Шашковой Елизаветы, 344

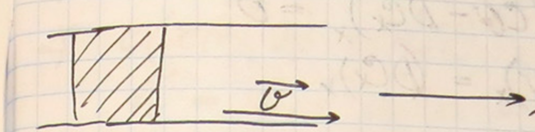
Уравнения математической физики

Степанов Евгений Олегович

09.02.2013

Задачи.

① На реке плывет пятно мазута. Вопрос: куда оно уплывет и какая будет форма?



$c(t,x)$ – концентрация (зависит от времени и координаты)

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} c(t,y)\,dy = q \text{ – кол-во загряз. вещ-ва}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} c(t,y)\,dy = q(t,x) \text{ – поток.}$$

// $c_t = c'_t$

$q_x = q'_x$

$$\frac{d}{dt}\int_{x}^{x+\Delta x} c(t,y)\,dy = q(t,x) - q(t,x+\Delta x) \quad \Big| : \Delta x$$

$$\frac{d}{dt} c(t,x) = \frac{q(t,x) - q(t,x+\Delta x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -q'_x(t,x)$$

$$c_t + q_x = 0$$

1) Конвекция

$$q = c v$$

2) Диффузия (распр-ся из обл-ти с большей концентр в обл-ть с меньшей)

$q = -Dc_x$ закон Фика. ~~D const~~

Если и 1), и 2), то $q = cv - Dc_x$

Итого:

$$c_t + (cv - Dc_x)_x = 0$$

$$c_t + (cv)_x = (Dc_x)_x$$

Част. случаи:

1) $c_t + (cv)_x = 0$ - конвекция

1.1) $v = const$: $c_t + vc_x = 0$

2) $c_t = (Dc_x)_x$ - диффузия.

2.1) $D = const$: $c_t = Dc_{xx}$

Это д.у. отн-но c.

v, D - не обяз. const. Если они не зав. от c, то это лин. ур-я:

$\mathcal{L}c = 0$,

где $\mathcal{L}(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = \lambda_1 \mathcal{L}c_1 + \lambda_2 \mathcal{L}c_2$

Найдем решение для 1.1).

$c_t + vc_x = 0 \qquad c(0, x) = g_0(x)$

g_0 - известная ф-ция (з. Коши).

$$\begin{cases} c_t + vc_x = 0 \\ c(0, x) = g_0(x) \end{cases}$$

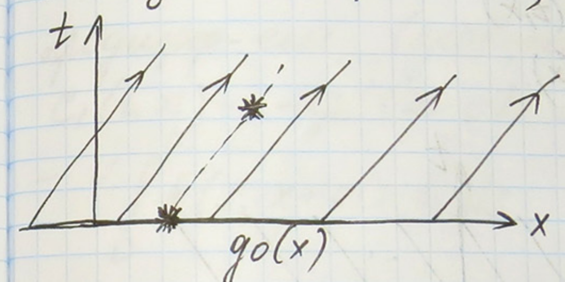
Используем метод характеристик.

$\forall\, x(t)$, удовл.: $\dot{x}(t) = v$

$\forall\, c(x(t), t) =: h(t) \quad ; \quad (\ )'_t$

$\dot{h} = c_t + c_x \cdot \dot{x} = c_t + vc_x = 0$ (см. систему)

Т.е. вдоль $\forall$ кривой x, h яв-ся const.



Зн-я в * - равны!

Берем точку $\Rightarrow$ пускаем хар-ку, на ней const $\Rightarrow$ зн-е = зн-ю на нач. данных.

$x = x_0 + vt$

$\underline{c(t, x)} = g_0(x_0) = \underline{g_0(x - vt)}$

Т v-const; $g_0 \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$ реш-е - гладкая ф-я.

(12) Если было не пятно, а постоянно появляющееся пятно? (трубу прорвало).

Добавляется еще один источник.

$$c_t(t,x) = -q_x(t,x) + \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t,y)\,dy}{\Delta x}$$

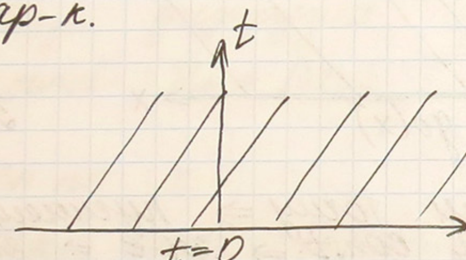
$$c_t + q_x = f(t,x)$$ – неоднородное транспортное ур-е.

Только конвекция (диффузии нет)

$$\begin{cases} c_t + v c_x = f(t,x) \\ c(t,x) = g_0(x) \end{cases}$$

Метод хар-к.

$$\frac{dx}{dt} = v$$



$$h(t) = c(x(t),t)$$

$$h'(t) = c_t + c_x \cdot \dot{x} = c_t + v c_x = f(t,x) =$$
$$= f(t, x_0 + vt)$$

$$\begin{cases} h'(t) = f(t, x_0 + vt) \\ h(0) = g_0(x_0) \end{cases}$$

$$h(t) = g_0(x_0) + \int_0^t f(s, x_0 + vs)\,ds$$ – реш-е ДУ

$$\| \quad c(t, x(t))$$

$$c(t,x) = g_0(x - vt) + \int_0^t f(s, x + v(s-t))\,ds$$

(T) Если $g_0 \in C^1(\mathbb{R})$;
~~$f \in$ диффер. на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$~~
$f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$
$f_x \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$
$\Rightarrow \exists!$ реш-е ур-я.

Продифф-ем: (проверка):

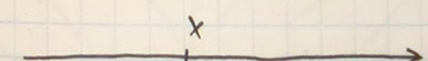
$$c_t(t,x) = -g_0'(x - vt) \cdot v + f(t,x) - v \int_0^t f(s, x + v(s-t))\,ds.$$

(2) Как изменяется поток транспорта?

Отличие от предыдущ.: ? есть „плотность".

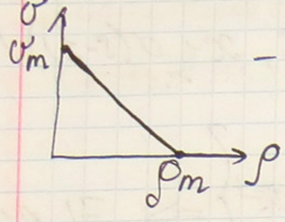
$\rho(t,x)$ – плотность машин.

Улица с односторон. движ.; ширины нет; обгонов нет.



$\rho_t + (v\rho)_x = 0$

$v = v(\rho)$, т.е. ур-е нелин.



— например, зависимость такая, $\frac{dv}{d\rho} < 0$,

v_m, ρ_m — макс. возможные скорость и плотность

$$v(\rho) = v_m \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$

Подст. в ур-е:

$$\rho_t + v_m \cdot \left(\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\right)_x = 0$$

$$\begin{cases} \rho_t + v_m \cdot \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)\rho_x = 0 \\ \rho(0, x) = g_0(x) \end{cases}$$ — нелин. ур-е :(

Попробуем метод характеристик.

$$\dot{x}(t) = v_m \left(1 - \frac{2\rho(t, x(t))}{\rho_m}\right) \qquad \cancel{\rho(x(t), t)} =$$

$$\rho(t, x(t)) = \rho(0, \underset{x_0}{\underbrace{x(0)}}) = g_0(x_0)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m \left(1 - \frac{2g_0(x_0)}{\rho_m}\right) \\ \dot{x}(0) = x_0 \end{cases}$$

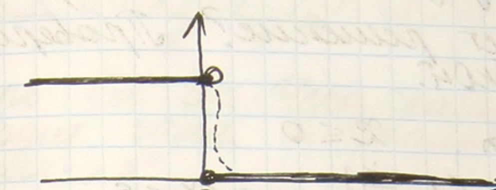
Это опять прямые, но угол наклона зависит от g_0.

Проблемы:
- прох. не через все точки;
- через одну могут проходить две хар. линии.

Част. случай

(„задача о включ. зел. цвета")

До светофора — есть машины; после — нет. Включился светофор (координата = 0).



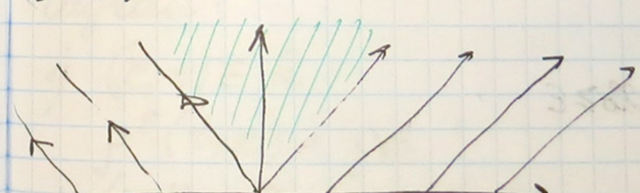
O (светофор)

$$g_0(x) = \begin{cases} \rho_m, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Можем её немножко сгладить, но все равно проблема остаётся.

Ур-е хар-тик:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad x_0 > 0 \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = -v_m \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad x_0 \le 0$$

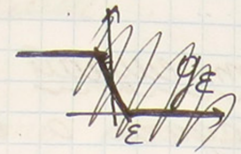


В зоне — характеристики не проходят.

Не знаем ничего про решения в ней.

Что же делать?
Апроксимируем ступень в ф-ции $g_0(x)$ линейной ф-цией.

$$g_0(x) \leftsquigarrow g_\varepsilon(x)$$

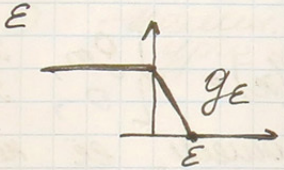


Устремим $\varepsilon \to 0$...
и т.д.

Хотим получить хоть какое-нибудь (а вдруг другая апрокс.?)

Почему будет решение? Проверим подстановкой.

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_m, & x \le 0 \\ \rho_m\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right), & 0 < x < \varepsilon \\ 0, & x \ge \varepsilon \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -v_m \\ x(0) = x_0, & x_0 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_m\left(1 - \frac{2\cancel{\rho_m}\left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right)}{\cancel{\rho_m}}\right) = -v_m\left(1 - \frac{2x_0}{\varepsilon}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in (0, \varepsilon)$$

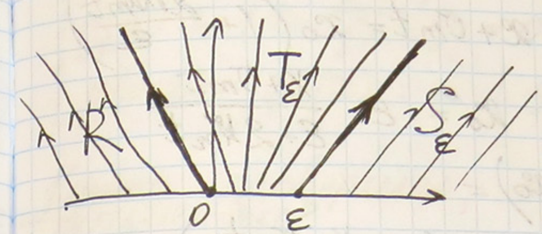
$$\begin{cases} \dot{x} = v_m \\ x(0) = x_0, & x_0 \ge \varepsilon \end{cases}$$

то есть 3 типа характеристик:

$x = x_0 - v_m t, \quad x_0 \le 0$

$x = x_0 - v_m\left(1 - \frac{2x_0}{\varepsilon}\right)t, \quad x_0 \in (0, \varepsilon)$

$x = x_0 + v_m t, \quad x_0 \ge \varepsilon$



Теперь все ок. Через каждую точку проходит одна, и только одна хар-ка.

ρ^ε - реш-е ε-задачи.

$\rho^\varepsilon(t, x) = g_\varepsilon(x_0)$, где x_0 - точка (единств.) т.ч. хар-ка начин-ся в $(x_0, 0)$ проходит через (x, t).

Разделение зон:
R и T - прямая $x = -v_m t$
T и S - пр. $x = \varepsilon + v_m t$

Случаи:

1) $(x, t) \in R$

$$\rho^\varepsilon(t, x) = \rho_m$$

2) $(x, t) \in S$

$$\rho^\varepsilon = 0$$

3) $(x,t)\in T$ $\qquad x(t) = x_0 - v_m\left(1-\frac{2x_0}{\varepsilon}\right)t$

$\cancel{\rho^\varepsilon}$

$$x = x_0 - v_m t + \frac{2v_m}{\varepsilon}t\cdot x_0$$

$$x_0 = \cancel{x+v_m t}$$

$$x + v_m t = x_0\left(1+\frac{2v_m t}{\varepsilon}\right)$$

$$x_0 = \varepsilon\,\frac{x+v_m t}{\varepsilon+2v_m t}$$

$$\rho^\varepsilon(t,x) = g_\varepsilon(x_0) =$$

$$=\rho_m\left(1-\frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \rho_m\left(1-\frac{x+v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right) =$$

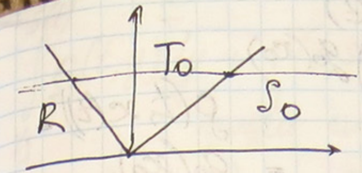
$$=\rho_m\left(\frac{\varepsilon+2v_m t-x-v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right) = \rho_m\left(\frac{\varepsilon-x+v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right)$$

Итого:

$$\rho^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} \rho_m, & (x,t)\in R \\ \rho_m\left(1-\frac{x+v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right), & (x,t)\in T_\varepsilon \\ 0, & (x,t)\in S_\varepsilon \end{cases}$$

$\varepsilon\to 0$

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \rho_m, & (x,t)\in R \\ \rho_m\left(1-\frac{x+v_m t}{2v_m t}\right), & (x,t)\in T_0 \\ 0, & (x,t)\in S_0 \end{cases}$$

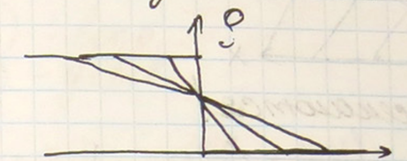


$$\rho_m\left(1-\frac{x+v_m t}{2v_m t}\right) = \frac{\rho_m}{2}\left(1-\frac{x}{v_m t}\right)$$

$$\begin{cases} \rho_t + v_m\left(1-\frac{2\rho}{\rho_m}\right)\rho_x = 0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \\ \rho(0,x) = g_0(x) := \begin{cases}\rho_m, & x\le 0\\ 0, & x>0\end{cases} \end{cases}$$

Нужно проверить, явл-ся ли решением?

График в кажд. момент времени.



волна разря-жения

Найденное нами решение - волна разрежения.

Формально это не решение (т.к. не C^1); но в каждом секторе (без границ) оно явл-ся решением.

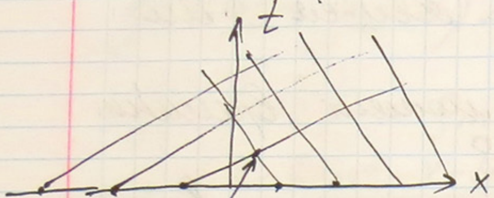
3 Формирование пробок.

$$g_0(x) := \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m, & x\le 0 \\ \rho_m, & x>0 \end{cases}$$

Строим хар-ки: $x(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_m \left(1 - \dfrac{2\cancel{\rho(t,x(t))}}{\rho_m}\right) g_0(x_0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \rho(t,x(t)) = g_0(x_0)$$

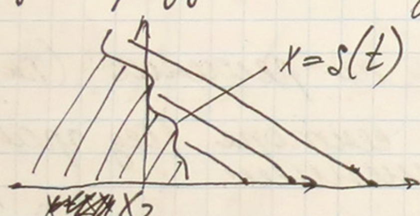
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{4} v_m \\ x(0) = x_0 < 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v_m; \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$



Они пересекаются!

два значения (скачок)

Будет разделение на зоны, в каждой из которых можно будет пользоваться определенными хар-ками.



$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(t,y)\,dy = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)} \rho(t,y)\,dy + \int_{s(t)}^{x_2} \rho(t,y)\,dy\right) = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

$$\int_{x_1}^{s(t)} \rho_t(t,y)\,dy + \rho^-(t,s(t))\cdot \dot{s}(t) + \int_{s(t)}^{x_2} \rho_t(t,y)\,dy - \rho^+(t,s(t))\cdot\dot{s}(t) = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

предел слева, т.к. скачок

т.к. нижний предел, поэтому минус.

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} \rho_t(t,y)\,dy}_{\to 0} + \rho^-(t,s(t))\cdot\dot{s}(t) - \rho^+(t,s(t))\cdot\dot{s}(t) = q(\rho(t,x_1)) - q(\rho(t,x_2))$$

$x_1 \to s(t)$ - возр.
$x_2 \to s(t)$ - убыв.

$$\dot{s}(t)\cdot\left(\rho^-(t,s(t)) - \rho^+(t,s(t))\right) = q(\rho^-(t,s(t))) - q(\rho^+(t,s(t)))$$

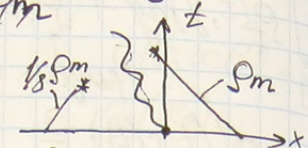
$$\dot{s}(t) = \frac{q(\rho)\big|_-^+}{\rho\big|_-^+} := \frac{q(\rho^+(t,s(t))) - q(\rho^-(t,s(t)))}{\rho^+(t,s(t)) - \rho^-(t,s(t))}$$

Требуем, чтобы разрыв был только в $s(t)$ (и нигде больше).

И накладываем усл-е на мн-во разрывов:

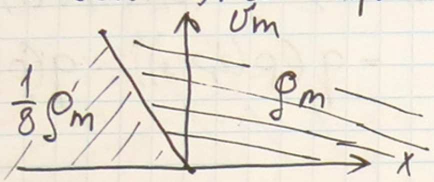
Условие Рэнкина - Гюгонио.

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \dfrac{-7/8\, v_m \frac{1}{8}\rho_m}{7/8\, \rho_m} + \dfrac{v_m}{\rho_m} = -\dfrac{1}{8} v_m \\ s(0) = 0 \end{cases}$$



$q(\rho^+) = \rho^+ v_m \left(1 - \frac{\rho^+}{\rho_m}\right) = 0$ справа – метод хар-к.
слева – тоже
$q(\rho^-) = \rho^- v_m \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho_m}\right) = \frac{7}{8}\rho_m v_m \cdot \frac{1}{8}\rho_m$

то есть это просто прямая



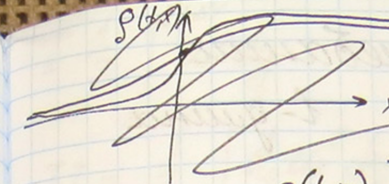
$$\rho(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m, & x < -\frac{1}{8} v_m t \\ \rho_m, & x > -\frac{1}{8} v_m t \end{cases}$$

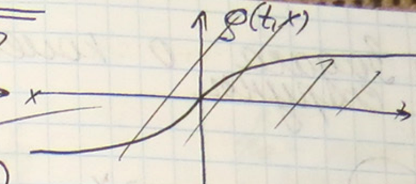
Возьмём теперь "красивые" начальные данные. Вдруг все будет хорошо.

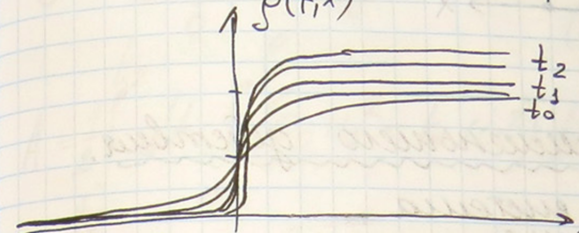
$\rho_0(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m \left(1 - \dfrac{2(\operatorname{arctg} x_0 + \frac{\pi}{2})}{\rho_m}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Но все равно две хар-ки могут пересечься.







И все равно возникнет ударная волна. Т.е. гладкие нач. данные ничего не гарантируют.

Упражнения.

1. $\begin{cases} c_t + v c_x = e^{-t} \sin t \\ c(0,x) = 0 \end{cases}$ $\quad v = const$

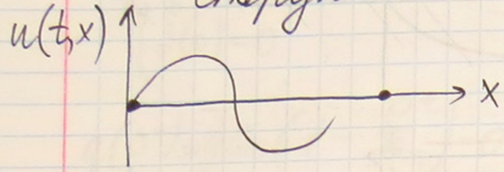
решить. (тупо подставить в ф-лу).

2. $\begin{cases} u_t + (1-2u) \cdot u_x = 0 \\ u(0,x) = \operatorname{arctg} x \end{cases}$

Найти реш-е до разрыва, и время этого разрыва.

④ Задача о колебании струны.

l - длина



Принцип наименьшего действия.

Есть мех. система
T - кин. энергия;
U - пот. эн.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\,dt \text{ - действие.}$$

$$A \longrightarrow extr$$

Напишем этот ф-ал для струны:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho_0 u_t^2(t,y)\,dy$$

ρ_0 - плотность на ед. длины.

Растяжение одного эл-та Δx:

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(t,y)}\,dy - \Delta x =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} \left(\sqrt{1+u_x^2} - 1\right) dy \approx \int_x^{x+\Delta x} \left(\cancel{1} + \frac{u_x^2}{2} - \cancel{1}\right) dy =$$

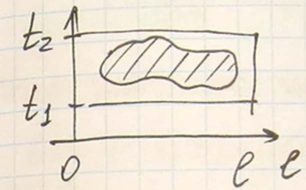
$$= \frac{1}{2}\int_x^{x+\Delta x} u_x^2\,dy$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k_0 u_x^2\,dy$$

k_0 - коэф-т растяжения (зав. от материала).

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \left(\rho_0 u_t^2 - k_0 u_x^2\right) dx$$

Ищем экстремали: $u \in C^2([t_1, t_2]\times[0, l])$
$h \in$ — " —
Компактный носитель (?)



$$\frac{d}{d\varepsilon} A(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$A(u+\varepsilon h) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \left(\rho_0 (u_t+\varepsilon h_t)^2 - k_0 (u_x + \varepsilon h_x)^2\right) dx =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon} A(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left(\rho_0 u_t h_t - k_0 u_x h_x\right) = 0$$

$$2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left(\rho_0(-u_{tt}) + k_0 u_{xx}\right) h(t,y)\,dt\,dy = 0$$

$$-\rho_0 u_{tt} + k_0 u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - \underbrace{\frac{k_0}{\rho_0}}_{= v^2} u_{xx} = 0$$

$$\boxed{u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0}$$ — волновое ур-е

$$\boxed{\Box u = 0}$$

$\Box$ - оператор Даламбера

Эванс
Владимиров } Литература!

Спросить: def компактного носителя

02.03.2013. /* Что было самое важное в прошлой лекции? */

$$\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} (*)$$
ищем: $u(t,x)$ | $t \geq 0$
$v \in \mathbb{R}$ - дано.
$u_0(\cdot)$ - дано.

Ⓣ Если $f \in C$, $f_x \in C$ и $u_0 \in C^1$, то (*) допускает ! реш-е:

$$\boxed{u(t,x) = u_0(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds}$$

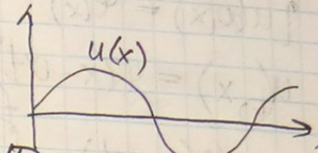
В частн., если $f = 0$, то

$$u = u_0(x - vt)$$

Как запомнить? $u \in C^1$
$\Rightarrow u_0 \in C^1$;
$f \in C$, $f_x \in C$

<u>Колебания струны</u>.

~~$u_{tt} - c^2 u$~~



$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases} (**)$$
$x \in \mathbb{R}$
$t \geq 0$
$v \in \mathbb{R}$
$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

волновое ур-е (ур-е колебания струны)

Как понимать нач. усл-я?

$$\lim_{t \to 0} u(t,x) = g(x) \qquad \lim_{t \to 0} u_t(t,x) = h(x)$$

Решим задачу явным образом. Двумя методами.

I метод.

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{(u_t + v u_x)}_{w} = 0$$

$$w_t - v w_x = 0$$ // а это уже было!

$w(0,x) := \psi(x)$

$$\begin{cases} w(0,x) = \psi(x) \\ w_t - v w_x = 0 \end{cases}$$

$W = \psi(x + v(t))$ — реш-е по теореме.

Вспомним, что такое W:

$$\begin{cases} u_t + v u_x = \psi(x+vt) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} \qquad u(0,x) := \varphi(x)$$

$$u(t,x) = \varphi(x-vt) + \int_0^t \psi(x - v(t-s) + vs)\,ds =$$

$$= \varphi(x-vt) + \int_0^t \psi(\underbrace{x - vt + 2vs}_{y})\,ds =$$

$$= \varphi(x-vt) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(y)\,dy$$

Должно удовл. нач. усл-ям
(как в д.у. только там мы подбирали const, а здесь — ф-ции).

$$u(0,x) = \boxed{\varphi(x) = g(x)}$$

$$u_t(0,x) = -v\varphi'(x-vt) + \frac{1}{2v}\Big(\psi(x+vt)\cancel{\cdot v} - \psi(x-vt)\cdot(-v)\Big)\Big|_{t=0} =$$

$$= -v\varphi'(x) + \psi(x) = h(x)$$

$$-vg'(x) + \psi(x) = h(x)$$

$$\boxed{\psi(x) = h(x) + vg'(x)}$$

Подставляем в ф-лу.

$$u(t,x) = \frac{g(x+vt) + g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} h(y)\,dy \quad (1)$$

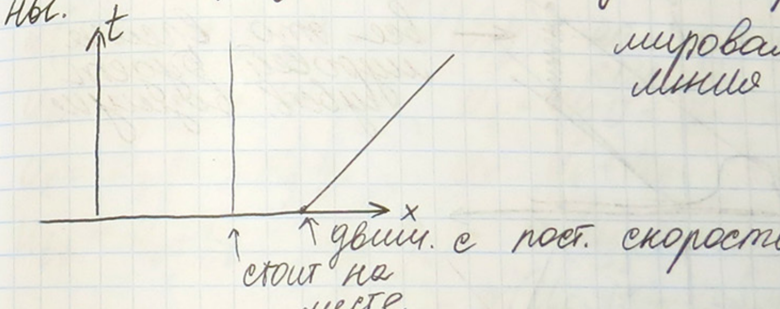
Ф-ла Даламбера

(Т) Если $g \in C^2(\mathbb{R})$ и $h \in C^1$, то зад. (**) имеет единств. решение, задав. ф-лой (1)

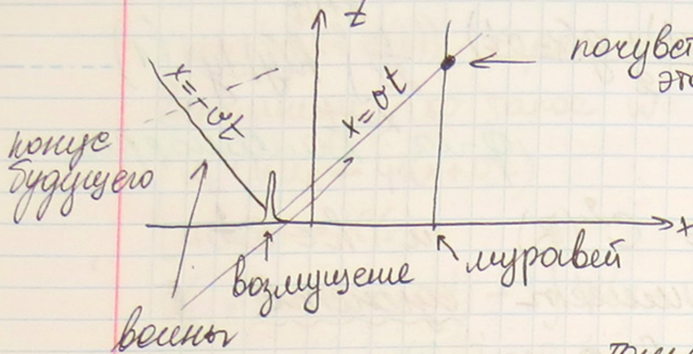
Единств. след. из ед-ви реш-я трансп. задачи.

Физ. смысл.

Волна разбегается в две стороны.



Сидит муравей. Струну возмутим в одной точке (очень мал. области). Когда мур. на струне почувствует возмущение?

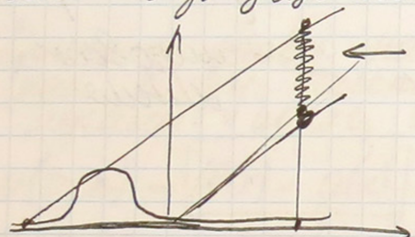


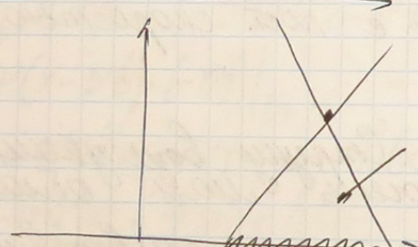
Если $h=0$, то почувствует $\overbrace{\text{и все}}^{\text{только на прямой}}$

Если $h\neq0$ то возмущ. чувствуется на всем конусе.

Волновой конус будущего.

Если возмущение не точечное?

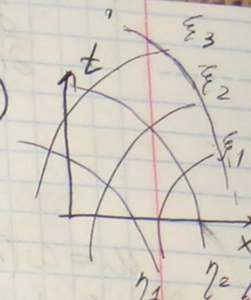




$\boxed{\text{II метод}}$ $\quad u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$

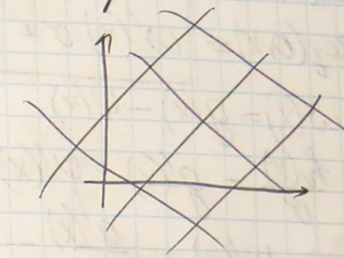
замена: $\xi = \xi(x,t)$, $\eta = \eta(x,t)$

т.е. переходим к криволинейной системе координат.



$\xi = x + vt$
$\eta = x - vt$

На самом деле это прямые:



Они наз-ся характеристиками исх. ур-я.

$\Rightarrow t = t(\xi,\eta)$
$x = x(\xi,\eta)$

$u(t(\xi,\eta), x(\xi,\eta)) = U(\xi,\eta)$, но мы будем писать $u(\xi,\eta)$

$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t$, $\quad u_t = u_\xi v + u_\eta (-v)$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$, $\quad u_x \; u_\xi + u_\eta$

$u_{tt} = u_{t\xi}\xi_t + u_{t\eta}\eta_t = v(u_{\xi\xi} v + u_{\eta\xi} v) -$
$- v(u_{\xi\eta} v - u_{\eta\eta} v)$

$u_{xx} = u_{x\xi}\xi_x + u_{x\eta}\eta_x = (u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$

Подставим:

$-4v^2 u_{\xi\eta} = 0 \qquad v \neq 0$

$u_{\xi\eta} = 0$

$\frac{\partial}{\partial \eta}(u_\xi) = 0 \Rightarrow u_\xi$ не зависит от η

$$u_\xi = \varphi(\xi)$$

$$u = \omega(\xi) + \psi(\eta)$$

$\uparrow$ const от η

$$u = \omega(x+vt) + \psi(x-vt)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(0,x) &= \omega(x) + \psi(x) = g(x) \\ u_t(0,x) &= \omega'(x)\cdot v + (-v)\psi'(x) = h(x) \end{aligned}}$$

$$\omega(x) = g(x) - \psi(x)$$

$$\frac{h(x)}{v} = g'(x) - \psi'(x) - \psi'(x)$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = \frac{g'(x)}{2} - \frac{h(x)}{2v}$$

$$\psi(x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{H(x)}{2v} + C$$

// $H(x)$ — первообр. ф-ции $h(x)$.

$$\omega(x) = g(x) - \psi(x) = = \frac{g(x)}{2} + \frac{H(x)}{2v} - C$$

$$u(t,x) = \omega(x+vt) + \psi(x-vt) =$$

$$= \cancel{\frac{g(x+vt)}{2} + 2v\, H(x+v}\quad = \frac{g(x+vt)+g(x-vt)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2v}\big(H(x+vt) - H(x-vt)\big) =$$

$$= \frac{g(x+vt)+g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} h(y)\,dy$$

Это ф. Даламбера. Совпало! :) ура :-)

Откуда же взялась замена?

<u>Мысли о лин. д.у. 2-го пор.</u>

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + $$
$$+ e(x,y)u_y + g(x,y)u = f(x,y)$$

$u = u(x,y)$ — неизв.

Ищем замену $\begin{array}{l}\xi = \xi(x,y)\\ \eta = \eta(x,y)\end{array}$.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$
$$u_{xx} = \ldots$$
$$u_{xy} = \ldots$$
$$u_{yy} = \ldots$$

Нужно: C^2 и обратимость.
$\Leftrightarrow$ якобиан замены переменных $\neq 0$.

$$J = \det\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y\end{pmatrix}$$

Мы все выразим и подставим.
Опять не меняем буквы от других аргументов.

Получим:

$$\underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{A} u_{\xi\xi} +$$

$$+ \underbrace{(a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y)}_{2B} u_{\xi\eta} +$$

$$+ \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{C} u_{\eta\eta} + \quad \dots = f$$

То, что с коэф a, b, c – наз-ся **главная часть**. Пытаемся её улучшить.

Хотим: $A = 0$ и $C = 0$.

$$a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2 = 0$$

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = a(\alpha - \Lambda^+\beta)(\alpha - \Lambda^-\beta)$$

т.е. $a\alpha^2 - a(\Lambda^+ + \Lambda^-)\alpha\beta + a\Lambda^+\Lambda^-\beta^2 =$

$= a(\alpha^2 - (\Lambda^+ + \Lambda^-)\alpha\beta + \Lambda^+\Lambda^-\beta^2) =$

$= a(\alpha^2 + \frac{2b}{a}\alpha\beta + \frac{c}{a}\beta^2)$

$$\begin{cases} \Lambda^+ + \Lambda^- = -\frac{2b}{a} \\ \Lambda^+ \cdot \Lambda^- = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$at^2 + 2bt + c = 0$ – Λ^+ и Λ^- корни этого ур-я.

2 вещ разл., когда

$D = b^2 - ac > 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Если $\det < 0$, то у нас 2 с.ч. разных знаков. В этом случае ур-е наз-ся **гиперболическим**.

$$a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2 = 0$$

$$a(\sigma_x - \Lambda^+\sigma_y)(\sigma_x - \Lambda^-\sigma_y) = 0$$

$\sigma_x - \Lambda^+\sigma_y = 0$ (1)

$\sigma_x - \Lambda^-\sigma_y = 0$ (2)

Теперь можем решать 2 транспорт. ур-я.

Если в кач-ве ξ взять реш-е (1), в кач-ве η взять реш-е (2), то исх. ур-е будет иметь вид:

$2Bu_{\xi\eta} + (\dots) = f$ – канонич. форма гипербол. ур-я

Если одно из с.ч. $= 0$, то ур-е – **параболическое**.

с.ч. $= 0 \Rightarrow \det = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow$ т.е. у кв. ур-я 1 корень:

$\Lambda^+ = \Lambda^-$. Одно тр. ур-е, его решение берем за ξ. В кач-ве η: любую C^2, обратимую ($J \neq 0$).

$Au_{\xi\xi} + (\dots) = f$ – канон. вид параболич. ур-я.

det > 0   2 с.ч., один. знак.

~~эллиптическое ур-е.~~

У кв. ур-я нет вещ. корней, но есть 2 компл. корня!

$\Lambda^+ = Re$

$\Lambda^- = Im$

Решаем ур-я (1) и (2). Получим ξ и η

$$Au_{\xi\xi} + Cu_{\eta\eta} + (\ldots) = f$$ — канон. вид эллиптического ур-я.

Примеры.

1° $u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(\cancel{x,t})(t,x)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -v^2 \end{pmatrix}$ с.ч.: $1, -v^2$

$v \neq 0 \Rightarrow$ гипер. ур-е

2° $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ — ур-е Пуассона.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ с.ч.: $1, 1$.

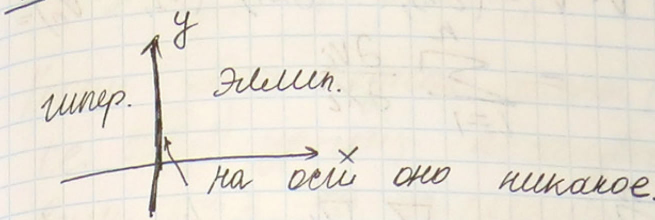
$\Rightarrow$ эллипт. ур-е

3° $u_t - a^2 u_{xx} = \cancel{f(t,x)}\, f(t,x)$

$\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ с.ч.: $0, -a^2$

$\Rightarrow$ парабол. ур-е.

4° $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ — ур-е Трикоми.



$u = u(x_1, x_2, \ldots x_n)$

$x_i = (x_1 \ldots x_n)$

$u = u(x)$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x)\, u = f$$

$\{a_{ij}\}$, аналогично про с.ч. и названия.
(сост. матрицу из этих коэф-ов).

Примеры

$u = (t, x)$, x — n-мерн.
u от $n+1$ перем.

1' $u_{tt} - v^2 \Delta u = f(t,x)$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \ldots$

$\nabla u := (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots u_{x_n})$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — вектор Набла дивергенция

$$\operatorname{div}\vec{V} = \nabla\cdot\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot(v_1, \dots v_n) =$$

вект. поле

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

У нас:

$$\Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \nabla\cdot\nabla u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -v^2 & & \\ & & -v^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -v^2 \end{pmatrix}$$ с.ч. $\neq 0$ разных знаков.

2' $u_t - a^2\Delta u = f(t,x)$ – ур-е теплопроводности

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -a^2 & \\ & & \ddots \\ & & & -a^2 \end{pmatrix}$$

3' $\Delta u = f(x)$

эллипт. ур-е

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + (\dots) = f$$

$$\xi = \xi(x)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} u_{\xi_i \xi_j} + (\dots) = F$$

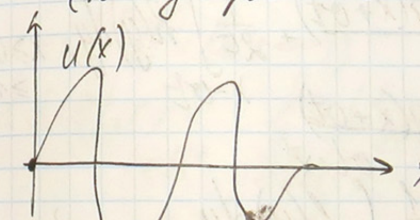
$$\tilde{a}_{ij}(\xi) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_\beta}$$

Хотим убить недиаг. члены (их будет $\frac{n(n-1)}{2}$), т.е. $\frac{n(n-1)}{2}$ ур-ий; n – неизвестных.
Если $n > 3$, то не решить.

Закончились мысли.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases} \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^{+},\ v\in\mathbb{R},\ v\neq 0$$

0) Вспомогат. задача (полуограниченная струна)



$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{– ор-е} \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x\geq 0 \\ -g(-x), & x<0 \end{cases} \qquad \tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x\geq 0 \\ -h(-x), & x<0 \end{cases}$$

Пусть u – реш-е задачи.

$$\tilde{u}(t,x)=\begin{cases} u(t,x), & x\geq 0 \\ -u(t,-x), & x<0 \end{cases}$$

Нет разрыва: $\boxed{h(0)=0;\ g(0)=0}$

$\tilde{u}_{tt},\ \tilde{u}_{xx}$

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}-v^2\tilde{u}_{xx}=0 \\ \tilde{u}(0,x)=\tilde{g}(x) \\ \tilde{u}_t(0,x)=\tilde{h}(x) \end{cases} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Такую задачу (на всём $\mathbb{R}$) умеем решать:

$$\tilde{u}(t,x)=\frac{\tilde{g}(x-vt)+\tilde{g}(x+vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\tilde{h}(y)dy$$

Нужно-то наше u (т.е. когда $x\geq 0$).

$$(***)\quad u(t,x)=\begin{cases} \dfrac{g(x-vt)+g(x+vt)}{2}+\dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_{x-vt}^{x+vt}h(y)dy, & x\geq vt\geq 0 \\ \dfrac{-g(vt-x)+g(x+vt)}{2}+\dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_{vt-x}^{vt+x}h(y)dy, & 0\leq x\leq vt \end{cases}$$

$(x\in\mathbb{R}^+)$

Т.е. 2 волны: одна бежит вправо, а вторая – влево и ударяется от стенки.

(T) Пусть $g\in C^2,\ h\in C^1$, $h(0)=g(0)=0$ $\Longrightarrow$ $\exists!\ u=u(t,x)$ определяемое ф-лой $(***)$

09.03.2013.

$$\begin{cases} u_{tt}-v^2\Delta u=0 \text{ – волн. ур-е} & u=u(t,x),\ x\in\mathbb{R} \\ u(0,x)=g(x) \\ u_t(0,x)=h(x) \end{cases}$$

Теперь: $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$ (важно: $n=3$, $n=2$)

~~...~~ Хотим привести к одномерному случаю.

$u\in C^2(\mathbb{R}^n\times[0,+\infty))$

$$\Delta\ U(x,t,r):=\fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,d\sigma(y)=$$

$r\in\mathbb{R}^+$

сфера — поверхность сферы

$$\fint_\Omega f(x)dx=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx$$

$$=\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,d\sigma(y)$$

$$\omega_n=\begin{cases}\pi, & n=2\\ \frac{4}{3}\pi, & n=3\\ \dots, & \end{cases} \text{ – объём.}$$

$\omega_n = |B_1(0)| \subset\mathbb{R}^n$

$|\partial B_1(0)|=n\cdot\omega_n$ – площ. пов-ти

$|B_r(0)| = \omega_n \cdot r^n$

$|\partial B_r(0)| = n\omega_n r^{n-1}$ (т.е. производная)

$|B_r(0)| = \int\limits_0^r |\partial B_s(0)| ds$

(1) $$U = \frac{1}{n\omega_n \cancel{r^{n-1}}} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(t, x+rz) \cancel{r^{n-1}} d\sigma(z)$$

$y = x + rz$

$z \in \partial B_1(0)$

$y \in \partial B_r(x)$

(2) $$G(x, \cancel{t}, r) := \fint\limits_{\partial B_r(x)} g(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_1(0)} g(x+rz) d\sigma(z)$$

(3) $$H(x; r) := \fint\limits_{\partial B_r(x)} h(y) d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_1(0)} h(x+rz) d\sigma(z)$$

Λ $U \in C^2$

$$U_{tt} - c^2\left(U_{rr} + \frac{(n-1)}{r} U_r\right) = 0$$

$\forall (t, r) \in (0; +\infty) \times (0; +\infty)$

Док-во.

U_r в ф-ле 1 дифф. по t дважды (попадет под интеграл).

$$U_r = \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_1(0)} \nabla u(t, x+rz) \cdot z \, d\sigma(z) =$$

Объяснение для $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial r} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(t, x_1 + rz_1, x_2 + rz_2) \, d\sigma(z_1, z_2) =$$

$$= \int\limits_{\partial B_1(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\dots) \cdot z_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\dots) \cdot z_2 \right) d\sigma(z_1, z_2)$$

$$\nabla u(\dots) \cdot (z_1, z_2)$$

$$= \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial n}(t, x+rz) \, d\sigma z = \text{(}n\text{ – нормаль)}$$

$z = \frac{y-x}{r}$

~~т. Гаусса-Остроград.~~ $$\cancel{\frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{B_1(0)} \Delta u(t, \underbrace{x+rz}_{y}) dz} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n\omega_n r^n} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(t, y) dy}$$

$$= \frac{1}{\cancel{r^{n-1}} n\omega_n} \int\limits_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(t,y)\, d\sigma(y) = $$ (r^{n-1} вылезло из $d\sigma$).

$y = x + rz$
$z = \frac{y-x}{r}$

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(t,y)\, d\sigma(y) =$$

$$\overset{\text{т. Гаусса-Остроград.}}{=} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int\limits_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy =$$

$$= \frac{r}{n} \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy$$

Упр.! Продифф. U по r второй раз, доказать, что $U \in C^2$.

$$U_r = \frac{r}{n} \fint\limits_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy =$$

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = 0$$

$$= \frac{r}{n} \frac{1}{a^2} \fint\limits_{B_r(x)} u_{tt}(t,y)\, dy$$

$$r^{n-1} U_r = \frac{r^n}{n} \frac{1}{a^2} \frac{1}{\omega_n \cancel{r^n}} \int\limits_{B_r(x)} u_{tt}\, dy =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{n \cdot \omega_n} \int\limits_0^r \rho^{n-1} d\rho \int\limits_{\partial B_1(0)} u_{tt}(t, x + \rho z)\, d\sigma(z).$$

(ввели полярные координаты)

$$(r^{n-1} U_r)_r =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{n\omega_n} r^{n-1} \int\limits_{\partial B_1(0)} u_{tt}(t, x + rz)\, d\sigma(z) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{a^2} \frac{1}{n\omega_n} r^{n-1} \int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\, d\sigma(y)}$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{1}{n\omega_n} \int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\underset{|\partial B_r(x)|}{\underset{\shortparallel}{n\omega_n r^{n-1}}}} r^{n-1} \int \ldots =$$

$$= \frac{r^{n-1}}{a^2} \fint\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\, d\sigma(y) =$$

$$a^2 (r^{n-1} U_r)_r = r^{n-1} U_{tt}$$

$$a^2 \left((n-1) \cancel{r^{(n-2)}} r^{-1} U_r + \cancel{r^{n-1}} U_{rr} \right) = \cancel{r^{n-1}} U_{tt}$$

$$\boxed{a^2 \left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r \right) = U_{tt}}$$ — ур-е Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Найти U_{rr} и доказать ф-лу!

$~~U_{tt} =~~$

ч.т.д.

$\boxed{n=3}$

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

$$U(x,t,r): \begin{cases} U_{tt} - a^2\left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r\right) = 0 \\ U|_{t=0} = G \\ U_t|_{t=0} = H \end{cases}$$

$\tilde{U}(t,r) := r\,U(t,r)$ (x-фиксированный)

$\tilde{G}(t,r) := r\,G(t,r)$

$\tilde{H}(t,r) := r\,H(t,r)$

$$\tilde{U}_{rr} = (rU)_{rr} = (U + rU_r)_r = U_r + U_r + rU_{rr} =$$
$$= 2U_r + rU_{rr} = r\Big(\underbrace{U_{rr} + \frac{2}{r}U_r}_{\text{радиальный лапласиан } (n=3)}\Big) =$$
$$= r\left(\frac{U_{tt}}{a^2}\right) = \frac{\tilde{U}_{tt}}{a^2}$$

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - a^2 \tilde{U}_{rr} = 0 \\ \tilde{U}|_{t=0} = \tilde{G} \\ \tilde{U}_t|_{t=0} = \tilde{H} \end{cases} \qquad \tilde{U}|_{r=0} = 0$$

– т.е. удовл. одномерному волновому ур-ю.

А это задача о колеб. полуогр. струны.

$$\tilde U(t,r) = \cancel{\frac{\tilde G(r+vt) - \tilde G(r-vt)}{2}} +$$

$$\cancel{+\int_{r-vt}^{r+vt}}$$

$$\tilde U(t,r) = 1)\ \frac{\tilde G(r+vt) - \tilde G(vt-r)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{vt-r}^{vt+r} \tilde H(y)\,dy \quad 0 \le r \le vt$$

$$2)\ \frac{\tilde G(\quad) + \tilde G(r - vt)}{\dots} + \dots \quad 0 \le vt \le r$$

Теперь x перестает быть фикс. Делим на r, слева пропадает $\sim$.

$$U(x,t,r) = \int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,d\sigma(y)$$

$$\lim_{r\to 0+} U(x,t,r) = u(t,x)$$

Случай 2) пропадает, т.к. $r \to 0+$. Получим:

$$U(t,r) = \frac{\tilde G(r+vt) - \tilde G(vt-r)}{2r} + \frac{1}{2v}\int_{vt-r}^{vt+r} \tilde H(y)\,dy$$

$$U(t,r) = \frac{rG(r+vt) - G(vt-r)r}{2r} + \frac{1}{2vr}\int_{vt-r}^{vt+r} \rho H(\rho)\,d\rho$$

Устремляем $r \to 0$ (Упр!)

$$\cancel{u(t,x) = vt\int_{\partial B(x,vt)} h(y)\,d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(t\int_{\partial B(x,vt)} g(y)\,d\sigma(y)\Big)}$$

$$\frac{\tilde U(x,t,r)}{r} = \Big(\tilde G(r+vt) - \tilde G(vt-r)\Big)\frac{1}{r} + \frac{1}{2vr}\int_{vt+r}^{vt+r} \tilde H(\rho)\,d\rho$$

$$\xrightarrow[r\to 0]{} \tilde G'(vt) + \frac{1}{v}\tilde H(vt) =$$

$$\# \ / \ \tilde G'(r) = rG'(r) + G(r)$$

$$= vt\,G'(vt) + G(vt) + \frac{1}{v}H(vt)\cdot vt =$$

$$= tH(vt) + vt\,G'(vt) + G(vt)$$

$$u(x,t) = t\int_{\partial B_{vt}(x)} h(y)\,d\sigma(y) + \int_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y) +$$

$$+\frac{\cancel{v}t}{\cancel{v}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{1}{4\pi v^2 t^2}}_{\frac{1}{\text{площадь сферы}}}\int_{\partial B_1(0)} g(x+vt\cdot z)\,d\sigma(z)\cdot\cancel{4\pi v^2 t^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\partial B_1(0)} g(x+vtz)\,d\sigma(z) =$$

$$= v\int_{\partial B_1(0)} \nabla g(\overbrace{x+vtz}^{y})\cdot z\,d\sigma(z) = \cancel{v}\int_{\partial B_{vt}(x)} \nabla g(y)\cdot\frac{y-x}{\cancel{v}t}\,d\sigma(y)$$

Подставим в большую ф-лу:

(*) $$u(t,x) = \int_{\partial B_{vt}(x)} \left(th(y)+g(y)+\nabla g(y)\cdot\frac{(y-x)}{t}t\right)d\sigma(y)$$

<u>Итого</u>: Решили задачу:

(**) $$\begin{cases} u_{tt}-v^2\Delta u=0 & \text{в } \mathbb{R}^3\times(0,+\infty)\\ u|_{t=0}=g \\ u_t|_{t=0}=h\end{cases}$$

(T) Если $h\in C(\mathbb{R}^3)$, $g\in C^1(\mathbb{R}^3)$ $\Rightarrow$ (*) дает единств. реш-е задачи (**).

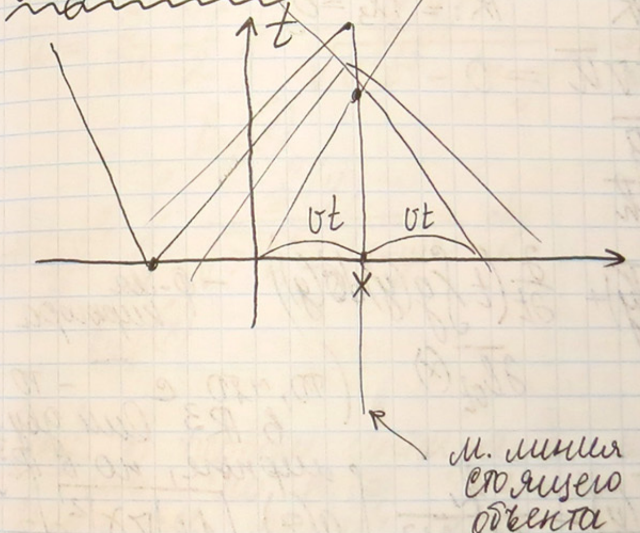
$$\boxed{u(t,x) = t\int_{\partial B_{vt}(x)} h(y)\,d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y)\right)}$$

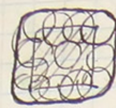
— ф-а Кирхгофа.

(!): пусть есть реш-е. Проводим рассуждения, тогда оно выглядит так. $\Rightarrow$ единств.

<u>Физ. смысл</u>:

$|x|^2 = v^2t^2$



 ← дойдет возмущ. за время t.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \Delta u = 0 \qquad \text{в } \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

$u = u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$ считаем, что зависит от нек. третьей переменной (const).

$$\bar{u}(t, x_1, x_2, x_3) := u(t, x_1, x_2)$$
$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2)$$
$$\bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^2 := \{x_3 = 0\}$$

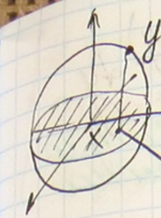
$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - v^2 \nabla \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{g} \\ \bar{u}_t|_{t=0} = \bar{h} \end{cases}$$

$$\bar{u} = \int_{\partial B_{vt}(x)} \bar{h}(y)\, d\bar{\sigma}(y) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(t \int_{\partial B_{vt}(x)} \bar{g}(y)\, d\bar{\sigma}(y)\Big)$$ — ф-ла Кирхгофа.

это в $\mathbb{R}^3$ → $\partial B_{vt}(x)$

(то, что с $\bar{\ }$ — то в $\mathbb{R}^3$. Они двумерные, но в $\mathbb{R}^3$)

$$\int_{\partial B_{vt}(x)} \bar{g}(y)\, d\bar{\sigma}(y) = \frac{2}{4\pi v^2 t^2} \int_{B_{vt}(x)} g(z) \sqrt{1 + |\nabla \gamma|^2}\, dz$$



$B_{vt}(x)$ — круг.

γ: $\gamma^2 + |x - z|^2 = v^2 t^2$

$$\gamma = \sqrt{v^2 t^2 - |x - z|^2}$$

(интеграл $*2$, т.к. две полусферы).

$$\int_{\partial B_{vt}(x)} \bar{g}(y)\, d\bar{\sigma}(y) = \frac{1}{2\pi v^2 t^2} \int_{B_{vt}(x)} g(y) \sqrt{1 + |\nabla \gamma|^2(y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi v^2 t^2} \int_{B_{vt}(x)} g(y) \frac{vt}{\sqrt{v^2 t^2 - |x - y|^2}}\, dy$$

$$\bar{u} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{vt^2}{2} \int_{B_{vt}(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{v^2 t^2 - |x - y|^2}}\, dy +$$

$$+ \frac{vt^2}{2} \int_{B_{vt}(x)} \frac{h(y)}{\sqrt{v^2 t^2 - |x - y|^2}}\, dy$$

Упр! в первом интеграле перейти к инт. по $B_1(0)$: $y = x + vtz$. Дифф-ем, получ. инт, обратно к $B_{vt}(x)$ (для единообразия).

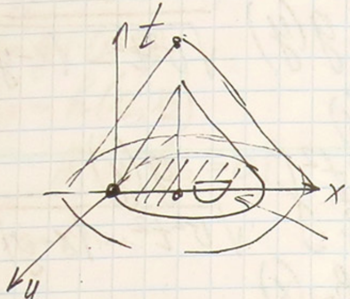
$$u(t,x) = \frac{v}{2}\int\limits_{B_{vt}(x)} \frac{tg(y)+t^2h(y)+t\nabla g(x\cdot y)}{\sqrt{v^2t^2-|x\cdot y|^2}}\,dy$$ – формула Пуассона

! Проверить !

(T) Если $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$
$h\in C^{*}(\mathbb{R}^2)$

$\Longrightarrow$ $u(t,x)$ зад. ф-лой, явл-ся ! реш-ем з. Коши в двумерном случае.

Физ. смысл.



интегрируем по кругу

Передний фронт волны пройдёт, а заднего у него нет.
Т.е. рыбак начнет слышать, но не перестанет.

В $\mathbb{R}^3$ волна цилиндрическая.
В чётных размерностях заднего фронта нет.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = f(t,x) \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$ – неоднородное волновое ур-е.

Есть 2 способа.

(1) $\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = f \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$ – однород. нач. усл-я

(2) $\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$ – усл-я неоднор; ур-е – однород.

Утв. Если u_1 – реш.е з. (1); а u_2 – реш-е з. (2), $\Longrightarrow$

u_1+u_2 – реш-е исход. задачи.

Док-во.

Подставим u_1+u_2 в исход.

ч.т.д.

Это принцип суперпозиции.

Задачу (2) решать умеем. Зад. (1):

(1)' – ~~u_{tt}~~ $u = U^s(t,x)$, $s>0$ – параметр.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \Delta u = 0 \\ u\big|_{t=s} = 0 \\ u_t\big|_{t=s} = f(s,x) \end{cases}$$

Утв. $\tilde{u}(t,x) := \int\limits_0^t u^s(t,x)\,ds$ – реш. 1

Ф-ла Дюамеля

Док-во.

$\tilde{u}\big|_{t=0} = 0$ – удовл. 2 ур-ю

$$\tilde{u}_t = \underbrace{u^t(t,x)}_{=0} + \int\limits_0^t \frac{\partial u^s}{\partial t}(t,x)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\partial u^s}{\partial t}(t,x)\,ds$$

$$\tilde{u}_{tt} = u^t_t(t,x) + \int\limits_0^t u^s_{tt}(t,x)\,ds =$$

$$= f(x,t) + v^2 \int\limits_0^t \Delta u^s\,ds =$$

$$= v^2 \Delta \tilde{u} = v^2 \int\limits_0^t \Delta u^s\,ds$$

$$\tilde{u}_{tt} - v^2 \Delta \tilde{u} = f(x,t)$$ – удовл. 1 ур-ю

$\tilde{u}_t\big|_{t=0} = 0$ – удовл. 3

ч.т.д.

Сделать: соединить утв-я; записать ф-лы для $n = 1, 2, 3$. Упр.

Вывод: Мы научились решать з. Коши для волнового ур-я во всем пространстве.

Не умеем решать:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – огр.

$u_{tt} - v^2 \Delta u = f$ – в Ω

$u(t,x) = 0$, если $x \in \partial\Omega$

$u\big|_{t=0} = g$

$u_t\big|_{t=0} = h$

Упр. Ω – огр. область с гл. границей. $\exists!$ реш-е такой задачи (док-ать).

План: д-ть единств. при $f = g = h = 0$

Пусть u_1, u_2 – решения.

$u := u_1 - u_2$

u удовл. задаче с нулями.

Если $\exists!$, то $u_1 \equiv u_2$. (т.к. $u \equiv 0$).

Как д-ть для нулей?

Домнож. на u_t и интегр. по Ω.

$$\int\limits_\Omega u_t u_{tt}\,dx - v^2 \int\limits_\Omega u_t \Delta u\,dx = 0$$

$\frac{1}{2}\int (u_t^2)_t$ - (по частям)

Решение послед. ур-я

16.03.2013.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f & t>0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u\big|_{t=0} = g \\ u_t\big|_{t=0} = h \end{cases}$$

Хотим д-ть!

1. Нужно д-ть для $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, $h \equiv 0$.

$\mathcal{L}u = w$
мин. оп.

$$\left.\begin{matrix} \mathcal{L}u_1 = w \\ \mathcal{L}u_2 = w \end{matrix}\right| \Rightarrow \mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2 = \mathcal{L}(u_1 - u_2) = 0 \quad \Rightarrow u_1 = u_2$$

Если $\mathcal{L}u = 0 \to u = 0$

т.е. можем д-ть для однородной задачи.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0 \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0$$

первое $\cdot u_t$:

$$u_t \cdot u_{tt} - a^2 \cdot u_t \Delta u = 0$$

$$\int_\Omega u_t \cdot u_{tt}\,dx - a^2 \int_\Omega u_t \Delta u\,dx = 0$$

по частям:

$$\int_\Omega u_t \cdot u_{tt}\,dx + a^2 \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u\,dx = 0 \text{ (гранич. усл-е исчезло)}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2} u_t^2\,dx + a^2 \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx = 0$$

т.к.: $\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 = \frac{d}{dt}\nabla u \cdot \nabla u = 2\nabla u \cdot \nabla u_t$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2\,dx + \frac{a^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2\,dx + \frac{a^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = c$$

Не зав. от $t \Rightarrow = c$ даже при $t=0$.

при $t=0$ оба слаг. $=0 \Rightarrow c=0$.

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2\,dx + \frac{a^2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0$$

оба слаг. полож. $\Rightarrow$ каждый $\int = 0$

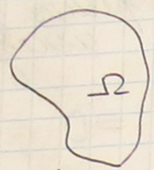
квадраты $\Rightarrow$ под интегралом $=0$.

$u_t = 0 \quad \nabla u = 0 \quad \Rightarrow u = \text{const} \Rightarrow u = 0$.

<u>Важно</u>! Нужно обосновать переходы!

Почему мы могли интегрировать по частям?

Распространение тепла в пространстве.



Есть область, она нагревается.
Хотим узнать, как?

$u(t,x)$ – температура. $x\in\mathbb{R}^n$

Δ мал. шарик B.
$q=q(t,x)$ – плотность источников тепл. $[Дж/м^3]$

$$\int_B q\,dx = \int_{\partial B} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma =$$

$q\,dx$ – получено теплоты (~~или отдано~~)

$\vec{F}$ – поток

$\vec{n}$ – нормаль внешняя

$d\sigma$ – мера границы

$\int_{\partial B} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ – теплота, отданная в наружу

$$= \int_B \underbrace{\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}}_{\text{измен. температуры}}\cdot c\cdot\rho$$

$c\cdot\rho$ – теплоёмкость

$$\int_B q\,dx - \int_{\partial B} F\cdot n\,d\sigma = \int_B c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

это всё в единицу времени.

$$\int_B q\,dx - \int_B \operatorname{div} F\,dx = \int_B c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dx$$

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} F + q}$$ – ур-е теплопроводности

Закон Фурье: $F=-\lambda\nabla u$ λ – коэф. теплопровод.

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\lambda\nabla u + q$$

$$\operatorname{div}\nabla u = \nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$$

$$\boxed{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\lambda\nabla u + q} \quad (*)$$

Если $\lambda = const$, то

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda\Delta u + q$$

Если еще и $q=0$, то: $\left[\frac{K}{c} = \frac{м^2}{c}\cdot\frac{K}{м^2}\right]$

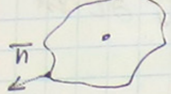
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho}\Delta u, \quad \frac{\lambda}{c\rho} = a^2$$ – температуропроводность

$F = -\lambda\nabla u$

λ еще может быть матрицей

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$ — это транспортное ур-е.



В каждой точке внутри вып-ся ур-е.

$x\in\Omega,\ t>0$

А что на границе?

(1) 1) $u(t,x)=v(x)$, $x\in\partial\Omega$ — I краевое усл-е (т.е. на границе поддерж. постоянная темп.)

(2) 2) $\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = w(x)$ — II краевое усл-е (т.е. область изолирована).

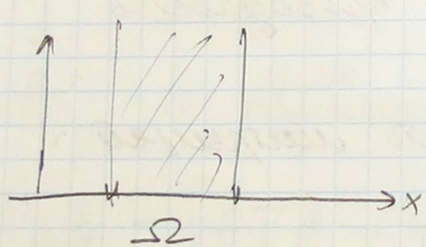
$$\left.\begin{array}{l} u(0,x)=\varphi(x) \\ \cancel{u_t(0,x)=\psi(x)} \end{array}\right\} (3)$$

(*), 1), 3) — нач. краевая з. ур-я теплопр. с усл-ем Дирихле

(*), 2), 3) — — " — с усл-ем Неймана

Решаем на области:

$\Omega\times(0,+\infty)$ — цилиндр.



$(\mathbb{R}^n)$

Реш-е — ф-я, кот. имеет все необх. производные, они все непр. в цилиндре вплоть до границы. Сама ф-я непр. до границы.

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u & \text{в } \Omega \quad \Omega\subset\mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = v \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

огр., откр.

(1) — кр.з.;
возьмём $q=0$
возьмём $a=1$.

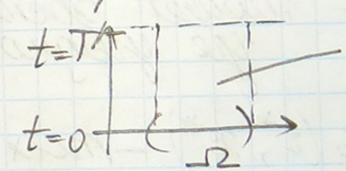
Упр. Пусть известно реш. при $a=1$. Хотим при $a\neq 1$.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u|_{\partial\Omega} = v^2 \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

Ω — огр!

Т (принцип макс. для ур-я теплопроводности). Пусть u — реш-е в $\Omega\times(0,T)$, $T>0$

$u_t=\Delta u$



$Q_T = \Omega\times(0,T)$ огр., откр. цилиндр.

Производные $\exists$ и непр.

Не дости макс. ни внутри, ни на верх. грани.

Сл-д. (принцип минимума)

Мин. ~~не~~ может достиг. только на основании и бок. поверхностях.

Док-во (след)

взять $-u$, применить теорему

ч.т.д

Док-во (теоремы)

$V_\varepsilon(t,x) := u(t,x) + \varepsilon |x|^2$

$\mathcal{L}u := u_t - \Delta u$

$$\mathcal{L}V_\varepsilon = \underbrace{\mathcal{L}u}_{=0} + \varepsilon \mathcal{L}|x|^2 = -\varepsilon\Delta|x|^2 = -\varepsilon\cdot 2n$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$\Delta|x^2| = 2 + \dots + 2 = 2n$$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{L}V_\varepsilon < 0.$

$V_\varepsilon \in C(\overline{Q_T})$ — может достиг. max где угодно.

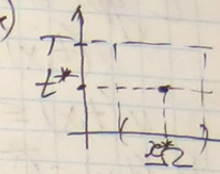
1) x^*, t^* $\quad V_\varepsilon(t^*, x^*)$ — max

$(x^*, t^*) \in Q_T$

2) (x^*, t^*), $\quad x^* \in Q_T$, $t^* = T$ (т.е. верх. грань)

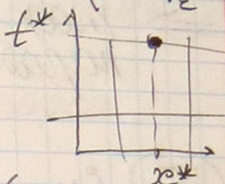
1) $\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t}(t^*, x^*) = 0$ (т.к. т. max)

$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_i^2}(t^*, x^*) < 0$ (т.к. max)



$\Rightarrow \Delta V_\varepsilon(t^*, x^*) \le 0$ (т.к. сумма вторых произв-ных)

$\mathcal{L}V_\varepsilon = V_{\varepsilon t} - \Delta V_\varepsilon \ge 0$ ($\mathcal{L}V_\varepsilon > 0$?!)



2) — u — по ∂x_i^2

$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t}(t^*, x^*) \ge 0$

$\mathcal{L}V_\varepsilon = V_{\varepsilon t} - \Delta V_\varepsilon \ge 0$ (Но! $\mathcal{L}V_\varepsilon > 0$?!)

Этого быть не может, значит max достиг. на бок. или ниж. стенках.

$\sqcup$ — S_T — (параболич. граница)

$V_\varepsilon \in C(\overline{Q_T})$

$$\underset{(t,x)\in\overline{Q_T}}{V_\varepsilon(t,x)} \le \max_{Q_T} V_\varepsilon = \max_{S_T} V_\varepsilon = \max_{S_T}(u + \varepsilon|x|^2) \le \max_{S_T} u + \varepsilon R^2$$

С др. стороны:

$u(t,x) \le v_\varepsilon(t,x)$

$u(t,x) \le \max\limits_{S_T} u + \varepsilon R^2$

$\forall (t,x) \in \overline{Q_T}$

$\varepsilon \longrightarrow 0$

$u(t,x) \le \max\limits_{S_T} u$

$\Rightarrow$ max и min достиг. на парабол. границе цилиндра

ч.т.д.

Т (единств.)
$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + q \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = \nu \end{cases}$$

Решение !

Док-во.

Пусть u_1, u_2 $\quad u := u_1 - u_2$

и удовл.:
$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

max и min u достиг на пар. гр.

ф-я на ней равна $= 0$

$0 \le u \le 0 \Rightarrow u \equiv 0$

ч.т.д.

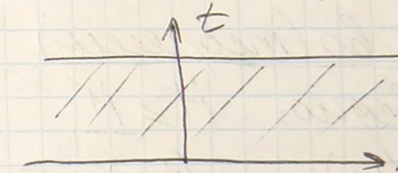
В д-ве важно, что Ω-огр!

Т (принцип макс.)

u достиг. макс. на бок. основаниях или на нижн. крышке. ~~только~~.

↑правильная формулировка.

$\Omega = \mathbb{R}^n$
$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + q \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$



Т. единств. неверна в этом случае.

Но! Если налож. усл-е:

$\forall T \quad |u(t,x)| \le C(T) \quad \forall t \in [0,T]$

то Т.ед. вып-ся.

Т (принцип max)

u – реш-е ур-я:

$u_t = a^2 \Delta u$ в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$

Удовл. усл-ю; усл-ю про глад. и производные.

Тогда: $\overline{M} = \sup\limits_{Q_T} u = \sup\limits_{t=0} u = \underline{M}$

След. $\inf\limits_{Q_T} u = \inf\limits_{t=0} u$

Упр. Можно не писать замык-е $\overline{Q}_T$

Док-во (след.)

берём $-u$.

ч.т.д

Док-во (теоремы)

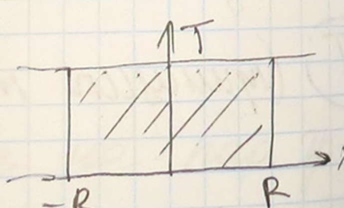
Известно: $\overline{M} \geq \underline{M}$.

$V_\varepsilon(t,x) := u(t,x) - \varepsilon(2nt + |x|^2)$

$$\mathcal{L}_{V_\varepsilon} = \underbrace{\mathcal{L}u}_{=0} - \varepsilon \mathcal{L}(2nt + |x|^2) = -\varepsilon(2n - \Delta|x|^2) = -\varepsilon(2n-2n) = 0$$

// $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta u$.

$Q_{R,T} = B_R(0) \times (0,T)$



В больш. цил.: $\mathcal{L}_{V_\varepsilon} = 0 \Rightarrow$ в мал. цил. тоже.

$V_\varepsilon(0,x)$ (нижн. осн-е) $= u(0,x) - \varepsilon|x|^2 \leq$

$\leq u(0,x) \leq \underline{M}$ использ. доп. усл-е!

$V_\varepsilon(t,x)\big|_{|x|=R} = u(t,x)\big|_{|x|=R} - \varepsilon R^2 \leq$

$\leq \overline{M} - \varepsilon R^2 \leq \underline{M}$

выберем R настолько большим ($\overline{R}$)

$\forall R \geq \overline{R}(\varepsilon)$, если $\varepsilon \to 0$, то $\overline{R} \to +\infty$

$V_\varepsilon(t,x) \leq \underline{M}$ $\quad \forall t \in [0,T]$

$|x| \leq R$, где $R \geq \overline{R}(\varepsilon)$

$V_\varepsilon = u - \varepsilon(2nt + |x|^2) \leq \underline{M}$

$u(t,x) \leq \underline{M} + \varepsilon(2nt + |x|^2) \longrightarrow 0$

фикс. t, x, устремим $\varepsilon \to 0$.

т.е. $u(t,x) \leq \underline{M}$

ч.т.д.

(Т) (единств.) реш-е!

Док-во

Аналогично: u_1, u_2 $\quad u := u_1 - u_2$

u- реш-е ур-я:

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

Удовл. усл-ю; усл-е про глад. и производные.

Тогда: $\overline{M} = \sup\limits_{Q_T} u = \sup\limits_{t=0} u = \underline{M}$

След. $\inf\limits_{Q_T} u = \inf\limits_{t=0} u$

Упр. Можно не писать замык-е $\overline{Q_T}$

Док-во (след.)

берём $-u$.

ч.т.д.

Док-во (теоремы)

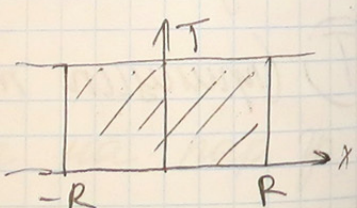
Известно: $\overline{M} \geq \underline{M}$.

$$V_\varepsilon(t,x) := u(t,x) - \varepsilon\left(2nt + |x|^2\right)$$

$$L_{V_\varepsilon} = \underbrace{Lu}_{=0} - \varepsilon L(2at + |x|^2) = -\varepsilon\left(2n - \Delta |x|^2\right) = -\varepsilon(2n - 2n) = 0$$

// $L = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta u$.

$$Q_{R,T} = B_R(0) \times (0, T)$$



В больш. цил.: $L_{V_\varepsilon} = 0 \Rightarrow$ в мал. цил. тоже.

$V_\varepsilon(0,x)$ (нижн. осн-е) $= u(0,x) - \varepsilon |x|^2 \leq$

$\leq u(0,x) \leq \underline{M}$ использ. доп. усл-е!

$V_\varepsilon(t,x)\big|_{|x|=R} = u(t,x)\big|_{|x|=R} - \varepsilon R^2 \leq$

$\leq \overline{M} - \varepsilon R^2 \leq \underline{M}$

↑выберем R настолько большим ($\overline{R}$)

$\forall R \geq \overline{R}(\varepsilon)$, если $\varepsilon \to 0$, то $\overline{R} \to +\infty$

$V_\varepsilon(t,x) \leq \underline{M}$ $\quad \forall t \in [0, T]$

$|x| \leq R$, где $R \geq \overline{R}(\varepsilon)$

$$V_\varepsilon = u - \varepsilon\left(2nt + |x|^2\right) \leq \underline{M}$$

$$u(t,x) \leq \underline{M} + \varepsilon\left(2nt + |x|^2\right) \longrightarrow 0$$

фикс. t, x, устремим $\varepsilon \to 0$.

т.е. $u(t,x) \leq \underline{M}$

ч.т.д.

Т (единств.)

реш-е!

Док-во

Аналогично: u_1, u_2 $\quad u := u_1 - u_2$

$\mathcal{L}u = \mathcal{L}u_1 - \mathcal{L}u_2 = 0$

ним. осн. $u \equiv 0 \Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} u \leq 0 \\ u \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u = 0$

ч.т.д.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, огр., откр.

з. Дирихле:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = q \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$$

пусть $\exists!$ реш-е $u(t,x)$

что будет, если $t \longrightarrow +\infty$?

Если q - любое, то неизвестно;

Если $\boxed{q=0}$

интуитивно: $u(t,x) \longrightarrow \bar u(x)$

$\cancel{u_t - \Delta u = 0}$

$\cancel{u|}$

$$\begin{cases} -\Delta \bar u = 0 & \text{в } \Omega \\ \bar u|_{\partial\Omega} = V \end{cases}$$

з. Дирихле.

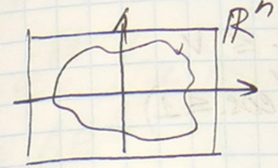
Случай $\psi = 0$.

Т $u(t,x) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$|u(t,x)| \leq A e^{-bt}$, т.е. равномерно по x (и даже сильнее)

$A, b > 0$ - const.

Док-во.



$\mathbb{R}^n$

$0 \in \Omega$ - выберем сис. коорд.

$\Omega \subset [-a,a]^n$ - n-мерный куб.

$v(t,x) := A e^{-bt} \cdot \cos cx_1 \cdot \ldots \cdot \cos cx_n$

A, b, c - const, выберем потом.

$\mathcal{L}v = v_t - \Delta v = (-b + c^2 \cdot n)\, v = 0$

т.е. $b = nc^2$

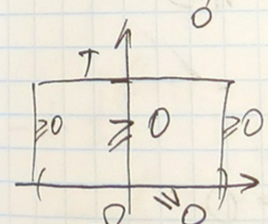
$\cos cx > 0 \quad \forall x \in [-a,a]$ - выбираем так c.

$A \cdot \cos cx_1 \cdot \ldots \cdot \cos cx_n \geq \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega$ - берём такое A.

$\bar W(t,x) = -u(t,x) + v(t,x)$

$W(t,x) = u(t,x) + v(t,x)$

$\mathcal{L}\bar W = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}u}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\mathcal{L}v}} = 0$



прин. ц. макс: ≥ 0 на пар. гр. $\Rightarrow$ везде ≥ 0

$-u + v \geq 0$

$u \leq v$

- $\mathcal{L}\underline{w}=0$

$u+v\geq 0$

$u\geq -v$

Итого: $-v\leq u\leq v$

$\underline{|u|\leq v = Ae^{-bt}}$ $(\cos.\leq 1)$

ч.т.д

Общий случай $(\psi\neq 0)$

$u\big|_{\partial\Omega}=\psi$

Т Пусть $\exists!\ u_0$: $\Delta u_0=0$ в Ω

$u_0\big|_{\partial\Omega}=\psi$

$u(t,x)$ – класс. реш-е з.:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0\\ u\big|_{t=0}=\varphi\\ u\big|_{\partial\Omega}=\psi\end{cases}$$

Тогда: $|u(t,x)-u_0(x)|\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$

более того, $|u(t,x)-u_0(x)|\leq Ae^{-bt}$

Док-во.

Пусть $\tilde{u}:=u-u_0$

$\mathcal{L}\tilde{u}=\underset{\substack{\parallel\\ 0\ (\text{т.к. реш-е})}}{\mathcal{L}u}-\mathcal{L}u_0=\underset{\substack{\text{т.к. } u_0\\ \text{не зав. от } t}}{-\Delta u_0}=0$

$\tilde{u}\big|_{\partial\Omega}=0.$

$\tilde{u}\big|_{t=0}=\varphi-u_0$

$|\tilde{u}|\leq A\cdot e^{-bt}$ (т.к. теорема) при $\psi=0$).

$|u-u_0|\leq Ae^{-bt}$

ч.т.д

$u_t-\Delta u=0$ $\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$

Хотим реш-е: $u(t,x)=\lambda^{\alpha}u(\lambda t,\lambda^{\beta}x)$ $\quad\forall\lambda>0.$

$\lambda=\frac{1}{t}\Rightarrow u(t,x)=\frac{1}{t^{\alpha}}u\left(1,\frac{x}{t^{\beta}}\right)$

$u(1,x):=v(x)$

Ищем реш-е в виде:

$u(t,x):=\frac{1}{t^{\alpha}}v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$

$\mathcal{L}u=0$ $\quad\left(\frac{1}{t^{\alpha}}v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\right)_t-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{т.к. }\Delta\text{ не зав. от } t.}}{\frac{1}{t^{\alpha}}}\Delta\left(v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\right)=0$

$\cancel{-\alpha t^{-1-\alpha}\cdot v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)+\frac{\beta}{t^{\alpha}}\nabla v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\cdot x\cdot t^{(-\beta+1)}}$ $\cancel{-\frac{1}{t^{\alpha}}}$

$-\alpha\cdot t^{-(\alpha+1)}\cdot v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)-\beta\cdot\frac{1}{t^{\alpha}}\nabla v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\cdot x\cdot t^{-(\beta+1)}-$

$-\frac{1}{t^{\alpha}}\cdot\frac{1}{t^{2\beta}}(\Delta v)\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)=0$

$y := \frac{x}{t^{\beta}}$

$-\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)} v(y) - \beta t^{-\alpha-\beta-1} \cdot \nabla v(y) \cdot y \cdot \cancel{t^{\beta}} -$

$- t^{-\alpha-2\beta} \cdot \Delta v(y) = 0$

положим $\beta = \frac{1}{2}$; делим на $t^{-\alpha-1}$;

домножим на (-1).

$\alpha v(y) + \frac{1}{2} \nabla v(y) \cdot y + \Delta v(y) = 0$

Ищем v — радиальное, т.е. $v(x) = v(|x|)$

$\nabla v(y) = \frac{\partial v}{\partial r}$ $\qquad r = |x|$

$\Delta v(y) = v_r'' + \left(\frac{n-1}{r}\right) \cdot v_r'$

$\alpha v + \frac{1}{2} v'_r \cdot r + v'' + \frac{n-1}{r} \cdot v' = 0$

(произв-ные по r)

$\alpha := n/2$

$r^{n-1} \cdot \frac{n}{2} v + \frac{1}{2} r^n v' + r^{n-1} v'' + r^{n-2}(n-1) v' = 0$

$\frac{1}{2}\underbrace{\left(n r^{n-1} v + r^n v'\right)}_{''(r^n v)'} + \left(r^{n-1} v'\right)' = 0$

$\frac{1}{2}\left(r^n v\right)' + \left(r^{n-1} v'\right)' = 0$

$\cancel{\frac{1}{2}\left(r^n v + r^n\right)'}$

$\left(\frac{1}{2} r^n v + r^{n-1} v'\right)' = 0$

$\frac{1}{2} r^n v + r^{n-1} v' = c$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{r \to +\infty} v = 0 \\ \lim\limits_{r \to +\infty} v' = 0 \end{array}\right\}$ хотим. $\Longrightarrow c = 0$

$\frac{1}{2} r^{\cancel{n}} v + \cancel{r^{n-1}} \cdot v' = 0$

$\frac{1}{2} r v + v' = 0$

~~$v = b e^{-r^2/2}$~~ $\qquad$ ~~$z = |y| = \frac{x}{t^{\beta}} = \frac{x}{\sqrt{t}}$~~

~~т.е. $v(x) = b e^{-|y|^2/2}$~~

$v = b e^{-r^2/4}$ $\qquad \alpha = \frac{n}{2}$

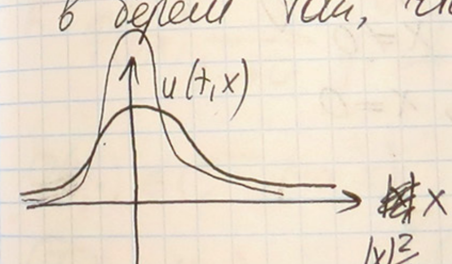
$v = b \cdot e^{-|y|^2/4}$

$v(y) = b e^{-|y|^2/4}$ $\qquad u(t,x) = \frac{1}{t^{\alpha}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

$u(t,x) = \frac{b}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$

b берем так, чтобы $\int_{\mathbb{R}^n} u\,dx = 1$

чем меньше t, тем выше.



$1 = \int_{\mathbb{R}^n} u\,dx = \frac{b}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = \frac{b}{t^{n/2}} \left(\int \left(e^{-\frac{x_1^2}{4t}} dx_1\right) \cdot \ldots \cdot (\ldots)\right.$

$$\dots \left(\int e^{-\frac{x_n}{4t}}\, dx_n\right)\Bigg) =$$

$$= \frac{b}{t^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4t}\, dx\right)^n = \frac{b(2\sqrt{t})^n}{t^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right)^n =$$

$$y = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{b\cdot 2^n \cancel{t^{n/2}}}{\cancel{t^{n/2}}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right)^n$$

Доделать!

чтобы была 1,

$$b = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}}$$

т.е.

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) =: \Phi(t,x)$$

$\Phi(t,x)$ – фунд решение ур-я теплопроводности.

$$\Phi(t,x) \xrightarrow[t\to 0+]{} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

22.03.2013.

$u_t = \cancel{a}\Delta u$

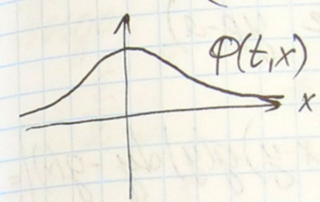
$u = u(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

// Важно! Понять, что изменится, если $a \neq 1$!

$g = g(x)$

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$$ – з. Коши для р-я теплопровод-ти во всем пространстве.

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$



$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$$

$$\Phi(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

$\Phi(t,\cdot) \in C^\infty$ (по x)

(T) $$u(t,x) := \cancel{\int_0^t ds} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\, g(y)\, dy$$

если $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ - (непр. и огр.)

Тогда: 1) $u_t = \Delta u \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t>0$

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$

2) $\lim\limits_{t \to 0+} u(t,x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

т.е. это реш-е задачи.

<u>Док-во.</u>

$\Delta \ \mathbb{R}^n \times [0,+\infty), \ a>0$

ф-я Φ бесконеч. дифф-ма.

$$\Rightarrow \quad u_t - \Delta u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t(t,x-y) - \Delta_x \Phi(t,x-y)) g(y) dy$$

$\Phi_t - \Delta \Phi = 0$ (т.к. Φ - реш-е ур-я).

Нужно оценить:

$$|u(t,x) - g(x)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) g(y) dy - g(x) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) g(y) dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) g(x) dy \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)(g(y)-g(x)) dy \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) |g(y)-g(x)| dy$$

Разобьём: на интеграл по шару рад. δ:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) |g(y)-g(x)| dy = \int\limits_{B_\delta(x)} \Phi(t,x-y)|g(x)-g(y)| dy +$$

$$+ \int\limits_{B^c_\delta(x)} \text{—— " ——} \le$$

внешность мн-ва

$\forall \varepsilon > 0$ берем δ, т.ч.:

$|g(y) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда:

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\int \dots}_{1} + \int\limits_{B^c_\delta} \Phi(t,x-y)|g(y)-g(x)| dy \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + 2\|g\|_\infty \int\limits_{B^c_\delta(x)} \Phi(t,x-y) dy \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + C_1 \|g\|_\infty \frac{1}{t^{n/2}} \int\limits_{B^c_\delta} e^{-|x-y|^2/4t} dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + c \cdot \frac{1}{t^{n/2}} \int\limits_{B^c_\delta} e^{-|x-y|^2/4t} dy =$$

$|y-x| \geq \delta$ (т.е. во внешности шара)

$$\Rightarrow \cancel{e^{-|x-y|^2/4t}} \leq e^{-\delta^2/4t}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + c\cdot\frac{1}{t^{n/2}}\int_{\delta}^{+\infty} \rho^{n-1}\cdot e^{-\rho^2/4t}\,d\rho =$$

(в полярных координатах)
площадь n-мерн. ед. сферы в конст.

$$r = \frac{\rho}{2\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c\cdot \cancel{t^{n/2}}}{\cancel{t^{n/2}}}\int_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-1}\cdot e^{-r^2}\,dr$$

$$\int_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-1}\cdot e^{-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_{r/2\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-2}\,de^{-r^2} =$$

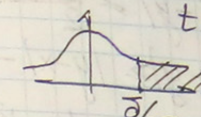
$$= -\frac{1}{2} e^{-r^2} r^{n-2}\Big|_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} + \frac{n-2}{2}\int_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-3} e^{-r^2}\,dr$$

$$\left(0 + \frac{1}{2} e^{-\delta^2/4t}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{t}}\right)^{n-2}\right) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

↑ как предыд., только ст. r уменьш. на 2.

Повторяем много раз, пока не придем или к $r\cdot e^{-r^2}dr$ или $e^{-r^2}dr$

$\downarrow t\to 0$ $\quad 0$ $\qquad\qquad \xrightarrow[t\to 0]{} 0$



ч.т.д.

Зам-е
(хотим более сильное утв-е).

$$\lim_{\substack{t\to 0+\\ z\to x}} u(t,z) = g(x)$$

Т.е. сходимость не только поточеч., но и равномерная на компактах!

Док-во

аналогично, но везде будет $\Phi(t,z-y)$,
т.е.:

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t,z-y)\,|g(y)-g(x)|\,dy = \ldots \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{B_\delta^c}\Phi(t,z-y)\,|g(y)-g(x)|\,dy \leq \ldots$$

$$\frac{1}{t^{n/2}}\int_{B_\delta^c} e^{-|z-y|^2/4t}\,dy$$

теперь: $|y-x| \ge \delta$

$z \to x$

$|z-y| \ge \frac{|y-x|}{2}$ если взять $z \in B_{\delta/2}(x)$

$|z-y| \ge |y-x| - |z-x| \ge \frac{|y-x|}{2}$

$$\frac{1}{t^{n/2}} \int_{B_\delta^c} e^{-|y-x|^2/16t}\, dy =$$

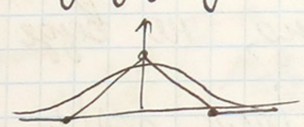
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \dots \int \dots e^{-\rho^2/16t}\, d\rho = \qquad r = \frac{\rho}{4\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + C \int_{\delta/4\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-1} e^{-r^2}\, dr$$

ч.т.д.

т.е. получили ф-лу для реш-я:

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\, g(y)\, dy$$



т.е. решение станет C^∞

т.е при малейшем нагреве оно сгладится.

в теории, скорость теплопередачи станет $+\infty$.

Неоднород. ур-е с з. Коши:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t,x) \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$$

1) $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$ умеем реш.: u_1

2) $\begin{cases} u_t - \Delta u = f \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$ будем решать u_2

Реш-е исход задачи: $u_1 + u_2$

$$\boxed{u_2(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(t-s, x-y)\, f(s,y)}$$

— интеграл Дюамеля

(T) $\exists\, f \in C_0^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$ — дважды непр. дифф. по простр. перемен; один раз — по t; имеет комп. носитель.

Тогда u_2 — реш-е.

Док-во

Вместо u_2 пишем u, потому что лень.

$u := u_2$ $\quad$ ~~t = t~~ $\quad s' = t-s \quad y' = x-y$

$$u(t,x) = \int_0^t ds' \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s', y')\, f(t-s', x-y')\, dy' =$$

$s' = s; \quad y' = y.$

$$u_t(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)\,dy +$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f_t(t-s, x-y)\,dy$$

$$\Delta u(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \Delta f(t-s, x-y)\,dy$$

$$u_t - \Delta u = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(f_t - \Delta f)(t-s, x-y) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)\,dy =$$

// т.к. $f_t(t-s, 0) = -f_s(t-s, 0)$

// ~~почему-то~~ заменим $(f_t - \Delta f)$ на $(-f_s - \Delta_y f)$

$$= \int_0^\varepsilon ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y) \cdot (-f_s - \Delta_y f)(t-s, x-y) +$$

$$+ \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \underline{dy\, \Phi(s,y)\,(-f_s}(t-s, x-y) - \Delta_y f(t-s, x-y)) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, x-y)\,dy \quad \boxed{=}$$

второе слаг. по частям:

$$\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy (\Phi_s(s,y) - \Delta_y \Phi(s,y)) f(t-s, x-y) \oplus$$

/* $-\iint \Phi(s,y) \cdot (\Delta_y f) = -\iint \Delta_y \cdot \Phi(s,y) \cdot f(\ldots)$

$\oplus$ граничные члены

То же самое подробно:

$$\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}} dy\, \Phi(s,y) (-f_s(t-s, x-y)) =$$

$$= + \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi_s(s,y) f(t-s, x-y) -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f(t-s, x-y)\,dy \Big|_\varepsilon^t$$

$$= \iint \Phi(s,y)(-\Delta_y f(t-s, x-y)) \quad \ominus$$

для сокр-я дам то, что было

$$= \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy$$

$$\ominus -\underbrace{\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\ \Delta_y \Phi(s,y) f(t-s, x-y)}_{\iint_{:}^{''}}.$$

Итого: вместо второго слагаемого:

$$\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy \cancel{(\Phi_s(s,y) - \underbrace{\Delta_y \Phi(s,y)}_{=0})} f(t-s, x-y)$$

$\cancel{4}$ (еще граничные усл-я!) $- \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y)} f(0, x-y) dy$ +

$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy \ominus$ сократится с 3-им слагаемым.

$$\boxed{=} \int_0^\varepsilon ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y) \cdot \underbrace{(-f_s - \Delta_y f)(t-s, x-y)}_{=\text{const}} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy$$

$$\int_0^\varepsilon ds \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)}_{=1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Итого: остался интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y) dy \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(t,x)$$

$\Rightarrow$ ~~реш-е~~ удовл. (1) ~~ч.т.д~~

$|u|_{t=0}| \le \text{const} \cdot t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ — удовл. (2).

ч.т.д

Уравнение Пуассона.

$\boxed{-\Delta u = f}$ $u = u(x)$ $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — откр.

если $f = 0$, то ур-е Лапласа

$u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$ — кр. усл-е Дирихле (I краев. усл-е).

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$ — кр. усл-е Неймана (II краев. усл-е)

Интерпретация

Это заряды. $\vec{E}(x)$ — напряженность (сила : заряд).

$\vec{E}(x) = -\nabla u(x)$; $u(x)$ — потенциал.

f — плотность

$-\Delta u = f$
$u(x) = 0$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – откр.

$C_0^\infty(\Omega)$ – ∆ ф-ции, беск. кол-во раз дифф-мых с компактным носителем.

Это пространство.

$u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ $\quad u_k \longrightarrow u \in C_0^\infty(\Omega)$,

если:

1) $\operatorname{supp} u_k \subset K \subset\subset \Omega$
K-компакт;

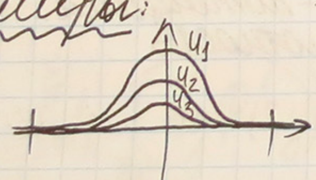
2) u_k сх. к u равномерно;
и все их производные сх. к произв. ф-ции тоже равномерно.

Def: Носитель ф-ции:

$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$

Def: ф-ции из пр-ва $C_0^\infty(\Omega)$ наз-ся основными

Примеры:

1 

$\Omega = \mathbb{R}$

они сх. равном.

к 0; производные сх. к 0.

2 

Они сх. к 0;
сх. равном.
произв. сх. к 0.
Но сх-ти нет! Т.к. не внутри компакта.

C_0^∞ – лин. пр-во;
определили сход-ть ⇒ определили топологию.

Def: ф-нал φ – (лин. непр) наз-ся обобщенной ф-цией на Ω, если он
$\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^{*}$ – (мн-во лин. непр. ф-лов).

Пример:

1) $\Omega = \mathbb{R}$
$u \in L^1_{loc}(\Omega)$

*) $u \in L^p(\Omega)$, где $p \in [1; +\infty)$, если u – измерима и $\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(K), \ \forall K \subset \Omega \text{ – компакт}\}$

$L^1_{loc} \supset L^1$ */

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$,

$\varphi_u \in (C_0^\infty(\Omega))'$ $\quad v \in C_0^\infty(\Omega)$

$\varphi_u(v) := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$

φ_u действует на v

Корр-ть: (т.к. $v=0$ вне компакта)

1) $\int_\Omega \dots = \int_K \dots$; K – нек. компакт.

каждая ф-я на K – инт-ма $\Rightarrow$ интеграл $\int_\Omega$ – сущ-ет

2) $v_k \in C_0^\infty(\Omega)$, $v_k \to v$

т.е. можно писать:

$\varphi_u(v_k) := \int_K u(x)v(x)\,dx$

Обычно пишут: вместо $\varphi_u \to u$

$L^1_{loc}(\Omega) \subset (C_0^\infty(\Omega))'$

т.е. любая обобщ. ф-ция порожд. локально инт. ф-цией.

Пример

2) $\varphi(v) := v(0)$, $\Omega = \mathbb{R}$

это тоже лин. непр. ф-ал.

Обычно пишут: $\delta_0(v)$, или:

$\delta_x(v) := v(x)$ – δ-функция или мера Дирака

3) μ – конеч. борел. мера на $\Omega = \mathbb{R}$

$\varphi_\mu(v) := \int_\Omega v(x)\,d\mu(x)$

Упр Проверить, что это лин. непр. ф-ал.

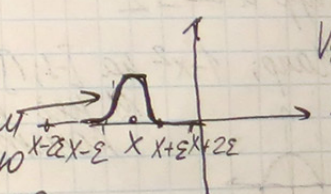
Утв. δ_0 – обоб. ф-я, кот. не порожд никакой лок. инт. ф-цией.

$\nexists\, u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $\delta_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\,dx$

Док-во

Пусть $u(x)$ $\exists$. $x \neq 0$

берём такую осн. ф-ю $v_\varepsilon(x)$.



$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \\ 0, & (x-2\varepsilon, x+2\varepsilon) \end{cases}$

$0 = \delta_0(v_\varepsilon) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} u(x)v_\varepsilon(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u(x)$

$u(x)=0$ (осн. лемма)

$\delta_0(V) = \int \ldots = 0 \Rightarrow V(x)=0$ п.в. на ω

Но! $\delta_0(v) \neq 0$

ч.т.д.

30.03.2013.

$-\Delta u = f$ — ур-е Пуассона

$u = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ $|x|$ — расст. до заряда (если он в нуле).

$\Delta u = \begin{cases} 0, & x\neq 0 \\ +\infty, & x=0 \end{cases}$ — должно быть

Но мы хотим производные...

(I) Основные ф-ции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

и имеющие комп. носитель в Ω

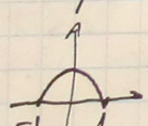
т.е.:

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ $\operatorname{supp} u := \overline{\{x\in\Omega : u(x)\neq 0\}}$

$\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$

// Напр; $1-x^2$ на $[-1;1]$.

У неё не комп. носитель!



$u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u \in \mathcal{D}(\Omega)$, если:

1) $\operatorname{supp} u_k \subset K \subset\subset \Omega$,

2) $u_k \rightrightarrows u$

Мультииндекс: $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = \alpha$ (нат. числа и 0)

$|\alpha| = \sum \alpha_i$

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

Прим. $D^{(1,0,1)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

$D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$

(II) Обобщенные ф-ции

$V \in \mathcal{D}'(\Omega)$ — лин. и непр. ф-лы на пр-ве осн. ф-ций.

Обозн: $V(u)$

1) $V(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 V(u_1) + \lambda_2 V(u_2)$

2) если $u_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u$

$V(u_k) \longrightarrow V(u)$

Примеры

1) $V \in ~~Loc~~ L^1_{loc}(\Omega) \rightsquigarrow \varphi_V(u) = \int_\Omega u(x)V(x)dx$

$V(u) = \int_\Omega u(x)V(x)dx$

$\varphi_\mu(v) = \int\limits_\Omega v(x)\,d\mu(x)$

~~не~~ лин. - очевид.

Непр-ть: проверка:

$u_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} u$, $\quad u_k(x) \to u(x)$

$\varphi_\mu(u_k) = \int\limits_K u_k(x)\,d\mu(x) \to \int\limits_K u(x)\,d\mu(x) =$

$= \int\limits_\Omega u(x)\,d\mu(x) = \varphi_\mu(u)$

$\Rightarrow$ непр.

3) ~~δ_x~~ $\delta(u) = u(0)$ $\qquad u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(\Omega = \mathbb{R}^n)$

см. ранее.

4) $\delta'(0) = -u'(0)$ $\qquad \Omega = \mathbb{R}$

Упр. Д-ть, что это лин. непр. ф-ал.

Упр. Д-ть, что не порожд. никакой лин. интегр. ф-цией. (док-во как для δ-ф-ции).

III $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n$ - откр.

лин. пр-во.

Def: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\quad v \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$(D^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|}\, v(D^\alpha u)$ $\qquad \forall u \in \mathcal{D}(\Omega)$

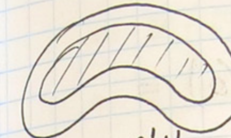
назовем это производной обобщенной (это обобщ. ф-ал)

Примеры.

1) $v \in C^\infty(\Omega) \Rightarrow v \in L^1_{loc}(\Omega)$

Далее не будем писать $\varphi_v(u)$, а сразу $v(u)$. Формально это неверно, но так все пишут.

$(D^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|}\, v(D^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (D^\alpha u)(x)\, v(x)\,dx =$



она = 0 в окр-ти границы

$= (-1)^{2|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) \underbrace{(D^\alpha v)(x)}\,dx$ это уже настоящая производная.

т.е. обобщ. произв-ная, это и есть обычная производная.

Отличия: $(D^\alpha v)(x)$ - произв. в кажд. точке.

$(D^\alpha v)(u)$ - лин. опер-р на пр-ве обобщ. ф-ций. Его действие на дифф. ф-ях сводится к обычному дифф-ю.

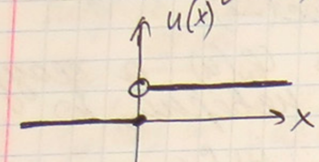
Утв Обобщ. производная дифф. ф-ции есть классич. производная

1) $u(x) = 1 + x^2$ $\qquad u'(x) = 2x$

2) А если ф-я не дифф-ма?

$\Omega = \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



Найдем по опр-ю $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$u'(v) = -u(v') = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} v'(x)\,dx = -v(x)\Big|_0^{+\infty} = 0 + v(0) =$$

т.к. осн. ф-я и комп. носит.

$$= \delta(v)$$

$$\boxed{u' = \delta}$$

3) $\Omega = \mathbb{R}$

$$\delta'(u) = -\delta(u') = -u'(0) \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

∀ обобщ. ф-ю можно обобщ. дифф-вать беск. число раз.

⚠ $\Delta u = f$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – откр.

Дано: $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Найти: $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $\Delta u = f$, но теперь Δ – это не обычные произв-ные, а обобщ. пр-ные.

Иначе говоря: $\forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\Delta u(v) = f(v)$$

$$\Delta u(v) = u_{x_1x_1}(v) + \dots + u_{x_nx_n}(v) =$$

$$= u(v_{x_1x_1})\cdot(-1)^2 + \dots + u(v_{x_nx_n})\cdot(-1)^2 =$$

т.к. u – лин.

$$= u(v_{x_1x_1} + \dots + v_{x_nx_n}) =$$

$$= u(\Delta v)$$

т.е. $u(\Delta v) = f(v)$

Упр. u – класс. реш-е ур-я П. $\Rightarrow$ (~~т.е.~~ v u – обобщ. реш-е тоже.

Док-во. нужно д-ть: $\forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ $u(\Delta v) = f(v)$

$$u(\Delta v) = \int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx \overset{?}{=} \int_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

(по частям)

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\,dx \qquad \Delta u(x) = f(x) \to$$ u – обобщ. реш-е ч.т.д.

Обратное неверно.

Пример. $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n > 2$

$\Delta u = \delta$ - хотим решить.

Нужно: $u(\Delta v) = \delta(v) = v(0)$

Физика $n=3$ $\quad \delta(e) = \begin{cases} 0, & e \not\ni 0 \\ 1, & e \ni 0 \end{cases}$

т.е. просто заряд

т.е. при $n=3$ мы ищем ф-лу потенциала ед. заряда.

Должно быть: $u(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$

в $\mathbb{R}^n$: $u(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$ - захотелось нам так.

Напоминание:

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

(1 ф-ла Грина)

$\ominus$

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

$$= \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

(2я формула Грина)

$u(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$ $\qquad (\Delta u)(v) = \delta(v) = v(0)$

$$u(\Delta v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta v(x) \, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{B_\varepsilon^c(0)} u(x) \Delta v(x) \, dx = \left(\begin{matrix}2 \text{ ф-ла} \\ \text{Грина}\end{matrix}\right)$$

(c - внешность)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{B_\varepsilon^c(0)} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dx \ominus$$

(Нужно честно посчитать Δu и увидеть, что $\Delta u = 0$.

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \frac{\partial v}{\partial r} \right| = \left| \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial v}{\partial r} \right| \le \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| d\sigma \le$$

т.к. $u = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

(замен. ∂n на ∂r, т.к. нормаль совпадает с радиус-вектором)

$$\le \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \cdot \|\nabla v\|_\infty \underbrace{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}_{S \text{ пов-ти шар. рад. } \varepsilon} = C(n, v) \cdot \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Т.е. первое слаг. исчезло.

$$u = \frac{c}{r^{n-2}}$$

$$\cancel{u'_r = -\frac{c}{r^{n-1}}(n-2)} \qquad u'_r = -\frac{c}{r^{n-1}}(n-2)$$

$$\cancel{\ominus \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)}}$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{c(n-2)}{|\varepsilon|^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} v\, d\sigma =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{n\omega_n c(n-2)\cancel{\varepsilon^{n-1}}}{\cancel{|\varepsilon|^{n-1}}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} v\, d\sigma =$$

$$= n\omega_n c(n-2) \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} v\, d\sigma =$$

$$= n\omega_n (n-2) c \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\partial B_\varepsilon} v\, d\sigma \longrightarrow v(0)$$

Итого:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\, dx = n\omega_n (n-2) c\, v(0)$$

$$(n-2)\omega_n c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{n\omega_n(n-2)}$$

Утв. $n > 2$,

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Тогда $\Delta u = \delta$ (обобщ. смысл)

Док-во только что.

В част., если $n = 3$, то

$u(x) = \frac{1}{4\pi |x|}$ - кулоновский потенциал единичного заряда.

$\Delta u = \delta$ означает: $\int_{\mathbb{R}^n} u \Delta v = v(0) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Зам-е. На самом деле, мы док-ли правое утв-е, (оно сильнее) $\forall v \in C_0^2(\mathbb{R})$

Упр.! $n=2 \quad u(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$

Проделать то же самое, но с этой ф-цией.

$$\Delta u = f(x)$$

$\Delta\, \Delta u = \delta(x - x_0)$ - обозн. δ в (.) x_0.

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \quad (n>2)$$

$$\Delta u = f \Rightarrow \quad u = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\,dy \ominus$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\cdot\frac{1}{|x|^{n-2}}$$ – Фунд. реш-е ур-я Лапласа $(n>2)$

$$\ominus \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)\, f(x)\,dy$$

Утв. $f\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x-y)f(y)\,dy \Rightarrow$$ реш-е ур-ея $\Delta u = f$ (и в обобщ. и в классич. смысле)

$u\in C^2(\mathbb{R}^n)$

Док-во.

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y) f(x-y)\,dy$$

$$D^\alpha u = \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y)\,(D^\alpha f)(x-y)\,dy \qquad |\alpha|\le 2$$

$\Rightarrow u\in C^2(\mathbb{R}^n)$

$\Delta u(v) = \int f v$

$u(\Delta v) = \int f v$

$u(\Delta v) = \int u\Delta v$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Delta v(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(y) f(x-y)\,dy = \cancel{\iint\Phi(y)}$$

$$= \int dy \int \Phi(y)\,\Delta v(x)\, f(x-y)\,dx$$

Повторить действия из проверки $\Delta u=\delta$.

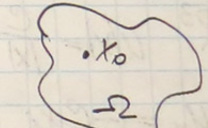
$\Delta\Phi = \delta$ (пред. утв-е)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(x)\,\Delta v(x)\,dx = \delta(0) \quad (1)$$

Нужно д-ть: $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x)\,dx$ (1')

Это Упр!

$v = \Phi(x-x_0)$



Подст. во 2 ф-лу Грина. $x_0\in\Omega$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(x_0)}\Big(u\underbrace{\Delta\Phi(x-x_0)}_{0} - \Phi(x-x_0)\Delta u\Big)dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial\Phi(x-x_0)}{\partial n} - \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\Big)d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \text{— " —}\, d\sigma \ominus$$

Такие странные мн-ва, потому что Φ в (·) x_0 не опред. $\Delta\Phi = 0$ в остальных

$\ominus\; u(x_0)+0 = u(x_0)$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon}(x_0)}\Phi(x-x_0)\Delta u(x)\,dx =$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\,\frac{\partial\Phi(x-x_0)}{\partial n}-\Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + u(x_0)$$

$$u(x_0) = -\int\limits_{\Omega}\Phi(x-x_0)\Delta u(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x-x_0)\right)d\sigma$$

/* Почему $\Delta\Phi(x-x_0)=0$?

$$\Delta f(r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$ подставить и проверить.

в $\mathbb{R}^3$ $u(x)=\frac{c}{|x|}$

$$u_{x_i}=\frac{-cx_i}{|x|^2|x|}$$

*/

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega}\Phi(x-y)\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x-y)\right)d\sigma$$

— 3 я формула Грина.

Свойства гармонических ф-ций.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\Delta u=0$ Ω - откр!

Если не говорится отдельно, имеется ввиду классич. смысл.

в $\mathbb{R}$: $u''=0$, т.е. u - лин. ф-я.

в $\mathbb{R}^2$: лин. ф-ции;
x^2-y^2
xy и т.д...

в $\mathbb{R}^3$: $1/\|x\|$ - не гармонич! в $\mathbb{R}^3$

$u(x)=\frac{1}{4\pi|x|}$ - она гарм. в $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

Утв. 1 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ $\Delta u=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma$$ (подстав. в 1 ф-лу Грина)

Утв. 2 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ $\Delta u=f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Omega}f\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma$$ (1 ф-ла Грина)

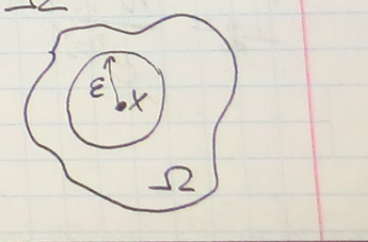
(т. о среднем)

Утв. 3 $u\in C^2(\Omega)$, $\Delta u=0$ в Ω

$x\in\Omega$

ε: $\overline{B_\delta}(x)\subset\Omega$

Тогда



$\cancel{u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}}$ $\cancel{(n>2)}$

$$u(x) = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(\xi)\,d\sigma(\xi) \qquad \forall\, n \ge 1$$

<u>Док-во.</u> $n>2$:

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\frac{1}{|z-x|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|z-x|^{n-2}}\,u(z)\right) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(z)}_{|\le C \text{ т.к. } u\in C^2}\,d\sigma(z) - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{-(n-2)}{|z-x|^{n-1}}\,u(z)\,d\sigma(z)\right) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{n(n-2)\omega_n}}\ I_1 + I_2, \qquad I_2 := \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\,u(z)\,d\sigma(z) =$$

$$|I_1| \le \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|(z)\,d\sigma(z) \le \frac{C}{\varepsilon^{n-2}}\cdot n\omega_n\varepsilon^{n-1} = C_1\cdot\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$I_2 = \frac{(n-2)\cancel{\varepsilon^{n-1}}\,n\omega_n}{\cancel{\varepsilon^{n-1}}} \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x)$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z) = 0$$ (т.к. u гармон. ф-я)

$$u(x) = \frac{1}{\cancel{n(n-2)\omega_n}}\cdot\cancel{n(n-2)\omega_n}\fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z)$$

Итого: $u(x) = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z)$

ч.т.д.

Для $n=2$: вместо $\frac{1}{|z-x|^{n-2}}$ нужно писать $\ln$.

Найти ф-ции: $\Delta u \ge 0$ (в классе гладк. $u \in C^2, \dots$)

в $\mathbb{R}$ -?

в $\mathbb{R}^2$ -?

Как изменится т. о среднем?

06.04.2013.

$\Delta u = f$ в $\mathbb{R}^n$

$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\,dy =: (\Phi * f)(x)$$

свертка

Если к этому добавить гармони-

$\cancel{u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}}$
$\cancel{(n>2)}$

$$u(x) = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi) \qquad \forall\, n \geq 1$$

<u>Док-во</u>. $n>2$:

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\frac{1}{|z-x|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|z-x|^{n-2}} \right) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(z)}_{\leq C \text{ т.к. } u\in C^2} d\sigma(z)}_{\mathrm{I}_1} - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{-(n-2)}{|z-x|^{n-1}} u(z)\, d\sigma(z) =$$

$$\cancel{= \frac{1}{n(n-2)\omega_n}} \quad \mathrm{I}_1 \qquad\qquad \| $$

$$+ \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} u(z)\, d\sigma(z)}_{\mathrm{I}_2} =$$

$$|\mathrm{I}_1| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|(z)\, d\sigma(z) \leq \frac{C}{\varepsilon^{n-2}} \cdot n\omega_n \varepsilon^{n-1} =$$

$$= C_1 \cdot \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{(n-2)\cancel{\varepsilon^{n-1}} n\omega_n}{\cancel{\varepsilon^{n-1}}} \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} u(x)$$

$$\mathrm{I}_1 = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(z)\, d\sigma(z) = 0 \quad (\text{т.к. } u \text{ гармон. ф-я})$$

$$u(x) = \frac{1}{\cancel{n(n-2)\omega_n}} \cdot \cancel{n(n-2)\omega_n} \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z)$$

Итого: $u(x) = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z)$

ч.т.д.

Для $n=2$: вместо $\frac{1}{|z-x|^{n-2}}$ нужно писать $\ln$.

Найти ф-ции: $\Delta u \geq 0$ (в классе сильн. $u\in C^2, \ldots$)

в $\mathbb{R}$ — ?
в $\mathbb{R}^2$ — ?

Как изменится т. о среднем?

06.04.2013.

$$\Delta u = f \quad \text{в } \mathbb{R}^n$$
$$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$$

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy =: (\Phi * f)(x)$$

свертка

Если к этому добавить гармоническую ф-ю (удовл. ур-ю Лапласа), тоже будет решение.

А гармон. ф-ций бескон. много.

$\Rightarrow$ ~~решение~~ решение не единств.!

$$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\, dy =$$

$$= (f * \Phi)(x)$$

$\Delta u = f$

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)$$

Δ по хам.

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\Delta u)(\varphi) = f(\varphi)$$

Вообще, лучше такое обозначение. $\langle \varphi, f \rangle$ т.к. это не подстановка эл-та, а действие об. ф-ции на другую ф-цию.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y)\, dy \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z)\, dz$$

$$\|$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, dy \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \Delta f(x-y)\, dx =$$

перекинем.
(инт. по частям. 2 раза знак останется) граничных членов нет, т.к. ф-ции дроб., у них компакт. нос

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\, dy \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x) \cdot f(x-y)\, dx =$$

$z := x - y$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \cdot \Delta\varphi(z+y)\, dy\, dz \ominus$$

Уже доказано: $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta w(y)\, dy = w(0)$

Это было: $\boxed{\Delta \Phi = \delta}$

$$\ominus \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \underset{\varphi(0)}{\underset{\|}{\varphi(z)}}\, dz$$

А это как раз правая часть!:)

<u>Def</u>: ф-я наз-ся гармонической, если: $\Delta u = 0$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Доказали: (Т. о среднем)

$$\Delta u = 0 \Rightarrow u(x) = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z), \text{ если } \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$$

След.

$$u(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz$$

Док-во:

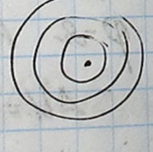
$$\int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz = \int_0^\varepsilon \rho^{n-1}\,d\rho \int_{\partial B_1(0)} u(\rho, \nu)\,d\sigma(\nu) =$$

/* ν - в ед. шаре $\|\nu\| = 1$ */

$$= \int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(s)\,d\sigma(s) =$$

$$= \int_0^\varepsilon d\rho \; u(x)\cdot S_{n-1}(\partial B_\rho(x)) =$$

n-1-мерная площадь пов-ти



$$= u(x)\int_0^\varepsilon \underbrace{S_{n-1}(\partial B_\rho(x))\,d\rho}_{\text{объём}} =$$

$$= u(x)\cdot |B_\varepsilon(x)|$$

ч.т.д.

Теоремой о ср. называют оба эти утв-я.

Т (обратная т. о среднем).

Пусть $u \in C(\Omega)$, $\forall x \in \Omega$ $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$:

$$u(x) = \fint_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz$$

Тогда:

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} u(x) = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z) \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \Delta u = 0$ (и $u \in C^2(\Omega)$)

Док-во

(1): $\displaystyle\int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz = \underline{\int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(s)\,d\sigma(s)}$ #

$= u(x)\cdot |B_\varepsilon(x)|$ (из усл-я) $=$

$u(x)\cdot \omega_n \varepsilon^n$

// где $\omega_n = |B_1(0)|$

Это верно $\forall\, \varepsilon \in$ ~~(0,~~ , пока $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Дифф. по ε:

$$u(x)\cdot \underbrace{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}_{\text{площадь } S_{n-1}(\partial B_\varepsilon(x))} = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(s)\,d\sigma(s) \Longrightarrow (1)$$

(2): 1) Сначала докажем для $u\in C^2(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z)\right) =$$

$$\cancel{y=x+\varepsilon z}\qquad \cancel{d\sigma(y)=\varepsilon^{n-1}d\sigma(z)}\qquad \cancel{d\sigma(z)=\frac{d\sigma(y)}{\varepsilon^{n-1}}}$$

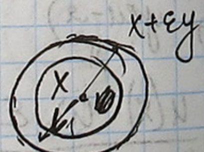
$$\cancel{=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\partial B_1(0)} u\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)d\sigma(y)}$$

$$z=x+\varepsilon y,\qquad d\sigma(z)=\varepsilon^{n-1}d\sigma(y)$$

$$=\frac{1}{n\omega_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{\cancel{\varepsilon^{n-1}}}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon y)\,\cancel{\varepsilon^{n-1}}\,d\sigma(y)=$$

$$=\frac{1}{n\omega_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\partial B_1(0)}u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y)=$$

$$=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)}\nabla u(x+\varepsilon y)\cdot y\,d\sigma(y)=$$



$$=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial u}{\partial n}(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y)=$$

$$\cancel{=\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z)}$$

перейдем к старым координатам:

$$\frac{1}{\underbrace{\varepsilon^{n-1}n\omega_n}_{\text{площадь сферы } \partial B_\varepsilon(x)}}\int \nabla u(z)\cdot\frac{z-x}{\varepsilon}\,d\sigma(z)=$$

$$=\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z)$$

Уже знаем:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z)=\int_{B_\varepsilon(x)}\Delta u(z)\,dz \quad (\text{I ф-ла Грина})$$

В самом начале в скобках – $u(x)$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(u(x))=0$$

Т.е. док-ли: $\int_{B_\varepsilon(x)}\Delta u(z)\,dz=0 \quad \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0(x))$

: объем шара; $\varepsilon\longrightarrow0$, получим:

$$\Delta u(x)=0$$

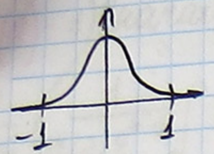
($\in C^2$ нужно было для ф-лы Грина).

2) Пусть $u\in C(\Omega)$

Сглаживание $\quad\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Например, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

Берём $\varphi(x) = \psi(|x|)$



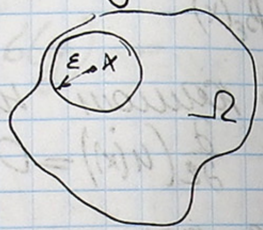
$\forall\, \varepsilon > 0$ строим:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon^n}$$

↑ чтобы интеграл сохранился

$$u * \varphi_\varepsilon =: u_\varepsilon$$

т.е. $u_\varepsilon(x) = \int\limits_\Omega u(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$



Считаем, что u есть во всём $\mathbb{R}^n$, только $u=0$, при $u \notin \Omega$.

Тогда можем писать интеграл по $\mathbb{R}^n$.

Эта ф-я не зависит от св-в u! А φ беск. число раз дифф-ма по x.

т.е.: $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В кажд. $(\cdot)\, x$:

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} u(x)$$

(если u не непр., то для почти всех x).

$u \in C(\Omega)$ $\quad \Omega' \subset\subset \Omega$ — ~~компакт~~.

$$u_\varepsilon \in \Omega(\overline{\Omega'})$$

$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x)$ $\forall\, x \in \overline{\Omega'}$ — компакт.

Это всё называется <u>сглаживанием</u> и часто применяется в жизни.

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\,\psi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$$

$$(u * \varphi_\varepsilon)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int\limits_0^\varepsilon d\rho \int\limits_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,\varphi_\varepsilon(x-y)\,d\sigma(y) =$$

$$y := x + \rho\nu$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon d\rho \cdot \rho^{n-1} \int\limits_{\partial B_1(0)} u(x+\rho\nu)\,d\sigma(\nu)\cdot\frac{1}{\varepsilon^n}\,\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) =$$

$$= \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^n}\,\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)d\rho \underbrace{\left(\int\limits_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,d\sigma(y)\right)}_{\approx\, u(x)\cdot n\omega_n\rho^{n-1}} =$$

$$= u(x)\cdot\int\limits_0^\varepsilon n\omega_n\,\rho^{n-1}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\cdot\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)d\rho$$

$$r := \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\int_0^1 n\omega_n \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^n} r^{n}\psi(r)\,\varepsilon\, dr$$

Выберем ψ так, чтобы этот инт. $=1$

Итого: $u_\varepsilon(x) \equiv u(x)$ $\forall x$

но $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$

Т.е. если u удовл. т. о сред., то она не только C^2, но и C^∞.

док-ли 2)

ч.т.д.

Более того, мы доказали:
$\forall$ ф-я, гармон. в обл-ти Ω (в классич. смысле), то бескон. дифф-ма в Ω.

т.е. $u \in C^2$, $\Delta u = 0$

Гармон. $\Rightarrow$ удовл. св-ву $\Rightarrow$ $\in C^\infty$.
(т. о сред.)

Принцип максимума.

Пусть u — гармон. в связ. области Ω. Если u — достиг. max в нек. (·) обл-ти Ω, то u — const.

Док-во

Пусть достиг.

Δ мн-во точек, в кот. достиг. max S_1

Δ — " — не достиг. S_2

$S_1 \cup S_2 = \Omega$ На втором: $u(x) < M$

$S_1 \cap S_2 = \varnothing$

~~S_1 — замкн.~~ $\left.\begin{array}{l} S_1 \text{ — замкн;} \\ S_2 \text{ — откр.} \end{array}\right\}$ т.к. u — непр.

S_1 — откр., т.к.: $\forall x_0 \in S_1$

Δ шарик с центром в x_0, $\subset S_1$ целиком.

Если не так, то $\fint_{B_\varepsilon(x_0)} < M$

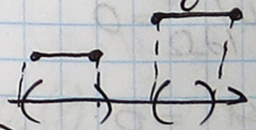
(т.к. есть точки, где $=M$; есть точки, где $<M$).

Любой шар содержится целиком $\Rightarrow$ S_1 — откр;

$S_1 \neq \varnothing$.

$\Rightarrow$ S_1 — всё ; $u(x)$ — const

Зам-е Без связности



$\leftarrow$ не const.

След. (слабый принцип max).

$$u(x) \le \sup_{z\in\partial\Omega} u(z)$$

$\Delta u=0,\ u\in C(\overline{\Omega}),\ \Omega$ - огр.

$$u(x)\le \max_{z\in\partial\Omega} u(z)$$

А если в нек. точке "=" то "=" во всей связной компоненте.

$$u(x)\ge \min_{z\in\partial\Omega} u(z)$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ - огр.

Δ задачу Дирихле: (внутренняя)

$$\begin{cases}\Delta u=f & \text{в } \Omega\\ u\big|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

Если реш-е $\exists$, то оно!

Док-во. Пусть два:

$\Delta u_1=f \qquad \Delta u_2=f \qquad u:=u_1-u_2$

$u_1/_{\partial\Omega}=g \qquad u_2/_{\partial\Omega}=g \qquad \Delta u=0$

$u/_{\partial\Omega}=0$

$$0=\min_{\partial\Omega}\le u\le \max_{\partial\Omega}=0$$

$\Rightarrow u\equiv 0.$

Ограниченность важна!

Δ задачу:

$$\begin{cases}\Delta u=f\\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$ - реш-е не единств., т.к. можно добавить $\forall$ константу.

Как построить решение?

Внутренней задачи Дирихле.

$$\begin{cases}\Delta u=f & \text{в } \Omega\\ u/_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

классич. реш-е $\in C^2$; вып-ся поточечно.

$$G(x,y):=\Phi(x-y)+V_y(x)$$

фунд. реш-е ур-я Лапласа

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial n}(x)\Phi(x-y)-\frac{\partial\Phi}{\partial n}(x-y)\cdot u(x)\right)d\sigma(x)-$$

$$-\int_{\Omega}\Delta u(x)\cdot\Phi(x-y)dx \quad - (\text{II ф-ла Грина}).$$

$v=v_y(x) \qquad \Delta v=0$

$$0=\int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma(x)-\int_{\Omega}v\Delta u\,dx$$

Сложим:

$$u(y)=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}(x)\,G(x,y)\,d\sigma(x)-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\,u(x)\,d\sigma(x)-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\Delta u(x)\,G(x,y)\,dx$$

Какие возникли доп. условия:

$\Delta v=0$

$G(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega}=0$

Первое слаг. стало $=0$.

$$u(y)=-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n_x}(x,y)\,u(x)\,d\sigma(x)-\int\limits_{\Omega}\Delta u(x)\,G(x,y)\,dx$$

$$u(y)=-\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial n_x}(x,y)\,g(x)\,d\sigma(x)-\int\limits_{\Omega}f(x)\,G(x,y)\,dx$$

(по нормали: градиент · ед. вектор нормали)
по x

G - это ф-я Грина внутр. задачи Дирихле ур-я Пуассона.

$$\begin{cases}\Delta v_y(x)=0 & \text{в } \Omega\\ v_y\big|_{x\in\partial\Omega}=-\Phi(x-y)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Delta_x G=\Delta_x\Phi(x-y)=\delta_y(x)\\ G\big|_{x\in\partial\Omega}=0\end{cases}$$

по x ; единич. заряд в (·) y.

G - потенциал ед заряда в (·) y.

Как подбирать ф-ю Грина?

<u>Свойства G:</u>

1)

не может быть <0 (принцип min)
значит, здесь $G>0$.

$$\left.\begin{array}{l} G\big|_{\partial B_\varepsilon(y)}>0, \quad \text{если } \varepsilon\ll 1\\ G\big|_{\partial\Omega}=0\end{array}\right\}\Longrightarrow G\geq 0$$

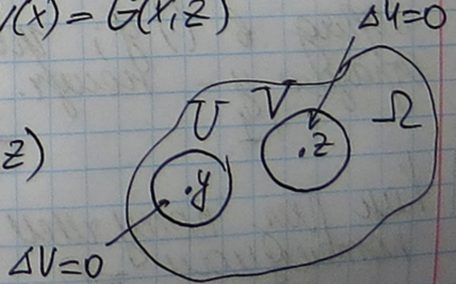
2) $G(x,y)=G(y,x)$

$G(x,y)=u(x)$

$\cancel{G(z,x)}=v(x)=G(x,z)$

Нужно: $u(z)=v(y)$.

$G(z,y)\quad G(y,z)$



$$\int_{\partial U}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)+\int_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)=0$$

$$v(y)=\int_{\partial U}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\cdot\frac{\partial v}{\partial n}\right)$$ — т.к. $\Delta v=0$ в V (ф-ла Грина)

$$u(z)=\int_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$ — т.к. $\Delta u=0$ в V

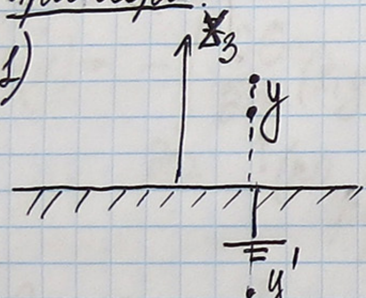
$-v(y)+u(z)=0$

$\Rightarrow u(z)=v(y)$ ч.т.д.

Как же её находить?

Примеры.

1)



$\Omega=\{z>0\}$

вообще-то мы строили ф. Грина для огр. областей... но всем пофиг.

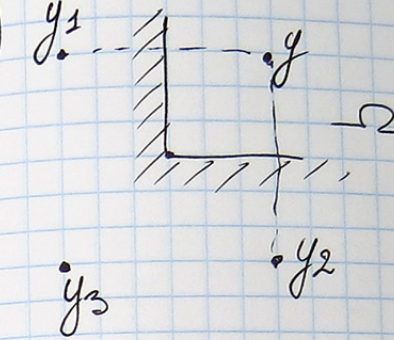
Заряд в (·) y; граница заземлена

Отразим y ($+1$) – получ. y' (-1)

Как раз получим на прямой потенциал $=0$.

$$G(x,y)=\Phi(x-y)-\Phi(x-y')$$

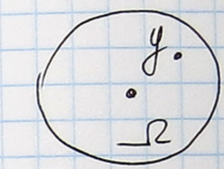
2)



3 отражения.

„метод отражения"

3)



инверсия