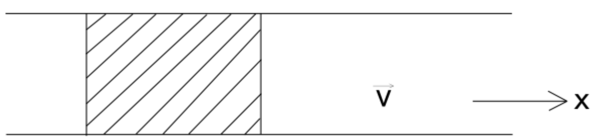
Задачи

Задача 1) На реке плывет пятно мазута.
Вопрос: куда оно уплывет и какая будет форма?



$c(t,x)$ - концентрация (зависит от времени и координаты),

$\int\limits_{x_1}^{x_2} c(t,y)dy$ - количество загрязненного вещества,

$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} c(t,y)dy = q(t,x_1) - q(t,x_2)$ (поток через x_1 минус поток через x_2),

$\frac{d}{dt}\int\limits_{x}^{x+\Delta x} c(t,y)dy = q(t,x) - q(t,x+\Delta x) \ \ | : \Delta x$ ($\frac{d}{dt}$ под интеграл $\Rightarrow c \in C^1$),

$\oint \frac{d}{dt}c(t,y)dy = \frac{q(t,x) - q(t,x+\Delta x)}{\Delta x}_{\Delta x \to 0} \to -q'_x(t,x)$,

сокращенно: $\quad c_t + q_x = 0.$

1. $q = cv -$ *конвекция.* (v может зависеть от t и x).
2. $q = -Dc_x$ - *диффузия*(распространяется из области с большей концентрацией в область с меньшей концетрацией - *закон Фика*).

Если выполнено и 1, и 2, то $q = cv - Dc_x$, где D - коэффицент диффузии. Итого:

$$c_t + (cv - Dc_x)_x = 0,$$

$$c_t + (cv)_x = (Dc)_x.$$

Частные случаи:

(1) $c_t + (cv)_x = 0$ - *конвекция*, это одномерное уравнение.

(1.1) $v = const : c_t + vc_x = 0.$

(2) $c_t = (Dc_x))_x$ - диффузия, это тоже одномерное уравнение.

(2.1) $D = const : c_t = Dc_{xx}.$

Это д.у. относительно c. v, D не обязательно постоянные. Если они не зависят от c, то это линейное уравнение: $Lc = 0$,

$$\text{где } L(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = \lambda_1 L(c_1) + \lambda_2 L(c_2).$$

Найдем решение для (1.1):

$$\begin{cases} c_t + vc_x = 0, \\ c(0, x) = g_0(x). \end{cases}$$

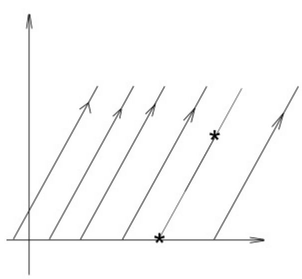
где g_0 - известная функция. Используем метод характеристик:

Рассмотрик кривые $x(t)$, т.ч. $\dot{x}(t) = v$,

$$h(t) := c(x(t), t) \ ,$$

$$\dot{h} = c_t + c_x \dot{x} = c_t + vc_x = 0.$$

То есть вдоль любой кривой $x(t)$, h является постоянной.



Берем точку, пускаем вдоль неё характеристику, на ней значение постоянное, то есть равно значению на начальных данных:

$$x = x_0 + vt,$$
$$c(t, x) = g_0(x_0) = g_0(x - vt). \qquad (*)$$

Теорема 1 *$v = const$, $g_0 \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ функция c, определяемая $(*)$ является решением (в классическом смысле), при этом рещение единственное.*

Пусть у нас теперь не просто пятно, а постоянно появляющееся пятно (трубу прорвало). Добавляется еще один источник:

$$c_t(t,x) = -q_x(t,x) + \int\limits_x^{x+\Delta x} \frac{f(t,y)dy}{\Delta x},$$

$c_t + q_x = f(t,x)$ - неоднородное транспортное уравнение. Только конвекция, диффузии нет:

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(t,x); \\ c(0,x) = g_0(x). \end{cases}$$

Метод характеристик: рассмотрим кривые $x(t)$, т.ч. $\dot{x} = v$,
$h(t) := c(x(t),t)$,

$$\dot{h} = c_t + c_x\dot{x} = c_t + vc_x = f(t,x) = f(t,x_0+vt).$$

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = f(t,x_0+vt); \\ h(0) = g_0(x_0). \end{cases}$$

$c(t,x(t)) = h(t) = g_0(x_0) + \int\limits_0^t f(s,x_0+vs)ds$ - решение д.у.

$$c(t,x) = g_0(x-vt) + \int\limits_0^t f(s,x+v(s-t))ds \qquad (**)$$

Теорема 2 *Если* $g_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $f_x \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ $\Rightarrow$ *функция C, определяемая формулой* $(**)$ *является единственным решением уравнения.*

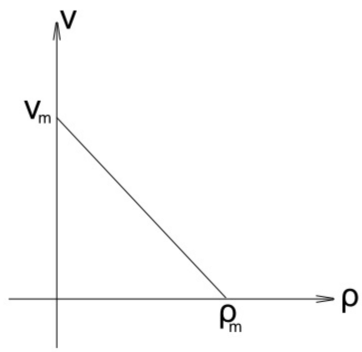
Условие на f_x следует из того, что нам нужны c_t и c_x.

Продифференцируем: (проверка)
$c_t(t,x) = -g_0(x-vt)v + f(t,x) - v\int\limits_0^t f(s,x+v(s-t))ds$

Задача 2) Как изменяется поток транспорта? В отличие от предыдущей задачи здесь есть "плотность"вместо концентрации.

$\rho(t,x)$- плотность машин.

Улица с односторонним движеним, ширины нет. Обгонов тоже нет.
$\rho_t + (v\rho)_x = 0$;
$v = v(\rho)$, т.е. уравнение нелинейное.



- например зависимость такая, $\dfrac{dv}{d\rho} < 0$.
v_m, ρ_m - максимально возсможные скорость и плотность.

$$v(\rho) = v_m\left(1 - \tfrac{\rho}{\rho_m}\right), \text{ подставляем в уравнение:}$$

$$\rho_t + v_m\left(\rho\left(1 - \tfrac{\rho}{\rho_m}\right)\right)_x = 0;$$

$$\begin{cases} \rho_t + v_m\left(1 - \dfrac{2\rho}{\rho_m}\right)\rho_x = 0 \\ \rho(0,x) = g_0(x) \end{cases} \qquad (***)$$

Используем метод характеристик:

$$\dot{x}(t) = v_m\left(1 - \tfrac{2\rho(t,x(t))}{\rho_m}\right),$$

$$\rho(t,x(t)) = \rho(0,x(0)) = g_0(x_0),$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m\left(1 - \dfrac{2g_0(x_0)}{\rho_m}\right); \\ \dot{x}(0) = x_0. \end{cases}$$

Это опять прямые. Угол наклона зависит от g_0.
Возможные проблемы (зависит от g_0):

- Проходит не через все точки.

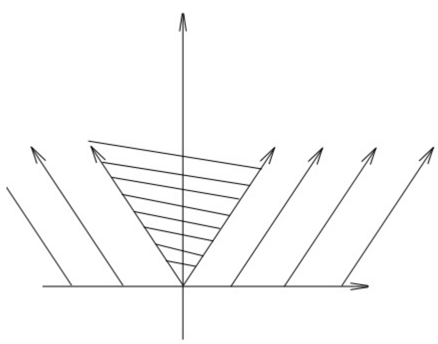
- Через одну точку могут проходить две зарактеристические линии.

Частный случай (*задача о включении зеленого цвета*).
До светофора есть машины, после - нет. Включился светофор (координата $= 0$).

$$g_0(x) = \begin{cases} \rho_m, x \leq 0; \\ 0, x > 0. \end{cases}$$

Можем график немного сгладить, но все равно проблема остается.
Уравнение характеристик:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad \text{при } x_0 > 0, \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = -v_m; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad \text{при } x_0 \leq 0.$$

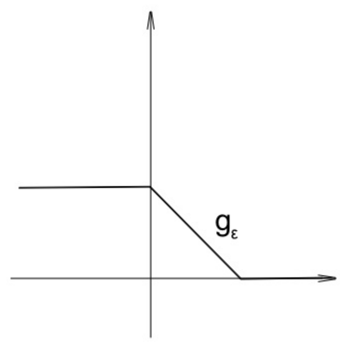


В заштрихованной области характеристик нет. Не знаем ничего про решения в ней. Что же будем делать ?
Аппроксимируем ступень в функции $g_0(x)$ линейной функцией:

$$g_\varepsilon(x) \rightsquigarrow g_0(x).$$

Хотим получить какое-нибудь (а вдруг другая аппроксимация?).
Почему будет решением? Проверим подстановкой.

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_m, & x \leq 0; \\ \rho_m \left(1 - \dfrac{x}{\varepsilon}\right), & 0 < x < \varepsilon; \\ 0, & x \geq \varepsilon. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -v_m; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad \text{при } x_0 \le 0 \ .$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_m\left(1 - \dfrac{2\rho_m\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)}{\rho_m}\right) = -v_m\left(1 - \dfrac{2x_0}{\varepsilon}\right) \\ x(0) = x_0; \\ \end{cases} \quad \text{при } x_0 \in (0, \varepsilon) \ .$$

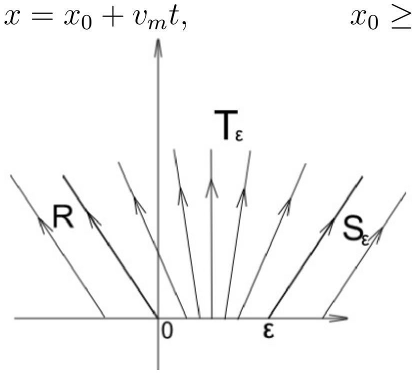
$$\begin{cases} \dot{x} = v_m; \\ x(0) = x_0; \end{cases} \quad \text{при } x_0 \ge \varepsilon \ .$$

То есть имеем 3 типа характеристик :

$x = x_0 - v_m t, \qquad x_0 \le 0$

$x = x_0 - v_m\left(1 - \frac{2x_0}{\varepsilon}\right)t, \quad x_0 \in (0, \varepsilon)$

$x = x_0 + v_m t, \qquad x_0 \ge \varepsilon$



Теперь все нормально. Через каждую точку проходит одна, и только одна характеристика.

Пусть ρ^ε - решение ε-задачи.

$\rho^\varepsilon(t,x) = g_\varepsilon(x_0)$, где x_0 - точка (причем единственная), т. ч. характеристика, начинающаяся в $(x_0, 0)$, проходит через (x,t).

Разделение зон R и T - прямая $x = -v_m t$;
Разделение зон T и S - прямая $x = \varepsilon + v_m t$;

Случаи:

1. $(x,t) \in R$
   $\rho^\varepsilon(t,x) = \rho_m$;
2. $(x,t) \in S$
   $\rho^\varepsilon = 0$;
3. $(x,t) \in T$

$$x(t) = x_0 - v_m\left(1 - \tfrac{2x_0}{\varepsilon}\right)t,$$
$$x = x_0 - v_m t + \tfrac{2v_m}{\varepsilon} t x_0,$$
$$x + v_m t = x_0\left(1 + \tfrac{2v_m t}{\varepsilon}\right),$$
$$x_0 = \varepsilon \tfrac{x+v_m t}{\varepsilon + 2v_m t};$$

$\rho^\varepsilon(t,x) = g_\varepsilon(x_0) = \rho_m\left(1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) = \rho_m\left(1 - \frac{x+v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right) = \rho_m\left(\frac{\varepsilon+2v_m t - x - v_m t}{\varepsilon+2v_m t}\right) = \rho_m\left(\frac{\varepsilon - x + v_m t}{\varepsilon + 2v_m t}\right)$.

Итого:

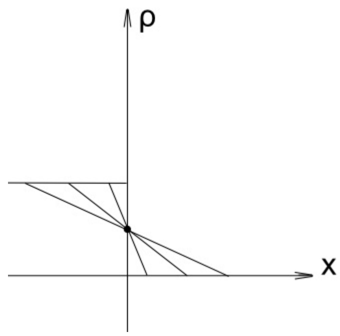
$$\rho^\varepsilon(t,x) = \begin{cases} \rho_m, & (x,t) \in R \\ \rho_m\left(1 - \dfrac{x+v_m t}{\varepsilon + 2v_m t}\right), & (x,t) \in T_\varepsilon; \\ 0, & (x,t) \in S_\varepsilon. \end{cases}$$

При $\varepsilon \to 0$:

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \rho_m, & (x,t) \in R \\ \rho_m \left(1 - \dfrac{x + v_m t}{2 v_m t}\right), & (x,t) \in T; \\ 0, & (x,t) \in S. \end{cases}$$

$\rho_m \left(1 - \frac{x+v_m t}{2v_m t}\right) = \frac{\rho_m}{2} \left(1 - \frac{x}{v_m t}\right)$

Нужно проверить, является ли решением?
График решения в каждый момент времени. Это волна разряжения. Здесь черточки соответствуют разным моментам времени.



Найденное нами решение - волна разряжения. Проверяется подстановкой. Формально это не решение (т.к. не C^1), но в каждой зоне (без границ) оно является решением.

$$g_0(x) := \begin{cases} \rho_m, & (x,t) \in R \\ 0, & (x,t) \in T_0; \end{cases}$$

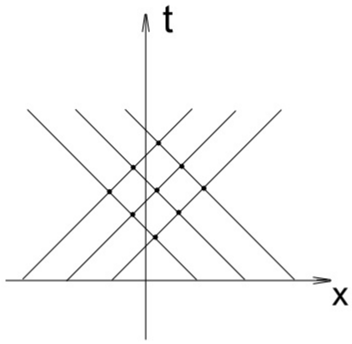
3) Формирование пробок:

$$g_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{8}\rho_m, & x \le 0; \\ \rho_m, & x > 0; \end{cases}$$

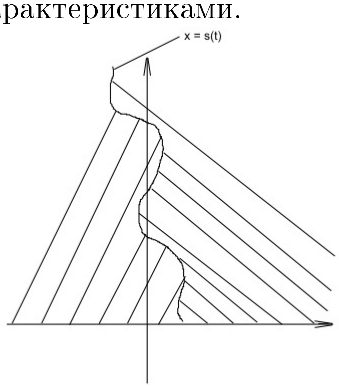
строим характеристики x(t):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_m \left(1 - \dfrac{2\rho(t,x(t))}{\rho_m}\right) = v_m \left(1 - \dfrac{2 g_0(x_0)}{\rho_m}\right); \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{4}v_m; \\ x(0) = x_0 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -v_m; \\ x(0) = x_0 > 0; \end{cases}$$



Они пересекаются ! Есть два значения (скачок). Будет разделение на зоны, в каждой из которых можно будет пользоваться определенными характеристиками.



Условие Рэнкина - Гюгонио

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(t,y)dy = q(t,x_1) - q(t,x_2);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{x_1}^{s(t)} \rho(t,y)dy + \int\limits_{s(t)}^{x_2} \rho(t,y)dy\right) = q(t,x_1) - q(t,x_2);$$

$$\int\limits_{x_1}^{s(t)} \rho_t(t,y)dy + \rho^-(t,s(t))\dot{s}(t) + \int\limits_{s(t)}^{x_2} \rho(t,y)dy - \rho^+(t,s(t))\dot{s}(t) = q(t,x_1) - q(t,x_2);$$

минус стоит перед ρ^+, так как нижний предел.

$$\int\limits_{x1}^{x2} \rho_t(t,y)dy + \rho^-(t,s(t))\dot{s}(t) - \rho^+(t,s(t))\dot{s}(t) = q(\rho(t,x_1)) - q(\rho(t,x2));$$

$x_1 \to s(t)$ - возрастает,
$x_2 \to s(t)$ - убывает.

$$\dot{s}(\rho^-(t,s(t)) - \rho^+(t,s(t)) = q(\ \rho^-(t,s(t))\ ) - q(\ \rho^+(t,s(t))\ );$$

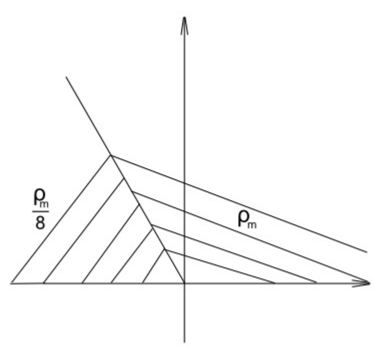
$$\dot{s} = \frac{q(\rho)|^{\pm}}{\rho|^{\pm}} := \frac{q(\rho^+(t,s(t))) - q(\rho^-(t,s(t)))}{\rho^+(t,s(t)) - \rho^-(t,s(t))};$$

Требуем, чтобы разрыв был в s(t) (и нигде больше). И накладывам условие на число разрывов. Ищем решение, удовлетворяющее услвоию Р-Г.

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \dfrac{-\frac{7}{8}v_m\frac{1}{8}\rho_m}{\frac{7}{8}\rho_m} = -\dfrac{1}{8}v_m; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad s(0) = 0; \end{cases}$$

$q(\rho^+) = \rho^+ v_m\left(1 - \frac{\rho^+}{\rho_m}\right) = 0;$
$q(\rho^-) = \rho^- v_m\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho_m}\right) = \frac{7}{8}v_m\frac{1}{8}\rho_m.$

То есть это просто прямая:



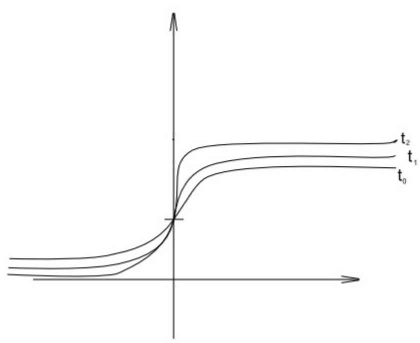
$$\rho(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\rho_m, & x < -\dfrac{1}{8}v_m t; \\ \rho_m, & x > -\dfrac{1}{8}v_m t; \end{cases}$$

Возьмем теперь "красивые"начальные данные (вдруг все будет хорошо).

$$g_0(x) = \arctan x + \tfrac{\pi}{2};$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_m \left(1 - \dfrac{2\left(\arctan x_0 + \frac{\pi}{2}\right)}{\rho_m}\right); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Но все равно две характеристики могут пересекаться.



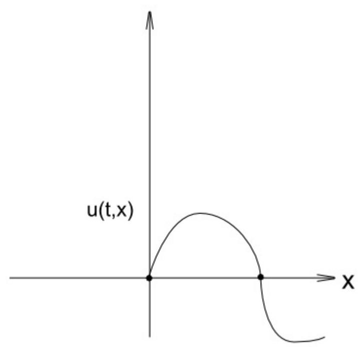
И все равно возникнет ударная волна. То есть гладкие начальные данные ничего не гарантируют.

Упражнения

1. $\begin{cases} c_t + vc_x = e^{-t}\sin t; \qquad v = const, \\ c(0,x) = 0. \end{cases}$
   решить (просто подставить в формулу).

2. $\begin{cases} u_t + (1-2u)u_x = 0; \\ u(0,x) = \arctan x. \end{cases}$
   найти решение до разрыва и время этого разрыва.

3. Задача о колебании струны. Заданы начальная форма и начальный импульс.



l - длина

Принцип наименьшего действия

Есть механическая система. T - кинетическая энергия, U - потенциальная энергия.
$A = \int\limits_{t1}^{t2} (T - U)dt$ - действие,
$A \to extr.$

Напишем этот функционал для струны:
$T = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \rho_0 u_t^2(t, y)dy,$ ρ_0 - плотность на единицу длины.
Удлинение одного элемента Δx:

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2(t, y)}dy - \Delta x = \int\limits_x^{x+\Delta x} \left(\sqrt{1 + u_x^2} - 1\right) dy \approx \int\limits_x^{x+\Delta x} \left(1 + \frac{u_x^2}{2} - 1\right) dy = \frac{1}{2} \int\limits_x^{x+\Delta x} u_x^2 dy,$$

$U = \frac{1}{2} \int\limits_0^l k_0 u_x^2 dy$, где k_0 - коэффицент упругости (зависит от материала)

$$A = \frac{1}{2} \int\limits_{t1}^{t2} dt \int\limits_0^l (\rho_0 u_t^2 - k_0 u_x^2) dx$$

ищем экстремали :

$h, u \in C_0^2([t_1; t_2] \times [0; l])$
компактный носитель

$$\frac{d}{d\varepsilon}A(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0;} = 0;$$

$$A(u+\varepsilon h) = \int\limits_{t1}^{t2} dt \int\limits_{0}^{l} (\rho_0(u_t+\varepsilon h_t)^2 - k_0(u_x+\varepsilon h_x)^2)dx = \frac{d}{d\varepsilon}A(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 2\int\limits_{t1}^{t2}\int\limits_{0}^{l}(\rho_0 u_t h_t - k_0 u_x h_x) =$$

$$2\int\limits_{t1}^{t2}\int\limits_{0}^{l}(\rho_0(-u_{tt}) + k_0 u_{xx})h(t,y)dtdy = 0;$$

$$-\rho_0 u_{tt} + k_0 u_{xx} = 0;$$

$$u_{tt} - \frac{k_0}{\rho_0}u_{xx} = 0;$$

$\boxed{u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0}$ - волновое уравнение,

$\boxed{\Box u = 0}$ - волновое уравнение,

где $\Box$ - оператор Даламбера.