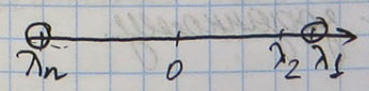
1) Вычисл. наиб. мод. с.з.

Собственно ст. метод (см. ранее)

2) Наиб. с.з.

Пусть $\lambda_1, \dots \lambda_n$ - спектр A и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \geq \lambda_n$

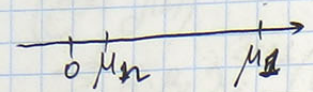
A:



Нужно сдвинуть.

$\forall i \ |\lambda_i| < \|A\|$ (норма $\forall$)

Построим $B := A + \|A\|_\infty \cdot E$



Для B: $\mu_i = \lambda_i + \|A\|_\infty$ — спектр B (отн-но A).

Запускаем ст. метод для B.

$\Rightarrow$ нашли μ_1 $\Rightarrow$

$\lambda_1 = \mu_1 - \|A\|$.

3) Вычисл. наим. с.з.

$\lambda_1, \dots \lambda_n$ - с.з. A, то $-\lambda_1 \dots -\lambda_n$ - с.з. $(-A)$

Ищем наиб. с.з. для $-A$, получим наим. A $(\cdot -1)$

4) Наим. по мод. с.з.

Если λ_i, с.з. A, то $\frac{1}{\lambda_i}$ - с.з. A^{-1}

Если λ_n наим. по мод с.з. A, то $1/\lambda_n$ - наиб. по мод с.з. (A^{-1}).

Его можно вычислить степенным методом.

(!) Требуется обращение матрицы. $(O(n^3))$.

5) С.з. наиб. близ. к заданному.

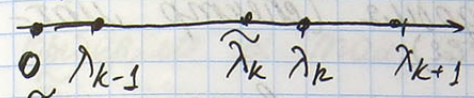
$\lambda_1 \dots \lambda_n$ - с.з. A

$\tilde{\lambda}_k$ - приближение к λ_k. Хотим найти λ_k. (т.е. уточнить $\tilde{\lambda}_k$)

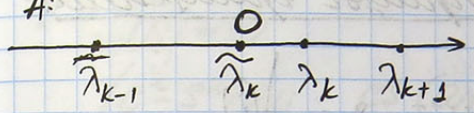
$B := (A - \tilde{\lambda}_k E)^{-1}$ и применим степ. метод.

$\Rightarrow \mu_i = \dfrac{1}{\lambda_i - \tilde{\lambda}_k}$

A:



$\tilde{A}$:



После обращ. λ_k станет наиб. по модулю.

Фиксим ст. ряд.

$\lambda_i = \dfrac{1}{\mu_i} + \tilde{\lambda}_k$

Методы в 4) и 5) называют обратным степенным методом.

Чем ближе $\tilde{\lambda}_k$ к λ_k, тем выше скорость сх. ст. метода в отним B, поскольку велико отн-е наиб. по мод. с.з. B к след. по величине с.з. B.

§8. Метод Якоби.

A - симм. !

Хотим найти все с.ч.
Будем строить матрицы:

$$A_{k+1} = T_k^{-1} A_k T_k, \quad A_0 = A$$

Хотим, чтобы $A_k \xrightarrow{k\to\infty} diag(\lambda_1, .. \lambda_n)$

Это преобр-ия подобия (спектр матрицы не меняется).

T_k - ортог. матрицы вращения:

$$T_k(i,j,\alpha) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & c & \cdots & -s & \cdots & & \\ & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & s & \cdots & 1\,c & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & (i) & & (j) & & & \end{array} \end{array}$$

$c = \cos\alpha$
$s = \sin\alpha$

Они ортог. $\Rightarrow T_k^{-1} = T_k^T$

Эти преобр-я изменяют в A_k две строки и два столбца.

Симм-ть сохраняется.

$$A_k = \underset{A}{\boxed{\cdots}} \Rightarrow A_{k+1} = \underset{\tilde{A}}{\boxed{\cdots}}$$

(один шаг алгоритма)

$$\tilde{a}_{ki} = \tilde{a}_{ik} = c a_{ki} + c a_{kj}, \quad k \neq i,j$$
$$\tilde{a}_{kj} = \tilde{a}_{jk} = -s a_{ki} + c a_{kj}, \quad k \neq i,j$$
$$\tilde{a}_{ii} = c^2 a_{ii} + 2cs\, a_{ij} + s^2 a_{jj}$$
$$\tilde{a}_{jj} = s^2 a_{ii} - 2cs\, a_{ij} + c^2 a_{jj}$$
$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} = (c^2 - c^2) a_{ij} + cs(a_{jj} - a_{ii})$$

Выберем α так, чтобы обнулить $\tilde{a}_{ij}$:

$$\tilde{a}_{ij} = 0$$
$$(c^2 - s^2) a_{ij} + cs(a_{jj} - a_{ii}) = 0$$
$$\cos 2\alpha\, a_{ij} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\,(a_{jj} - a_{ii}) = 0$$
$$tg(2\alpha) = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}\right)$$

На каждом шаге алгоритма подвергаем обнулению наиб. по мод. внедиаг. эл-т.

Ранее обнуленные эл-ты „портятся" оказывается:

$$A_k \xrightarrow{k\to\infty} diag(\lambda_1, .. \lambda_n)$$

Док-во (линейной сход-ти).

Близость A к диаг. м. хар-ем.

числом:

$$t^2(A) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2$$

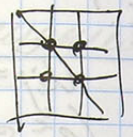
Отметим св-ва:

1) $\tilde{a}_{ik}^2 + \tilde{a}_{jk}^2 = a_{ik}^2 + a_{jk}^2, \quad k \neq i,j$

2) $\tilde{a}_{ii}^2 + \tilde{a}_{jj}^2 + 2\tilde{a}_{ij} = a_{ii}^2 + a_{jj}^2 + 2a_{ij}$

3) Тогда $t^2(\tilde{A}) = t^2(A) - 2a_{ij}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ сумма квадр. внедиаг. эл-ов убывает.



Однако a_{ij} – наиб. по мод. внедиаг. эл-т A.

Его можно оценить:

$$a_{ij}^2 \geq \frac{1}{n(n-1)} t^2(A)$$

кол-во внедиаг. эл-ов.

$$t^2(\tilde{A}) = t^2(A) - 2a_{ij}^2 \leq$$

$$\leq t^2(A) - \frac{2}{n(n-1)} t^2(A) = t^2(A)\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)$$

Т.е. $t^2(A_{k+1}) \leq c \cdot t^2(A_k)$

где $c = 1 - \frac{2}{n(n-1)}$ –

это линейная скорость сх-ти.

$t^2 \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \Rightarrow A_k \longrightarrow diag$ ч.т.д.

Случай компл. чисел.

05.03.2013.

λ_1, λ_2

$$c^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k u_1 + \alpha_2 \lambda_2^k u_2 + \ldots \quad * q$$

$$c^{(k+1)} = \lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \ldots \quad * p \quad +$$

$$c^{(k+2)} = \lambda_1^{k+1} + \ldots \lambda_2^{k+2} \ldots \quad * 1$$

$$c^{(k+2)} + p\, c^{(k+1)} + q\, c^{(k)} =$$

$$= \alpha_1 \lambda_1^k u_1 (q + p\lambda_1 + \lambda_1^2) + \alpha_2 \lambda_2^k (q + p\lambda_2 + \lambda_2^2)$$

$$\exists\, q, p: \quad q + p\lambda_1 + \lambda_1^2 = 0$$

$$q + p\lambda_2 + \lambda_2^2 = 0$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$c^{(k+2)} + p\, c^{(k+1)} + q\, c^{(k)} = 0 \quad \text{(приблизим)} \quad / \cdot c^{(k)}, c^{(k+1)}$$

$$(c^{(k+2)}, c^{(k)}) + p(c^{(k+1)}, c^{(k)}) + q(c^{(k)}, c^{(k)}) = 0$$

$$(c^{(k+2)}, c^{(k+1)}) + p(c^{(k+1)}, c^{(k+1)}) + q(c^{(k)}, c^{(k+1)}) = 0$$

Метод Якоби

I A – симм. $\exists\, U$ – орт.,

$$U^T A U = \Lambda = [\lambda_1, \ldots \lambda_n]$$

$$AU = U\Lambda$$

$\Rightarrow U$ сост. из с. векторов $(|||||)$

$A_k = (a_{mp}^{(k)})$

$S_k = \sum\limits_{m \neq p} (a_{mp}^{(k)})^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$S_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) S_k$

Когда-то мы процедуры прервем. Какая будет точность?

$k: |a_{mp}^{(k)}| \leq \varepsilon \quad m \neq p$

$a_{mp}^{(k)} = \varepsilon \alpha_{mp}^{(k)}$, где α - числа порядка 1.

A_k, ищем λ_1, $\lambda_1 = a_{11}^{(k)} + c \cdot \varepsilon^2$

$\det(A - \lambda_1 E) = 0 \Leftrightarrow \det(A_k - \lambda_1 E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -c\varepsilon^2 & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -c\varepsilon^2, & \varepsilon\alpha_{12}^{(k)} & \dots & \varepsilon\alpha_{1n}^{(k)} \\ \varepsilon\alpha_{21}^{(k)}, & a_{22}^{(k)} - a_{11}^{(k)} c\varepsilon^2 & \dots & \\ & & & \\ \varepsilon\alpha_{n1}^{(k)}, & & & a_{nn}^{(k)} - a_{11}^{(k)} - c\varepsilon^2 \end{vmatrix} = 0$$

Везде, где есть ε обнулится, останется:

$$\begin{vmatrix} -c & \alpha_{12}^{(k)} & \dots & \alpha_{1n}^{(k)} \\ \alpha_{21}^{(k)} & a_{22} - a_{11} & & 0 \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1}^{(k)} & 0 & & a_{nn} - a_{11} \end{vmatrix} = 0$$

$c =$ (предпол., все с.з. пор. разн. чтобы $a_{ii} - a_{11} \neq 0$)

Получим, что ф-лы для с.з.

$$\boxed{\lambda_1 = a_{11}^{(k)} + c \cdot \varepsilon^2}$$

т.е. определим с точностью до ε^2.

Пусть A - эрмитова.

Теперь U - унитар.

$$U_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\varphi_k & & * & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & * & & \cos\varphi_k & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_k \\ \\ \\ j_k \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & i_k & & & j_k & & \end{array} \end{array} \qquad tg\, 2\varphi_k = \frac{2|a_{i_k j_k}^{(k)}|}{a_{i_k i_k}^{(k)} - a_{j_k j_k}^{(k)}}$$

$* = -e^{i\psi_k} \sin\varphi_k$

$* = e^{-i\psi_k} \sin\varphi_k$

, где $\psi_k = \arg a_{i_k j_k}^{(k)}$

Метод Гивенса

Это приведение с помощью вращения к 3-диаг. виду за конеч. число шагов.

$$\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$$

§ 9. Итерационные методы решения систем лин. ур-ий

$Ax = b$

$\{A\}$ - мн-во кв. матриц.

$P_m(A)$ - мн-н

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots \qquad |x| < \rho$

$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \quad f_m(A)$

$\|A\|$ - норма;

$f(A)$? $\lim_{m\to\infty} f_m(A) \Leftrightarrow = f(A)$ - функция матрицы.

$\|f(A) - f_m(A)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists f(A) \Leftrightarrow$ спектр $A < \rho$
$(\rho(A) < \rho)$

дост. усл-е $\boxed{\|A\| < \rho}$
$\rho(A)$

$a_k = 1$: $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ - сх. при $|\rho| < 1$

Выск-я эквив-ны (при $|\rho| < 1$):

1) $\sum_0^\infty A^k$ - сх 2) $A^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ 3) $\rho(A) < 1$

$(E + A + A^2 + \ldots + A^m)(E - A) = E - A^{m+1} \longrightarrow E$
$\qquad\qquad\qquad

(Т) Чтобы пр. итер. сх. для $\forall$ нач. приб-я ~~реш-я~~ $x^{(0)}$ $\Longleftrightarrow$ $\rho(A) < 1$.

<u>Док-во.</u>

"$\Leftarrow$" $x^{(k+1)} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{A^{k+1}} x^{(0)} + \underbrace{(E + A + \ldots + A^k)}_{(E-A)^{-1}} b \longrightarrow$

$A^{k+1} \longrightarrow 0$

$\longrightarrow (E-A)^{-1} b$

$x = Ax + b$

$(E-A)x = b$ // $E-A$ – невыр., т.к. $\rho(A) < 1$.

$x^* = (E-A)^{-1} b$

"$\Rightarrow$" Тогда она сх. к решению.

$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b$

$x^* = Ax^* + b$

$x^* - x^{(k+1)} = A(x^* - x^{(k)}) = A^2(x^* - x^{(k-1)}) =$

$\ldots = A^{k+1}(x^* - x^{(0)}) \longrightarrow 0$ (т.к. итер. сх.)

Но вектор $(x^* - x^{(0)})$ – $\forall$

$\Rightarrow A^{k+1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \rho(A) < 1$

ч.т.д.

$x^* - x^{(k+1)} = A(x^* - x^{(k)})$

$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \underbrace{\|A\|}_{\mu} \|x^* - x^{(k)}\|$

если $\mu = \|A\| < 1$, то пр. итер. сх. (по теореме)

$\rho(A) \le \mu$

Чем меньше μ, тем быстрее сх.

Это <u>оценка на шаге</u>.

Хотим глобальное:

$\mu < 1$, $x^{(k+1)} = A^{k+1} x^{(0)} + (E + A + \ldots + A^k) b$

$x^* = (E-A)^{-1} b = (E + A + A^2 + \ldots) b$

$x^* - x^{(k+1)} = (A^{k+1} + A^{k+2} + \ldots) b - A^{k+1} x^{(0)}$

$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \|A\|^{k+1} \|x^{(0)}\| + \dfrac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|} \cdot \|b\|$

Т.е. за $k+1$ шаг ошибка будет не больше, чем пр. часть. С ростом k она убывает.

Это <u>априорная оценка</u>.

$x^* - x^{(k+1)} = A(x^* - x^{(k+1)}) =$

$= A((x^* - x^{(k+1)}) - (x^{(k)} - x^{(k+1)}))$

$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \|A\| (\|x^* - x^{(k+1)}\| + \|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|)$

$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \dfrac{\|A\|}{1 - \|A\|} \|x^{(k)} - x^{(k+1)}\|$

Это <u>апостериорная оценка</u>

§10. Метод Зейделя

$x = Ax + b$

$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b$

$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i, \quad i = 1..n$

$x_1^{(k+1)} \ldots x_{i-1}^{(k+1)}$ – пусть нашли.

$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$

$i = \overline{1,n}$

$x^{(k+1)} = Fx^{(k+1)} + Hx^{(k)} + b$

$F + H = A \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ a_{21} & \ddots & \\ a_{n1} \ldots & a_{n\,n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad H = A - F = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots & a_{1n} \\ \ddots & \vdots \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

$(E - F)x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + b$

$x^{(k+1)} = (E-F)^{-1}(Hx^{(k)} + b) =$

$= \underbrace{(E-F)^{-1}H}_{A_1} x^{(k)} + \underbrace{(E-F)^{-1}b}_{b_1}$

$x^{(k+1)} = A_1 x^{(k)} + b_1$

Т.е. это метод пр. итерации, только для другой матрицы.

Какой же метод лучше?

1. оба сходятся
2. оба расх.
3,4. ровно 1 сход-ся.

Задача. Привести примеры 4 матриц: для кот. реализ. эти случаи! (2 пор.)

$\|A\|_\infty = \mu < 1 \Rightarrow$ метод простой итерации сх. 07.03.2012.

$x_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^* + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^* + b_i$

$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$

$x_i^* - x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_j^* - x_j^{(k+1)}) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^* - x_j^{(k+1)})$

$|x_i^* - x_i^{(k+1)}| \le \|x^* - x^{(k+1)}\|_\infty \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}_{\alpha_i} +$

$+ \|x^* - x^{(k)}\|_\infty \underbrace{\sum_{j=i}^{n} |a_{ij}|}_{\beta_i}$

$\max_i (\alpha_i + \beta_i) = \|A\|_\infty = \mu$ (max сумм эл-ов строки).

$$\max_i |x_i^* - x_i^{(k+1)}| = |x_{i_0}^* - x_{i_0}^{(k+1)}| =$$
$$= \|x^* - x^{(k+1)}\| \le \alpha_{i_0}\|x^* - x^{(k+1)}\| +$$
$$+ \beta_{i_0}\|x^* - x^{(k)}\|$$

$$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \underbrace{\frac{\beta_{i_0}}{1-\alpha_{i_0}}}_{\mu'} \cdot \|x^* - x^{(k)}\|$$

Пошаговая итер. см. Зейделя это была.

А для простой:

$$\|x^* - x^{(k+1)}\| \le \mu \|x^* - x^{(k)}\|$$

Покажем, что $\mu' \le \mu$ (т.е. что метод Зейделя не хуже метода простой итерации).

$$\alpha_i + \beta_i - \frac{\beta_i}{1-\alpha_i} = \frac{\alpha_i + \cancel{\beta_i} - \alpha_i^2 - \alpha_i\beta_i - \cancel{\beta_i}}{1-\alpha_i} =$$

$$= \frac{\alpha_i(1-\alpha_i-\beta_i)}{1-\alpha_i} \ge 0 \quad (\text{т.к. } \alpha_i+\beta_i \le \max(\alpha_i+\beta_i) = \mu < 1).$$

$$\forall i \quad \frac{\beta_i}{1-\alpha_i} \le \alpha_i + \beta_i$$

$$\mu' = \frac{\beta_{i_0}}{1-\alpha_{i_0}} \le \alpha_{i_0} + \beta_{i_0} \le \max_i(\alpha_i + \beta_i) = \mu$$

§ 11. Уточнение вычисления обратной матрицы.

A, A^{-1}, $B_0 \approx A^{-1}$

т.е. $C_0 = E - AB_0$ - мала: $\|C_0\| = q < 1$.

$AB_0 = E - C_0$

$B_0^{-1}A^{-1} = (E - C_0)^{-1} =$

$A^{-1} = B_0(E - C_0)^{-1} = B_0(E + C_0 + C_0^2 + \dots)$

Ряд сх, т.к. $q<1$. Но! Он будет медленно сх, если $q \approx 1$.

$C_k = E - AB_k$

$B_{k+1} = B_k(E + C_k + C_k^2 + \dots + C_k^{p-1})$, $p \ge 2$.

$$AB_k = (E - C_k) = \underset{(E - C_{k-1})}{AB_{k-1}}(E + C_{k-1} + C_{k-1}^2 + \dots + C_{k-1}^{p-1}) =$$

$$= E - C_{k-1}^p$$

$$C_k = C_{k-1}^p = C_{k-2}^{p^2} = \dots = C_0^{p^k}$$

$$\|C_k\| \le \|C_0\|^{p^k} = q^{p^k}$$

$$\|B_k - A^{-1}\| = \|A^{-1}(AB_k - E)\| = \|A^{-1}C_k\| \le \|A^{-1}\| \cdot q^{p^k}$$

$p = 2$ $\quad B_{k+1} = B_k(E + C_k) = B_k(2E - AB_k)$

$k = 0, 1, \ldots,$ B_0

$\|B_k - A^{-1}\| \le c \cdot q^{2^k}$

$p = 3$ $B_{k+1} = B_k(E + C_k + C_k^2) =$

$= B_k(E + (E - AB_k) + E - 2AB_k + (AB_k)^2) =$

$= B_k(3E - 3AB_k + (AB_k)^2)$

$\|B_k - A^{-1}\| \le c \cdot q^{3^k}$

если $q = \frac{1}{10}$, $k = 3$

погреш. $= 10^{-27}$

<u>Выбор нач. приближ. B_0, обеспеч-его сходимость итер. процесса.</u>

I A-симм., $\exists A^{-1}$

$T_\alpha := E - \alpha A$, T_α-симм. $\|\cdot\|_2$ (т.е. спектр. рад. матрицы).

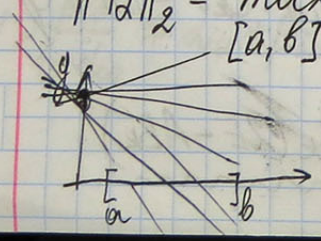
Предпол., что A- полож. опред.

$\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n > 0$ $\lambda_i \in [a, b]$

$y = 1 - \alpha\lambda$, $\lambda \in [a, b]$

$\lambda_k(T_\alpha) = 1 - \alpha \cdot \lambda_k(A) = y(\lambda_k(A))$

$\|T_\alpha\|_2 = \max\limits_{[a,b]} |y(\lambda)|$



α: $\|T_\alpha\| < 1$. $\Rightarrow$ $\alpha > 0$ & $y(b) > -1$

$y(b) = 1 - \alpha b > -1 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{b}$

$$\boxed{0 < \alpha_{gon.} < 2/b}$$

$\|T_{\alpha_{gon}}\| = \|E - \alpha_{gon} \cdot A\| < 1$.

$\underbrace{E - A(\alpha_{gon} \cdot E)}_{C_0}$ $B_0 = \alpha_{gon} \cdot E$

$\|C_0\| < 1 \Rightarrow$ процесс сх.

$\alpha_{опт}$: $\|T_{\alpha_{опт}}\| = \min$

$y(a) + y(b) = 0$

$1 - \alpha a + (1 - \alpha b) = 0$

$\alpha_{опт} = \frac{2}{a+b}$

$\min\limits_{\alpha \in \alpha_{gon}} \|T_\alpha\| = \|T_{\alpha_{опт}}\| = y(a) = \frac{b-a}{b+a} < 1$.

$\frac{b-a}{b+a} = \frac{b/a - 1}{b/a + 1} = \frac{cond(A) - 1}{cond(A) + 1}$

II A- невыр., $\det(A) \ne 0$

$B = A \cdot A^T$ - симм., обрат., пол. опр.

α_{gon}: $\|T_\alpha\| = \|E - \alpha B\| < 1$

$\alpha_{опт}$:

$$C_0 = E - \alpha A A^T = E - A\underbrace{(\alpha A^T)}_{B_0}$$

$$\|C_0\| = \|E - AB_0\| < 1.$$

§ 12. Метод Ричардсона.

$Ax = b$ $\quad$ A - симм., пол. опр.

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0 \qquad \lambda_i \in [a, b]$$

$\lambda_1 \ldots \lambda_n$ $\quad$ $Au_j = \lambda_j u_j$ $\quad$ u_j - ортонорм. базис.

$u_1 \ldots u_n$

$$x^* = A^{-1} b$$

$\forall x^{(0)}$, $\quad x^{(0)} - x^* = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$, $\quad \sum_{1}^{n} c_i^2 = \|x^{(0)} - x^*\|_2^2$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \beta_k (A x^{(k)} - b), \quad k = 0, 1, \ldots$$

β_k - либо числа, либо матрицы.

] β_k - числа, $\beta_k \neq 0$

Если такая посл-ть сх., то сх. к решению.

$$\downarrow x^* \qquad \downarrow x^* \qquad \downarrow Ax^*$$

$$\cancel{x^*} = \cancel{x^*} + \beta_k (Ax^* - b)$$

Как выбрать β_k, чтобы сходимость была быстрее?

$$x^{(k+1)} - x^* = x^{(k)} - x^* + \beta_k (Ax^{(k)} - b) =$$

$$= (x^{(k)} - x^*) + \beta_k A (x^{(k)} - A^{-1} b) =$$

$$x^{(k)} - x^*$$

$$= (E + \beta_k A)(x^{(k)} - x^*) = \ldots =$$

$$= (E + \beta_k A)(E + \beta_{k-1} A) \ldots (E + \beta_0 A)(x^{(0)} - x^*) =$$

$$= \prod_{j=0}^{k} (E + \beta_j A) \cdot \sum_i c_i u_i =$$

$$= \sum_i c_i \prod_{j=0}^{k} (E + \beta_j A) u_i =$$

$$u_i + \beta_j \lambda_i u_i = (1 + \beta_j \lambda_i) u_i$$

$$= \sum_i c_i \prod_{j=0}^{k} (1 + \beta_j \lambda_i) u_i$$

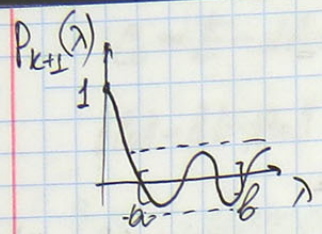
$$P_{k+1}(\lambda) = \prod_{j=0}^{k} (1 + \beta_j \lambda);$$

$$x^{(k+1)} - x^* = \sum_{i=1}^{n} c_i P_{k+1}(\lambda_i) u_i$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_2 \leq \underbrace{\max_{[a,b]} |P_{k+1}(\lambda)|}_{M_{k+1}} \underbrace{\|\sum c_i u_i\|_2}_{\sqrt{\sum c_i^2} = \|x^{(0)} - x^*\|} =$$

$$= M_{k+1} \|x^{(0)} - x^*\|$$

Хотим: $M_{k+1} \xrightarrow[\{\beta_i\}]{} \min$

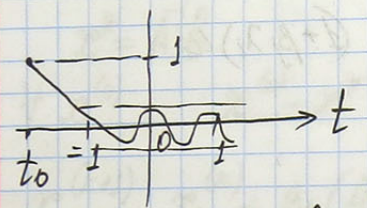


т.е. хотим найти многочлен, прох. через 1 и на $[a,b]$ наименее уклон. от 0.

$[a,b] \longrightarrow [-1,1]$

$$\lambda = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} \qquad t \in [-1,1]$$

$$\lambda_0 = 0 \longleftrightarrow t_0 = -\frac{b+a}{b-a} < -1$$



$$P_{k+1}(\lambda) = P_{k+1}\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) = Q_{k+1}(t)$$

Было: $Q_{k+1}(t) = 1 \cdot \dfrac{T_{k+1}(t)}{T_{k+1}(t_0)}$

$$\|Q_{k+1}\|_{C([-1,1])} = \max_{-1 \le t \le 1} |Q_{k+1}(t)| = 1.$$

$$\|Q_{k+1}\| \le \frac{1}{|T_{k+1}(t_0)|} \sim$$

(т.к. < -1)

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \cancel{\sqrt{x^2-1}}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$$

$$x = t_0 = -\frac{b+a}{b-a} < -1$$

$$|T_n(x)| \sim \frac{1}{2}\left|\left(t_0 - \sqrt{t_0^2-1}\right)^n\right|$$

$$\sim \frac{2}{\left|\left(t_0 - \sqrt{t_0^2-1}\right)^n\right|} \leftarrow \cancel{M_{k+1}}$$

$$\|Q_{k+1}\| = M_{k+1} \le \frac{2}{\left|\left(t_0 - \sqrt{t_0^2-1}\right)^n\right|}$$

$$P_{k+1}(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_j = -1/\beta_j$$

$$\beta_j = -1/\lambda_j$$

где $\lambda_j = \dfrac{b-a}{2}t_j + \dfrac{b+a}{2}$

где t_j: $T_{k+1}(t_j) = 0 \quad j = \overline{0,k}$

$$t_j = \cos\frac{2j+1}{2(k+1)}\pi$$

$\tilde{\lambda}_0, \ldots \tilde{\lambda}_k$ – корни $P_{k+1}(\lambda)$. $\in [a,b]$

12.03.2013.

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{b-a}{2}t_j + \frac{b+a}{2}, \quad \text{где } t_j = \cos\frac{2j+1}{2(k+1)}\pi, \ j = \overline{0,k}$$

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{\beta_j} \qquad \left(\beta_j = -\frac{1}{\tilde{\lambda}_j}\right)$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \le M_{k+1}\|x^{(0)} - x^*\|$$

Хотим достичь точности ε: $M_{k+1} \le \varepsilon$.

Если $M_{k+1} > \varepsilon$, то: можно:

1) увеличить k

2) $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_k$.

повторяем, пока не достигнем точности.

3) $k=0$, $T_1(t)=0$ $t_0=0$

$$\beta_0 = -\frac{2}{a+b}$$

$$\beta_0, \beta_0, \beta_0, \dots$$

Общий случай. Есть пар-ры.

$\beta_0, \dots \beta_k$

$$\beta_j = -\frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \qquad -\frac{1}{a} \le \beta_j \le -\frac{1}{b}$$

$$-1 \le \beta_j a \le -\frac{a}{b}$$

$$0 \le \underbrace{1+\beta_j a}_{\text{малы!}} \le 1-\frac{a}{b}$$

$$-\frac{b}{a} \le \beta_j b \le -1$$

$$\underbrace{1-\frac{b}{a}}_{\gg 1} \le 1+\beta_j b \le 0$$

β_j — чебышёвские пар-ры.

Оптим. перебор.

$k+1 = 2^m$

~~0~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~

(0,15) (1,14) (2,13) (3,12) (4,11) (5,10) (6,9) (7,8)

~~13~~ ~~14~~ ~~15~~

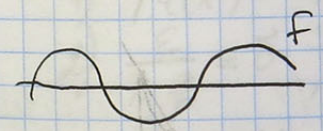
(0,15,7,8) (1,14,6,9) (2,13,5,10) (3,12,4,11)

(0,15,7,8, 3,12,14,11) (1,14,6,9, 2,13,5,10)

это оптимальный перебор параметров.

§13 Решение нелинейных ур-ий и систем нелинейных ур-ий.

$f(x)=0$



Отделение (корня): если указали отрезок $[a,b]$, на котором корень один.

I Дихотомия

Изнач: $[a,b]$

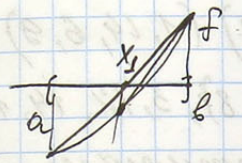
$c = \frac{a+b}{2}$

if $f(c)<0$ then
$a := c$
else $b := c$

Если $b-a<\varepsilon$, то корень найден. Чаще-пополам. и остаёт. сходимость линейная.

II Метод хорд

$$0 = y = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$



$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f(a,b)}$$ — разделенная разность

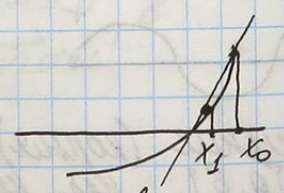
$[a,b] \longrightarrow [x_1, b]$
$\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\qquad [a_1, b]$

f', f'' - знакопост. $\Rightarrow$ сходится.

метод Хорд.

III Метод секущих.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_{k-1}, x_k)}$$



проводим прямую через 2 точки пересеч-я.

Если f', f'' - знакопост. и если $\left|\frac{f''}{f'}\right| \le M$

x_0, x_1 : $|x_0 - x^*| \le \varepsilon$
$|x_1 - x^*| \le \varepsilon$

$|x_k - x^*| \le c \cdot q^{1,618^k}$, $k = 0, 1, \ldots$
$0 < q < 1$

$1,618 \approx \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

§2 Метод итерации.

$f(x) = 0$

$x = \underline{x - \Psi(x) f(x)}$ $\quad x^*$ - реш-е обоих ур-ий

$x = \varphi(x)$ - обозн.

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad$ всё на $\mathbb{C}$!

$B_\delta(x_0) := \{x \mid |x - x_0| \le \delta\}$

T $x = \varphi(x)$,
$\forall x', x'' \in B_\delta(x_0)$ вып-ся:

1) $|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le q|x' - x''|$ $\quad 0<q<1$
2) $\frac{\varepsilon}{1-q} \le \delta$, $\quad \varepsilon = |x_0 - \varphi(x_0)|$

$\Rightarrow$ $x = \varphi(x)$ имеет! реш-е $x^* \in B_\delta(x_0)$

$x_k \longrightarrow x^*$, $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$

и к тому же:

$$|x_k - x^*| \le \frac{\varepsilon}{1-q} q^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Док-во.

(∃) Покажем, что $x_k \in B_\delta(x_0)$

$x_0 \in B_\delta(x_0)$

x_1: $|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| = \varepsilon < \frac{\varepsilon}{1-q} \le \delta$

Предпол: $\underline{k \longrightarrow k+1}$

$x_0, \dots x_k \in B_\delta(x_0)$

$|x_{k+1} - x_0| \le |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| + \dots$

$\dots + |x_1 - x_0| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| + \dots + |\varphi(x_0) - x_0| \le$

аргументы в шаре, для них верно утв. 1).

$\le q|x_k - x_{k-1}| + q|x_{k-1} - x_{k-2}| + \dots + |x_1 - x_0| \le$

$\dots \le q^k|x_1 - x_0| + q^{k-1}|x_1 - x_0| + \dots + |x_1 - x_0| =$

$= \varepsilon(1 + q + \dots + q^k) < \varepsilon(1 + q + \dots) =$

$= \frac{\varepsilon}{1-q} \le \delta$

т.е. x_{k+1} тоже в шаре.

$|x_{k+m} - x_k| \le |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \le$

$\le |x_1 - x_0| q^k + |x_1 - x_0| q^{k+1} + \dots + |x_1 - x_0| q^{k+m-1} =$

$= \varepsilon q^k (1 + q^2 + \dots + q^{m-1}) < \varepsilon \frac{q^k}{1-q} \le \delta q^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$

$m \to \infty$

$\Rightarrow$ Посл-ть фунд.

$\Rightarrow x_k \longrightarrow x^*$ (т.к. в $\mathbb{C}$ фунд. посл-ть сх)

по усл. 1) $\Rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k)$

φ-непр

можем перейти к пределу

$x^* = \varphi(x^*)$

$x^* \in B_\delta(x_0)$.

(!) $x^*, x^{**} \in B_\delta(x_0)$

$|x^* - x^{**}| = |\varphi(x^*) - \varphi(x^{**})| \le$

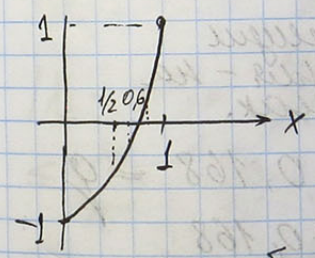
$\le q|x^* - x^{**}|$

$\lim\limits_{m \to \infty} |x_{m+k} - x_k| = |x^* - x_k| \le \frac{\varepsilon}{1-q} \cdot q^k$.

ч.т.д.

Пример

$x^3 + x - 1 = 0$



$f' = 3x^2 + 1 > 0$

$f'' = 6x \ge 0$

$f(0,6) < 0$

$f(0,7) > 0$

$\delta = 0,1$

$B_\delta(x_0)$: $[0,6; 0,8]$ – на этом отрезке ровно 1 корень

$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le q|x' - x''|$

$x = \varphi(x)$: $x = \underbrace{1 - x^3}_{\varphi(x)}$

$\varphi'(x) = -3x^2$

$\max\limits_{[0,6;0,8]} |\varphi'| \geq 1{,}08 > 1$

усл-я теоремы не вып-ся! не сходится!

$f(x)=0 \iff x = x - \psi(x) f(x) \qquad \psi(x) = c$

$x = \underbrace{x - c(x^3+x-1)}_{\varphi(x)} \qquad \varphi'(0{,}7) \approx 0$

$1 - c(3x^2+1) = 0 \qquad x_0 = 0{,}7$

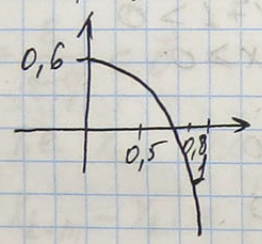
$c \cong \frac{1}{3x_0^2+1} \qquad c = 0{,}4$

$x = x - 0{,}4(x^3+x-1) =$

$= -0{,}4x^3 + 0{,}6x + 0{,}4$

$\varphi'(x) = -1{,}2x^2 + 0{,}6 =$

$= 0{,}6(1-2x^2)$



максимум модуля – на концах.

$\varphi'(0{,}6) = 0{,}168 = q$

$\varphi'(0{,}8) = -0{,}168$

$q \approx \frac{1}{6}$, т.е. на каждом шаге ошибка убывает в 6 раз.

$x = \varphi(x), \quad x^*$

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Def. Итерация имеет порядок m $(m \geq 1)$, если:

$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(x^*) = 0$

$\varphi^{(m)}(x^*) \neq 0.$

$\triangle \ \varphi(x) - x^* =$

$= \varphi(x) - \varphi(x^*) = \varphi'(x^*)(x-x^*) + \ldots + \frac{\varphi^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1} +$

$+ \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x^*)^m.$

В пр. части всё $=0$, кроме послед. слагаемого.

положим $x = x_{k-1}$

$x_k - x^* = \frac{\varphi^{(m)}(\xi)}{m!}(x_{k-1} - x^*)^m$

предпол., что: $|\varphi^{(m)}(x)| \leq M_m$

$|x_k - x^*| \leq \frac{M_m}{m!}|x_{k-1} - x^*|^m \leq$

$\leq \frac{M_m}{m!}\left(\frac{M_m}{m!}|x_{k-2} - x^*|^m\right)^m \leq \ldots$

$\leq \ldots \leq \left(\frac{M_m}{m!}\right)^{1+m+m^2+\ldots+m^{k-1}} |x_0 - x^*|^{m^k} =$

$= \left(\frac{M_m}{m!}\right)^{\frac{m^k-1}{m-1}}$

$$= \underbrace{\left(\frac{Mm}{m!}|x_0-x^*|\right)}_{\gamma}^{\frac{m^k-1}{m-1}} \cdot |x_0-x^*|^{m^k-\frac{m^k-1}{m-1}} \leq$$

γ: возьмём x_0: $|x_0-x^*| \leq \varepsilon < 1$

Тогда второй сомножитель оцениваем 1.

Выбир. x_0: $\gamma < 1$

$$\leq \left(\gamma^{\frac{1}{m-1}}\right)^{m^k} \cdot \underbrace{\left(\gamma^{\frac{1}{m-1}}\right)^{-1}}_{const} \leq C \cdot \gamma_1^{m^k}, \quad \gamma_1 < 1.$$

$$|x_k - x^*| \leq C \cdot \gamma_1^{m^k}, \quad 0 < \gamma_1 < 1.$$

---

1) $f(x)=0 \qquad x = \underbrace{x - \psi(x) f(x)}_{\varphi(x)}$

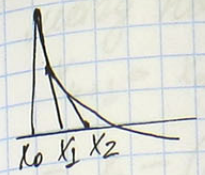
$x_0, \quad \psi(x) = \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ метод корд

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} \cdot f(x_k)$$

2) $x_0 \longrightarrow x \qquad \psi(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k = 0, 1, \ldots$$



Метод касательных (метод Ньютона)

Усл-я: $x = \varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$\varphi'(x) = \cancel{1} - \cancel{\frac{f'(x)}{f'(x)}} + \frac{ff''}{f'^2}$$

Ясно, что $\varphi'(x^*)=0$ (т.к. $f(x^*)=0$)

т.е. порядок метода не меньше 2

14.03.2013.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}$$

$\varphi'(x^*) = 0 \Longrightarrow m \geq 2$

$\varphi''(x^*) \neq 0 \qquad m = 2$

Порядок метода итерации – второй.

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_n)^2 \Big/ : f'(x_n)$$

$$0 = \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x^* - x_n}_{= -x_{n+1}} + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

$$x^* - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

$|f''| \leq M, \quad |f'| > m_1$

$$|x^* - x_{n+1}| \le \frac{M}{2m_1}|x^* - x_n|^2$$

x_0?

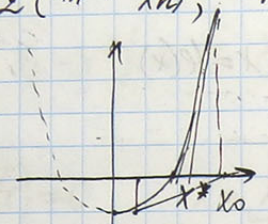
$a>0$,

Примеры $x=\sqrt{a}$ – хотим найти.

1) $f(x) = x^2 - a = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} =$$

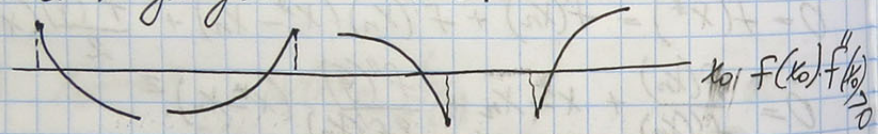
$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$



Как выбрать x_0, чтобы метод сходился?

Если взять $x_0 > x^*$, то, очевидно, сойдутся. А если $x_0 < x^*$, нас первым шагом отбросит направо и вернемся в I случай.

Т.е. подходит: $\forall x_0 > 0$.



2) $a>0$

$x = \frac{1}{a}$ – хотим.

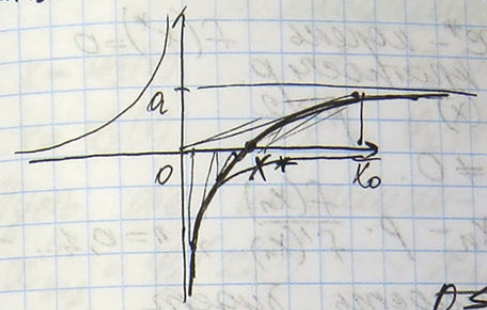
$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{a - \frac{1}{x_n}}{1/x_n^2} =$$

$$= x_n - (ax_n^2 - x_n) = 2x_n - ax_n^2 = x_n(2 - ax_n)$$

$x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$, $n = 0, 1, \dots$ x_0 – ?



$0 < x_0 < x^*$ – ok.

$2 - ax_0 > 0$ – предельное полож-е касательной

~~$0 \le x_0 < x^*$~~

$0 < x_0 < -\frac{2}{a}$ – такие x_0 можно брать.

Пусть: $x_0 f(x_0) = ax_0 - 1 < 0$

a – матрица; $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Мы уже такое делали:

$$B_{n+1} = B_n(2E - AB_n)$$

Контр-пример для м. Ньютона:

$x^2 = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n}{2}$$

$$|x_{n+1} - 0| = \frac{1}{2}|x_n - 0|$$

Сходимость лин., а не квадр!
Почему?
т.к. нет усл-я: $|f'| \geq m > 0$.
У нас: $|f'| = 0$.

$f(x)=0$, x^* – корень кратности p. $f(x^*)=0$

$f(x) = (x-x^*)^p f_1(x)$ $\quad p \geq 2$

$f_1(x^*) \neq 0$.

Тогда $x_{n+1} = x_n - p \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n=0,1\ldots$ –

то сходимость будет квадратич.

Упр. док-ть.

Пример.

$x^2=0$ $\quad x_0 \neq 0$

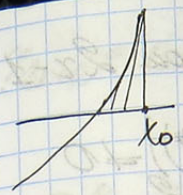
$x_{n+1} = x_n - 2 \cdot \frac{x_n^2}{2x_n} = 0$

сойдёмся за 1 шаг :).

§3 Модифицированный метод Ньютона.

$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(x_0)}$ $\quad n=0,1\ldots$

Считаем произв. только в одной точке.



т.е. проводим ∥ касательные.
~~Точнее~~ скорость сх. меньше, но не нужно вычислять производную.

§4. Метод Эйткена ускорения сходимости.

$x = \varphi_1(x)$ $\quad x^* = \varphi_1(x^*)$

$x = \varphi_2(x)$ $\quad x^* = \varphi_2(x^*)$

Пусть обе итерации – порядка r ($r \geq 1$)

$x_{n+1}^{(1)} = \varphi_1(x_n^{(1)})$ $\quad x_{n+1}^{(2)} = \varphi_2(x_n^{(2)})$

$\varphi_i^{(r)}(x^*) \neq 0$ $\quad$ ~~$i=1,2$~~ $i=1,2$. (т.к. порядок r).

если $\underline{r=1}$: $\quad \varphi_i'(x^*) \neq 0$

1) $|\varphi_i'| > 1$ – пос-ть расх.
2) $|\ | < 1$ – итерации сх.
3) $|\ | = 1$. – что угодно?

$$\Delta\ \Phi(x) = \frac{x\varphi_1(\varphi_2(x)) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)}{x - \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_1(\varphi_2(x))}$$

$x = \Phi(x)$.

Пусть $r > 1$.

Тогда $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ – порядок $2r-1$.

II $r=1$ а) $(1-\varphi_1'(x^*))(1-\varphi_2'(x^*)) \neq 0$ порядок 2.

б) $(\quad)\cdot(\quad) = 0$ порядок 1.

Док-ва не будет.

Примеры

Если $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\Phi(x) = \frac{x\varphi(\varphi(x)) - \varphi^2(x)}{x - 2\varphi(x) + \varphi(\varphi(x))}$$

$x_0 \qquad x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_0)$

$$x_3 = \frac{x_0 x_2 - x_1^2}{x_0 - 2x_1 + x_2}$$

$x_4 = \varphi(x_3)$

$x_5 = \varphi(x_4)$

$x_6 = \frac{\ldots}{\ldots}$

Предпол., что посл-ть сх. будет неопр-ть. $\frac{0}{0}$. (числ. и знам. $\to 0$).

$x_{3k} = a + \overline{x_{3k}}$

$x_{3k+1} = a + \overline{x_{3k+1}}$

$x_{3k+2} = a + \overline{x_{3k+2}}$

где a – общее начало чисел.

c – начинаются различия.

$\Phi(x_{3k}, x_{3k+1}, x_{3k+2}) =$

$= a + \Phi(\overline{x_{3k}}; \overline{x_{3k+1}}; \overline{x_{3k+2}})$

Т.е. если было 5 нулей после запятой, домнож. на 10^5. В знам. всё ok, а в числителе маленьк. величина.

Примеры.

$x^3 + x - 1 = 0 \qquad x_{k+1} = 1 - x_k^3$

$r=1$, расх., это II а).

§5. Решение систем нелинейных уравнений.

$f(x) = 0 \qquad x = (x_1, \ldots x_n)$

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1, \ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

$x = \underbrace{x - \psi(x) f(x)}_{\varphi(x)}$, где ψ – невыр. м.
x, f – векторы.

$x = \varphi(x)$

итерация: $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots$

(X, ρ) – метрич. пр-во

$B_\delta(x^{(0)}) = \{ x \mid \rho(x, x^{(0)}) \le \delta \}$

(T) Пусть $x = \varphi(x)$ – итер. $\forall\, x', x'' \in B_\delta(x^{(0)})$:

1) $\rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) \le q \cdot \rho(x', x'')$ $0 < q < 1$

2) $\frac{\varepsilon}{1-q} \le \delta$, $\varepsilon = \rho(x^{(0)}, \varphi(x^{(0)}))$.

Тогда $x = \varphi(x)$ ед. реш-е $x^* \in B_\delta(x^{(0)})$

$x^{(k)} \longrightarrow x^*$, $x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)})$

и при этом: $\rho(x^{(k)}, x^*) \le \frac{\varepsilon}{1-q} \cdot q^k$ $k = 0, 1 \ldots$

Док-во

Аналогично одномерному случаю.

ч.т.д.

тогда: $q = \max |\varphi'|$

У нас: $x = \varphi(x)$, $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, \ldots x_n) \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_n) \end{cases}$

Def: $\varphi'(x)$ – дифф-ема в (.) x, если $\exists\, \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_e}$

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Метод Ньютона.

$\psi(x) = f_x^{-1}(x)$;

$$f_x(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$ – м. Якоби.

$x = \underbrace{x - f_x^{-1}(x) f(x)}_{\varphi(x)}$

$x = \varphi(x)$: $x_1 = x_1 - \sum_{j=1}^{n} \left(f_x^{-1}(x)\right)_{1j} \cdot f_j(x)$

$x_2 = x_2 - \ldots$

$x_k = x_k - \sum_{j=1}^{n} \left(f_x^{-1}(x)\right)_{kj} \cdot f_j(x)$

$x = (x_1 \ldots x_n)$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = \delta_{kl} - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \left(f_x^{-1}(x) \right)_{kj} \cdot f_j(x) + \right.$$

$$\left. + \left(f_x^{-1}(x) \right)_{kj} \cdot \frac{\partial}{\partial x_l} f_j(x) \right)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l}(x^*) \right)_{k,l=1}^{n} = 0 = \left(\text{т.к. } f_j(x^*) = 0 \text{ — первое слаг.} = 0 \right.$$

второе — пр-е двух обратных м.

$$= \varphi'(x^*) \qquad \left. \text{ед.м.} - \text{ед.м.} = 0 \right)$$

// δ_{kl} — символ К.

Порядок ≥ 2.

Значит, кв. сходимость есть.

$$x = x - f_x^{-1}(x) f(x)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \underbrace{f_x^{-1}(x^{(k)})}_{\text{неудобно обращать}} f(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$\Longleftrightarrow \quad f_x'(x^{(k)}) \left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right) = -f(x^{(k)})$$

↑ а это СЛУ отн-но вектора $x^{(k+1)} - x^{(k)}$

Модифицированный метод Ньютона.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f_x^{-1}(x^{(0)}) f(x)$$

Аналогично одномер. случаю.

Для ч. 2 понадобится книга:

М.К. Даугавет, 2006

„Теория приближ. методов. Линейные ур-я".

1971, М.К. Гавурин

19.03.2013.

Часть II

$Au=f \quad A: U \to F \quad A$ - линеен;

$A(c_1u_1+c_2u_2) = c_1Au_1 + c_2Au_2$

$\Delta A + \Delta A$, предп. $\exists A^{-1}$; $(A+\Delta A)^{-1}$

$(A+\Delta A)u = f$

(Т) U - полное; $R(A)=F$

$\exists A^{-1}$ - огр.,

ΔA - (возмущение) - огран.

$\|A^{-1}\Delta A\| \le \rho < 1.$ $\quad (A+\Delta A)(u+\Delta u) = f+\Delta f$

Тогда 1) $R(A+\Delta A)=F$,

$\exists (A+\Delta A)^{-1}$, - огр.:

$\|(A+\Delta A)^{-1}\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\rho}$

2) $\|\Delta u\| \le \dfrac{1}{1-\rho}(\rho\|u^*\| + \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta f\|)$

Док-во

полнота нужна для т. Банаха, т.е. сходимости.

Докажем $R(A+\Delta A)=F$

$(A+\Delta A)\tilde{u} = \tilde{f}$

$A(E+A^{-1}\Delta A)\tilde{u} = \tilde{f}$

$(E+A^{-1}\Delta A)\tilde{u} = A^{-1}\tilde{f} \qquad \forall \tilde{f} \in F$

$\tilde{u} = \underbrace{A^{-1}\tilde{f}}_{\in D(A)} - \underbrace{A^{-1}\Delta A\tilde{u}}_{\in D(A)}$

$A: D(A)$ - ест. область опр-я

$A+\Delta A: D(A+\Delta A)$

$\tilde{u} \in D(A+\Delta A)$

$\Rightarrow \tilde{u} \in D(A)$

Значит, $D(A) = D(A+\Delta A)$

Остальное аналогично ~~одномерному~~ конечномерному случаю

ч.т.д.

$\|A\|, \|A^{-1}\|$

$\mu(A) = cond(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

$\delta_u \le \dfrac{\mu(A)}{1-\mu(A)\delta_A}(\delta_A + \delta_f)$

/* δ_u - относит. ~~пог~~ погреш.; $\|\Delta u\|$ - абсолют. погр. */

Док-во из 2) из теоремы.

$Au = f$ (1)

$A: U \to F$

Введем оператор $\overline{\varphi_n}$ (остальные даны).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] & F \arrow[d, "\psi_n"] \\ U_n \arrow[r, "A_n"] \arrow[u, shift right, "\overline{\varphi_n}"'] & F_n \end{tikzcd}$$

Дана посл-ть ур-ий:

(2) $A_n u_n = f_n$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

$u \in U$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & Au \arrow[d, "\psi_n"] \\ \varphi_n u \arrow[r, "A_n"] & \psi_n A_n \\ & A_n \varphi_n u \end{tikzcd}$$

Def: Мера аппроксимации на $u \in D(A)$ это величина:

$$\gamma_n(u) = \| A_n \varphi_n u - \psi_n A_n \| \quad (3)$$

если $u = u^*$, то

$$\gamma_n(u^*) = \| A_n \varphi_n u^* - \psi_n f \|$$

Def: Ур-я (2) аппроксимируют ур-е (1), если

$$\gamma_n(u^*) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Def: Пусть $\delta_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Аппрокс-ция имеет порядок δ_n, если:

$$\gamma_n(u^*) = O(\delta_n)$$

(т.е. порядок одинаковый)

Def: Приближенное реш-е ур-я (1) –

$$u^{(n)} = \overline{\varphi_n} \cdot u_n^*, \quad \text{где} \quad A_n u_n^* = f_n$$

Пример $\quad -u'' = f$ + гран. усл-я

u_n^*

u_n^* – ~~скелет~~ каркас точного решения.

$\bar{u} \in D(A)$

$A\bar{u} = \bar{f}$

$\measuredangle$ ур-е $\quad Au = \bar{f}$

Сопостав.: $A_n u_n = f_n \qquad f_n = \psi_n \bar{f}$

$$\gamma_n(\bar{u}) = \| \underbrace{A_n \varphi_n \bar{u} - \bar{f}_n}_{\text{невязка}} \|$$

(прибл. ур-я при подстановке в него $\bar{u}$).

$\varphi_n u$, $u \in D(A)$

представитель u в U_n.

Def: Каркасы сходятся, если

$$\|\varphi_n u^* - u_n^*\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Т (о сходимости каркасов приближ. решений).

$\exists\, u^*$ - реш-е.

Пусть $\forall\, n \geq n_0$ $\exists$ обр. A_n^{-1} (т.е. сущ-ют каркасы приближ. реш-ий).

Тогда:

$$\|\varphi_n u^* - u_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \gamma_n(u^*) \quad (4)$$

И если пр. часть $\longrightarrow 0$, то каркасы сходятся.

<u>Док-во.</u>

$$A_n u_n^* = f_n \qquad u_n^* = A_n^{-1} f_n$$

$$\varphi_n u^* - u_n^* = A_n^{-1} \cdot A_n \cdot \varphi_n u^* - A_n^{-1} \underbrace{\psi_n f}_{= A u^*} =$$

$$= A_n^{-1}(A_n \varphi_n u^* - \psi_n A u^*)$$

$$\|\varphi_n u^* - u_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \underbrace{\|A_n \varphi_n u^* - \psi_n A u^*\|}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ч. т.д.

$$\|A_n^{-1}\| \leq \ldots \longrightarrow \gamma_n \longrightarrow 0$$

<u>Задача: „$Au = f$:"</u>

$$\begin{cases} Lu = u'' + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = g(x) \\ \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases}$$

$$A(u) = \begin{pmatrix} L(u) \\ u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} g(x) \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

U, F - ?

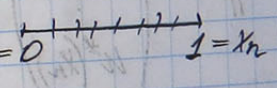
Знаем, что $D(A) \subset U$,

p, q, g - непр; $F = \mathbb{C}$

Нужно строить $A_n u_n = f_n$

n, $h = \frac{1}{n}$, $x_k = kh$, $k = \overline{0, n}$

$\{x_k\}$ - сетка



$U_n = F_n$

$\|\cdot\|_{U_n F_n} = \max|\cdot|$

$x = x_k$, $k = \overline{1, n-1}$

$$u''(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \qquad \pm\frac{h^2}{12} u^{IV}(\xi)$$

$$u'(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} \qquad \frac{h^2}{6} u'''(\xi)$$

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2} + p_k \dfrac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h} + q_k u_k = g_k \\ k = \overline{1, n-1} \\ u_0 = a \\ u_n = b \end{cases}$$

$A_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_n$, где $\tilde{u}_n = (u_0, u_1, \dots u_n)$

A-трехдиаг.

$\tilde{f}_n = (a, g(x_1), \dots g(x_{n-1}), b)$

Ищем меру апп.:

$\gamma_n(u^*) = \| A_n \varphi_n u^* - \psi_n A u^* \|$

$\varphi_n(u^*) \in U$: $\varphi_n u^* = (u^*(x_0), \dots u^*(x_n))$

$\psi_n f = \tilde{f}_n$

$$\gamma_n(u^*) = \left\| A_n \begin{pmatrix} u^*(x_0) \\ \vdots \\ u^*(x_n) \end{pmatrix} - \dots \right\|_\infty \ominus$$

$$\psi_n A u^* = \begin{pmatrix} u^*(x_0) \\ \dots \\ u^{*\prime\prime}(x_k) + p_k u^{*\prime}(x_k) + q u^*(x_k) \\ \dots \\ u^*(x_n) \end{pmatrix}$$

$\ominus$ /* норма $\|\cdot\|_\infty$ – макс. модуля координат

Δ к-ю координату:

$$\frac{u^*(x_{k+1}) - 2u^*(x_k) + u^*(x_{k-1})}{h^2} + p_k \frac{u^*(x_{k+1}) - u^*(x_{k-1})}{2h} +$$

$$+ q_k u^*(x_k) - u^{*\prime\prime}(x_k) - p_k u^{*\prime}(x_k) - q_k u^*(x_k) =$$

$$= \left(\frac{u^*(x_{k+1}) - 2u^*(x_k) + u^*(x_{k-1})}{h^2} - u^{*\prime\prime}(x_k) \right) +$$

$$+ p_k \left(\frac{u^*(x_{k+1}) - u^*(x_{k-1})}{2h} - u^{*\prime}(x_k) \right) + 0 =$$

$$= \pm \frac{h^2}{12} u^{*IV}(\xi_k) \pm \frac{h^2}{6} u^{*\prime\prime\prime}(\eta_k) = O(h^2)$$

т.е. $\gamma_n(u^*) = O(h^2)$ есть аппроксимация.

Приближенное решение

$u^{(n)} = \overline{\varphi_n} u_n^*$, взяли $\overline{\varphi_n}$

(T) (о ex-ти приближ. реш-ий)

Пусть $\forall n \geq n_0$ $\exists A_n^{-1}$ – огр.

u^* (точн. реш-е) такова, что:

$$\|\overline{\varphi_n}\| \cdot \|A_n^{-1}\| \gamma_n(u^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\overline{\varphi_n} \varphi_n u^* \longrightarrow u^*$

Тогда ~~$u_n^* = \varphi_n u_n$~~ $u^{(n)} = \overline{\varphi_n} u_n^* \longrightarrow u^*$

и при этом:

$$\|u^{(n)}-u^*\| \le \|\overline{\varphi_n}\|\cdot\|A_n^{-1}\|\,\delta_n(u^*) + \|\overline{\varphi_n}\varphi_n u^* - u^*\|$$

Док-во.

$$u^{(n)}-u^* = \overline{\varphi_n}u_n^* - u^* = \overline{\varphi_n}(u_n^* - \varphi_n u^*) + \overline{\varphi_n}\varphi_n u^* - u^*$$

ч.т.д.

21.03.2013.

§2. Устойчивость процессов построения каркасов и приближ. решений.

(1) $Au=f$ $\qquad A_n u_n = f_n$ (2)

Возмущ. ур-е.:

$$(A_n+\Delta A_n)(u_n+\Delta u_n) = f_n+\Delta f_n \quad (2')$$

Def: Пр. построения каркасов наз-ся устойчивым, если для $\forall\ \Delta A_n, \Delta f_n$ соотн-я $\delta_{A_n}\to 0$, $\delta_{f_n}\to 0$ $\Longrightarrow$

1) $\exists\ (A_n+\Delta A_n)^{-1}$

2) $\delta_{u_n}\to 0$.

$\mathcal{L}(U,F)$, $\mathcal{L}(F,U)$ – мн-ва всех лин. огр. (непр.) операторов из U в F и из F в U.

Утв. Пусть A, A^{-1} – лин. огр. Тогда $\exists\ B\in\mathcal{L}(U,F)$, т.ч.:

$\|B\|\cdot\|A^{-1}\|\le 2$, и $A+B$ – необрат.

Док-во.

$0\ne\bar f\in F$, $\exists\ A^{-1}\bar f =: \bar u$

$$\|\bar u\| = \|A^{-1}\bar f\| \ge \frac{1}{2}\|A^{-1}\|\,\|\bar f\| \quad \left(\frac{1}{q},\ q>1\right)$$

– выбираем $\bar f$ так, чтобы вып. нер-во.

$\omega\in U^*$ (мн-во ф-ов), т.ч.:

$\|\omega\|=1$, $\omega\bar u = \|\bar u\|$ (от $\exists$ из курса фана).

ΔB: $\quad Bu = -\dfrac{\omega(u)}{\|\bar u\|}\cdot\bar f$

$$B\bar u = -\frac{\omega(\bar u)}{\|\bar u\|}\bar f = -\bar f$$

$\bar f = A\bar u \qquad B\bar u = -A\bar u$

$(A+B)\bar u = 0 \qquad \bar u\ne 0$

$\Rightarrow A+B$ – необратимо.

$$\|B\| = \frac{\|\bar f\|}{\|\bar u\|} \le \frac{2}{\|A^{-1}\|}$$

ч.т.д.

Т (об устойчивости построения каркасов).

$\forall n \geq n_0 \quad \exists A_n^{-1}$ - огр.

Тогда для устойч. постр. каркасов $\Leftrightarrow$

$\mu(A_n) \leq c$ (равн. огр.)

<u>Док-во.</u>

"$\Leftarrow$" $\mu(A_n) \leq c$

$\delta_{A_n}, \delta_{f_n} \to 0$

$A_n + \Delta A_n = A_n(E + A_n^{-1}\Delta A_n)$

$\triangle \; \|A_n^{-1}\Delta A_n\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \|\Delta A_n\| = \|A_n^{-1}\| \cdot \|A_n\| \cdot \frac{\|\Delta A_n\|}{\|A_n\|} =$

$= \mu(A_n) \cdot \delta_{A_n} \to 0 \Rightarrow$

$\exists (A_n + \Delta A_n)^{-1}$ - усл-е 1) уст-ти.

$\delta_{u_n} \leq \underbrace{\frac{\mu(A_n)}{1 - \mu(A_n)\delta_{A_n}}}_{\text{огр.}} \underbrace{(\delta_{A_n} + \delta_{f_n})}_{\to 0} \to 0$ - усл-е 2)

$\Rightarrow$ построение уст.

"$\Rightarrow$" Пусть $\mu(A_n)$ - не огр. Выберем подпосл-ть, т.ч.:

$\mu(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

A_n, (A в утв.), берём $B = \Delta A_n$.

$\exists B = \Delta A_n$: $A_n + \Delta A_n$ - необр.;

$\|\Delta A_n\| \|A_n^{-1}\| \leq 2$

$\|\Delta A_n\| \cdot \mu(A_n) \leq 2\|A_n\| \quad / : \|A_n\|$

$\delta_{A_n} \leq \frac{2}{\mu(A_n)} \to 0$

Мы построили отн. малое возмущ. A_n т.ч. $A_n + \Delta A_n$ необр. Никаких каркасов не сущ-ет?!

$\Rightarrow \mu(A_n)$ - огр.

ч.т.д.

Зам-е. Огр-ть чисел: $\mu(A_n) \leq c$ необх. для первого усл-я в опр-ии уст-ти каркасов.

На самом деле, такого не бывает: $\mu(A_n) \leq c$. И формально устойчивости нет.

$\delta_{u_n} \leq \frac{\mu(A_n)}{1 - \mu(A_n)\delta_{A_n}} (\delta_{A_n} + \delta_{f_n}) \to 0$ + котим.

Как этого достичь? Нужно, чтобы $\mu(A_n) \cdot \delta_{A_n} \to 0$ и $\mu(A_n)\delta_{f_n} \to 0$

т.е. они не любые беск малые, а дост. малые, чтобы пересилить $\mu(A_n)$.

1. $\mu(A_n) \le c \cdot n^{\alpha}$, $\alpha > 0$

$\triangle \frac{\mu(A_n)}{\mu(A_{2n})} = \frac{1}{2^{\alpha}}$ И это хорошо.

Слабая неустойчивость.
Она допустима, она почти везде.

2. $\mu(A_n) \ge c \cdot q^{n}$, $q > 1$

При увел. n на 1, ч.об. увел. в q раз.
Это плохо.

<u>Устойчивость приближ. реш-ий.</u>

$Au = f$
$u^* \ne 0$ $(f \ne 0)$
$\Delta u^{(n)}$, $\delta_{u^{(n)}} = \frac{\|\Delta u^{(n)}\|}{\|u^*\|}$
одно и тоже.

Считаем, что прибл. реш-я ех-ся, нек. $u^{(n)}$.

Def: Проц. постр-я прибл. реш. наз-ся устойчивым, если:

1) из $\delta_{A_n} \to 0 \Rightarrow \exists (A_n + \Delta A_n)^{-1}$

2) из $\left.\begin{array}{l} \delta_{A_n} \to 0 \\ \delta_{f_n} \to 0 \\ \delta_{\varphi_n} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_{u^{(n)}} \to 0$

(Т) (об устойч-ти проц. ~~пре~~ постр. прибл. реш-ий).

Пусть 1) $\exists\, u^* \ne 0$ $(f \ne 0)$;
2) $\forall\, n \ge n_0$ $\exists$ огр. A_n^{-1} – непр.
3) $u^{(n)} \longrightarrow u^*$

Тогда для уст-ти $\Longleftrightarrow$
а) пр. постр. каркасов u_n^* – устойчив.
б) $\|\varphi_n\| \cdot \|u_n^*\| \le c$ (равн. огр.)

<u>Док-во</u>

"$\Leftarrow$" вып-ся а) и б)

а) $\Rightarrow$ числа об. р-огр. $\Rightarrow \exists (A_n + \Delta A_n)^{-1}$

б) $\delta_{A_n}, \delta_{f_n}, \delta_{\varphi_n}$: $u^{(n)} = \varphi_n \cdot u_n^*$

Возьмем: $\cancel{u^{(k)}} + \Delta u^{(k)} = (\varphi_n + \Delta\varphi_n)(u_n^* + \Delta u_n) =$

$= \cancel{\varphi_n u_n^*} + \Delta\varphi_n u_n^* + (\varphi_n + \Delta\varphi_n) \cdot \Delta u_n$

$\|\Delta u^{(n)}\| \le (\|\varphi_n\| + \|\Delta\varphi_n\|)\|\Delta u_n\| + \|\Delta\varphi_n\| \cdot \|u_n^*\| =$

$= \left((1 + \underset{\downarrow 0}{\delta_{\varphi_n}})\underset{\downarrow 0}{\delta_{u_n}} + \underset{\downarrow 0}{\delta_{\varphi_n}}\right) \cdot \underbrace{\|\varphi_n\| \cdot \|u_n^*\|}_{\le c} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ ".

$\Rightarrow \delta_{u^{(n)}} \longrightarrow 0$ (т.к. u^* отдалено от 0)

$\Rightarrow$ уст-во.

$\overset{4}{\Longrightarrow}$ Построим $\delta_{A_n}, \delta_{f_n}, \delta_{\varphi_n} \to 0$,
для кот. $\delta_{u^{(n)}} \not\to 0$

берем $\delta_{A_n} = \delta_{f_n} = 0$

Значит, $\Delta u_n = 0$,

$\Delta u^{(n)} = \Delta\overline{\varphi_n} \cdot u_n^*$

Из 1) усл-я в опр-ии уст-ти $\Rightarrow$ а)

Нужно б).

Пусть $\|\overline{\varphi_n}\| \|u_n^*\| \longrightarrow \infty$

$\Delta \quad a_n = \sqrt{\|\overline{\varphi_n}\| / \|u_n^*\|}$

$\exists\ w_{y_n} \in U_n^* \quad \|w_{y_n}\| = 1 \quad w_y u_n^* = \|u_n^*\|$

$\forall\ \overline{u} \in U: \|\overline{u}\| = 1$

$\Delta\overline{\varphi_n} \in \mathcal{L}(U_n, U)$:

$\Delta\overline{\varphi_n} \cdot u_n = a_n \cdot w_{y_n}(u_n) \cdot \overline{u}$.

$\|\Delta\overline{\varphi_n}\| = a_n$

$$\delta_{\overline{\varphi_n}} = \frac{\|\Delta\overline{\varphi_n}\|}{\|\overline{\varphi_n}\|} = \frac{1}{\sqrt{\|\overline{\varphi_n}\| \|u_n^*\|}} \longrightarrow 0$$

$$\|\Delta u^{(n)}\| = \|\Delta\overline{\varphi_n} \cdot u_n^*\| = \sqrt{\|\overline{\varphi_n}\| \cdot \|u_n^*\|} \longrightarrow \infty$$

?!

ч.т.д.

О выборе нормы в пространствах U_n и F_n.

$\mu(A) \geq 1$ – всегда

$\mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

$U_n \xrightarrow{A_n} F_n \qquad A_n u_n = f_n$

U_n, F_n – норм. пр-ва.

I Пусть норма выбрана: в F_n:

$\|f_n\|_{F_n}$

тогда $\|u_n\|_{U_n} = \|A_n u_n\|_{F_n}$ – введем так.

Это норма, только если A_n – обр., т.е. знакоопр-ный (например, ~~об-ратимый~~ помож. опр.).

$\mu(A_n) = \|A_n\|_{U_n \to F_n} \cdot \|A_n^{-1}\|_{F_n \to U_n}$

$$\|A_n\|_{U_n \to F_n} = \sup_{\|u_n\|_{U_n} \leq 1} \|A_n u_n\|_{F_n} =$$

$$= \sup_{\|A_n u_n\|_{F_n} \leq 1} \|A_n u_n\|_{F_n} = 1.$$

$$\|A_n^{-1}\|_{F_n \to U_n} = \sup_{\|f_n\|_{F_n} \leq 1} \|A_n^{-1} f_n\|_{U_n} = \sup_{\|f_n\|_{F_n} \leq 1} \|A_n(A_n^{-1} f_n)\|_{F_n} =$$

$= 1.$

$\mu(A_n) = 1$.

Т.е. на этой паре норм задача наилучшим образом обусловлена.

II. Возьмём независимые нормы

$\|u_n\|_{U_n} = \|u_n\|_\infty \qquad \|f_n\|_{F_n} = \|f_n\|_\infty$

$Au = f$

$-u'' = f \quad u(0) = a, \quad u(1) = b$

$A_n u_n = f_n$

$$-\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} = f_k \qquad \begin{array}{l} u_0 = a \\ u_n = b \\ k = \overline{1, n-1} \end{array}$$

$\|A_n\|_\infty =$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & \frac{1}{h^2}, & \frac{2}{h^2}, & -\frac{1}{h^2} & 0 \ldots \end{pmatrix} (k)$$

$\|A_n\|_\infty = 4/h^2 = O(n^2)$

т.е. шаг рад n^2 у нас - единичный. конечно, ошибки будут малы. Формально. Но смысла нет.

§3. Решение линейных интегр. ур-ий II рода.

$Au = f \quad (1)$

$$u(x) - \int_0^1 h(x,y)\, u(y)\, dy = f(x) \quad (1)$$

$0 \le x \le 1$

h, f - даны $\in C$ $\qquad h$ - ядро.

u - неизвест.

I рода - без $u(x)$. Но они нам не интересны.

$(E - H)u = f$

$$Hu = \int_0^1 h(x,y)\, u(y)\, dy \quad \text{- обозн.}$$

$\exists\, (E-H)^{-1}; \quad u = (E-H)^{-1} f$

$\|H\| \le 1 \qquad (E-H)^{-1} = E + H + H^2 + \ldots$

$(E-H)^{-1} =: E + \Gamma$

Γ-резольвентный опер-р

$u = (E + \Gamma) f$

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 \underset{\uparrow \text{ ядро}}{\gamma(x,y)}\, f(y)\, dy$$

26.03.2013

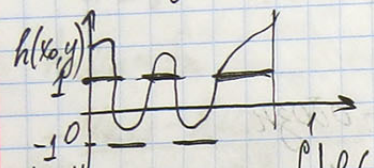
① Случай $H: C \to C$, $h \in C$

$\|H\|$ – ? $\|H\|_{C\to C} = \sup\limits_{\|u\|_C \le 1} \|Hu\|_C =$

$= \sup\limits_{\|u\|\le 1} \max\limits_x \left| \int\limits_0^1 h(x,y)u(y)dy \right| \le$

$\le \sup\limits_{\|u\|\le 1} \max\limits_x \int\limits_0^1 |h(x,y)|dy \cdot \cancel{\|u\|_C} =$

$= \max\limits_x \int\limits_0^1 |h(x,y)|dy = \int\limits_0^1 |h(x_0,y)|dy$



— – график $\bar{u}$.

$\|H\|_{C\to C} \le \max\limits_x \int\limits_0^1 |h(x,y)|dy$

$\bar{u}(y) = \operatorname{sign} h(x_0,y)$

$h(x_0,y)\bar{u}(y) = |h(x_0,y)|$

на $\bar{u}$ sup достигается

Но $\bar{u}$ разрывна. Но мы её сглаживаем. И можем считать "=".

$\|H\|_{C\to C} = \max\limits_x \int\limits_0^1 |h(x_0,y)|dy$

② $H: L_2 \to L_2$

$\|u\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 u^2(y)dy\right)^{1/2}$

$\|H\|_{L_2\to L_2} = \sup\limits_{\|u\|_{L_2}\le 1} \|Hu\|_{L_2} = \sup \left(\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 h(x,y)u(y)dy\right)^2 dx\right)^{1/2} \le$

$\le \cancel{\sup} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 h^2 \cdot \int\limits_0^1 \cancel{u^2}$

$\|H\|_{L_2\to L_2} \le \int\limits_0^1\int\limits_0^1 h^2(x,y)dx\,dy$

Всё сводится к с.ч. нашего оператора.

$Hu_j = \lambda_j u_j$

(1) $u(x) - \int\limits_0^1 h(x,y)u(y)dy = f(x)$ $\quad h, f \in C$

Def: Ядро h – вырожденное ядро, если:

(2) $h(x,y) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k(x)\beta_k(y)$

Сч., что $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – лин. нез.; $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ – лин. нез.

(иначе – уменьшим число слагаемых).

$u(x) - \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k(x) \underbrace{\int\limits_0^1 u(y)\beta_k(y)dy}_{C_k} = f(x)$ (3)

$$u(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k(x) = f(x) \qquad * \beta_j(x) \text{ интегр.}$$

Обозн.: $f_j = \int_0^1 f(x)\beta_j(x)\,dx$

$a_{jk} = \int_0^1 \beta_j(x)\alpha_k(x)\,dx$

$$c_j - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = f_j \quad (4) \qquad j=\overline{1,n}$$

это СЛУ отн-но c_j.

$$(E-A)C_n = F_n \quad (5)$$

$C_n = (c_1, \dots c_n)$

$F_n = (f_1, \dots f_n)$

Если $E-A$ - вырожд., то либо решений нет, либо беспон. много.

Пусть $\exists (E-A)^{-1} = D \qquad C_n = DF_n$:

$$\bar{c}_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} f_j \qquad D = (d_{kj})$$

Из (3). $u^*(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k(x)$

Ищем резольвенту.

$(E-H)^{-1} = E+\Gamma \quad , \quad \Gamma f = \int_0^1 \gamma(x,y) f(y)\,dy$

$(E-H)u = f$

$$u^* = (E-H)^{-1} f = (E+\Gamma)f =$$

$$= f(x) + \int_0^1 \gamma(x,y) f(y)\,dy$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} d_{kj} f_j =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \int_0^1 \beta_k(y) f(y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \alpha_k(x) f_k(j) \right)}_{\gamma(x,y)} f(y)\,dy$$

Нашли резольвенту в явном виде.

Пусть есть 2 ур-я:

$u - Hu = f \qquad Au = f, \quad A = E-H$

$u - \tilde{H}u = f \qquad \tilde{A} = E - \tilde{H}$

Т (о близких интегральных ур-ях)

Пусть ур-е $u - \tilde{H}u = f$ - однознач. разреш, (т.е. $\exists (E-\tilde{H})^{-1} = E + \tilde{\Gamma}$), $\tilde{u}^*$ - его реш-е и пусть его рез-та удовл. усл-ю: $\int_0^1 |\tilde{\gamma}(x,y)|\,dy \le \tilde{B} \quad \forall x \in [0,1]$

Пусть $h, \tilde{h}$ удовл.:

$$\int_0^1 |h(x,y) - \tilde{h}(x,y)|\,dy \le \eta \qquad \forall x \in [0,1]$$

Пусть $(1+\tilde{B})\eta < 1$

Тогда $u - Hu = f$ — однозн. разреш.
(т.е. $\exists (E-H)^{-1} = A^{-1}$)

$$\|A^{-1}\| = \|(E-H)^{-1}\| \le \frac{1+\tilde{B}}{1-(1+\tilde{B})\eta}$$

$$|\tilde{u}^*(x) - u^*(x)| \le \frac{(1+\tilde{B})\eta}{1-(1+\tilde{B})\eta} \cdot \|\tilde{u}^*\|_C \qquad \forall x \in [0,1]$$

<u>Док-во.</u>

$Au = f \iff (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})u = f$

если $\tilde{A} + \Delta\tilde{A} = A$

$\Delta\tilde{A} = A - \tilde{A} = (E-H) - (E-\tilde{H}) = \tilde{H} - H$

возьмём такое, перепишем ур-е

Опер-ры все: $C \to C$

$$\|\tilde{H} - H\|_{C\to C} = \max_x \int_0^1 |h(x,y) - \tilde{h}(x,y)|\,dy \le \eta$$

$(1+\tilde{B})\eta < 1$

$\tilde{A} + \Delta\tilde{A} = \tilde{A}(E + \tilde{A}^{-1}\Delta\tilde{A})$

$\|\tilde{A}^{-1}\Delta\tilde{A}\| \le \|\tilde{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\tilde{A}\| \le (1+\tilde{B})\eta < 1$

$\Rightarrow \tilde{A} + \Delta\tilde{A}$ — обратим.

$\Rightarrow$ из т. о близких ур-ий следует оценка $\|A^{-1}\|$ и $|\tilde{u}^*(x) - u^*(x)|$.

ч.т.д.

Пусть $\tilde{u}$ — приближ. реш-е

$A\tilde{u} = \tilde{f}$

С др. стороны, $Au^* = f$

$\Rightarrow \tilde{u} - u^* = A^{-1}(\tilde{f} - f)$

$\|\tilde{u} - u^*\| \le \|A^{-1}\|\,\|\tilde{f} - f\|$, поэтому $\|A^{-1}\|$ — нужна

H — дано (h)

1) $h(x,y) = h(x_0,y_0) + h'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + h'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \ldots + R_0$

погрешность после обрыва ряда.

2) Метод Бэйтмана.

Два разбиения:

$0 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le 1$

$0 \le y_1 < y_2 < \ldots < y_n \le 1$

$$\tilde{h}(x,y) = -\begin{vmatrix} 0 & h(x,y_1) & \ldots & h(x,y_n) \\ h(x_2,y) & h(x_2,y_1) & \ldots & h(x_2,y_n) \\ \vdots & & & \\ h(x_n,y) & & & h(x_n,y_n) \end{vmatrix} :$$

$$\vdots \begin{vmatrix} h(x_1,y_1) & \dots & h(x_1,y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ h(x_n,y_1) & \dots & h(x_n,y_n) \end{vmatrix}$$ — выраж. $\tilde{h}$ (разлож. первый det по столбцу)

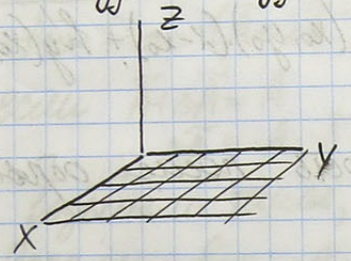
$$\tilde{h}(x,y) = -\frac{\begin{vmatrix} -h(x_1,y) & 0 & \dots & 0 \\ & & & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} & — \text{"} — & \end{vmatrix}} =$$

← вычли из 1 строки вторую

$= h(x_1, y)$

Аналогично $\tilde{h}(x_k, y) = h(x_k, y)$

$\tilde{h}(x, y_j) = h(x, y_j) \ \forall j$



Над прямыми пов-ти совпадают. $\tilde{h} = h$.

Метод механических квадратур.

$u - Hu = f$

(1) $u(x) - \int_0^1 h(x,y)u(y)dy = f(x)$ $\quad h, f \in C$

(2) $\int_0^1 v(y)dy \approx \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} v(y_k^{(n)})$ — КФ.

Def: Квадр. процесс (2) — сходящийся, если $\forall v \in C([0,1])$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} v(y_k^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 v$$

Подставим:

$$\tilde{u}(x) - \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} h(x, y_k^{(n)}) \tilde{u}(y_k^{(n)}) = f(x) \quad (3)$$

если узнаем $\tilde{u}(y_k^{(n)})$, то найдем $\tilde{u}(x)$.

Положим $x = y_i^{(n)}$ $\quad i = \overline{1,n}$

$$\tilde{u}_i - \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} h_{ik} \tilde{u}_k = f_i, \quad i = \overline{1,n} \quad (4)$$

Это СЛАУ отн-но $\tilde{u}_i$, нашли.

$$\tilde{u}(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} \cdot h(x, y_k^{(n)}) \tilde{u}_k \quad (5)$$

Погрешность?

(1) $u - Hu = f$ $\qquad$ (3) $\tilde{u} - H_n \tilde{u} = f$

где $H_n \tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} p_k^{(n)} h(x, y_k^{(n)}) \tilde{u}(y_k^{(n)})$ (6)

$\|H - H_n\| = ?$

$$\|H - H_n\|_{C\to C} = \sup_{\|u\|_C \le 1} \|(H - H_n)u\|_C =$$

$$= \sup_{\|u\|_C \le 1} \max_x |(Hu - H_n u)(x)| =$$

$$= \sup_{\substack{\|u\|_C \le 1 \\ u(y_k^{(n)})=0\ \forall k}} \max_x |((Hu - H_n u)(x))| =$$

т.к. Hu - интеграл; изменение ~~интеграла~~ ф-ции в одной точке не меняет интеграла; $H_n u = 0$

$$= \cancel{\sup_{\substack{\|u\|_C \le 1 \\ u(y_k^{(n)})=0\ \forall k}}} \max_x |(Hu)(x)| = \|H\|$$

Итого: $\|H - H_n\|_{C \to C} = \|H\|$

Сходимости по норме нет.
$\Rightarrow$ теория близких ур-ий не применима.

(Т) (Мысовских)

Пусть в ур-ии (1) h и f - непр. ф., ур-е (1) одн. разреш. и квадр. процесс - сходящийся.

Тогда ~~для дост~~ $\forall n \ge n_0$ система (4) однозн. разрешима, ее числ. обусл-ти равном. огр. и приближ. реш-я (5) равном. сходятся к точному.

Док-во не будет.

Ур-е (5): $\tilde{u}_n = \overline{\varphi_n} u_n^*$ - т.е. применим оператора к корню.

Но у нас он не линеен! ($b \ne 0$).

Наш способ $\begin{matrix} u & F \\ u_n & F_n \end{matrix}$ не катит.

Проекционные методы.

$Au = f \qquad A: U \to F$

$\{\omega_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ - мы выбрали коорд. систему. $n = 1, 2, \dots$

Прибл. реш-е: $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k^{(n)} \qquad \omega_k^{(n)} \in D(A)$

$Au_n - f \ne 0$

Δ $\chi_1, \dots \chi_n \in F^*$, такие, что:

$\chi_j(Au_n) = \chi_j(f) \quad j = \overline{1,n}$

$\chi_j(Au_n - f) = 0 \quad j = \overline{1,n}$

Δ $U^{(n)} = \left\{ \sum_1^n \alpha_j \omega_j^{(n)} \right\}$

$F^{*(n)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \gamma_j \chi_j \right\}$

28.03.2013.

$\chi_j(Au_n) = \chi_j(f)$,

$\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_j(A\omega_k) = \chi_j(f)$

Обозн: $A\omega_k = g_k$

(1) $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_j(g_k) = \chi_j(f)$, $j=\overline{1,n}$

$$\Delta = \begin{pmatrix} g_1 & \dots & g_n \\ \chi_1 & \dots & \chi_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \chi_1(g_1) & \dots & \chi_1(g_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \chi_n(g_1) & \dots & \chi_n(g_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2)$$

обозн-е

~~система~~ Если так выбрать, то система (1) одн. разрешима.

$F^{(n)} = \left\{ \sum_1^n \hat{\Delta}_j g_j \right\} \subset F$ $\quad \hat{\Delta}_j$ - коэф-ты

Проекц. оператор введем:

$P_n: F \to F^{(n)}$:

1) $\forall f_n \in F^{(n)}$ $P_n f_n = f_n$;
2) $\forall f \in F$ $P_n f \in F^{(n)}$

$f \in F$, $f \leftrightarrow f_n = \sum_1^n \gamma_j g_j \in F^{(n)}$:

$P_n f = f_n \Rightarrow P_n f = P_n f_n$, т.е.:

$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \chi_k(g_j) = \chi_k(f)$, $k=\overline{1,n}$ (3)

Эта проекция однозн. из-за условия 2).

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] & F \arrow[d, "\Psi_n"] \\ U_n \arrow[u, "\varphi_n"] \arrow[r, "A_n"] & F_n \end{tikzcd}$$

У нас будет:

$U_n = U^{(n)}$, $F_n = F^{(n)}$, $U^{(n)} \subset U$

φ_n - тождеств, $\|\varphi_n\| = 1$.

$Au = f$

$P_n A u = P_n f$

$P_n A u_n = P_n f$, $u_n \in U^{(n)}$

$A_n = P_n A \big|_{U^{(n)}}$ - помощник.

Получим: $\boxed{A_n u_n = f_n}$, где $f_n = P_n f$ (4)

$\Psi_n = P_n$

Две схемы проекционных методов.

1-я схема

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] & F \arrow[d, "\Psi_n = P_n"] \\ U_n \arrow[u, "\varphi_n = E"] \arrow[r] & F_n \end{tikzcd}$$

$A_n = f$

$A_n u_n = f_n$:

$A_n = P_n A \big|_{U^{(n)}}$

$f_n = P_n f$

$U_n = U^{(n)}$ $F_n = F^{(n)}$

Реш-я ур-я (4) - каркас в нашем случае.

каркас = приближ. реш-е

$u^{(n)} = \varphi_n u_n^* = u_n^*$

Удобно проводить исслед-е сход-ти.

2-я схема

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "\varphi_n"'] & F \arrow[d, "\psi_n"] \\ U_n \arrow[r, "A_n"] \arrow[u, shift right, "\overline{\varphi}_n"'] & F_n \end{tikzcd}$$

$A_n u_n = f_n :=$

(1): $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_j(Aw_k) = \chi_j(f)$ (5)

это СЛАУ отн-но $(c_1, \dots c_n) = u_n$

$B_n u_n = f_n$

$B_n = (\chi_j(Aw_k))_{j,k=1}^{n}$

$f_n = \psi_n f = (\chi_1(f), \dots \chi_n(f))$

В этом случае U_n, F_n - n-мер. пр-ва, соотв-ие норме.

Решив (5), мы найдём каркас: u_n^*.

Можно исслед. ех-ть каркасов, устойчивость.

$u^{(n)} = \overline{\varphi}_n u_n^* = \sum_{k=1}^{n} c_k^* w_k^{(n)}$

вектор n-мер. пр-ва

— · — · —

1я схема.

$F, F^{(n)} \subset F$

$P_n : F \to F^{(n)}$

опр-ся набором $g_1 \dots g_n$ и χ_j

$\forall f \in F, \quad \|f - P_n f\| \ominus$

Def: Наилучшее приближение эл-та f под пр-вом $F^{(n)}$ наз-ся:

$$E_{F^{(n)}}(f) = \inf_{f_n \in F^{(n)}} \|f - f_n\|$$

$\ominus \|(f - f_n) - P_n(f - f_n)\| \le$

$\le \|f - f_n\| (1 + \|P_n\|) \qquad \forall f_n \in F^{(n)}$

перейдём к inf:

$\|f - P_n f\| \le (1 + \|P_n\|) E_{F^{(n)}}(f)$ (6)

$\{g_j\}_{j=1}^{n} \quad n = 1, 2, \dots \qquad \{g_j\}$ - полна в F.

Def. Система $\{g_j^{(n)}\}_{j=1}^{n}$, $n = 1, 2 \dots$ наз-ся полной в F, если $\forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in F \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \ \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n)$, т.ч.:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j^{(n)} - f \right\| < \varepsilon$$

Пусть $F^{(n)} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j g_j^{(n)} \right\}$

$$E_{F^{(n)}}(f) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\{g_j^{(n)}\}_1^n$ – полна в F,
P_n – проекц. опер-р.

$\|P_n\| \le C$ – (равном. огр.)

Тогда из (6): $\forall f \in F$

$$\|f - P_n f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

т.е. $P_n \longrightarrow E$ (поточечно)

На ~~комп~~ ~~$\forall$ оп по ком~~ $\forall$ компакте сх-ть будет равномерная.

T – комп. опер. (т.е. вполне непр.)
т.е. его можно представ. в виде суммы двух, одним – конечном; второй – сколь угодно мал по норме.

S – ед. шар. TS – комп.

$f \in TS$, т.е.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall f \in TS : \|f - P_n f\| < \varepsilon$

но $f = Tu$, $\|u\| \le 1$

$$\|Tu - P_n Tu\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|P_n T - T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{(сх-ся по норме).}$$

Сходимость проекционных методов.

$Au = f$; A, A^{-1} – лин. огр.

$A = G + T$ – представим.

1)а) $\exists\, G^{-1}$ – лин. огр.;
2)а) T – комп. опер-р.
3)а) $\exists\, A^{-1}$ – лин. огр.

$\{\omega_k^{(n)}\}$ – коорд. система

1б): $\{\omega_k^{(n)}\}$ – полна в $U \Leftrightarrow$

1б'): $\{G\omega_k^{(n)}\}$ – полна в F

Док-во "$\Rightarrow$" $\{\omega_k^{(n)}\}$ – полна в U, $\forall f \in F$

$\exists\, G^{-1} f \in U$

$$\left\| G^{-1} f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k^{(n)} \right\| < \varepsilon$$ ← $\exists$ такая лин. комбинация

рассм. $\sum_1^n \alpha_k G\omega_k^{(n)} = f_n \in F^{(n)}$

$$\|f - f_n\| = \left\| G\left(G^{-1} f - \cancel{G^{-1}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cancel{G}\omega_k^{(n)}\right)\right\| \le$$

$\le \|G\| \cdot \varepsilon \Rightarrow$ лин. комбинации образов полны в F.

"$\Leftarrow$" аналогично.

$\{\chi_j^{(n)}\}$ – проекц. система.

2б) 1. $\Delta \begin{pmatrix} G\omega_1^{(n)} & \dots & G\omega_n^{(n)} \\ \chi_1^{(n)} & \dots & \chi_n^{(n)} \end{pmatrix} \ne 0 \quad n \ge n_0$

2. $\|P_n\| \le C$

Т (Канторовича о сход-ти проекционных методов).

$$Au = f$$

Пусть вып-ся 1а – 3а об операторе; 1б, 2б о коорд. и прост. системах.

Тогда $\forall\, n \geq n_0$, ур-я:

$A_n u_n = f_n$ (первая схема)

однозн. разрешимы и опер-р

$$A_n^{-1} = \left(P_n A\big|_{U^{(n)}}\right)^{-1} \in \mathcal{L}(F^{(n)}, U^{(n)})$$

(т.е. линейный)

И приближ. реш-я сходятся к точному, а именно:

$$\|u_n^* - u^*\| \leq c \cdot E_{U^{(n)}}(u^*)$$

<u>Док-во</u>

A_n, $A = G + T$

Обозн: $\tilde{A}_n = G + P_n T \in \mathcal{L}(U, F)$

$$\|A - \tilde{A}_n\| = \|G + T - G - P_n T\| = \|T - P_n T\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$n \geq n_0$:

$$\|A^{-1}\| \cdot \|A - \tilde{A}_n\| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{A}_n^{-1}$$

По т. о близких операторах:

$$\|\tilde{A}_n^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|A - \tilde{A}_n\|} \leq c'$$

$\triangleleft$ $\tilde{A}_n u_n = f_n$ – всегда разрешимо.

$Au = f$

$P_n A u = P_n f$

$\boxed{A_n u_n = f_n}$ – 1я схема.

$$A_n = P_n A\big|_{U^{(n)}} = P_n(G+T)\big|_{U^{(n)}} = (P_n G + P_n T)\big|_{U^{(n)}} =$$

$$= G + P_n T\big|_{U^{(n)}} = A_n$$

$\tilde{A}_n$, A_n

на $U^{(n)}$ они совпадают!

$\triangleleft$ $\tilde{A}_n u_n = f_n$ – разреш. для $\forall$ пр. части

берем $f_n \in F^{(n)}$

$(G + P_n T)\tilde{u} = f_n$ $\quad$ $\tilde{u}$ – реш-е

$$G\tilde{u} = f_n - P_n T \tilde{u}$$

$$\tilde{u} = \underbrace{G^{-1} f_n}_{\in U^{(n)}} - \underbrace{G^{-1} P_n T \tilde{u}}_{\in U^{(n)}} \in U^{(n)}$$

т.е. A_n – обратим!

$\Rightarrow$ $A_n u_n = f_n$ – разрешимо.

$\|A_n^{-1}\| \le \|\tilde{A}_n^{-1}\|$

$A_n u_n^* = P_n f = f_n$

$u_n^* = A_n^{-1} f_n = A_n^{-1} P_n f = \underline{A_n^{-1} P_n A} u^*$

$\boxed{u_n^* = Q_n u^*}$

$\|Q_n\| \le \|A_n^{-1}\| \|P_n\| \|A\| \le c''$

Покажем, что Q_n – проекц. опер-р.

$\forall u_n \in U^{(n)}$: $Q_n u_n = A_n^{-1} P_n A u_n =$

$= A_n^{-1} \cdot A_n \cdot u_n = u_n$

$\Rightarrow$ Q_n – пр. опер-р

$Q: U \to U^{(n)}$

$\|u_n^* - u^*\| = \|u^* - Q_n u^*\| \le (1 + \|Q_n\|) \cdot$

т.к. проиц. опер-р.

$\cdot E_{U^{(n)}}(u^*) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ч.т.д.

Самое сложное: $\|P_n\| \le c$

Метод Галеркина.

02.04.2013. $U = F =: H$ – гильб. пр-во.

$\{\omega_k\}_1^\infty$ – коорд система.

Нужна $\{\chi_j\}_1^\infty$ – проиц. система

$\chi_j \in H$ (т.к. $\forall$ лин. ф-ии – спец. пр-е ...)

Тогда $\chi_k = \omega_k$

Ур-е II рода: $u + Tu = f$ (1)

T – компактный опер-р.

Прибл. реш-е: $u_n = \sum_1^n c_k \omega_k$; (2)

СЛАУ: $(u_n + Tu_n, \omega_j) = (f, \omega_j)$ (3) $j = \overline{1,n}$

(T) (о сходимости м. Галеркина для ур-ий II рода).

Пусть (1) $Au = f$ $(A = E + T)$

$\exists A^{-1}$ – лин. огр.,

Пусть $\{\omega_k\}$, (коорд. и проиц. сист) полна в H.

Тогда система (3) $\forall n \ge n_0$ однозн. разрешима и приближ. реш-я (2) сх. к u^* – точному реш.

Док-во.

Пок., что вып-ся усл-я т. Канторовича. 1а – 3а, 1б, 2б.

$A = G + T = E + T$, $G = E$ $\Rightarrow$ 1а – 3а – вып-ся. ан.

1б – дано.

2б: $\Delta\begin{pmatrix} G\omega_1, \dots & G\omega_n \\ \chi_1 \dots & \chi_n \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} \omega_1, \dots & \omega_n \\ \omega_1 \dots & \omega_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} (\omega_1,\omega_1) & \dots & (\omega_1,\omega_n) \\ & \dots & \\ (\omega_n,\omega_1) & \dots & (\omega_n,\omega_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

(т.к. это квадрат объема парал-да, пост. на векторах ω_k. ω_k - лин. нез. $\Rightarrow$ он невырожд)

$\Rightarrow$ 2б вып-ся.

$\Longrightarrow$ система (3) разрешима.

P_n: $\forall f \in H \longleftrightarrow f_n \in \langle \omega_1, \dots \omega_n \rangle$:

$$P_n f = f_n \Longleftrightarrow$$

$$(f, \omega_j) = (f_n, \omega_j) \quad j = \overline{1,n}$$

$$(f - f_n, \omega_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}$$

Значит, P_n - ортог. проекция; опер-р с единичной нормой.

Все усл-я т. Канторовича вып-ся $\Rightarrow$ метод сходится.

ч.т.д.

$z_n = (c_1 \dots c_n)$

$F_n = ((f,\omega_1), \dots (f,\omega_n))$

$B_n = (b_{kj})_{k,j=1}^{n}$ $\quad b_{kj} =$

(3) $B_n z_n = F_n$

$$\sum_{k=1}^{n} (\omega_k + T\omega_k, \omega_j) c_k = (f, \omega_j) \quad j = \overline{1,n}$$

то есть $b_{kj} = (\omega_k + T\omega_k, \omega_j)$

Система (3) разрешима $\Rightarrow$ B_n - обратима

(T) (об устойчивости системы)

Пусть вып. усл-я предыд. теоремы, B_n - матрица СЛАУ (3)

Тогда $\forall n \geq n_0$ $\exists$ $c_1, c_2 > 0$:

$$\|B_n\| \leq c_1 \|\Gamma_n\|, \quad \|B_n^{-1}\| \leq c_2 \|\Gamma_n^{-1}\|, \text{ где}$$

$$\Gamma_n = ((\omega_k, \omega_j))$$

Где же устойчивость?

$$\mu(B_n) \leq c_1 c_2 \mu(\Gamma_n)$$

Т.е. если в Γ_n есть уст-ть, то и с B_n есть устойчивость.

Док-во не будет.

Зам-е. В усл-ях последней теоремы нарисы и приб. реш-я по м. Галеркина находятся устойчиво.

Интегральные уравнения II рода.

$$u(x) + \int_0^1 t(x,y)\,u(y)\,dy = f(x)$$

$$T:\ Tu = \int_0^1 t(x,y)\,u(y)\,dy$$

$T: L_2 \longrightarrow L_1$,

Хотим T – комп., т.е: $\iint t^2 < \infty$

Выберем $\{\omega_k\}_1^\infty$ – лин. нез. коорд. сист; полная.

(например, $1, x, x^2, \dots$)

$$(\omega_k, \omega_j) = \int_0^1 \omega_k(x)\,\omega_j(x)\,dx$$

$$b_{kj} = \int_0^1 \omega_k(x)\,\omega_j(x)\,dx + \int_0^1\left(\int_0^1 t(x,z)\,\omega_k(z)\,dz\right)\omega_j(x)\,dx$$

// т.к. $b_{kj} = (\omega_k + T\omega_k, \omega_j)$

Есть сход-ть: $u_n^* \longrightarrow u^*$ в L_2.

Как выбрать $\omega_k(x)$?

Если $\omega_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$

$$\Gamma_n = \left(\frac{1}{k+j-1}\right)_{k,j=1}^{n} = H_n$$ – м-ца Гильберта, а она плохо обусловлена

$\omega_k(x) = P_{k-1}(2x-1)$ – мн-ны Лежандра.

$\mu(\Gamma_n) \geq 4^n$

если предпол. большую м-ть t и f, то сх. становится быстрее.

Сравним с методом мех. квадратур (ф-ла Симпсона)

$$\int_0^1 v(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(\dots)$$

$$R_n \approx v^{IV}$$

$\begin{pmatrix} u + \int tu \\ v = tu \end{pmatrix}$

Хорошие р-ты будут, если $tu \in C^4$

§ Метод Ритца.

H – гильб.; $Au = f$

$D(A)$ – обл. опр-я; } плотны в H.

$R(A)$ – обл. зн-ий

A – симм., пол. опр., т.е:

1) $\forall\, u, v \in D(A)$ $(Au, v) = (u, Av)$

2) $(Au, u) \geq m^2(u, u)$, $m > 0$

$\forall\, u, v \in D(A)$ $\triangle$ $(Au, v) = (u, Av) = [u, v]$

тогда $[\,,\,]$ обл. св-вами скал. пр-я.

Т.е. на том же $D(A)$ мы ввели новое скал. пр-е.

$$m^2(u,u) \leq (Au, u) \leq \|Au\|\,\|u\|$$

$$m^2\|u\|^2$$

$$\|u\| \leq \frac{1}{m^2}\|Au\|$$

$\overset{\circ}{H}_A := \mathcal{D}(A)$, $[u,v]$

$\overset{\circ}{H}_A$ – предгильб. пр-во (есть скал. пр-е $\Rightarrow$ есть норма :)

$[u,u] = |u|_э^2$ – энергетическая норма

$|u|_э = \sqrt{[u,u]}$

Но в этой норме $\overset{\circ}{H}_A$ может оказаться неполным. (поэтому предгильб., а не гильб.).

Пополним, обозначим H_A.

$(H_A, |\cdot|_э)$ – гильб. пр-во.

$\mathcal{D}(A) \subset H_A \subset H$ (все вложения плотные)

$(Au,u) \geq m^2(u,u)$

$|u|_э^2 \geq m^2 \cdot \|u\|^2$

$\boxed{|u|_э \geq m \cdot \|u\|}$ $\quad \forall u \in \mathcal{D}(A)$

$|u|_э^2 = (Au,u) \leq \|Au\|\|u\| \leq \|Au\| \frac{1}{m} \cancel{|u|_э}$

$\boxed{|u|_э \leq \frac{1}{m}\|Au\|}$

$\forall u \in \mathcal{D}(A)$

$\underbrace{m\|u\| \leq |u|_э}_{\text{на } H_A\text{ – ?}} \leq \frac{1}{m}\|Au\|$

$\|u\| = \sup\limits_{\|v\| \leq 1} (u,v) \underset{v \in H}{=}$

$= \sup\limits_{\substack{v \in R(A) \\ \|v\| \leq 1}} (u,v) = \sup\limits_{\|Aw\| \leq 1} (u, Aw) \leq$ т.е. v – образ нек. w.

$\leq \sup\limits_{|w|_э \leq \frac{1}{m}} [u,w] = \frac{1}{m}|u|_э$

т.е. $\|u\| \leq \frac{1}{m}|u|_э$, а это и есть левое нер-во. $\Rightarrow$ оно вып-ся на H_A.

$Au = f$

$\triangle$ $F(u) = (Au,u) - 2(u,f)$ – ф-ция энергии на $\mathcal{D}(A)$ = на H_A

$u \in H_A$: $|(u,f)| \leq \|u\| \cdot \|f\| \leq \|f\| \cdot \frac{1}{m}|u|_э = c|u|_э$

т.е. скал. пр-е (u,f) явл-ся лин. огр. ф-ционалом в H_A.

$\Rightarrow$ (по т. Рисса):

$(u,f) = [u, u_0]$, $u_0 \in H_A$

$F(u) = (Au,u) - 2(u,f) = [u,u] - 2[u,u_0] =$ на $\mathcal{D}(A)$ на H_A

$= [u-u_0, u-u_0] - [u_0,u_0] = |u-u_0|_э^2 - |u_0|_э^2$

$F(u) \geq -|u_0|_э^2$

$=$ при $u = u_0$

$\min F(u) = -|u_0|_э^2$, достиг. при $u = u_0$.

(T) (о функциональной энергии)

1) $\exists!\ u_0 \in H_A$, $F(u_0) = \min$

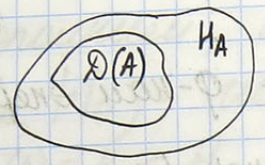
2) если $u_0 \in D(A) \Rightarrow u_0 = u^*$ $(Au^* = f)$

3) Пусть u^* - реш-е: $Au^* = f$ $\Rightarrow$ $u_0 = u^*$

Док-во.

1) см. ранее $\exists!\ u_0$.

2)



$u_0 \in D(A)$

$\triangle\ \forall\ u \in H_A$

$(u, f) = [u, u_0] = (u, Au_0) =$

$= (u, Au_0 - f) = 0$ (т.к. u - $\forall$)

$Au_0 - f = 0 \Rightarrow u_0$ - реш-е.

3) u^*: $Au^* = f$

$\forall\ u \in H_A$, $\triangle\ [u, u_0] = (u, f) = (u, Au^*) =$

$= [u, u^*]$

$[u, u_0 - u^*] = 0$

$\Rightarrow u_0 = u^*$ (т.к. u - $\forall$)

ч.т.д.

Т.е. если т. min попала в $D(A)$, то мы решили.

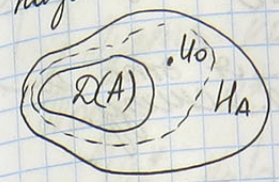
А если не попала?

$u_0 \notin D(A)$?

$\Rightarrow$ у исх. задачи решения нет.

Что же мы нашли?

Назовем u_0 - обобщенным решением.



$A \subset \tilde{A}$

$\tilde{A} u_0 = f$

Т.е. расширяем оператор так, чтобы было решением.

Метод Ритца.

04.04.2013.

$F(u) = (Au, u) - 2(u, f) = [u, u] - 2(u, f)$ $(\omega_k^{(n)})$

$[u - u_0, u - u_0] - [u_0, u_0]$ (*)

$u_n = \sum_1^n c_k \omega_k^{(n)}$;

$F(u_n) = \min\limits_{\{u_n\}}$

$\min F(u_n)$ достиг. $(\Leftrightarrow)$ $\min |u_n - u_0|_э^2$ можно убрать

$\frac{\partial F(u_n)}{\partial c_k} = 0 \quad k = \overline{1, n}$

$\left[\left[\sum_k c_k \omega_k, \sum_j c_j \omega_j\right] - 2\left(\sum c_k \omega_k, f\right)\right]$

$\frac{\partial F(u_n)}{\partial c_k} = 2\left[\sum_j c_j \omega_j, \omega_k\right] - 2(\omega_k, f) = 0$

$$\sum_{j=1}^{n}[\omega_j,\omega_k]c_j=(f,\omega_k),\quad k=\overline{1,n}$$

$\Gamma_n=([\omega_j,\omega_k])$ – сист. лин. нез. $\Rightarrow$ $\det\neq 0$.

$\Rightarrow$ у системы ед. реш-е. А это и есть мин, т.к. ф-ал огр. снизу.

$\triangle$ $\{\omega_k^{(n)}\}\subset D(A)$

$$\sum_{j=1}^{n}(A\omega_j,\omega_k)c_j=(f,\omega_k)\quad k=\overline{1,n}$$

В этом случае м. Ритца совпадает с м. Галёркина.

т.е. решим систему (ед. образом), получим ответ:

$$u_n^*=\sum_{k=1}^{n}c_k^*\omega_k^{(n)}$$

Перепишем систему:

$$[u_n^*,\omega_k]=(f,\omega_k^{(n)})=[u_0,\omega_k^{(n)}]$$

$$[u_n^*-u_0,\omega_k]=0\qquad k=\overline{1,n}$$

т.е. $u_n^*-u_0$ ортог. подпр-ву;

т.е. u_n^* – ортог. проекция u_0 на $U^{(n)}=\langle\omega_1,\dots\omega_n\rangle$

$\|u_n^*\|\xrightarrow[n\to\infty]{}\|u_0\|$ снизу.

Сходимость?

Т Пусть коорд. с. $\{\omega_k^{(n)}\}_1^\infty$ полна в H_A. Тогда $u_n^*\to u_0$ в H_A и в H.

$$|u_n^*-u_0|_Э\to 0\quad\text{и}\quad\|u_n^*-u_0\|\to 0$$

Док-во.

u_n^* – min $F(u_n)$ на $U^{(n)}=\langle\omega_1^{(n)},\dots\omega_n^{(n)}\rangle\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u_n^*$ – min $|u_n-u_0|_Э$ на $U^{(n)}$;

$$E_{U^{(n)}}(u_0)=\inf_{\{u_n\}}|u_n-u_0|_Э=\min_{\{u_n\}}|u_n-u_0|_Э$$

т.к. конечном

т.е: $E_{U^{(n)}}(u_0)$ реализ-ся на u_n^*

Система полна, $\Rightarrow$:

$$E_{U^{(n)}}(u_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Значит, $u_n^*\to u_0$, где:

$$\underbrace{m\|u\|\le|u|_Э}\le\frac{1}{m}\|A_m\|$$

подстав. $u_n^*-u_0$, в нер-во., эта разность стрем. к 0.

Получим стремление $|\cdot|_Э$ ч.т.д.

Т.е. метод сх. к обобщ. решению если оно в $D(A)$ – то наши р-ем-е задачи, если не в $D(A)$, то ....

Т (признак полноты коорд. системы в энерг. пр-ве).

A, H_A, H – см. ранее.

Пусть $\{\omega_k^{(n)}\}_1^n$, $n=1,2..$ $\subset D(A)$

$\{A\omega_k^{(n)}\}_1^n$ – полна в H

Тогда $\{\omega_k^{(n)}\}_1^n$ – полна в H_A.

<u>Док-во</u>

$D(A) \subset H_A \subset H$ (вложение плотные)

$\triangleleft$ $\forall u \in H_A$.

$D(A)$ – плотно в $H_A \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists u' \in D(A): \ |u-u'|_э < \varepsilon$

$\{A\omega_k\}$ полна в H, т.е.: $\forall n \geq n_0$

$\exists (c_1, .. c_n): \ \|Au' - \sum_{k=1}^{n} c_k A\omega_k\| < \varepsilon$

Обозн: $g := \sum_1^k c_k \omega_k$

$|u-g|_э \leq \underbrace{|u-u'|_э}_{\varepsilon} + |u'-g|_э$ $\leq$

$\triangleleft$ $|u|_э \leq \frac{1}{m}\|Au\|$

$\leq \varepsilon + \frac{1}{m}\|Au' - Ag\| = \varepsilon + \frac{1}{m}\cdot\varepsilon = (1+\frac{1}{m})\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

ч.т.д.

Т

A, B – самосоп., пол. опр.; H_A, H_B $[u,v]_A$, $[u,v]_B$.

при этом:

1) $D(A) = D(B) = D$
2) $R(A), R(B)$ плотные в H.
3) $\exists \ d > 0, \ \forall u \in D \ (Au, u) \leq d^2 (Bu, u)$

Тогда если

$\{\omega_k^{(n)}\}_{k=1}^n \subset H_B$ и полна в $H_B \Rightarrow$

$\{\omega_k^{(n)}\} \subset H_A$ и полна в H_A.

$(H_B \subseteq H_A)$

<u>Док-во</u> (не будет)

<u>Энергетическое пр-во обыкн. дифф. опер-ра II порядка для разн. гранич. условий.</u>

<u>Примеры</u>:

1) A: $Au = -u''$, $u(0) = u(1) = 0$

$D(A) = \{u \mid u \in C^2([0,1]), \ u(0) = u(1) = 0\}$

$H = L_2(0,1)$;

$u, v \in \mathcal{D}(A)$

$$(Au, v) = -\int_0^1 u''v\,dx = -\left(vu'\Big|_0^1 - \int_0^1 u'v'\,dx\right) =$$

$$= \int_0^1 u'v' = (u, Av) \Rightarrow A \text{ - симм. опер-р.}$$

$$(Au, u) = \int_0^1 u'^2 \geq 0$$

$$(Au, u) = 0 \Leftrightarrow u' \equiv 0 \quad u = const = 0$$

$\Rightarrow A$ - полож.

$\forall u \in \mathcal{D}(A)$: $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt =$

$$= \int_0^x u'(t)\,dt$$

$$u^2(x) = \left(\int_0^x 1 \cdot u'(t)\,dt\right)^2 \leq \int_0^x 1^2 \cdot \int_0^x u'^2 \leq$$

$$\leq x \cdot \int_0^1 u'^2(t)\,dt$$

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx = (u,u) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 u'^2 = \frac{1}{2}(Au, u)$$

$$(Au, u) \geq 2(u,u)$$

$$(Au, u) \geq m^2(u,u) = \int u^2$$

$\Rightarrow A$ - полож. опр.

$\Rightarrow \exists H_A$, при этом $\mathcal{D}(A) \subset H_A \subset H$

(вложение плотное)

$\exists [u,v] = \int_0^1 u'v'$

$\{u_n(x)\} \subset \mathcal{D}(A)$

$u_n \to u \in H_A$: т.е. $|u_n - u|_э \to 0$

$\|u_n - u\| \to 0$

$$|u_n - u_k|_э \leq |u_n - u|_э + |u - u_k|_э \xrightarrow[n,k \to \infty]{} 0$$

$\{u_n\}$ - фунд. (сх. в себе) в H_A, т.е.:

$$\int_0^1 |u_n'(x) - u_k'(x)|^2\,dx$$

$\exists v \in L_2(0,1)$: $u_n' \to v$ в L_2 (т.к. гильб. пр-во; посл-ть фунд.)

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u_n'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x u_n'(t)\,dt$$

$n \to \infty$: $u(x) = \int_0^x v(t)\,dt$

Итого: если ф-я из энерг. пр-ва, то она представима:

$$u(x) = \int_0^x v(t)\,dt, \text{ где } v \in L_2$$

~~если~~ $u(0) = 0$, то

$$u(1) = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 u_n'(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \left(u_n(t)\Big|_0^1\right) =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(0-0) = 0.$

Гранич. усл-я наз-ся главными, если им обязаны удовл. все эл-ты энерг. пр-ва.

И естественными в противном случае.

Def: ф-я $u(x)$ на $[a,b]$ наз-ся абсолютно непр., если она представима в виде:

$$u(x) = c + \int_0^x g(t)\,dt, \quad g \in L_1(a,b)$$

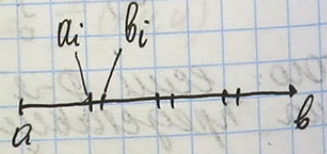
Пусть $[a,b]$ - конеч.

$$\left(\int_a^b 1\cdot v(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b 1^2 \cdot \int_a^b v^2$$

если $v \in L_2 \Longrightarrow v \in L_1$

Абс. непр. ф-я:

Def: Δ отрезок $[a,b]$:



Берем много отрезков, длины Δ_i

Ф-я u - абс. непр., если:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, т.ч.: $\sum \delta_i \le \delta$ то:

$$\sum_i var_i\, u \le \varepsilon$$

где $var_i\, u = \sup\limits_{x,y \in [a_i, b_i)} |u(x) - u(y)|$

концы отрезков.

Абс. непр. ф-ции явл-ся непр.

$$\underset{C^2}{D(A)} \subset \underset{L_2}{H_A} \subset H$$

$u' \in L_2$

ф-я - абс. непр.

2) $Au = -u''$ $\quad 0 < x < 1$

$x = 0$: $u'(0) - \alpha u(0) = 0$

$x = 1$: $u'(1) + \beta u(1) = 0$ $\quad \alpha, \beta \ge 0,$ $\alpha + \beta > 0.$

$D(A) = \{u \mid u \in C^2([0,1]) + \text{гр. усл-я}\}$

$u, v \in D(A)$

$$(Au, v) = -\int_0^1 u'' v\,dx = -\left(u'v\Big|_0^1 - \int_0^1 u'v'\right) =$$

$$= \int_0^1 u'v' + u'(0)v(0) - u'(1)v(1) =$$

$$= \int_0^1 u'v' + (\alpha u(0))v(0) - (-\beta u(1))v(1) =$$

$$= \int_0^1 u'v' + \alpha u(0)\cdot v(0) + \beta u(1) v(1) = (u, Av)$$

$$(Au, u) = \int_0^1 u'^2 + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \ge 0$$

$\alpha, \beta \ge 0$

$\alpha + \beta > 0$

09.04.2013. Грам.

$\alpha > 0$ – для опред-ти

$0 = (Au, u)$

$u' \equiv 0 \quad u(0) = 0$

$u = const = 0$ $\qquad$ A – симм., пол. опр.

A порожд. эн. пр-во H_A.

$\Rightarrow \exists \{u_n\} \subset \mathcal{D}(A), \quad u_n \xrightarrow[u \in H_A]{} u$

$|u_n - u_k|_э \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ k \to \infty}]{} 0$

$$|u_n - u_k|_э^2 = \int_0^1 (u_n'(x) - u_k'(x))^2 dx +$$

$$+ \alpha (u_n(0) - u_k(0))^2 + \beta (u_n(1) - u_k(1))^2 \xrightarrow[n,k \to \infty]{} 0$$

$\int_0^1 \to 0 \Rightarrow \exists v \in L_2: \; u_n' \to v$

т.е. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} u_n(0) = c_0$

$$\boxed{\text{если } u \in H_A: \quad u(x) = c_0 + \int_0^x v(t)\,dt}$$

для каждого u – своё.

$\mathcal{D}(A) \subset H_A \subset H$.

если опр-р не полож. опр-н, то $H_A \subset H$ – под вопросом.

3) $Au = -(x^3 u'(x))', \quad u(1) = 0$

$0 < x < 1$

$\mathcal{D}(A) = \{u \mid u \in C^2, \; u(1) = 0\}$

$H = L_2(0,1)$

$u, v \in \mathcal{D}(A)$

$$(Au, v) = -\int_0^1 (x^3 u'(x))' v(x)\,dx = -\left(x^3 u'(x) v(x)\right)\Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 x^3 u'(x) v'(x)\,dx) = \qquad \begin{matrix} v(1) = 0 \\ x^3(0) = 0 \end{matrix}$$

$$= \int_0^1 x^3 u'(x) v'(x) = (u, Av)$$

$\Rightarrow$ есть симметрия.

$0 \le (Au, u) = \int_0^1 x^3 u'^2$

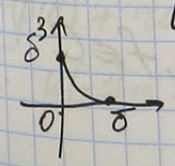
$(Au, u) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} u' \equiv 0 \\ u = const = 0 \end{matrix}$

$(Au, u) \ge \gamma^2 (u, u), \quad \gamma > 0$

$\inf\limits_{u \ne 0} \dfrac{(Au, u)}{(u, u)} \ge \gamma^2 > 0$ – покажем, что это не так.

берём $\delta \in (0,1)$

$$u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \le x \le \delta \\ 0, & \delta \le x \le 1 \end{cases}$$



$$\frac{(Au_\delta, u_\delta)}{(u_\delta, u_\delta)} = \frac{\int_0^1 x^3 (u_\delta'(x))^2}{\int_0^1 u_\delta^2} = \frac{9}{40}\delta$$

Оператор $\longrightarrow 0$. (т.к. не полож. опр-н).

H_A: 1) абс. непр. ф-ции на $[\delta, 1]$
2) $u(1)=0$
3) $\exists \int_0^1 x^3 u'^2(x)\,dx < \infty$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

1,2) - очевид.

3) $u'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}$

$\exists \int_0^1 \dots$

Но! $u(x) \notin L_2$!

т.е. эл. пр-во вылезет за пределы L_2.

Примеры закончились

4 ур-е:

$Au \equiv au'' + bu' + cu = f \qquad a, b, c, f \in C$

$D(A) = \{u \mid C^2 + \text{гр. усл-я}\}$

$H = L_2(0,1)$.

Хотим такое $D(A)$: $R(A) = H$. (т.е. нужно расширить).

Т.е. нужно: $u \in L_2$
$u' \in L_2$
$u'' \in L_2$

$D(A) = \{u \mid u'' \in L_2\}$

$pau'' + pbu' + pcu = (q \cdot u')' + pcu$

Нужно подобрать p. $qu'' + q'u'$, т.е.:

$\begin{cases} pa = q \\ pb = q' \end{cases} \qquad \int \frac{q'}{q} = \int \frac{b}{a} \qquad \ln q = \int \frac{b}{a}$

$q = \exp\left(\int \frac{b}{a}\right)$

$p = \frac{q}{a}$

Т.е. исх. ур-е: $Au = f$

Можем счит., что A имеет вид:

$Au = -(pu')' + ru$

$D(A) = \{u \mid u \in C^2 + \text{гр. усл.}\}$: $p \in C^1$, $r \in C$

$-(pu')' + ru = f \qquad p', r, f \in C \qquad -1 < x < 1$

I. $u(-1) = u(1) = 0$ $\qquad$ II $u'(-1) = u'(1) = 0$

III $u'(-1) - \alpha u(-1) = 0 \qquad u'(1) + \beta u(1) = 0$

1° A-симм. $u, v \in D(A)$

$$(Au, v) = \int_{-1}^{1} (-(pu')' + ru)v\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} ruv - \int_{-1}^{1} v\,d(pu') =$$

$$= \int_{-1}^{1} ruv - vu'p\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} pu'v' =$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^{1} (pu'v' + ruv)}_{I(u,v)} - \underbrace{pu'v\Big|_{-1}^{1}}_{Q(u,v)} = I(u,v) - Q(u,v)$$

$$I(u,v) = \int_{-1}^{1} pu'v'$$

$$Q(u,v) = \begin{cases} 0 & I, II \\ \dots & \end{cases}$$

III: $Q(u,v) = pu'v\Big|_{-1}^{1} = p(-1)u(-1)\alpha u(1) -$

$- p(1)v(1)(-\beta u(1)) =$

$= \alpha p(-1)u(-1)v(-1) + \beta p(1)u(1)v(1) = Q(u,v)$

$(Au, v) = (u, Av)$ — т.е. A-симм. для всех трех задач.

2° A-симм. и п.о.

Считаем, $p(x) \geq p_0 > 0$ — во всех зад.

I. $r(x) \geq 0$

II. $r(x) \geq r_0 > 0$

III. $r(x) \geq 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ $\alpha + \beta > 0$.

(I) $u(x) = u(-1) + \int_{-1}^{x} u'(t)\,dt = \int_{-1}^{x} u'(t)\,dt$

$$u^2(x) = \left(\int_{-1}^{x} 1 \cdot u'(t)\,dt\right)^2 \leq \int_{-1}^{x} 1^2 \cdot \int_{-1}^{x} u'^2(t)\,dt =$$

$$= (u,u) = \int_{-1}^{1} u^2 \leq 2 \cdot \int_{-1}^{1} u'^2(t)\,dt \quad (\leq)$$

$(u,u) \cdot m^2 \leq (Au, u)$ — хотим

$$(\leq)\ 2 \cdot \frac{1}{p_0} \int_{-1}^{1} p(x)u'^2(x)\,dx \leq 2 \cdot \frac{1}{p_0} \int_{-1}^{1} (p(x)u'^2(x) + ru^2)\,dx =$$

$$= \frac{2}{p_0}(Au, u)$$

$\Rightarrow$ полож. опр.

(II) $(u,u) = \int_{-1}^{1} u^2 \leq \frac{1}{r_0} \int_{-1}^{1} (ru^2 + pu'^2)\,dx =$

$= \frac{1}{r_0}(Au, u)$ $\quad \alpha > 0$

(III) $u(x) = u(-1) + \int_{-1}^{x} u'(t)\,dt$

$$u^2(x) = \left(u(-1) + \int_{-1}^{x} u'(t)\,dt\right)^2 \le 2\left(u^2(-1) + \left(\int_{-1}^{x} u'(t)\,dt\right)^2\right) \le$$

$$\le 2u^2(-1) + 2\cdot 2\int_{-1}^{1} u'^2(t)\,dt$$

$$= 2u^2(-1) + 4\int_{-1}^{1} u'^2(t)\,dt \le 4\left(\frac{1}{p_0}\int_{-1}^{1}(pu'^2 + ru^2) + 2u^2(-1)\right) \le$$

$$\le \frac{4}{p_0}\int_{-1}^{1}(pu'^2 + ru^2) + \frac{2}{\alpha p_0}\left(u^2(-1)\cdot\alpha p(-1) + \beta p(1)u^2(1)\right) = c_0\int_{-1}^{1}(pu'^2 + ru^2) + c_1\left(\alpha p(-1)u^2(-1) + \beta p(1)\cdot u^2(1)\right) =$$

$$c_0 = \frac{4}{p_0}$$

$$c_1 = \frac{2}{\alpha p_0}$$

$$\le \max\{c_0, c_1\}\cdot\left(\int_{-1}^{1}(pu'^2 + ru^2) + \alpha p(-1)u^2(-1) + \beta p(1)u^2(1)\right) =$$

$$= c_2(Au, u)$$

$$\int u^2 = (u,u) \le 2c_2(Au,u)$$

H_A: $\mathcal{D}(A) \subset H_A \subset H$

3°. $\forall u \in \mathcal{D}(A)$ $\quad \|u\|_C \le c_1 |u|_\mathcal{F}$ — такие c_1 и c_2 $\exists$.

$\|u'\|_{L_2} \le c_2 |u|_\mathcal{F}$

$$\|u'\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^{1} u'^2 \le \frac{1}{p_0}\left(\int_{-1}^{1}(pu'^2 + ru^2) + \underset{\overset{\Downarrow}{0}}{Q(u,u)}\right) =$$

$$= \frac{1}{p_0}(Au,u) = \frac{1}{p_0}|u|_\mathcal{F}^2$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,dt$$

а) $|u(x)| \le |u(0)| + \left|\int_0^x u'(t)\,dt\right|$

б) $|u(x)| \ge |u(0)| - \left|\int_0^x u'(t)\,dt\right|$

$$\left|\int_0^x 1\cdot u'(t)\,dt\right|^2 \le \left|\int_0^x 1^2\right|\cdot\left|\int_0^x u'^2\right| \le 1\cdot\int_{-1}^{1} u'^2 =$$

$$= (u', u')$$

$$|u(x)| \ge \underbrace{|u(0)| - \|u'\|_{L_2}}_{} = c$$

1) $c < 0$

2) $|u(0)| - \|u'\|_{L_2} = c \ge 0$

$|u(x)| \ge c \qquad \int_{-1}^{1} u^2(x) \ge \int_{-1}^{1} c^2$

$(u,u) \ge 2c^2$

$$\frac{\|u\|_{L_2}}{\sqrt{2}} \ge \sqrt{2}\left(|u(0)| - \|u'\|_{L_2}\right)$$

u

граф.

$$|u(0)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{L_2} + \|u'\|_{L_2}$$

а) $|u(x)| \le |u(0)| + \|u'\|_{L_2} \le 2\|u'\|_{L_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{L_2}$

$$\forall x: \quad \|u\|_C \le \underbrace{2\|u'\|_{L_2}}_{a_i} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_{L_2}}_{b_i} \quad (\le)$$

<u>Матрешка</u>: W_2^1 - пр-во:

$u \in W_2^1 \quad \|u\|^2_{W_2^1} = \int_{-1}^{1} u^2 + \int_{-1}^{1} u'^2$

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \le \sum a_i^2 \sum b_i^2$$

$$\|u\|_C^2 \le \left(\frac{1}{2} + u\right)\left(\|u\|^2_{L_2} + \|u'\|^2_{L_2}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\|u\|^2_{W_2^1}$$

$$\|u\|_C \le \frac{3}{\sqrt{2}}\|u\|_{W_2^1}$$

$W_2^1(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$

значит ф-я u на границе $=0$.

$$(\le) \frac{3}{\sqrt{2}}\|u\|_{W_2^1}$$

4°. H_A: $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ - I

W_2^1 - II

в (·) u_0: $\{\omega_k\}$ - полная орто-норм. система в H_A.

$$\underline{\underline{u_0}} = \sum_{k=1}^{\infty} [u_0, \omega_k]\,\omega_k \ominus$$

$$(f, u) = [u_0, u] \quad \forall u \in H_A$$

$$\ominus \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (f, \omega_k)\,\omega_k}_{\text{функционал энергии}}$$

$u \in D(A) \quad \|u\|_C \le c_1 |u|_Э$

$\|u'\|_{L_2} \le c_2 |u|_Э$

11.04.2013.

$u \in H_A$, строим послед-ти

$u \in H_A$, $\forall$ элемент

4°. W_2^1, $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ - I

$u \in H_A \quad (u, u) = \|u\|^2_{L_2} = \int_{-1}^{1} u^2(x)\,dx \le$

ф-ции из эл. пр-ва абс. непр. => непр.

$$\le \max_x (u^2(x)) \cdot 2 = 2\|u\|^2_C \le 2c_1^2 |u|_Э^2$$

$$\|u\|^2_{W_2^1} = \int_{-1}^{1} u^2 + \int_{-1}^{1} u'^2 \le 2c_1^2|u|_Э^2 + c_2^2|u|_Э^2$$

абс. непр. - 1ая произв. из L_2

$$\|u\|_{W_2^1} \le \sqrt{2c_1^2 + c_2^2} \cdot |u|_Э \Rightarrow u \in W_2^1(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$$

В обратную сторону:

$u \in W_2^1$ (или $\overset{\circ}{W}{}_2^1$)

$|u|_э^2 = I(u,u) + Q(u,u)$

$I(u,u) = \int_{-1}^{1} pu'^2 + ru^2$

$$Q(u,u) = \begin{cases} 0 & \text{I, II.} \\ \alpha p(-1)u^2(-1) + \beta p(1)u^2(1), & \text{III.} \end{cases}$$

$I(u,u) \le \max\{\|p\|_c, \|r\|_c\} \int_{-1}^{1} u^2 + u'^2 =$

$= c\|u\|^2_{W_2^1}$

$Q(u,u) \le \|p\|_c \left(\max_x |u(x)|\right)^2 (\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)\|p\|_c \le$

$\|u\|_c^2 \le (\alpha+\beta)\|p\|_c \cdot \frac{2}{2}\|u\|^1_{W_2^1} = c_1\|u\|^2_{W_2^1}$

$|u|_э^2 = I + Q \le (c+c_1)\|u\|^2_{W_2^1}$

$|u|_э \le \sqrt{c+c_1}\,\|u\|_{W_2^1}$

Def: два симметрич. пол. опр. оператора – полуходные, если их энергетические пространства состоят из одних и тех же эл-ов, а нормы эквивалентны.

Сходные – если область определения совпадает

H_A, A – симм., пол. опр.

$\lambda_1 \dots \lambda_n \dots$

A: $\omega_1, \dots \omega_n \dots$

$A\omega_k = \lambda_k \omega_k$; $\{\omega_k\}$ – полнс.

$\lambda_i > 0$, $\forall \alpha > 0$

$\forall u \in D(A)$ $\quad u = \sum_1^\infty c_k \omega_k$;

$Au = \sum \underline{c_k \lambda_k} \omega_k$; $\quad \lambda_k \uparrow$;

$A^\alpha u = \sum c_k \lambda_k^\alpha \omega_k$

$D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$ $\quad \alpha, \beta > 0$ $\quad \alpha+\beta = 1$, $\alpha > \beta$

$A^1 = A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$

$D(A) = D(A^\alpha)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем самую широкую.

иначе не определено.

$D(A) = C^2$

$(Au, v) = (A^\alpha u, A^\beta v)$

$= [u, v]$

$[u,v]$ когда $\exists$? $\quad u \in D(A^{1/2})$

$Au = \sum c_k \lambda_k \omega_k$ – сход.

$A^{1/2}u = \sum c_k \lambda_k^{1/2} \omega_k$ – сход.

$A_i u = -(p_i u')' + r_i u$;

У них всех H_A одно и то же.

Но норма каждая своя.

$|u|^2_{A_i} = \int p_i u'^2 + c_i u^2 + Q(u,u)$;

$Bu = -u''$ $\quad -1 < x < 1$

Δ I краевую задачу

$u(-1) = u(1) = 0$

$H_B = W_2^1$;

$\{w_k\}$ – полна в H_B

а) <u>полиномиальная система</u>

$\forall u \in H_B$: $u(-1) = u(1) = 0$

$w_k(\pm 1) = 0$,

$w_k(x) = (1-x^2) p_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, \ldots$

<u>полнота</u>:

было: если $\{w_k\} \subset D(B)$

и $\{Bw_k\}$ полна в $H \Rightarrow \{w_k\}$ полна в H_B

$\{w_k''\}$ – это все многочлены

$\Rightarrow$ ~~если~~ ф-ции можно Δ как координатные

полноту обеспечат

$\hat{p}_k(x)$ – многочлены Лежандра

$$\int_{-1}^{1} \hat{p}_k \hat{p}_j = \delta_{kj}$$

$$\int_{-1}^{x} \hat{p}_k(t)\,dt \quad k = 1, 2, \ldots$$

$= w_k(x)$ (обнаружим и обозначим)

$w_k(-1) = 0$,

$w_k(1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \hat{p}_k(t)\,dt = 0$ // мн-н Лежандра ортогонален тем, кто ниже

$= (1-x^2) p_{k-1}(x)$

$|u|_B^2 = \int_{-1}^{1} u'^2$

$[w_k, w_j]_B = \int_{-1}^{1} w_k' w_j' = \int_{-1}^{1} \hat{p}_k \hat{p}_j = \delta_{kj}$

$w_k(x)$ – нужно вычислить

$y_n^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad \alpha, \beta > -1$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx = 0 \quad m \neq n$$

$(1-x^2) J_{k-1}^{(1,1)}(x) = w_k(x) \quad k = 1, 2, \ldots$

$$[w_{k+1}, w_k] = \int_{-1}^{1} \left((1-x^2) J_k^{(1,1)}(x)\right) \cdot d\left((1-x^2) J_j^{(1,1)}(x)\right) =$$

$$= \left((1-x^2) J_k^{(1,1)}(x)\right)' \cdot (1-x^2) J_j^{(1,1)}(x) \Big|_{-1}^{1} -$$

$$- \int_{-1}^{1} (1-x^2) J_j^{(1,1)}(x) \cdot \underbrace{\left((1-x^2) J_k^{(1,1)}(x)\right)''}_{\deg = k} dx$$

$\exists j > k \qquad = 0$

$j < k$ по симметрии $= 0$

б) <u>тригонометрическая система</u>

$\Delta \; w_k(x) = \sin(x+1)\frac{\pi k}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$

$\omega_k \in D(B)$ $\{-\omega_k''\}$ – полнота в $H = L_2(-1,1)$

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

$$u_n^{(2m)}(\pm 1) = 0 \quad \forall m$$

$$|u^* - u_n^*|_B \geq \frac{c}{n\sqrt{n}}$$

Разностные методы решения задач матфизики

Метод сеток

$u \to F$

$u_n \to F_n$ СЛАУ

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ нужны её с.з. и с.в.

Утв. $\lambda_k(\mathcal{A}) = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1,n}$

$$X_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left(\sin\frac{k\pi}{n+1}, \dots \quad \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right)$$

$$T_n(x), \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x)$$

$$T_{n+1}'(x) = -\sin((n+1)\arccos x)\cdot\frac{n+1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{T_{n+1}'(x)}{n+1} = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = U_n(x)$$

$\tilde{T}_n$ – нули отклон-ся от 0

$\tilde{U}_n$ —— и —— в метрике L_1,

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\, U_n(x)\, U_m(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$y_{n+1} = 2x y_n - y_{n-1} \qquad n = 1, 2, \dots$$

а) $y_0 = 1$, $y_1 = x$; $\quad y_n = T_n(x)$

б) $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$; $\quad y_n = U_n(x)$

$$U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = U_n\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = 0;$$

$U_n(x) = 0$; $\quad (n+1)\arccos x = \pi k$, $k = \overline{1,n}$

$$x_k = \cos\frac{\pi k}{n+1} = -\frac{\lambda_k}{2}$$

$$\lambda_k = -2\cos\frac{\pi k}{n+1};$$

$$\lambda_1 = 2\cos\frac{\pi}{n+1} \qquad X_1 = (x_1, \dots x_n)$$

$(a - \lambda_1 E) X_1 = 0$

$$-\lambda_1 x_1 + x_2 = 0;$$

$$x_1 - \lambda_1 x_2 + x_3 = 0;$$

$$x_2 = \lambda_1 x_1 = 2\cos\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1} = \sin\frac{2\pi}{n+1}$$

$\forall\ x_1 \neq n$

$]\ \exists$ матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & b & a \end{pmatrix} = a \cdot E + b \cdot \mathfrak{A}$$

$$\lambda_k(A) = a + 2b\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{1,n}$$

$$X_k(A) = X_k(\mathfrak{A})$$

Пусть дана $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$

Def: индекс j непосредственно подчинен индексу i, если $a_{ij} \neq 0$.

j подчинен i, если $\exists$ цепочка $k_0 = j \ldots k_m = i$, т.ч. $\forall\, \nu$ k_ν непосред. подчинен $k_{\nu+1}$.

Def: индексы i – избыточные, если $a_{ii} > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$

A – матрица монотонного типа, если вып-ся след. 3 условия: $A \in \mathfrak{M}$

1) $a_{ii} > 0$
   $a_{ij} \leq 0 \quad i \neq j$
2) $a_{ii} \geq \sum |a_{ij}| \quad i \neq j$
3) $\forall$ индекс либо сам избыточен, либо ему подчинен избыточный.

$x = (\xi_1, \ldots \xi_n) \quad y = (\eta_1, \ldots \eta_n)$

16.04.2013.

$A \in \mathfrak{M}$ (монот. типа)

$Ax = y$

Утв. Если $y \leq 0$ $(\eta_1 \leq 0 \ldots \eta_n \leq 0)$
$\Rightarrow x \leq 0$ $(\xi_1 \leq 0, \ldots \xi_n \leq 0)$

Док-во:

$]\ \exists\ \xi_k > 0$; k – макс. индекс

k-ое уравнение: $Ax = y$;
$a_{k1}\xi_1 + \ldots + a_{kn}\xi_n = \eta_k$

$$a_{kk}\xi_k = \eta_k - \sum_{j \neq k} a_{kj}\xi_j = \eta_k + \sum_{k \neq j} |a_{kj}|\xi_j \leq$$

$$\underset{(1)}{\leq} \sum_{k \neq j} |a_{kj}|\xi_j \underset{(2)}{\leq} \sum_{j \neq k} |a_{kj}|\xi_k = \xi_k \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \underset{(A)}{\leq} a_{kk}\xi_k$$

$\Rightarrow$ везде только равенства.

Что это означает?

(2): если $a_{kj} \neq 0 \Rightarrow \xi_j = \xi_k$;

$\forall j$ – непоср. подчин. $\max k$ – сам явл-ся максимальным.

(A): $\sum\limits_{j \neq k} |a_{kj}| = a_{kk}$, то j не явл-ся избыточным (диагональ не больше)

$\Rightarrow$ нельзя построить цепочку индексов.

$j = k_0, \ldots k_m = i$

Наруш-ся 3 условие матрицы постоянного типа.

$A(-x)=(-y)$

Утв. $A \in \mathfrak{M}$ 2 системы
$Ax=y$
$Ax'=y'$ (просто другие векторы)

$|y| \le y'$ $(|\eta_1| \le \eta_1', \dots \quad |\eta_n| \le \eta_n')$

$\Rightarrow |x| \le x'$ $(|\xi_1| \le \xi_1, \dots \quad |\xi_n| \le \xi_n)$

<u>Док-во.</u>

$A(x-x') = y-y' \le 0 \Rightarrow x-x' \le 0$

$x \le x'$ $(\xi_1 \le \xi_1', \dots \xi_n \le \xi_n')$

складываем и меняем знак

$A(-x-x') = -y-y' \le 0 \Rightarrow -x-x' \le 0$

$-x \le x'$ $(-\xi_1 \le \xi_1', \dots -\xi_n \le \xi_n')$ ч.т.д.

Утв. $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \exists A^{-1}$

<u>Док-во.</u>

$Ax=0$, $A0=0$ $\left(\begin{matrix} Ax=y \\ Ax'=y' \end{matrix}\right) \Rightarrow |x| \le 0 \Rightarrow x=0$

ч.т.д.

Утв. Все эл-ты A^{-1} $(A \in \mathfrak{M})$ неотрицательные.

$A \cdot A^{-1} = E$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

номера столбцов

$$A \cdot 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \ge 0$$

ч.т.д.

<u>Метод сеток для эллиптического уравнения.</u>

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru = f$$

$x, y \in \Omega$
$u(x,y)$

$q, p \in C^1$
$p(x) \ge p_0 > 0$
$q(x) \ge q_0 > 0$
$p', q', r, f \in C$ $\quad p=q=1$; Δ - оператор.

$$-\Delta u + ru = f$$

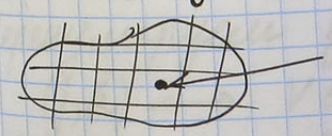
$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

<u>Каркас:</u> $\|\varphi_n - u^k - u_n^*\| \le \|A_n^{-1}\| \gamma_n(u^*) \to 0$

Сначала введем сетку:

$\{(x_j, y_k)\} \subset \overline{\Omega}$

$h = (h_x, h_y)$, $h_x = h_y = h$;



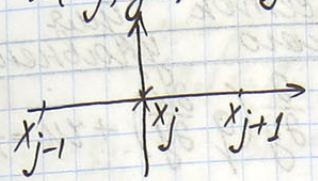
выбираем (x_n, y_n)

$x_j = x_0 + jh$
$y_k = y_0 + kh$ $\quad j, k \in \mathbb{Z}$

$J = \{(j,k)\}$, т.ч. $(x_j, y_k) \in$ области

$J = J_1 \cup J_2$ $\qquad u(x_j, y_k) \approx u_{jk}$

узел (x_j, y_k)



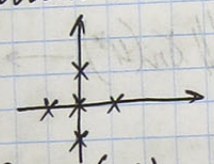
В нём хотим написать аппроксимацию:

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

$$-u''_{x^2}(x_j, y_k) \approx \frac{u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}}{h^2}$$

$$-u''_{y^2}(x_j, y_k) \approx -\frac{u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1}}{h^2}$$

Шаблон $\qquad u \in C^4(\overline{\Omega})$



Def: (j,k) - внутренний, если 4 его соседа $\in \overline{\Omega}$.

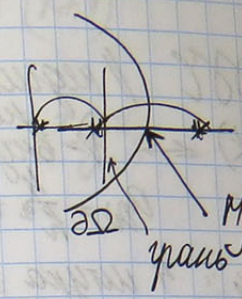
Иначе - граничный

$J = J_1 \cup J_2$

внутр. граничн.

$$\begin{cases} -\Delta u + \gamma u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \qquad (j,k) \in J_1$$

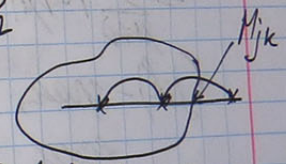
$$-\frac{u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}}{h^2} - \frac{u_{j,k-1} - 2u_{j,k} + u_{j,k+1}}{h^2} + \gamma_{jk} u_{jk} = f_{jk}$$



1) $u_{jk} = \varphi(M_{jk})$

2) по нормали $O(h)$ проведем нормаль которая если пойдет назад, встретит точку.

$$\frac{u_{jk} - u_{j-1,k}}{h} = \frac{\varphi(M_{jk}) - u_{j-1,k}}{(1+\tau_{jk})h}$$



$$x(M_{jk}) - x_j = \tau_{jk} \cdot h$$

$$(1+\tau)(u_{jk} - u_{j-1,k}) + u_{j-1,k} = \varphi(M_{jk})$$

$$\boxed{(1+\tau) u_{jk} - u_{j-1,k} = \varphi(M_{jk})} \quad (2)$$

$$N_h = |\{(j,k) \mid (x_j, x_k) \in \overline{\Omega}\}|$$

Перенумеруем узлы:

$(j,k) \longleftrightarrow \nu \in 1:N_h$

$\{u_{jk}\} = u_h$ - вектор

(1) + (2): $A_h u_h = f_h$ (3) // в ∀ строке либо 0, либо 2, либо 1.

Утв. $A_h \in \mathcal{DC}$ // недиаг. эл-ты неположит-ны

1°. а) $(j,k) \leftrightarrow \mathcal{D}$ - внутр., $\tau \geq 0$

$$a_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = \frac{4}{h^2} + \tau_{jk} > 0$$

$a_{\mathcal{D}\mu}$: 4 штука $-\frac{1}{h^2} (\leq 0)$

б) (j,k) - гран. $a_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = 1 + \sigma > 0$ (либо 1 при $\sigma = 0$)

$$a_{\mathcal{D}\mu} = -\sigma < 0$$

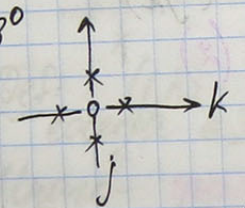
2°. (j,k) - внутр. $a_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = \frac{4}{h^2} + \tau_{jk} \geq$

$$\geq \sum_{\mu \neq \mathcal{D}} |a_{\mathcal{D}\mu}| = \frac{4}{h^2}$$

(j,k) - гран, $a_{\mathcal{D}\mathcal{D}} = 1 + \sigma > \sum |a_{\mathcal{D}\mu}| = \sigma$;

если $\tau_{jk} > 0$ (j,k) изо $\Leftrightarrow$

3°



$\Rightarrow$ (3) однозначно разрешима это и есть каркас

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\Delta} & F \\ \varphi_h \downarrow & & \\ \mathcal{U}_{N_h} & \xrightarrow{A_h} & F_{N_h} \end{array} \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{U}_h, F_h} = \|\cdot\|_\infty$$

$\|A_h\|$, $\|A_h^{-1}\|$

$\exists\, h \to 0$: т.е. $N_h \to \infty$

$\|A_h\|_\infty = \max\left\{\frac{8}{h^2} + \|\tau\|_C, 3\right\}$ это в предпо. в области ≥ 1 узл.

Теорема Ω лежит в круге $x^2 + y^2 \leq R^2$

$\forall h \leq 1$ $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq (R+1)^2$

$(j,k) \Leftrightarrow \mathcal{D}$

$\omega(x,y) = (R+1)^2 - x^2 - y^2$;

$\{x_i, y_k\}$

$\{\omega(x_j, y_k)\} = \omega_k$

$A_h u_h = f_h$ (3)

$z_h = A_h \omega_h$

$A_h u_h = v_h$ (4) $\forall \|v_h\|_\infty \leq 1$

$u_h = A_h^{-1} v_h$

$\|A_h^{-1}\| = \sup \|A_h^{-1} v_h\| = \sup \|u_h\|$

$A_h u_h = v_h$ $\forall \|v_h\|_{h_\infty} \leq 1$ $(Ax = y)$ 18.04.2013.

$A_h w_h = z_h$ $(Ax' = y')$

(1): $A_h u_h = f_h$: $\begin{cases} \dfrac{u_{j,k-1} + u_{j-1,k} + u_{j+1,k} + u_{j,k+1} - 4u_{jk}}{h^2} + \tau_{jk} u_{jk} = f_{jk} & \text{гран.} \\ (1+\sigma) u_{jk} - \sigma u_{j-1,k} = \varphi(M_{jk}) \end{cases}$

Если (j,k) - внутр.

$$z_{jk} = -\frac{w_{j-1,k} + w_{j+1,k} + w_{j,k+1} + w_{j,k-1} - 4w_{jk}}{h^2} +$$

$$+ r_{jk} w_{jk} = \qquad // -\Delta u + ru = f$$

$$= -(\Delta w)\Big|_{(x_j, y_k)} + r_{jk} w_{jk} =$$

$$= 4 + r_{jk} w_{jk} \geq 1 \quad : \quad z_{jk} \geq |v_{jk}|$$ — то, что хотелось

(j,k) — гранич.

$$z_{jk} = (1+\tau) w_{jk} - \tau w_{j-1,k} =$$

$$= w_{jk} + \tau (w_{jk} - w_{j-1,k}) =$$

$$= w_{jk} + \tau \cdot h \cdot w'_x(\xi_j, y_k) = \qquad \xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$$

$$= w_{jk} + \tau \cdot h \cdot (-2\xi) \geq$$

$$\geq w_{jk} - 1 \cdot 1 \cdot 2R \geq$$

(т.к. $\tau \leq 1$, $h \leq 1$; т.к. в круге R)

$$\geq (R+1)^2 - R^2 - 2R = 1$$

$$z_{jk} \geq |v_{jk}|$$ — отлично.

Т.е. второе ур-е мажорирует первое.

$$\forall (j,k) \quad |u_{jk}| \leq w_{jk} \leq (R+1)^2$$

$$\|A_h^{-1}\| \leq (R+1)^2$$

Т Пусть u^* — реш-е: $Au = f$; $u^* \in C^4(\overline{\Omega})$;
u_h^* — каркас, т.е. реш-е: $A_h u_h^* = f_h$

Тогда $u_h^* \xrightarrow[h \to 0]{} \varphi_h u^*$

$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\| \leq \|A_h^{-1}\| \gamma_h(u^*)$$

Док-во.

$\exists!\ u_h^*$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi_h"'] & F \arrow[d, "\psi_h"] \\ U_h \arrow[r, "A_h"] & F_h \end{tikzcd}$$

φ_h, ψ_h: Теор. о сх. каркасов:

$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \gamma_h(u^*)$$

$$\gamma_h(u^*) = \|A_h \varphi_h u^* - f_h\|_\infty = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ сходимость есть, она второго порядка.

$$\max_{j,k} |u^*(x_j, y_k) - u_{jk}^*| = O(h^2)$$ ч.т.д.

Saturation (насыщение)

Методы бывают насыщ. и ненасыщ. т.е. насыщается какой-то производной, улучшение гладкости не улучшит сходимость

Достатки: кол-во неизвестных: $N_h \sim n^2$

1) A_h — сильно разрежена (можно не хранить целиком)

2) $A_h u_h = f_h$ СЛАУ

$A_h \in \mathfrak{M}$

$u_h = (\tilde{u}_1, \dots \tilde{u}_{N_h})$

ν-ое ур-е ~~имеет~~ вид:

$$a_{\nu 1}\tilde{u}_1 + a_{\nu 2}\tilde{u}_2 + \dots + a_{\nu N_h}\tilde{u}_{N_h} = \tilde{f}_\nu$$

$\nu = \overline{1, N_h}$

$a_{\nu\nu} > 0$

$$a_{\nu\nu} \geq \sum_{\mu \neq \nu} |a_{\nu\mu}|$$

Делим ν-ое ур-е на $a_{\nu\nu}$.

$$\tilde{u}_\nu = -\frac{a_{\nu 1}}{a_{\nu\nu}}\tilde{u}_1 - \dots - \frac{a_{\nu N_h}}{a_{\nu\nu}}\tilde{u}_{N_h} + \frac{\tilde{f}_\nu}{a_{\nu\nu}}$$

$$u_h = Q_h u_h + v_h$$

$$Q_h = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$\|Q_h\| \leq 1$

↑ сумма модулей в строке

$|\lambda_k(Q_h)| \leq 1$

Решаем итерациями

$u_h^{(0)}$

$$u_h^{(m+1)} = Q_h u_h^{(m)} + v_h \quad m = 0, 1, \dots$$

чтобы, чтобы это была операция сжатия: $|\lambda_k(Q_h)| < 1$

Но вообще-то $|\lambda_k(Q_h)| \leq 1$

$=?$

Пусть λ^* – с.з. Q_h: $|\lambda^*| = 1$

$$Q_h u_h = \lambda^* u_h$$

$u_h \neq 0 (\tilde{u}_1, \dots \tilde{u}_k, \dots \tilde{u}_{N_h})$

k – max индекс $|\tilde{u}_k| = \max_\nu |\tilde{u}_\nu|$

k-ое ур-е этой системы: $(* a_{kk})$

$$\lambda^* a_{kk}\tilde{u}_k = -\sum_{\mu \neq k} a_{k\mu}\tilde{u}_k$$

$$a_{kk}|\tilde{u}_k| = |a_{kk}\tilde{u}_k| = |\lambda^* a_{kk}\tilde{u}_k| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu \neq k} |a_{k\mu}||\tilde{u}_\mu| \leq |\tilde{u}_k| \sum |a_{k\mu}| \leq a_{kk}|\tilde{u}_k|$$

Значит, везде рав-ва. Противоречие опр-ю матр. мажор. типа!

$$\cancel{u_h^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} u_h^*} \qquad u_h^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} t_h$$

$t_h = Q_h t_h + v_h$, т.е. t_h – реш-е системы

$$\left(t_h \xrightarrow[h\to 0]{} \varphi_h u^*\right)$$

$$t_h - \varphi_h u^* = O(h^2)$$

Когда остановиться?

m: $\|u_h^{(m+1)} - u_h^{(m)}\| \le c\cdot h^4$ (см. исход. систему с большой дробью.

если в числит. - ошибка h^4, h^4/h^2, то ошибка h^2).

$$1 > \max_k |\lambda_k(Q_h)| = 1 - d\cdot h^2$$

$d>0$

т.е. с уменьшением шага сходимость уменьшается.

Вид системы получ. из исходного (если из 1 и 2 ур-ий выразить u_{jk}).

Влияние коэф-ов уравнения на точность решения.

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru = f \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

$p+q=1$ $\quad -\Delta u + ru = f$

Абс. погр. δ.

В ф-ях p, q, r, f, φ может быть ошибка.

$\delta p, \ldots \delta\varphi$ - абс. погреш-ти.

считаем, что $\|\delta p\| \le \varepsilon, \ldots$

I. $\delta p, \ldots \delta\varphi$ - малы и гладкие.

$\Rightarrow$ возмущение каркаса мало.

II $\delta p, \ldots \delta\varphi$ - малы, но не гладкие.

$A_h u_h = f_h$ $\qquad f_h$ - строится по f и φ

$$\frac{\|\delta u_h\|}{\|u_h\|} \le \frac{\mu(A_h)}{1-\mu(A_h)\frac{\|\delta A_h\|}{\|A_h\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta A_h\|}{\|A_h\|} + \frac{\|\delta f_h\|}{\|f_h\|}\right)$$

а) влияние δf и $\delta\varphi$.

$\delta A_h = 0$

Погреш. растёт в $\mu(A_h)$ раз.

$$\mu(A_h) = \|A_h\|\cdot\|A_h^{-1}\| = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

б) влияние r

$$\frac{\max_{j,k}|\delta r_{jk}|}{\max_{j,k} r_{jk}} \le \varepsilon_h \text{ - пусть известно.}$$

// было: $\|A_h\| \ge \frac{8}{h^2}$, если в обл. хотя бы 1 узел. гран.

$$\frac{\|\delta A_h\|}{\|A_h\|} \le \frac{\varepsilon_h\cdot\|r\|c}{8/h^2} = \varepsilon_h\cdot h^2\cdot\frac{\|r\|}{8}$$

(слагаемого $\frac{\|\delta f_h\|}{\|f_h\|}$ нет теперь)

$$\frac{\|\delta u_h\|}{\|u_h\|} \le \frac{c}{h^2}\cdot \varepsilon_h h^2 \cdot \frac{\|r\|_c}{8} = O(\varepsilon_h)$$

$$-(pu')'\Big|_{x_k} \approx -\frac{p_{k-1/2}u_{k-1} - (p_{k-1/2}+p_{k+1/2})u_k + p_{k+1/2}u_{k+1}}{h^2}$$

$$-\frac{p_{j-1/2\,k}u_{j-1} - (p_{j-1/2\,k}+p_{j+1/2\,k})u_{jk} + p_{j+1/2\,k}u_{j+1\,k}}{h^2} +$$

$$\dots + r_{jk}u_{jk} = f_{jk}$$

δp_{jk}, δq_{jk} — ? $\quad h^2/h^2 = 1$

если: $O(h^2)$, $O(h^2)$, то изменится r — сильно!

т.е. это недопустимо!

Значит:

$O(h^4)$ $\quad O(h^4)$ $\quad \frac{h^4}{h^2} = h^2$ — остаётся.

§ Метод сеток для уравнения теплопроводности.

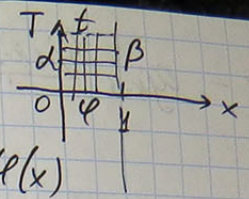
$u(x,t)$: $\quad \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$

$(x,t) \in \Omega$

$a(x,t) > 0 \qquad 0 < x < 1$

$t > 0$

+ Гран. условия



Нач. усл.: $u(x,0) = \varphi(x)$

$u(0,t) = \alpha(t)$

$u(1,t) = \beta(t)$

Сетка: n, $h_x = h = \frac{1}{n}$

$h_t = \tau > 0$; $\quad (m \in \mathbb{N},\ T > 0,\ \tau = \frac{T}{m})$

Узлы: $N_h = (n+1)(m+1)$

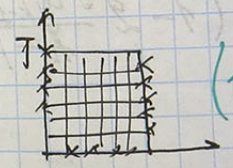
24.04.2013.

$h = \frac{1}{n}$, $\tau = \frac{T}{m}$ $\quad x_j = jh$, $j = \overline{0,n}$

$t_k = k\tau \quad k = \overline{0,m}$

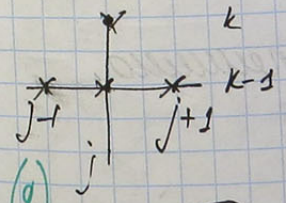
$N_h = (n+1)(m+1)$

$u(x,t) \qquad y_{jk} \approx u(x_j, t_k)$



(1) Нач. усл.: $y_{j0} = \varphi(x_j) \quad j = \overline{0,n}$

$u_{0k} = \alpha(t_k) \quad u_{nk} = \beta(t_k) \quad k = \overline{0,m}$



Для узла (j,k):

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(x_j,t_k)} \approx \frac{u_{jk} - u_{jk-1}}{\tau}$$

погреш.: $O(\tau)$, $u \in C^2_t$

(2)

погр.: $O(h^2)$, $u \in C^4_x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(x_j,t_k)} \approx \frac{u_{j-1\,k-1} - 2u_{jk-1} + u_{j+1\,k-1}}{h^2}$$

$$\frac{u_{jk}-u_{jk-1}}{\tau} - a_{jk-1}\frac{u_{j-1k-1}-2u_{jk-1}+u_{j+1k-1}}{h^2} =$$

$$= f_{jk-1}$$

(1) и (2) – группы ур-ний.

Перенумеруем узлы

$\{u_{jk}\}$ $(j,k) \longleftrightarrow \nu \in 1:N_h$

$= u_h$.

Тогда ур-я (1), (2) можно записать в виде:

$$A_h u_h = f_h$$

В каждой строке м. A_h не более 4-ех ненул. эл-ов.

$$u_{jk} = u_{jk-1} + \frac{\tau a_{jk-1}}{h^2}(u_{j-1k-1} - 2u_{jk-1} + u_{j+1k-1}) + \tau f_{jk-1};$$

$$u_{jk} = u_{j-1k-1}\left(\frac{\tau a_{jk-1}}{h^2}\right) + u_{jk-1}\left(1 - 2\frac{\tau a_{jk-1}}{h^2}\right) + u_{j+1k-1}\left(\frac{\tau a_{jk-1}}{h^2}\right) + \tau f_{jk-1}$$

Эта схема явная.

$A_h u_h = f_h$ – очев., что разрешимо

$\exists!\, u_h^*$ – каркас

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a_1$$

Утв. $a_1 \tau/h^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow A_h \in \mathfrak{M}$

Док-во.

1°. Гран. узел $(j,k) \longleftrightarrow \nu$: $a_{\nu\nu} = 1$, $a_{\nu\mu} = 0$, $\nu \ne \mu$

любой гр. узел – избыточный.

Внутр. узел $(j,k) \longleftrightarrow \nu$: (2): $a_{\nu\nu} = \frac{1}{\tau}$

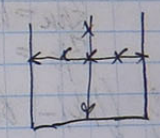
$$a_{\nu\mu} = -\frac{1}{\tau} + 2\frac{a_{jk-1}}{h^2}, \quad \le 0$$

$$-\frac{a_{jk-1}}{h^2} - 2 \text{ шт.} \quad \le 0$$

2°. $\forall \nu$ $a_{\nu\nu} \ge \sum_{\mu \ne \nu} |a_{\nu\mu}|$

гр. + внутр: $a_{\nu\nu} = \frac{1}{\tau} \ge \sum |a_{\nu\mu}| = \frac{1}{\tau}$

3°. ν – гран. $\Rightarrow$ он избыт.



ч.т.д.

$A_h u_h = f_h \Rightarrow \exists!\, u_h^*$

(Т) $\|A_h^{-1}\|_\infty \le 1 + \frac{1}{8a_0}$, где a_0 – мин. гран. коэф-та a.

Док-во.

$$\|A_a\|_\infty = O\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}\right)$$

$\triangle$ $W(x,t) = 1 + \frac{x(1-x)}{2a_0}$

$\{w(x_j, t_k)\} = \{w_{jk}\} = w_h$

$A_h w_h = z_h$

$\forall\ v_h = \{v_{jk}\}$; $|v_{jk}| \le 1$ $\quad \|v_h\|_\infty \le 1$.

$A_h u_h = v_h$
$A_h w_h = z_h$ — Мы показали, что второе мажор-ет первое.

z_{jk}: 1) (j,k) – гран. узел;

$z_{j0} =$

$z_{0k} = 1$

$z_{nk} = 1$

$$\left.\begin{aligned} &A_h u_h = v_h \\ &z_{0k} = w_{0k} = 1 \\ &z_{nk} = w_{nk} = 1 \\ &z_{j0} = w_{j0} \ge 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

~~внутр.~~ узлы: $|v_{jk}| \le z_{jk}$

2) (j,k) – внутр. узел.

$\cancel{z_{jk} = w_{j-1k-1} - 2w_{jk-1} + w_{j+1k-1}}$

$$z_{jk} = \frac{w_{jk} - w_{jk-1}}{\tau} - a_{jk-1}\frac{w_{j-1k-1} - 2w_{jk-1} + w_{j+1k-1}}{h^2} =$$

$$= 0 - a_{jk-1} \cdot w''(x_j, t_k) = \frac{a_{jk-1}}{a_0} \ge 1$$

Итого: $\forall\ (j,k)$ $|v_{jk}| \le z_{jk} \Rightarrow |u_{jk}| \le w_{jk}$.

max $w(x,t)$ в $x = \frac{1}{2}$

зн-е: $1 + \frac{1}{8a_0}$

ч.т.д.

$\mu(A_k) = O\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}\right)$

(Т) $Au = f$ – $\exists!\ u^*$ – реш-е ур-я теплопровод.

$u^* \in C_t^2 \cap C_x^4$ $\quad$ ~~$a_1 \frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$~~

$\Rightarrow$ метод сеток сх.:

$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\|_\infty = \max_{j,k} |u^*(x_j, t_k) - u_{jk}^*| =$$

$$= O(\tau + h^2)$$

Док-во.

Т. о сх-ти каркасов:

$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\| \le \underbrace{\|A_h^{-1}\|_\infty}_{1 + \frac{1}{8a_0}} \cdot \gamma_h(u^*)$$

норма аппроксимации

$\gamma_n(\tau + h^2)$ – так строим сетку.

$\Rightarrow$ метод сх.; сх. мож.

ч.т.д.

~~Пус~~ $a_1 \tau / h^2 \le \frac{1}{2}$

$\tau \le c \cdot h^2$

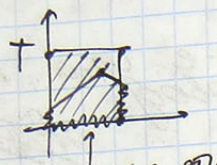
$\tau = O(h^2)$ $\qquad O(\tau + h^2) = O(h^2)$

если $\tau, h \to 0$

~~если~~ Мин. усл-я сходимости метода сеток?

Подумать!

$\tau, h \to 0$ Мы дол-ли в т.:



$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\|_\infty = \max_{j,k}$$

только пр. гр. усл-я влияют на реш-е

$$\boxed{\frac{\tau}{h} \le \frac{h}{2a_1}}$$

$a = const$

Т (о показательной неустойчивости)

Пусть $2a\frac{\tau}{h^2} \ge q > 1$

тогда им. место пок. неуст-ть:

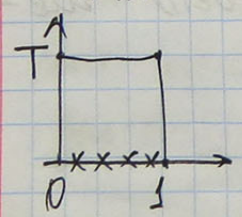
$$\|A_h^{-1}\|_\infty \ge q^{\left[\frac{T}{\tau}\right]}, \quad \tau \to 0.$$

Док-во.

$A_h u_h = f_h \qquad u_h = A_h^{-1} \cdot f_h$

$A_h u_h = v_h$

$\forall \ \|v_h\|_\infty \le 1$



Пусть v только на нижн. точках $\neq 0$. (не на всех) а в остальных – 0

$v_{j0} \quad 1 \le j \le n-1$

$\Rightarrow \quad u_{j0} = v_{j0} \qquad u_{0k} = v_{0k} = 0$

$u_{nk} = v_{nk} = 0$

$U^j = (u_{1j}, u_{2j}, \dots u_{n-1,j}) \qquad j = 1..m$

$V^j = (v_{1j}, v_{2j}, \dots v_{n-1}) \qquad U^0 = V^0$

$v_h = f_h$

$$u_{jk} = u_{j-1k-1}\left(\frac{\tau a}{h^2}\right) + u_{jk-1}\left(1 - 2\frac{\tau a}{h^2}\right) + u_{j+1k-1}\left(\frac{\tau a}{h^2}\right)$$

$$\varkappa = \frac{\tau a}{h^2}$$

$\cancel{u_{jk} = \varkappa u_{j0}}$ $\quad u_{jk} = \varkappa u_{j-1k-1} + (1-2\varkappa) u_{jk-1} + \varkappa u_{j+1k-1}$ (*)

Ур-е (*) в вект. форме:

$U^j = \mathcal{L} U^{j-1} \qquad j = 1, 2, \dots$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1-2\varkappa & \varkappa & & 0 \\ \varkappa & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \varkappa \\ 0 & & \varkappa & 1-2\varkappa \end{pmatrix}_{(n-1)} =$$

$(n-1)$

$= (1-2\varkappa)E_{n-1} + \varkappa \mathcal{A}_{n-1}$

$\lambda_k(\mathcal{L}_{n-1}) = 1 - 2\varkappa + \varkappa \cdot 2\cos\frac{k\pi}{n} = 1 - 2\varkappa\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) =$

$= 1 - 2\varkappa \cdot 2\sin^2\frac{k\pi}{2n} =$

// $\max_k |\lambda_k(\mathcal{L})| = |\lambda_{n-1}|$

$|\lambda_{n-1}(\mathcal{L})| = |-2\varkappa - 2\varkappa| = 4\varkappa - 1 =$

$= \underbrace{(2\varkappa - 1)}_{\geq 0} + 2\varkappa \geq q > 1.$

В кач-ве $U^0 = V^0$ берём с.в. м-цы $\mathcal{L}$, соотв-ший λ_{n-1}.

Тогда $U^j = \mathcal{L}U^{j-1} = \ldots = \lambda_{n-1}^j U^0$

берем $j = \left[\frac{T}{\tau}\right]$

тогда $\|u_h\|_\infty = \max\limits_k \|U^k\|_\infty \geq$

$\geq q^{\left[\frac{T}{\tau}\right]}$

ч.т.д.

$a = 1$

$\tau = h = 10^{-2}$

$2\varkappa = 200 = q > 1.$

На каждом шаге ошибка растёт в 200 раз.

Очень плохая кон. нуст-ть!

Шеститочечная неявная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad u(x,0) = \varphi(x)$$

$$0 < x < 1, \quad t > 0 \qquad u(0,t) = \alpha(t)$$

$$u(1,t) = \beta(t)$$

$a = const$

$u_1(x,t) = u(x,t) - x\cdot\beta(t) - (1-x)\alpha(t)$

$u_1(0,t) = 0 \qquad u_1(1,t) = 0$

Подставим u_1, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1 \qquad u(x,0) = \varphi_1(x)$$

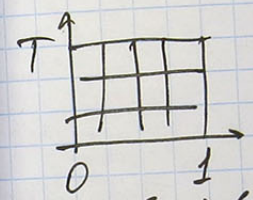
$$0 < x < 1, \quad t > 0 \qquad u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

Считаем $f = f_1$; $\varphi = \varphi_1$.

$h = \frac{1}{n}$; $x_j = jh \quad j = \overline{0,n}$

$\tau = \frac{T}{m} \quad t_k = k\tau \quad k = \overline{0,m}$

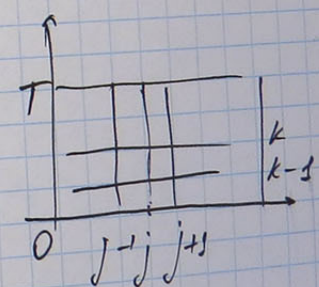


(x_j, t_k)

$u_{0k} = u_{nk} = 0$

$N_n = (n-1)(m+1)$

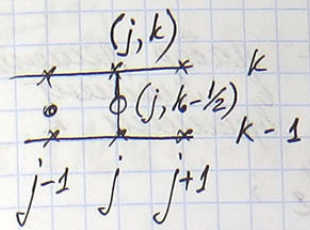
$$\boxed{u_{j0} = \varphi(x_j)}$$



Внутр. узлы:

(j,k):

$$\frac{y_{jk} - y_{jk-1}}{\tau} - a \cdot \frac{1}{2}\cdot$$



△ узел (j,k)

25.04.2013.

$$\frac{u_{jk}-u_{jk-1}}{\tau} - \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j-1k}-2u_{jk}+u_{j+1k}}{h^2} + \frac{u_{j-1k-1}-2u_{jk-1}+u_{j+1k-1}}{h^2}\right) = f_{jk-1/2} \quad (1)$$

полусумма производных тоже дает аппроксимацию.

(2): $u_{j0} = \varphi_j \qquad j=\overline{1,n-1}$

$(j,k) \longleftrightarrow \nu \in 1:N_h = (n-1)(m+1)$ - выбираем нумерацию

(1)+(2): $A_h u_h = f_h$ - записали в м. виде.

$u_h = \{u_{jk}\}$

Порядок аппрокс.: $O(\tau^2+h^2)$

$$\|u_h\|_{U_h} = \left(\max_{0\le k\le m}\sqrt{h\sum_{j=1}^{n-1}u_{jk}^2}\right)$$ - ввели норму.

$$\underset{\text{при малых } h}{\approx} \left(\max_{0\le t\le T}\int_0^1 u^2(x,t)\,dx\right)^{1/2}$$

$U^k = (u_{1k}, \dots u_{n-1,k})$ — набор решений в момент времени k.
$k = 0..m$

$$\|u_h\|_{U_h} = \sqrt{h} \cdot \max_{0 \le k \le m} \|U^k\|_2 ;$$

$$\|u_h\|_\infty = \max_{(j,k)} |u_{jk}|$$

Утв. $\|u_h\|_{U_h} \le \|u_h\|_\infty$

$$\|u_h\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{h}} \|u_h\|_{U_h}$$

Док-во.

$$\|u_h\|_{U_h} \le \max_{0 \le k \le m} \sqrt{h} \cdot \left(\max_{(j,k)} |u_{jk}|\right) \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{n-1} 1}}_{\sqrt{n-1}} \le$$

$h = \frac{1}{n}$

$$\le \max |u_{jk}| = \|u_h\|_\infty$$

$$\|u_h\|_\infty = \max_{(j,k)} |u_{jk}| \le \max_{0 \le k \le 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{h \sum_{j=1}^{n-1} u_{jk}^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}} \|u_h\|_{U_h}.$$

ч.т.д.

Утв. $u \in C^4 \Longrightarrow$

$\gamma_h(u^*) = O(\tau^2 + h^2)$ — мера аппр. на точном реш-ии.

Док-во:

$$\gamma_h(u^*) = \|A_h \varphi_h u^* - f_h\|_{U_h} \le \quad (U_h = F_h)$$

$$\le \|A_h \varphi_h u^* - f_h\|_\infty = O(\tau^2 + h^2)$$ (мы так выбираем сетку).

ч.т.д.

Т A_h $\quad (A_h U_h = f_h)$

$\exists A_h^{-1}$ и $\|A_h^{-1}\|_{U_h \to U_h} \le 1 + T$

Док-во.

$A_h U_h = v_h$ для $\forall v_h : \|v_h\|_{U_h} \le 1$.

$U^k = (u_{1k}, \dots u_{n-1,k})$ $\quad k = \overline{0,m}$

$V^k = (v_{1k}, \dots v_{n-1,k})$

$$\|U_h\|_{U_h} = \max_{0 \le k \le m} \|U^k\|_2 \cdot \sqrt{h}$$

$$\|v_h\|_{U_h} = \max_{0 \le k \le m} \|V^k\|_2 \cdot \sqrt{h}$$

(2): $U^0 = V^0$

~~(1)~~ $\|A_h\| = O\left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}\right)$ — т.е. будет слабая неустойчивость.

(1) $* \tau$, $\varkappa = \frac{a\tau}{2h^2}$

$\cancel{u_{jk} - u_{jk-1} - \frac{\varkappa}{2}}$

$$u_{jk} - u_{jk-1} - \varkappa\left(u_{j-1k} - 2u_{jk} + u_{j+1k} + u_{j-1k-1} - 2u_{jk-1} + u_{j+1k-1}\right) = \tau v_{jk}$$

Перенесем, получим:

$$Bu^k = Cu^{k-1} + \tau v^k$$

$$B = \begin{pmatrix} 1+2\varkappa & -\varkappa & & 0 \\ -\varkappa & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\varkappa \\ 0 & & -\varkappa & 1+2\varkappa \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1-2\varkappa & \varkappa & & 0 \\ \varkappa & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \varkappa \\ 0 & & \varkappa & 1-2\varkappa \end{pmatrix}$$

B – с ~~диаг~~ диаг. преобл. $\Rightarrow$ B – невыр.

$$u^k = B^{-1}Cu^{k-1} + \tau B^{-1}v^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\lambda_k(B) = (1+2\varkappa) - \varkappa \cdot \lambda_k(\mathcal{C}) =$$

$$= 1 + 2\varkappa - \varkappa \cdot 2\cos\frac{k\pi}{n} =$$

$$= 1 + 2\varkappa\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = 1 + 4\varkappa\sin^2\frac{k\pi}{2n}.$$

$$\lambda_k(B^{-1}) = \frac{1}{\lambda_k(B)}$$

$$\lambda_k(C) = 1 - 2\varkappa + \varkappa \cdot 2\cos\frac{k\pi}{n} = 1 - 4\sin^2\frac{k\pi}{2n} \cdot \varkappa$$

$$\|B^{-1}\|_2 = \max_k |\lambda_k(B^{-1})| = \max_k \frac{1}{1 + 4\varkappa \sin^2\frac{2k\pi}{2n}} \le 1$$

$$|\lambda_k(B^{-1}C)| = \left|\frac{1 - 4\varkappa\sin^2\frac{k\pi}{2n}}{1 + 4\varkappa\sin^2\frac{k\pi}{2n}}\right| \le 1$$

$$\|u^k\|_2 \le \|u^{k-1}\|_2 + \tau\|v^k\|_2 \le$$

$$\le \|u^{k-2}\|_2 + \tau\left(\|v^k\|_2 + \|v^{k-1}\|_2\right) \le \ldots \le$$

$$\le \underbrace{\|u^0\|_2}_{v^0} + \tau\left(\|v^k\|_2 + \ldots + \|v^1\|_2\right) \le$$

$$\le (1 + \tau \cdot k) \max_{0 \le k \le n} \|v^k\|_2 \le \qquad k \le m$$

$$\le (1+T) \max_{0 \le k \le m} \|v^k\|_2$$

$$\|u^k\|_2 \le (1+T) \cdot \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\sqrt{h} \cdot \max_{0 \le k \le m} \|v^k\|_2\right) =$$

$$= \frac{1+T}{\sqrt{h}} \cdot \|v_h\|_{U_h}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\sqrt{h}\max_k \|u^k\|_2\right) \le \frac{1+T}{\sqrt{h}}\|v_h\|_{U_h}$$

$$\|u_h\|_{U_h} \le (1+T)\|v_h\|_{U_h}$$

Значит, $\exists\, A_h^{-1}$ и $\|A_h^{-1}\|_{U_h \to U_h} \le 1+T$

ч.т.д.

Значит, задача разрешима.

А что со сходимостью?

(T) (о сходимости)

$Au=f \quad \exists!\, u^* \in C^4 \Longrightarrow$

Метод сеток сх., т.е:

$u_h^* \longrightarrow \varphi_h u^*$, точнее:

$$\|u_h^* - \varphi_h u^*\|_{U_h} = O(\tau^2 + h^2)$$

на $[0,1]\times[0,T]$

Док-во

Т. о сх-ти каркасов:

$$\|\varphi_h u^* - u_h^*\|_{U_h} \le \|A_h^{-1}\| \cdot \delta_h(u^*)$$

ч.т.д.

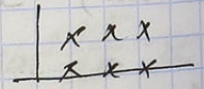
$\triangle$ $\|\varphi_h u^* - u_h^*\|_\infty = \max\limits_{(j,k)} |u^*(x_j,t_k) - u_{jk}| \le$

$\le \frac{1}{\sqrt{h}} \|\varphi_h u^* - u_h^*\|_{U_h} = O\left(\frac{\tau^2}{\sqrt{h}} + h^{3/2}\right)$ если

при $\tau, h \to 0$: $\frac{\tau^2}{\sqrt{h}} \longrightarrow 0$

Удобно: $\tau = h$, тогда: $O(h^{3/2})$

$BU^k = CU^{k-1} + \tau F^k$



$\|A_h^{-1}\| \le 1+T$

Зам-е На самом деле, можно поставить: $\|A_h^{-1}\| \le C$, т.е. равномерн. оценку.

Уст-ть: явная: $a\frac{\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}$

неявная: формально - можно $\forall$, но лучше не брать очень разные.

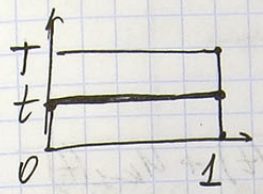
§ Метод прямых для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad 0 < x \le 1$$

$u(x,0) = \varphi(x)$

$u(0,t) = \alpha(t)$

$u(1,t) = \beta(t)$



τ - шаг по t; $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,t)} \approx \frac{u(x,t) - u(x,t-\tau)}{\tau}$

$t = t_k$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t_k) - a(x,t_k)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t_k) = f(x,t_k)$$

$$\frac{u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})}{\tau} - a(x,t_k)\frac{\partial^2 u(x,t_k)}{\partial x^2} = f(x,t_k)$$

$u_k(x) = u(x,t_k) \quad k = 0,1,\dots$

$u_0(x) = \varphi(x)$

$$\begin{cases} u_k(x) - \tau a(x,t_k)\, u''_{k_{xx}}(x) = \tau f(x,t_k) + u_{k-1}(x) \\ u_k(0) = \alpha(t_k) \\ u_k(1) = \beta(t_k) \end{cases}$$

Это обыкн. д.у. 2 пор;
+ кр. задача.

Другой вариант:

$h = \frac{1}{n}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

$x = x_k$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

$x = x_k = kh$

$u_k(t) = u(x_k, t)$

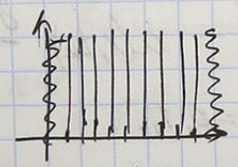
$$u'_{k_t}(t) - a(x_k,t)\cdot\frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} =$$

$$= f(x_k, t)$$

$u'_{k_t}(t) = \ldots \qquad k = \overline{1, n-1}$

$u_0(t) = \alpha(t)$

$u_n(t) = \beta(t)$



Ищем решения на прямых

3. Коши: $u_k(0) = \varphi(x_k)$

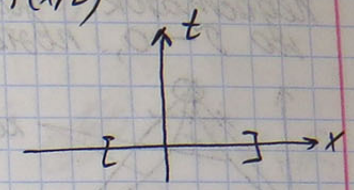
для системы 1 пор.

2 Метод сеток для гиперб. ур-ий.

$$u(x,t):\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

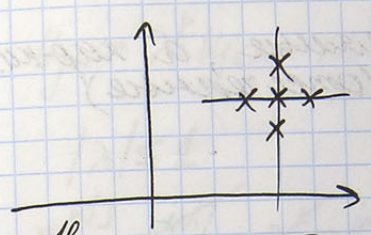
$-\infty < x < \infty$

$t > 0$



$u(x,0) = \varphi(x)$

$u'_t(x,0) = \psi(x)$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

30.04.2013.

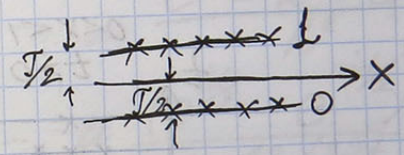
явная схема.

Нужно знать 2 нач. слоя.

$O(\tau^2 + h^2)$

если брать слои подряд — плохо (подск 1).

Берём:



(т.е. нет узлов на оси x).

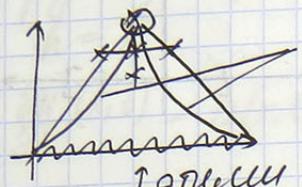
$u_{jk} \approx u(x_j, t_k)$

$$\frac{u_{j0} + u_{j1}}{2} = \varphi(x_j) \quad \forall j \qquad O(\tau^2) - \text{порядок аппр.}$$

$$\frac{u_{j1} - u_{j0}}{2\left(\frac{\tau}{2}\right)} = \psi(x_j) \qquad O(\tau^2) - \text{пор. апп.}$$

Из ур-ий находим u_{j0}, u_{j1}.

Недостаток: замерзим ниже оси x. но $\tau \to 0$, поэтому все ок.



хар-ки

↑ этими данными опр-ся прибл. решение.

А точное реш-е — не прямые, а хар-ки. И эти нач. данные (отсечённые) определят решение.

3 Спектральный критерий устойчивости разностной схемы.

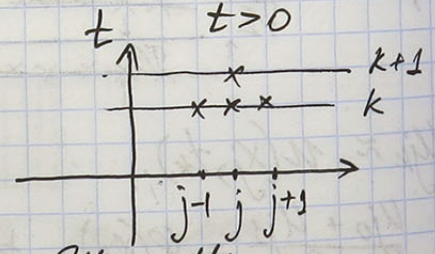
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$u(x,0) = \varphi(x)$

$a = const$

$0<x<1$

$t>0$



Разн-ные ур-я:

$$\frac{u_{jk+1} - u_{jk}}{\tau} - a\frac{u_{j-1k} - 2u_{jk} + u_{j+1k}}{h^2} = 0$$

$u_{j0} = \varphi(x_j)$

$\varphi(x) = e^{i\omega x} \cdot \beta(t)$ $\omega \in \mathbb{R}$

На самом деле $\beta(0)$.

$\forall\ \varphi(x) = \sum_k e^{i\omega_k x}$

Возьмём $u_{j0} = e^{i\alpha j}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$i \in \mathbb{C}$

j — индекс!

$u_{jk} = \lambda^k u_{j0}$ — хотим найти реш-е в таком виде.

$|\lambda| \le 1$.

$$\frac{\lambda^{k+1} e^{i\alpha j} - \lambda^k e^{i\alpha j}}{\tau} - a\frac{\lambda^k e^{i\alpha(j-1)} - 2\lambda^k e^{i\alpha j} + \lambda^k e^{i\alpha(j+1)}}{h^2} = 0$$

$: e^{i\alpha j}$ $: \lambda^k$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a\frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} =$$

$$= \frac{\lambda - 1}{\tau} - a\frac{\left(e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}\right)^2 \cdot (2i)^2}{h^2 \cdot (2i)^2} = 0$$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - a\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot (2i)^2}{h^2} = 0 \quad / \cdot \tau$$

$$\lambda - 1 - \underbrace{\frac{a\tau}{h^2}}_{\eta} \cdot \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot (2i)^2}{h^2} = 0$$

$$\lambda = 1 - 4r\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$|\lambda| \le 1$:

$$-1 \le 1 - 4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 1$$

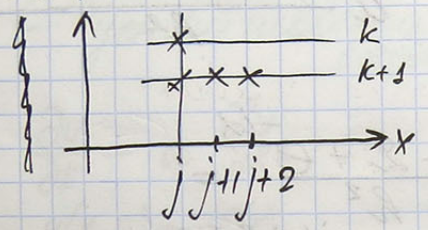
$r > 0$ – чтобы пр. вып.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad 4r \le 2$,

$r \le \frac{1}{2}$ – левое.

$$\boxed{\frac{a\tau}{h^2} \le \frac{1}{2}}$$ – именно такое усл-е и было на шаге в явной разн. схеме.

Пример.



$$\frac{u_{j\,k+1} - u_{jk}}{\tau} - a\,\frac{u_{j+2\,k} - 2u_{j+1\,k} + u_{jk}}{h^2} = 0$$

$$u_{jk} = \lambda^k e^{i\alpha j}$$

$$\lambda_{max} = 1 + ar\left(1 - e^{i\alpha}\right)^2 > 1$$

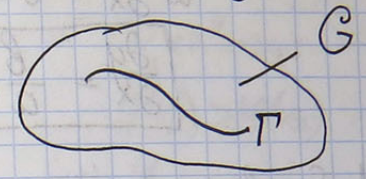
$\Rightarrow$ решение будет неогр. расти.

§ Метод характеристик.

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = f$$; a, b, f – заданы, но могут зависеть от u.

Ур-е – квазилинейное. $\quad u(x,y)$

$a, b, f \in C^1$



Γ – кривая в обл-ти

$\Gamma = \{y \mid y(x)\}$ – C^1

Пусть на этой кривой мы знаем реш-е:

$$u(x, y(x)) = \alpha(y) \text{ – известно.}$$

Найти: на Γ, u'_x, u'_y

Берем полоску вдоль кривой:

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) \simeq u(x,y) + u'_x(x,y)\cdot\Delta x + u'_y(x,y)\cdot\Delta y \qquad (x,y)\in\Gamma$$

Т.е. если найдем u'_x, u'_y на Γ $\Rightarrow$ можем продолжить реш-е на полоску.

на Γ:

$$(*)\begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y} = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x} = \alpha'(x) = \dfrac{d\alpha}{dx} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & \frac{\partial y}{\partial x} \end{vmatrix} = a\frac{\partial y}{\partial x} - b$$

1) $\Delta \neq 0$ $\exists!$ $u'_x, u'_y \Rightarrow$ успех

2) $\Delta = 0$ $\quad a\frac{\partial y}{\partial x} - b = 0$

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{a}}$$ – характеристика.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f & b \\ \frac{dy}{dx} & \frac{dy}{dx} \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_2 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = 0$: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{a}$

$\Delta_1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f}{a}$

если $f = 0 \Rightarrow u = const$ на хар.

Квазилин.: $\quad u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f \qquad y \geq 0$

$u(x,0) = \varphi(x) \qquad a = u$, $b = 1$, $f = 0$

Хар-ка:

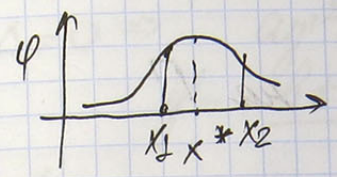
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}$$

$\frac{du}{dx} = 0$, $\quad u = const =: k$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{k}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=0} = \frac{1}{u(x,0)} = \frac{1}{\varphi(x)}$$

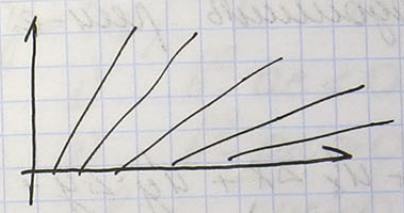
$\varphi(x) > 0$, $\quad x^*$ – точка max φ

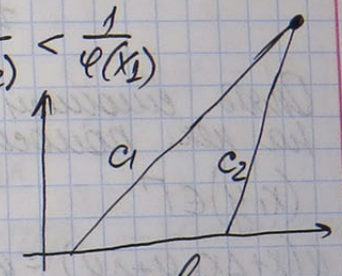


$x_1 < x^* < x_2$:

$\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$

$\frac{1}{\varphi(x_2)} < \frac{1}{\varphi(x_1)}$





разрывные решения.

§ Метод характеристик для гиперболического уравнения.

$u(x,y)$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

$y = y(x) \in C^1$

На Г известна u:

$$u(x,y)\big|_\Gamma = u(x,y(x)) = \alpha(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_\Gamma = p\big|_\Gamma = \beta(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_\Gamma = q\big|_\Gamma = \gamma(x)$$

Имеем: $r = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$s = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на Γ

$t = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Опять сможем продолжить реш-е на нек. полосу

$(x,y) \in \Gamma$

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx u(x,y) + u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + \frac{1}{2}\left(r(\Delta x)^2 + 2s\Delta x \Delta y + t(\Delta y)^2 \right)$$

$$dp = r\,dx + s\,dy$$

$$dq = s\,dx + t\,dy$$

$$(*)\begin{cases} ar + 2bs + ct = f \\ r\,dx + s\,dy = dp \\ s\,dx + t\,dy = dq \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = a\,dy^2 + c\,dx^2 - 2b\,dx\,dy$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ реш-е!

$\Delta = 0 \Rightarrow \quad ay'^2 - 2by' + c = 0 \qquad y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \lambda_\pm = \lambda_{1,2}$$

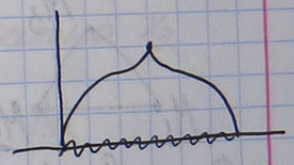
$\left.\begin{matrix} y' = \lambda_1 \\ y' = \lambda_2 \end{matrix}\right)$ характеристики.

1) $b^2 - ac < 0$ ЭЛЛ.

2) $b^2 - ac > 0$ ГИПЕР. – занимаемся им.

$b = 0$: $\quad ac < 0$

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



Предпол., что реш-е (*) $\exists$.

$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (из ф-л Крамера).

(достаточно двух из трёх).

$$dy = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}\,dx$$

$\Delta_1 = \Delta_2 = 0$:

$$(a\,dp - f\,dx)\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \cdot ac\,dq = 0.$$

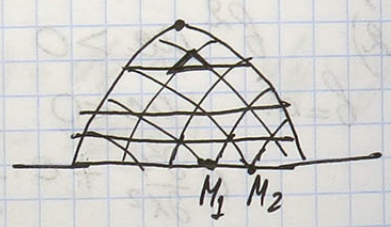
$dp = \ldots$

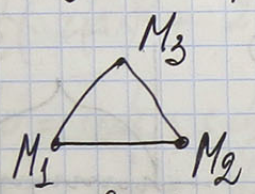
$dq = \ldots$

$$\begin{cases} dy - \lambda_1 dx = 0 \\ \cancel{(a\,dp - f\,dx)(\ )} \\ a(dp + \lambda_2 dq) - f\,dx = 0 \\ du = p\,dx + q\,dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} dy - \lambda_2 dx = 0 \\ a(dp + \lambda_1 dq) - f\,dx = 0 \\ du = p\,dx + q\,dy \end{cases}$$

неизв. (u, p, q)





Пусть в M_1, M_2 мы знаем (u, p, q)

$u = \varphi(x)$ —

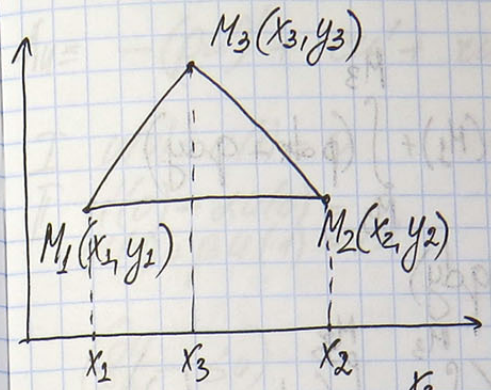
$q = \psi(x, 0)$ – произв. по y

$p = \varphi'(x)$

Т.е. во всех наших точках знаем M_i.

Нужно найти в M_3.

Поднимаемся.



Знаем в M_1, M_2

Хотим найти в M_3.

02.05.2013.

$$y_1(x_3) = y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_3} y_1'(x)\,dx = y_1(x_1) + \int_{x_1}^{x_3} \lambda_1(x)\,dx$$

$$y_2(x_3) = y_2(x_2) + \int_{x_2}^{x_3} y_2'(x)\,dx = y_2(x_2) + \int_{x_2}^{x_3} \lambda_2(x)\,dx$$

$y_1(x_3) = y_2(x_3)$ – ур-е относительно x_3.

Нашли $x_3, y_3 \Rightarrow$ нашли M_3.

Ищем (u, p, q) в M_3.

$$\int_{M_1}^{M_3} a(dp + \lambda_2 dq) - f\,dx = 0 \quad (**)$$

$$\int_{M_1}^{M_3} du = p\,dx + q\,dy$$

$$\int_{M_2}^{M_3} a(dp+\lambda_1 dq) - f dx = 0 \quad (**)$$

$$\int_{M_2}^{M_3} du = p dx + q dy$$

$$(*)\ u(M_3) = u(M_1) + \int_{M_1}^{M_3} du = u(M_1) + \int_{M_1}^{M_3} (p dx + q dy)$$

$$(**)\ u(M_3) = u(M_2) + \int_{M_2}^{M_3} (p dx + q dy)$$

$$u(M_3) = \frac{u(M_2)+u(M_1)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int_{M_1}^{M_3} + \int_{M_2}^{M_3} (p dx + q dy)\right)$$

Находим (u, p, q).

Поднимемся вверх, дойдём до верх. точки.

Реш-е в точке: опр-ся этими нач. усл-ми.

Порядок - $O(a^2)$ (5 равностор. Δ со стороной a).

§ Метод конечных элементов для обыкн. д.у. 2 порядка.

$$Au = -(pu')' + cu' + \gamma u = f \qquad 0<x<1$$

$$p', c, \gamma, f \in C$$

I $u(0) = u(1) = 0$

II $u'(0) - \alpha u(0) = 0$, $u'(1) + \beta u(1) = 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u\right)$$

$$A = B + C \qquad Bu = -(pu')' \qquad Cu = cu' + \gamma u$$

$D(A) = \{u \mid u \in C^2 + \text{гр. усл.}\}$

$R(A) \neq H = L_2(0,1)$ – это плохо, поэтому расширим обл. опр-я:

$D(A) = \{u \mid u'' \in L_2\}$

$\Rightarrow u'$ – абс. непр. ф-я.

Они должны удовл. главным гр. усл-ям (усл-я I. т.к. обязаны удовл. все ф-ции из энерг. пр-ва).

$$R(A) = L_2 = H$$

$Bu = -(pu')'$ –

B – полож. опр. симм. $\Rightarrow$ порожд. эн. пр-во

$$H_B = \begin{cases} W_2^1, & \text{I} \\ W_2^1, & \text{II} \end{cases}$$

$\exists B^{-1}$: $\quad Bu + Cu = f$ – реш-я этого ур-я – реш-я

$u + B^{-1}Cu = B^{-1}f$ – реш-я этого ур-я – „обобщ." реш.

$T := B^{-1}C$;

$u + Tu = f_1$

$D(B)$; H_B; $D(C) = W_2^1$

$H \supset D(C) \supseteq H_B \supset D(B)$

$$B^{-1} \cdot f = (B^{-1}f)(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,dy$$ – это Ф-я Грина.

$$((B^{-1}f)(x))' = \int_0^1 \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} f(y)\,dy$$

$$\int (G'_x)^2 < +\infty$$

$$\int (G)^2 + \int (G'_x)^2$$

B^{-1} рассм. на H_B.

B^{-1} на H_B – комп.

$T := \underset{\approx}{B^{-1}}\underset{\approx}{C}$

C – огр.

Т.е. свели решение исх. задачи к решению обобщ. ур-я. Это ур-е 2 рода.

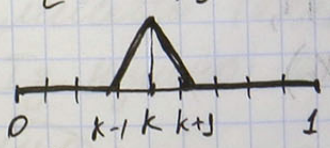
$Bu + Cu = f$ – применим метод Галёркина.

$u + Tu = f_1$

Метод Галёркина (конечного эл-та)

finite element method /* cherches la femme */

$\{\omega_k^{(n)}(x)\}$



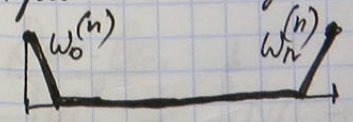
n,

$h = \frac{1}{n}$

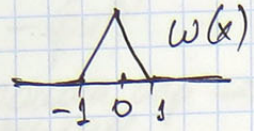
$x_k = kh$

определяем $\omega_k^{(n)}$ так.

Крайние случаи:



$\omega(x)$:



$$\omega_k^{(n)}(x) = \omega\left(\frac{x - x_k}{h}\right)$$

$$H_B = \begin{cases} \overset{\circ}{W}{}_2^1 \\ W_2^1 \end{cases}$$

Приближ. реш. $\sum\limits_{k=\sigma}^{n-\sigma} c_k \omega_k^{(n)}$

$\{\omega_k^{(n)}\} \subset H_B$ – плот.

I $\quad \omega_k^{(n)}(0) = 0 = \omega_k^{(n)}(1)$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{II} \\ 1, & \text{I} \end{cases}$$

(Л) $\quad u \in C^2([0,1]), \quad |u''(x)| \le M,$

$$u_n(x) = \sum_{\sigma}^{n-\sigma} \omega_k^{(n)}(x) \cdot u(x_k)$$

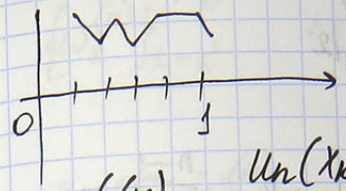
$\Rightarrow \quad \forall\, x \ne x_k, \quad x \in (0,1)$

$$|u'(x) - u_n'(x)| \le Mh$$

<u>Док-во.</u>

$u_n'(x)$

$x \in (x_k, x_{k+1})$



$u_n(x)$ – кусоч.-лин. непр. ф-я.

$$u_n'(x) = \frac{u_n(x_{k+1}) - u_n(x_k)}{h} =$$

$$// u_n(x_j) = u(x_j)$$

$$= \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{h} = u'(\xi_k) \qquad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

$$|u'(x) - u_n'(x)| = |u'(x) - u'(\xi_k)| =$$

$$= |x - \xi_k| \cdot |u''(\xi_k)| \le Mh.$$

$U^{(n)} \subset H_B \qquad U^{(n)}$ – подпр-во, натянутое
либо на: $\langle \omega_1 \ldots \omega_{n-1} \rangle$ – I
либо на: $\langle \omega_0 \ldots \omega_n \rangle$ – II.

Была (Л). Если u – удовл. усл-ям лемы ($u \in H_B$), II з. $\Rightarrow u \in C^2$

I з. нужно: $u(0) = u(1) = 0$

(Утв.) u – удовл. усл-ям (Л), и $u \in H_B$

Тогда $|u - u_n|_{H_B} = Mh\sqrt{\max\limits_x p(x)}$

<u>Док-во.</u>

$$|u|_{H_B}^2 = \int_0^1 pu'^2 + \begin{cases} 0, & \text{I} \\ \alpha p(0) u^2(0) + \beta p(1) u^2(1), & \text{II} \end{cases}$$

I. $$|u|^2_{H_B} = \int_0^1 p u'^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p u'^2$$

$$|u-u_n|^2_{H_B} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cancel{p u'^2}\, p(u'-u_n')^2 \le \sum_{k=0}^{n-1} \max_{0\le x\le 1} p(x) \cdot$$

$$\cdot M^2 h^2 \cdot h \cdot n \le \|p\|_C \cdot M^2 h^2$$

II. 1-е слаг. $+ \alpha p(0)(u(0) \cancel{-} u_n(0))^2 + \cancel{\beta p(1)}$

$|u-u_n|^2_{H_B} \geq$ $+ \beta p(1)(u(1) \cancel{-} u_n(1))^2$

$\times$ т.к. ф-я кусочно-лин.

ч.т.д.

След. Если вып. усл-е леммы и след. за ним утв-я, то

$$E_{U^{(n)}}(u) \le Mh\sqrt{\|p\|_C}$$

где, E - наилуч. приближ.

$$E_{U^{(n)}}(u) = \inf_{\tilde{u}_n \in U^{(n)}} |u - \tilde{u}_n|_{H_B} \le Mh\sqrt{\|p\|}$$

Если $h \to 0$, $u \in C^2$, $u \in H_B \Rightarrow E_{H^{(n)}}(u) \to 0$

$\Rightarrow$

$\{\omega_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-6}$ $n = 1, 2, \ldots$ — полная система в энерг. пр-ве H_B.

$\operatorname{supp} \omega_k^{(n)} = [x_{k-1}, x_{k+1}]$

(T) Метод кон. эл-та (Галёркина) 07.05.2013.

сх-ея:

$$|\tilde{u}_n^* - u^*|_{H_B} = O(h)$$

Док-во.

$\tilde{u}_n^*$ - приближ. по Гал. $\tilde{u}_n^* = \sum_{k=6}^{n-6} c_k \omega_k^{(n)}(x)$

$$\Rightarrow \boxed{c_k = \tilde{u}_n^*(x_k)}$$

Предположения: $u^* \in C^2$

$$O(h) = O\left(E_{U^{(n)}}(u^*)\right) = O(h)$$

$$\|u\|_C \le C_1 |u|_{H_B} \qquad H_B = \overset{(0)}{W}{}_2^1$$

(справа нолев)

сх. прав. $\Rightarrow$ сх. лев.

$u^* \in C^2$

$$\tilde{u}_n^* \rightrightarrows u^* \text{ в } C$$

$$\|\tilde{u}_n^* - u^*\|_C = O(h)$$

$$\boxed{c_k = \tilde{u}_n^*(x_k) \longrightarrow u^*(x_k)} \qquad O(h)$$

~~В~~ А в сетках было h^2, но C^4!

Устойчивость МКЭ

МКЭ $\longrightarrow$ СЛАУ. $B_n \tilde{C}_n = \tilde{F}_n$

$\tilde{C}_n = (c_1, \dots c_n)$

$\tilde{F}_n = (\dots \quad (f, \omega_k^{(n)}), \dots)$

$B_n = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

$Bu + Cu = f$

$Bu = -(pu')' \qquad Cu = qu' + ru$

$b_{ij} = (B\omega_i^{(n)}, \omega_j) + (C\omega_i^{(n)}, \omega_j)$

(T) $\exists\, C_1, C_2 > 0 \quad n \geq n_0$

$\|B_n\| \leq C_1/h$

$\|B_n^{-1}\| \leq C_2/h$

<u>Док-во</u>.

$\mathcal{D}$: $\mathcal{D}u = -u'' + u \qquad$ I $u(0) = u(1) = 0$

II $u'(0) = u'(1) = 0$

Он полусходен? с опер-ром B:

$Bu = -(pu')' \qquad H_B, H_{\mathcal{D}}$ совп. (пок эл-ты) нормы экв-ны.

см. ур-я I рода

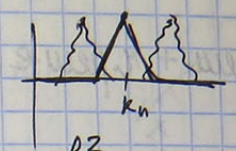
$u + Tu = f$ м. Галёр.

$\|B_n\| \leq C_1 \|\Gamma_n^{\mathcal{D}}\|_2 \qquad \|B_n^{-1}\|_2 \leq C_2 \|(\Gamma_n^{\mathcal{D}})^{-1}\|_2$

$\Gamma_n^{\mathcal{D}} = \left([\omega_k^{(n)}, \omega_j^{(n)}]_{H_{\mathcal{D}}} \right)_{k,j=1}^{n}$

$[\omega_k^{(n)}, \omega_j^{(n)}]_{H_{\mathcal{D}}} = \int_0^1 (\omega_k^{(n)\prime} \cdot \omega_j^{(n)\prime} + \omega_k^{(n)} \cdot \omega_j^{(n)}) = \begin{cases} 0 & |k-j| > 1 \\ & k = j \\ & |k-j| = 1 \end{cases}$

$\operatorname{supp} \omega_k = [x_{k-1}, x_{k+1}]$



$$\Gamma_n^{\mathcal{D}} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1+\frac{h^2}{3} & -1+\frac{h^2}{26} & & 0 \\ -1+\frac{h^2}{6} & 2+\frac{2h^2}{3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 2+\frac{2h^2}{3} & 1+\frac{h^2}{3} \end{pmatrix}$$

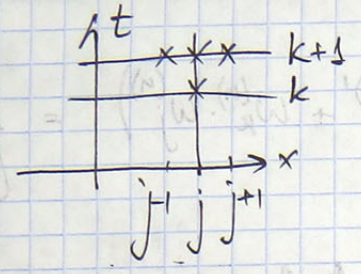
— для II кр. з

Для I: выкинуть первый и послед. строки и столбцы.

Метод расщепления (факторизации, переменных напр-ий) решения неодномерных ур-ий теплопроводности.

$u(x,t) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad u(x,0) = \varphi(x)$ + гр. усл.

Неявная схема:



u = общ. реш. + ч. реш-е

$$\frac{u_{jk+1}-u_{jk}}{\tau} - a\,\frac{u_{j+1k+1}-2u_{jk+1}+u_{j-1k+1}}{h^2}=0$$

$\varphi(x)$: $e^{i\alpha j}=u_{j0}$

$u_{jk}=\lambda^k\cdot u_{j0}$

$$\frac{\lambda-1}{\tau}-a\lambda\,\frac{e^{i\alpha}-2e^{-i\alpha}}{h^2}=0$$

$$\lambda=1+\frac{a\lambda\tau}{h^2}\left(\frac{e^{i\alpha/2}-e^{-i\alpha/2}}{2i}\right)^2(2i)^2=0$$

$$\lambda=1-\lambda\frac{4a\tau}{h^2}\sin^2\alpha/2$$

$$\lambda=\frac{1}{1+\frac{4a\tau}{h^2}\sin^2\alpha/2}\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

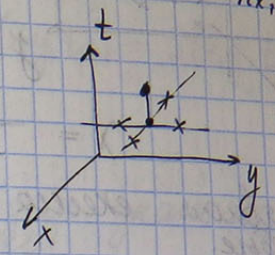
$0\le\lambda\le1$

$\Rightarrow$ схема устойчива при $\forall$ соотношении шагов.

Что плохо? Аппрокс: $O(\tau+h^2)$

$u(x,y,t)$ $\qquad h_x,\ h_y$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+f$$



Сетка: $x_m,\ y_\ell,\ t_n$

$u_{m\ell}^n\approx u(x_m,y_\ell,t_n)$

<u>Явная разн. схема:</u>

$$\frac{u_{m\ell}^{n+1}-u_{m\ell}^n}{\tau}=\frac{u_{m+1\ell}^n-2u_{m\ell}^n+u_{m-1\ell}^n}{h_x^2}+\frac{u_{m\ell+1}^n-2u_{m\ell}^n+u_{m\ell-1}^n}{h_y^2}=$$

$=f_{m\ell}^n$

Спектр.

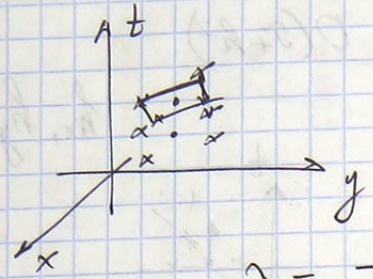
$$u_{m\ell}^n=\lambda^n e^{i\alpha m+i\beta\ell},\qquad \alpha,\beta\in[0,2\pi]$$

$$\lambda(\alpha,\beta,\tau,h_x,h_y)=1-4\frac{\tau}{h_x^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\frac{\tau}{h_y^2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$-1\le\lambda\le1$

$$\tau\le\frac{1}{2(h_x^{-2}+h_y^{-2})}$$

<u>Неявная разн. схема:</u>



$$\lambda = \frac{1}{h}$$

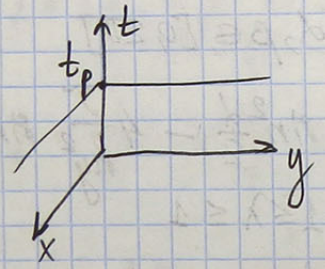
Неявная схема лучше, т.к. шаги любые.

Но в обоих случаях очень много переменных. Поэтому хотим расщепить.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f \qquad u(x,y,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f$$

$$A = A_1 + A_2 \qquad A_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad A_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Известно $u(x,y,t_p)$ на сетке (x_m, y_e, t_p)

$$t_{p+1} = \tau + t_p$$

$$u(x,y,t_{p+1}) = u(x,y,t_p) + \tau \cdot u'_t(x,y,t_p) + O(\tau^2) =$$

$$= u(x,y,t_p) + \tau \cdot \underset{(x,y,t_p)}{(Au+f)} + O(\tau^2) = (E + \tau A)\, u(x,y,t_p) + \tau f + O(\tau^2)$$

I. $\frac{\partial v}{\partial t} = A_1 v, \quad t_p \le t \le t_{p+1}$

$$v(x,y,t_p) = u(x,y,t_p)$$

Найти $v(x,y,t_{p+1})$

y-параметр. При каждом значении y решать умеем.

II. $\frac{\partial w}{\partial t} = A_2 w + f, \quad t_p \le t \le t_{p+1}, \quad w(x,y,t_p) = v(x,y,t_{p+1})$

Найти $w(x,y,t_{p+1})$

x-пар-р. При наид. зн. умеем решать.

$$w(x,y,t_{p+1}) = (E + \tau A_1)\, v(x,y,t_p) + O(\tau^2) =$$

$$= (E + \tau A_1)\, u(x,y,t_p) + O(\tau^2)$$

$$w(x,y,t_{p+1}) = (E + \tau A_2)\, w(x,y,t_p) + \tau f + O(\tau^2) =$$

$$= (E + \tau A_2)\, v(x,y,t_{p+1}) + \tau f + O(\tau^2) =$$

$$= (E + \tau A_2)(E + \tau A)\, u(x,y,t_p) + \tau f + O(\tau^2) =$$

$$= (E + \tau \underbrace{(A_1 + A_2)}_{A})\, u(x,y,t_p) + \tau f + O(\tau^2) =$$

$$= (E + \tau A)\, u(x,y,t_p) + \tau f + O(\tau^2)$$

Теперь для реш-я этих двух задач применяем различ. разн. схемы.

Решение неустойчивых задач.

$Az = u$

Def: Задача явл-ся корректно поставленной, если:

1) $\exists$ реш-е для $\forall u$;
2) $\exists!$ реш-е z;
3) z непр. зависит от u.

Если нарушено только 3) усл-е, то з. наз-ют неустойчивой.

$Az = u$ (1)

$A^*Az = A^*u$ (2)

Ур-е 2 всегда разрешимо, а 1 не всегда.

14.05.2013. $Az = u$ – СЛАУ $\quad A \approx A_\delta$, $u \approx u_\delta$

$\|A - A_\delta\| \le \delta \qquad \|u - u_\delta\| \le \delta$

$\delta = \delta_n$

$A_\delta z = u_\delta$

$Z_\delta = \{ z : \|A_\delta z - u_\delta\| \le \delta \}$

$\Omega(z) = \|z_\delta\|^2$ $\qquad$ /* $A_\delta z_\delta = u_\delta$ */

I. $\min \Omega(z)$ при условии $\|A_\delta z - u_\delta\| \le \delta$

$M_\alpha(z_\delta, u_\delta, A_\delta) = \|A_\delta z_\delta - u_\delta\|^2 + \alpha\Omega(z_\delta) \quad \alpha > 0$

(уберем индексы для краткости. они подразуми).

$M_\alpha(z, u, A) = \|Az - u\|^2 + \alpha\Omega(z) =$

$= (Az - u, Az - u) + \alpha(z, z), \quad \alpha > 0.$

(T) $\forall \alpha > 0$ при заданных A, u

$\exists! \; z_\alpha : \; M_\alpha(z_\alpha, u, A) = \min.$

Док-во.

Берем $\forall v$.

$M_\alpha(z + tv, u, A) = (A(z + tv) - u, A(z + tv) - u) +$

$+ \alpha(z + tv, z + tv) = \varphi(t) \; (t \in \mathbb{R}) \quad \ge 0$

$\varphi'_t(t = 0) = 0.$

$\varphi'(0) = 2(Av, Az - u) + \alpha \cdot 2(v, z) = 0$

$\varphi'(0) = (v, A^*Az - A^*u) + (v, \alpha z) = 0$

$(v, \underbrace{A^*Az - A^*u + \alpha z}_{0}) = 0 \quad \forall v$

$\boxed{(A^*A + \alpha E)z = A^*u}$ – ур-е Эйлера. (1)

A^*A – симм.: $\quad \lambda_k(A^*A) \ge 0$

$\lambda_k(A^*A + \alpha E) \ge \alpha > 0$

$\exists (A^*A+\alpha E)^{-1}$: $\quad z_\alpha = (A^*A+\alpha E)^{-1} A^* u$ (2)

$Az = u$ $\quad$ 1) $A^*Az = A^*u$

2) $(A^*A+\alpha E)z = A^*u$

$\lambda_k(A^*A) \geq 0$ $\quad$ $X_1 \dots X_n$ - орт-норм. базис.

$\lambda_1(A^*A) \dots \lambda_n(A^*A)$

$$A^*u = \sum_1^n \alpha_k X_k$$

(2): $$(A^*A+\alpha E)^{-1} A^*u = \sum_k \alpha_k (A^*A+\alpha E)^{-1} X_k =$$

$$= \sum_k \alpha_k \frac{(A^*u, X_k)}{\lambda_k(A^*A)+\alpha} X_k$$

а) $\alpha = 0$

Def: прямоуг. м. A - вполне неотриц. (вполне положит.), если все её миноры - неотриц. (положит.).

Def: кв. м. A - осцилляционной (?!) или если A - вполне неотриц. и $\exists q \in \mathbb{N}$: A^q - вполне полож.

(T) (об осц. матрицах)

A - осцилл. $\Rightarrow$

1) $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$

2) Пусть $X_1 \dots X_n$ - с.в. соотв-щие. Тогда все коорд. X_1 - одного знака.

в коорд-тах X_2 - ровно 1 перемена знака.

в коорд-тах X_3 - 2 перемены

...

в коорд-тах X_n - $n-1$ перемена.

без док-ва.

$Ax = b$ $\quad$ A - осц.

$$X = A^{-1}b = \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\lambda_k} \cdot X_k$$

Если перед X_n большой коэф., получим "забор" нет. сход-ти. Нужно что-то делать.

Примеры.

1) Обобщ. м. Вандермонда

$$\left(a_i^{\alpha_k}\right)_{i=1}^n$$

$0 < a_1 < \dots < a_n$

$\alpha_1 < \dots < \alpha_n$

$\alpha_k = k-1$

2) $$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$ $\quad a_i, b_i, c_i > 0$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_k(\mathcal{A}) = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1:n$$

$\mathcal{A}$ - не осц.

$$X_k = \left(\sin\frac{k\pi}{n+1}, \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \ldots \sin\frac{nk\pi}{n+1}\right)$$

$\mathcal{A} + \alpha \cdot E$, - осц. при $\alpha \geq 2$ (т.к. с.з. $\mathcal{A}$ $-2 \leq \quad \leq 2$)

$$\lambda_k(\mathcal{A} + \alpha E) = 2\cos\frac{2\pi}{n+1} + \alpha > 0$$

у X_1 все коорд. > 0

Хотим реш. ур-е:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = F(p), \quad p > 0$$

$$e^{-pt} = x \qquad \in [0,1]$$

$$t = -\frac{1}{p}\ln x \qquad dt = -\frac{dx}{xp}$$

$$\int_0^1 x^{p-1} \underbrace{f\left(-\frac{\ln x}{p}\right)}_{\varphi(x)} dx = pF(p)$$

$$\int_0^1 x^{p-1} \varphi(x)\,dx = pF(p)$$

К.Ф. $\int_0^1 v(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n A_k v(x_k)$, $0 \leq x_k \leq 1$

$$\sum_{k=1}^n x_k^{p-1} \underbrace{A_k \varphi(x_k)}_{\psi_k} = F(p) \qquad p = 1, 2, \ldots n.$$

$$\sum_{k=1}^n x_k^{p_j - 1} \psi_k = F(p_j), \quad p_j = j \in 1:n$$

это СЛАУ с м. Вандермонда.

M - осц.

$Az = \bar{u}$ - разрешима (предпол.)

! - не предпол.

A_δ, u_δ - δ-приби-я.

$$M_\alpha(z, u_\delta, A_\delta) = \|A_\delta z - u_\delta\|^2 + \alpha\|z\|^2$$

$\forall\, \alpha > 0\ \exists!\ z_\alpha$ - т. min M_α (см. ур-е Эйлера)

Def: Псевдорешение для ур-я $Az = \bar{u}$ (кот. не обяз. разрешимо) - $\forall$ вектор z: $\|Az - \bar{u}\| = \min$.

Def: Нормальное псевдореш. - псевдорешение с наименьшей нормой.

$Az = \bar{u}$ - разр. $z^{(0)}$ - его норм. реш-е.

(T) $Az = \bar{u}$ – разр., $z^{(0)}$ – его норм. реш.

Пусть на $[0, \delta_1]$ $(\delta_1 > 0)$

даны ф-ции: $\beta_1(\delta), \beta_2(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$, т.ч.:

$\delta^2 \le \beta_1(\delta)\beta_2(\delta)$

$\left(\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \beta_2(\delta)\right)$. Тогда

$\forall\, \alpha(\delta)$: $\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha(\delta) \le \beta_2(\delta)$ (*)

из $\{z_{\alpha(\delta)}\}$ – мн-ва т. min M_α можно выделить сх-ся к норм. решению систему

$$z_{\alpha(\delta)} \xrightarrow[\delta \to 0]{} z^{(0)}.$$

<u>Док-во.</u>

Берём $\forall\, \alpha(\delta)$, удовл. (*)

$z_{\alpha(\delta)}$ – т. min $M_{\alpha(\delta)}$

$\alpha(\delta)\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 \le M_{\alpha(\delta)}(z_{\alpha(\delta)}, u_\delta, A_\delta) \le$

$\le M_{\alpha(\delta)}(z^{(0)}, u_\delta, A_\delta) =$

неизв., но оно $\exists$

$= \|A_\delta z^{(0)} - u_\delta\|^2 + \cancel{\|z^{(0)}\|^2}\, \alpha_\delta \|z^{(0)}\|^2 \le$

$\le \|(A_\delta z^{(0)} - Az^{(0)}) + (Az^{(0)} - u_\delta)\|^2 +$

$+ \alpha(\delta)\|z^{(0)}\|^2 \le$

$\le (\|z^{(0)}\|\delta + \delta)^2 + \alpha(\delta)\|z^{(0)}\|^2 =$

$= \delta^2(\|z^{(0)}\|+1)^2 + \alpha(\delta)\|z^{(0)}\|^2$

: на $\alpha(\delta)$:

$\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 \le \|z^{(0)}\|^2 + \underbrace{\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}}_{\le \beta_1(\delta)}(\|z^{(0)}\|+1)^2 \le$

$\le \|z^{(0)}\|^2 + \beta_1(\delta)(\|z^{(0)}\|+1)^2$ $\cancel{\le \beta_1(\delta)}$

$\{z_{\alpha(\delta)}\} \le C$ – равном. огр.

Пр-во конечном. $\Rightarrow$ компакт.

$\Rightarrow$ можно выд. сх. посл-ть.

В послед. пер-ве $\delta \to 0$:

$\|z_{\alpha(\delta)}\|^2 \le \|z^{(0)}\|^2 + \beta_1(\delta)(\|z^{(0)}\|+1)^2$

$\downarrow$

$\bar{z}^{(0)} \le \|z^{(0)}\|^2 + \beta_1(\delta)(\|z^{(0)}\|+1)^2$

$M_{\alpha(\delta)}(\bar{z}^{(0)}, u_\delta, A_\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

$\Longleftrightarrow \|A\bar{z}^{(0)} - \bar{u}\| = 0$

$\Rightarrow \bar{z}^{(0)}$ – реш-е исх. ур-я, при этом

$\|\bar{z}^{(0)}\| \le \|z^{(0)}\|$

$\Rightarrow$ (т.к. норм. реш-е!) $\Rightarrow$ сх-ся к норм. реш-ю ч.т.д.

Ч. случай

$\beta_1 = \beta_2 = \delta \Rightarrow \alpha(\delta) = \delta.$

16.05.2013.

$Az = \bar{u}$

$\mu = \inf\limits_z \|Az - \bar{u}\|$

I. $\mu = 0$. – было

$\mu = \|Az^{(0)} - \bar{u}\| = 0$ – реализуется.

$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha \le \beta_2(\delta)$

II. $\mu > 0$. $\mu = \|Az^{(0)} - \bar{u}\| > 0$.

A – точное! $u_\delta =: \tilde{u}$.

$M_\alpha = \|Az - \tilde{u}\|^2 + \alpha\Omega(z)$; $\Omega(z) > \|z\|^2$

$\|A_\delta z - u_\delta\| \le \delta$

$\forall z$: $\|Az - \tilde{u}\| \le \|Az - \bar{u}\| + \|\bar{u} - \tilde{u}\|$

$\|Az - \bar{u}\| \le \|Az - \tilde{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|$

Перех. к inf во 2 нер-ве:

$\inf = \mu \le \delta + \|Az - \tilde{u}\|$

$\tilde{\mu} := \inf \|Az - \tilde{u}\|$

$\mu \le \tilde{\mu} + \delta$

к inf в 1 нер-ве:

$\tilde{\mu} \le \mu + \delta \Longrightarrow \|\mu - \tilde{\mu}\| \le \delta$

$\|Az - \tilde{u}\| \le \|Az - \bar{u}\| + \|\bar{u} - \tilde{u}\| \le \mu + \delta \le \tilde{\mu} + 2\delta.$

$M_\alpha := \|Az - \tilde{u}\|^2 + \alpha\Omega(z)$, $\alpha > 0$.

z_α – точка min M_α.

$\underbrace{\tilde{\mu}^2 + \alpha\|z_\alpha\|^2}_{\min} \le M_\alpha(z_\alpha, \tilde{u}, A) \le M_\alpha(z^{(0)}, \tilde{u}, A) =$

$= \|Az^{(0)} - \tilde{u}\|^2 + \alpha\|z^{(0)}\|^2 \le$

$\le (\|Az^{(0)} - \bar{u}\| + \|\bar{u} - \tilde{u}\|)^2 + \alpha\|z^{(0)}\|^2 \le$

$\le (\mu + \delta)^2 + \alpha\|z^{(0)}\|^2$

$\alpha\|z_\alpha\|^2 \le (\mu + \delta)^2 - \tilde{\mu}^2 + \alpha\|z^{(0)}\|^2 \le$

$\le 4\delta(\mu + \delta) + \alpha\|z^{(0)}\|^2$

$\|z_\alpha\|^2 \le \|z^{(0)}\|^2 + \frac{4\delta}{\alpha}(\mu + \delta)$

$\frac{\delta}{\alpha} \to 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)} \le \alpha \le \beta_2(\delta)$

$\frac{\delta}{\alpha} \le \beta_1(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Верна та же теорема, что и для $\mu = 0$.

$\left.\begin{array}{l}\{z_\alpha\} - \text{огр.} \\ \text{конечномер. пр-во}\end{array}\right\} \Rightarrow \{z_\alpha\} - \text{комп.}$

Т.е. построение мин. эл-тов сходится к $z^{(0)}$. (норм. реш-е).

M_α сходится к M^2.

3 Методы регуляризации для реш-я инт. ур-ий первого рода.

$$\int_a^b K(s,t)\,z(t)\,dt = u(s), \qquad c \le s \le d$$

ядро $\qquad u(s)$ - извест.

$z(t)$ - неизвест.

$$Az = u$$

Пример

$K \equiv 1 \qquad \int_a^b z(t)\,dt = u(s)$

если $u(s) \neq const \Rightarrow$ решений бесконеч. много.

$$\int_a^b K(s,t)\left(z(t) + \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\omega t\right)dt = u(s) + \varepsilon(s,\omega)$$

Утв. $\varepsilon(s,\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$

Задача неустойчива.

$A: Z \to U$

Хотим норму

$Z: \|z\|_{C([a,b])} = \max\limits_{t\in[a,b]} |z(t)|$

$U: \|u\|^2_{L_2([c,d])} = \int_c^d u^2(s)\,ds$

$M_\alpha = \|Az - u\|^2 + \alpha\,\Omega(z)$

$\Omega(z)$ - стаб-щий ф-л. ≥ 0.

$z \in Z$: $z \in W_2^1$ ($\overset{\circ}{W}{}_2^1$)

$\forall\, d>0 \quad Z_d = \{z \mid \Omega(z) \le d\}$

$$\Omega(z) = \int_a^b \left(p(t)\,z'^2(t) + q(t)\,z^2(t)\right)dt$$

$p(t) \ge p_0 > 0$

$q(t) \ge 0$

$p, q \in C$

$\Omega(z) \le d$:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b p z'^2 \le d\\ \int_a^b q z^2 \le d\end{aligned}\right\} Z_d \text{ - компакт!}$$

$M_\alpha = \|Az - u\|^2 + \alpha \int (p z'^2 + q z^2)$

Хотим $\forall\, \alpha > 0 \quad M_\alpha \to \min$.

Берем $\forall\, v \in W_2^1$

$z, \; z + \gamma v$

$$\Phi(\gamma) = \left(A(z+\gamma v) - u,\ A(z+\gamma v) - u\right) + \alpha \int_a^b \left(p\left((z+\gamma v)'\right)^2 + q(z+\gamma v)^2\right)$$

Необх: $\Phi'(0) = 0$.

<u>Ур-е Эйлера:</u>

$$(A^*A + \alpha L)z = A^*u,$$

где $Lz = qz - (pz')'$

v - доп. вариация z

$\left.\begin{matrix} z(a),\ z'(a) \\ z(b),\ z'(b) \end{matrix}\right\}$ 4 пар-ра (могут быть даны).

Лин. заменой гр. усл-я можно свести к однородным.

$$vpz'\Big|_a^b = v(b)p(b)z'(b) - v(a)p(a)z'(a) = 0$$

$$\Phi'(t) = 0 \quad (\ldots,\ldots) = (v,\ \mathrm{I} + \mathrm{II})$$

$$\mathrm{I} = (A^*A + \alpha L)z - A^*u = 0$$

$$\mathrm{II} = vpz'\Big|_a^b = 0$$

ур-е Эйлера при усл-ии $vpz'\Big|_a^b = 0$.

1) даны $z(a), z(b)$

$v(a) = v(b) = 0$

2) даны $z'(a), z'(b)$

$z'(a) = z'(b) = 0$.

3) ...

4) ...

Расм. ур-е Эйлера для 4ех типов гран. усл-ий:

$$\begin{matrix} \mathrm{I} & z(a) = z(b) = 0 \\ \mathrm{II} & z'(a) = z'(b) = 0 \\ \mathrm{III} & z'(a) = z(b) = 0 \\ \mathrm{IV} & z(a) = z'(b) = 0 \end{matrix}$$

$$(A^*A + \alpha L)z = A^*u$$

$$Az = \int_a^b K(s,t)z(t)\,dt$$

$$A^*:\ A^*w = \int_a^b K(t,s)w(t)\,dt$$

$$A^*A:\ A^*A\varphi = \int_a^b \overline{K}(s,t)\varphi(t)\,dt \qquad \overline{K}(s,t) = \int K(s,x)K(x,t)\,dx$$

$$\alpha\left(-(p(s)z'(s))' + q\,z(s)\right) + \int_a^b \overline{K}(s,t)z(t)\,dt = A^*u$$

интегро-дифф. ур-е.

$A^*A + \alpha L$ - самосоп.; пол. опр. опер-р.

при соотв. гр. усл-ях.

$\exists\ (A^*A + \alpha L)^{-1}$

$\Rightarrow$ ур-е Эйлера разреш.

$\Rightarrow \exists!\ z_\alpha$ – m. min M_α.

$t_j = jh, \quad h = \frac{1}{n} \quad j = 1..n$

$$\int_a^b \overline{K} \cdot z \approx h \sum_{j=0}^{n} A_j \overline{K}(s t_j) z_j$$

$s = t_i$

$$-(pz')' + qz \Big|_{s=t_i} \cong$$

$$\cong q_i z_i - \frac{p_{i+1/2} z_{i+1} + p_{i-1/2} z_{i-1} - (p_{i-1/2} + p_{i+1/2}) z_i}{h^2}$$

получим СЛАУ

(T) $Az = u$ – $\exists!\ z^*$ – реш-е.

$\Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$ и $\forall\ \beta_1(\delta), \beta_2(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$,

т.ч. $\delta^2 \le \beta_1(\delta)\beta_2(\delta)$

$\exists\ \delta_0 = \delta_0(\varepsilon, \beta_1, \beta_2)$:

$\forall\ u_\delta \in L_2(c,d)$ и $\forall\ \delta \le \delta_0$

из нер-в. $\rho_{L_2}(u, u_\delta) \le \delta$ для $\forall\ \alpha(\delta)$:

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha(\delta) \le \beta_2(\delta)$$

$|z^*(t) - z_{\alpha(\delta)}(t)| \le \varepsilon \quad t \in [a, b]$

$z_{\alpha(\delta)}$ – m. min M_α

Нет последней лекции!