Лекция от 6 апреля (7-ая суббота)

$\Delta u \ = \ f$; в R^n, $\quad f \subset C_0^2(R^n)$

Свертка с фундаментальным решением:

$$u(x) \ = \ (\Phi * f)(x) \ = \ \int\limits_{R^n} \Phi(x-y)f(y)dy \ =$$

Решение единственное? (ед-ти нет, например + любая линейная). Функция, удовл-ая ур-ию Лапласа, гармоническая.

$$= \ \int\limits_{R^n} \Phi(y)f(x-y)dy \ =: \ (f * \Phi)(x)$$

$\Delta u \ = \ f;$

$$\Delta u \ = \ \int\limits_{R^n} \Phi(y)\Delta_x f(x-y)$$

$\varphi \in C_0^\infty(R^n) \ \Rightarrow \quad (\Delta u)(\varphi) = f(\varphi)$

$$\int\limits_{R^n} \varphi(x)dx \int\limits_{R^n} \Phi(y)\Delta f(x-y)dy \ = \ \int f(z)\varphi(z)dz$$

$$\int\limits_{R^n} \Phi(y)dy \int\limits_{R^n} \varphi(x)\Delta f(x-y)dx \ =$$

$\Big[$Интегр. по частям 2 раза. Граничных членов нет$\Big]$ =

$$= \ \int\limits_{R^n} \Phi(y)dy \int\limits_{R^n} \Delta\varphi(x)f(x-y)dx \ = \ \int\limits_{R^n} f(z)\Big(\int\limits_{R^n} \Phi(y)\Delta\varphi(z+y)dy\Big)dz \ =$$

Уже доказано при выводе обобщенного решения:

$$\int\limits_{R^n} \Phi(y)\Delta W(y)dy \ = \ W(0); \quad \boxed{\Delta\Phi = \delta}$$

$$= \ \int\limits_{R^n} f(z)\varphi(z)dz \ ;$$

Определение

$\Omega \subset R^n$, если $\Delta u \ = \ 0$ в классическом смысле (внутри Ω) - гармоническая.

Утверждение:

$$\Delta u = 0 \ \Rightarrow \ u(x) \ = \ \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)d\sigma(z)$$

$$u(x) \ = \ \fint_{B_\varepsilon(x)} u(z)dz$$

Доказательство:

Введем полярные координаты. Расписываем интеграл:

$$\int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(z)dz \ = \ \int\limits_0^\varepsilon \rho^{n-1}d\rho \fint_{\partial B_\rho(x)} u(\rho,\nu)d\sigma(\nu) \ = \ \int\limits_0^\varepsilon d\rho \fint_{\partial B_\rho(x)} u(s)d\sigma(s) \ =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} u(x) S_{n-1}(\partial B_\rho(x)) d\rho \ = \ u(x)\int_0^{\varepsilon} S_{n-1}(\partial B_\rho(x)) d\rho \ = \ u(x)\big|B_\varepsilon(x)\big|$$

ч. т. д.

<u>**Теорема(обратная теорема о среднем)**</u>:

Утв.
Пусть функция $u \in C(\Omega), \quad \forall x \in \Omega, \quad \overline{B_\varepsilon}(x) \subset \Omega$

$$u(x) \ = \ \fint_{B_\varepsilon(x)} u(z)dz \ \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \ u(x) \ = \ \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)d\sigma(z) \ \overset{(2)}{\Longrightarrow} \ \Delta u \ = \ 0, \ (u \in C^2(\Omega))$$

Доказательство:

$$\underbrace{u(x)\Big|B_\varepsilon(x)\Big|}_{=u(x)\omega_n\varepsilon^n} \ = \ \int_{B_\varepsilon(x)} u(z)dz \ = \ \int_0^{\varepsilon} d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(s)d\nu(s)$$

$$\omega_n \ := \ \Big|B_1(0)\Big|$$

$u(x) \cdot \underbrace{n\omega_n\varepsilon^n}_{S_{n-1}(\partial B_\varepsilon(x))} \ = \ \int_0^{\varepsilon} d\rho \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(s)d\sigma(s)$. Теперь продифференцируем по ε

Получаем: $u(x) \cdot n\omega_n\varepsilon^{n-1} \ = \ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(s)d\sigma(s)$, или, что то же самое, $\fint_{B_\varepsilon(x)} u(s)d\sigma(s)$

Тем самым доказали (1). (2): Сначала докажем для $u \in C^2(\Omega)$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}u(x) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\frac{1}{nw_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)d\sigma(z)\Big) = \ \Big[z = x + \varepsilon y, \ d\sigma(z) = \varepsilon^{n-1}d\sigma(y)\Big] \ =$$

$$= \ \frac{1}{nw_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon y)\varepsilon^{n-1}d\sigma(y) \ = \ \frac{1}{nw_n}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon y)d\sigma y \ =$$

$$= \Big[\text{Занесем } \tfrac{\partial}{\partial\varepsilon} \text{ под знак интеграла}\Big] \ = \ \frac{1}{nw_n}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\varepsilon y)\cdot y d\sigma(y) \ =$$

$$= \ \frac{1}{nw_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla u(z)\cdot\frac{z-x}{\varepsilon}d\sigma(z) \ = \ \fint_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(z)d\sigma(z) \ = \ \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial u}{\partial n}(z)d\sigma(z) \ = \ \int_{B_\varepsilon(x)}\Delta u(z)dz$$

Следовательно:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\Delta u(z)dz \ = \ 0, \quad \forall\varepsilon \in (0, \ \varepsilon_0(x))\Big[\text{где } \varepsilon_0(x) = \sup\{r > 0 : \overline{B_r(x)} \subset \Omega; \}\Big]$$

$$\Rightarrow \Delta u(x) \ = \ 0$$

Пусть $u \in C(\Omega)$, $\quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\varkappa)$, $\quad$ Например $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$\varphi(x) \ := \ \psi(|x|)$
PICTURE

$\forall \varepsilon > 0 \ \varphi_\varepsilon(x) \ = \ \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$

$u * \varphi_\varepsilon \ =: \ u_\varepsilon$
сворачиваем: $\quad u_\varepsilon(x) \ := \ \int\limits_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy$

PICTURE

Можно считать, что u определено на всем $\mathbb{R}^n$. $u = 0$ при $u \notin \Omega$. Если дифференцируем по x, то от свойств u никак не зависит.

$u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\quad u_\varepsilon(x) \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} u(x)$, для почти всякого $x \in \mathbb{R}^n$, если $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$

$\text{supp} u_\varepsilon \subset (\text{supp } u_\varepsilon)$ (носитель u_ε - в ε-окрестность носителя u)

$$u_\varepsilon = (u * \varphi_\varepsilon)(x) \ = \ \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy \ = \ \int\limits_{B_\varepsilon(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy \ =$$

$$\int\limits_0^\varepsilon d\rho \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)d\sigma(y) \ =$$

$$= \ [y = x + \rho\nu] \ = \ \int\limits_0^\varepsilon d\rho \ \rho^{n-1} \int\limits_{\partial B_\rho(0)} u(x+\rho\nu)d\sigma(\nu)\frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\frac{\rho}{\varepsilon}) \ = \ \int\limits_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\frac{\rho}{\varepsilon})d\rho \int\limits_{\partial B_\rho(x)} u(y)d\sigma(y) \ =$$

$$\underbrace{=}_{\text{теорема о среднем}} \quad u(x)\int\limits_0^\varepsilon n w_n \rho^{n-1}\frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\frac{\rho}{\varepsilon})d\rho \ = [\text{замена } r = \tfrac{\rho}{\varepsilon}] = u(x)\Big|_0^1 r\omega_n r^{n-1}\varepsilon\psi(r)dr =$$
$u(x)$, где ψ выбираем так, чтобы этот интеграл $= 1$

Таким образом доказали, что $\forall x \in \Omega \quad u_\varepsilon(x) = (u * \phi_\varepsilon)(x) = u(x) \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0(x))$

$\Rightarrow u \in C^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \Delta u = 0$

Попутно доказали, что всякая гармоничная функция бесконечно дифф-ма внутри области. Доказали 2 переход.
Пусть u - гармон. внутри области

1) гарм. $\Longrightarrow$ удовл. теореме о среднем
2) теорема о среднем $\Longrightarrow \ C^\infty$

Следствие(полезное)
Пусть u- гармоническая функция в связной области Ω, если u достигает максимума в (.) Ω, то $u = const$:

Доказательство:

Пусть достигает. Назовем максимальным значением М два множества:

1) где достигается максимум: $A_1 = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$.

2) где не достигается максимум: $A_2 = \{x \in \Omega : u(x) < M\}$.
$A_1 \cup A_2 = \Omega, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$

A_1 замкнуто (так как $u \in C(\Omega)$) и открыто.
Рассмотрим $\forall\, x_0$ из этого множества. Тогда $\forall \varepsilon << 1 B_\varepsilon \subset A_1$ (иначе среднее по B_ε было $< M$, но оно $= u(x_0) = M$). Так что A_1 открыто.

Таким образом получаем $\Omega = A_1 \sqcup A_2$. Оба множества и открыты и замкнуты, но $A_1 \neq \emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\text{связность}} A_1 = \Omega \Rightarrow u \equiv M$ на Ω.

Что и требовалось доказать.

Замечание: без связности не верно.

Следствие(слабый принцип максимума):

$u(x) \ \leq \ \max\limits_{z \in \partial\Omega} \mathrm{u(z)}$

$\Delta u \ = \ 0, \quad u \in C(\overline{\Omega}), \quad \Omega$ - огр., то:

$$u(x) \ \leq \ \max_{z \in \partial\Omega} \mathrm{u(z)}$$

Замечание. А если в некоторой точке =, то = во всей связной компоненте

$$u(x) \ \geq \ min\, u(z), \quad z \in \partial\Omega$$

Если где-то =, то = всюду в связном компакте точки, где достигается равенство.

$\bullet$

Едиственное решение внутренней задачи Дирихле.

$$\begin{cases} \Delta u \ = \ f \\ u\Big|_{\partial\Omega} \ = \ g \end{cases}, \text{ в } \Omega, \text{ где } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Если решение существует, то оно единственно.

Доказательство:

Пусть два решения
$\Delta u_1 \ = \ f, \quad \Delta u_2 \ = \ f, \quad u_1\Big|_{\partial\Omega} \ = \ g, \quad u_2\Big|_{\partial\Omega} \ = \ g$
$u := u_1 \ - \ u_2$

$\Delta u \ = \ 0, \quad u\Big|_{\partial\Omega} \ = \ 0$

Функция Грина внутренней задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u \ = \ f \\ u\Big|_{\partial\Omega} \ = \ q \end{cases}, \text{ в } \Omega$$

Строим функцию: $G(x,y) \ = \ \Phi(x,y) \ + \ V_y(x), \quad G(x,y)\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0$
$\Phi(x,y)$ - фундам. решение ур-ия Лапласа

$u(y) \ = \int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(x)\Phi(x-y) \ - \ \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{n}}(x-y)u(x)\Big)dG(x) \ - \ \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\Phi(x-y)dx$ - 3 формула Грина.

$\nu \ = \ \nu_y(x), \quad \Delta\nu \ = \ 0$ - ищем функцию с таким свойством.

$$0 \ = \ \int\limits_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial u \overline{n}} \ - \ u\frac{\partial}{\partial v \overline{n}})d\delta(x) \ - \ \int\limits_{\Omega} v\Delta u dx$$
$$u(y) \ = \ \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(x)G(x,y)dG(x) \ - \ \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}}(x,y)u(x,y)d\delta(x) \ - \ \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)G(x,y)dx$$

$$u(y) \ = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_x}(x,y)u(x)d\delta(x) \ - \ \int\limits_{\Omega} \Delta u(x)G(x,y)dx$$

$$u(y) \ = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \overline{n}_x}(x,y)g(x)d\delta(x) \ - \ \int\limits_{\Omega} f(x)G(x,y)dx$$

G - это функция Грина внутри задачи Дирихле ур-ия Пуассона:

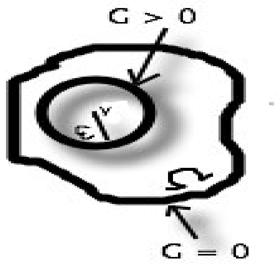
$$\begin{cases} \Delta\nu_y(x) \ = \ 0, \quad \text{в } \Omega \\ \nu_y\Big|_{x\in\partial\Omega} \ = \ -\Phi(x-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_x G \ = \ \Delta_x\Phi(x-y) \ = \ \delta_y(x), \quad \text{единичный заряд в точке у} \\ G\Big|_{x\in\partial\Omega} \ = \ 0 \end{cases}$$

G - потенциал единичного заряда в точке у. Как подбирать функцию Грина?

Существует 2 вопроса:
1) Как выглядит функция и какие ее свойства?
2) Как ее искать? (Вообще-то это искусство =))

Свойства функции Грина G:

1) 

(рисунок) не может быть < 0 (принцип максимума). Значит здесь G > 0

$$G \geq 0 \Longleftarrow \begin{cases} G\Big|_{\partial B_\varepsilon(y)} > 0, & \text{если } \varepsilon << 1 \\ G\Big|_{\partial\Omega}' = 0, & \Rightarrow G \geq 0 \end{cases}$$

2) $G(x, y) = G(y, x)$

$$G(x, y) = u(x), \quad v(x) = G(x, z)$$

$$\text{нужно: } \underbrace{u(z)}_{=G(z,y)} = \underbrace{v(y)}_{=G(y,z)}$$

$$\int\limits_{\partial u} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right) - \int\limits_{\partial v} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right) = 0$$

$$v(y) = \int\limits_{\partial u} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right), \quad \text{т.к. } \Delta v = 0 \text{ в } U$$

$$u(z) = \int\limits_{\partial v} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overline{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right), \quad \text{т.к. } \Delta u = 0 \text{ в } V$$

$$-v(y) = u(z) = 0 \Rightarrow u(z) = v(y)$$

ч. т. д.