Шашковой Елизаветы, 344

...ные задачи.

Сергей Михайлович Машкарский

03.09.2012.

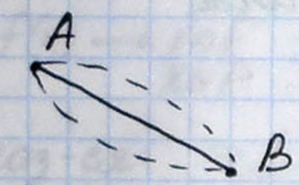
Введение

Задачи выглядят так:

$$f(x) \longrightarrow \inf_{x \in P} \qquad (1)$$

$$g(x) \longrightarrow \sup_{x \in P} \qquad (2)$$

Пример:



Выбрать путь так, чтобы лыжник скатился как можно быстрее.

Задачи для упражнений войдут в экзамен!

Билет = 2 вопроса + задача.

Литература:

1) Мой конспект;
2) Гавурин М.К., Малоземов В.Н. „Экстр. задачи с линейными ограничениями".
3) http://www.math.spbu.ru/ki0/ „Отдельные лекции"

В 1,2: $f(x)$, $g(x)$ – целевые функции.

Мн-во P – мн-во планов.

x (аргумент) – план

Решить (1) означает найти $x_* \in P$:

$f(x_*) \le f(x) \quad \forall x \in P$.

Решить (2) озн. найти такие $x^* \in P$:

$g(x^*) \ge g(x) \quad \forall x \in P$

x^*, x_* – оптимальные планы.

Вопросы:

1) Сущест-ние решения;

2) Характеризация решения (критерий оптимальности);

3) Единств-ть решения;

4) Если единств. нет – описать все мн-во решений;

5) Численный метод решения (как её решать?)

Задачи (1) и (2) – задачи мат. программирования.

Часто ответом будет алгоритм или программа.

Будем рассм. только inf.

$-g(x) \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (2')

$x^* \in P$ – решение (2) $\Leftrightarrow g(x^*) \ge g(x) \quad \forall x \in P$

$\Leftrightarrow -g(x^*) \le -g(x) \quad \forall x \in P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^*$ – реш. (2')

$\alpha f(x) + \beta \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (3)

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

Аналогично.

Def: Две экстр. задачи на мин.

$f(x) \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (4) и $F(y) \longrightarrow \inf\limits_{y \in Q}$ (5)

наз-ся эквив-ными, если

$$\begin{cases} \forall x \in P \ \exists y \in Q: \ F(y) \le f(x) \\ \forall y \in Q \ \exists x \in P: \ f(x) \le F(y) \end{cases}$$ и наоборот:

Л Для пары экв. экстр. задач 4 и 5 верно:

$$\inf_{x \in P} f(x) = \inf_{y \in Q} F(y) \quad (6)$$

при этом:

1) Обе задачи одновр. либо разрешимы, либо нет.

Док-во.

1) Обозн. $\mu = \inf\limits_{x \in P} f(x)$; $\nu = \inf\limits_{y \in Q} F(y)$

] $x \in P$ – план 4 $\Rightarrow$ (т.к. эквив.)

$\exists\, y \in Q:\ f(x) \geq F(y) \geq \nu$

т.е. $f(x) \geq \nu$ – верно $\forall x \in P$

$\Rightarrow \inf\limits_{x \in P} f(x) \geq \nu$ (перешли к inf)

т.е. $\mu \geq \nu$

Аналогично $\forall y \in Q \Rightarrow F(y) \geq \mu$

$\Rightarrow \nu \geq \mu$

$\Rightarrow \underline{\mu = \nu}$.

2) ~~А~~] $x_* \in P$ – оптим. план (4)

$\underset{\text{экв.}}{\Rightarrow} \exists\, y_* \in Q:\ F(y_*) \leq f(x_*)$

Имеем: $\nu \leq F(y_*) \leq f(x_*) = \mu \overset{(6)}{=} \nu$

$\Rightarrow F(y_*) = \nu$, т.е.

y_* – опт. план (5).

Обратное аналогично.

ч.т.д.

Примеры:

1) $p(x) := \underbrace{\max\limits_{i \in 1:m} f_i(x)}_{u} \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (7)

Построим новую ф-цию:

$q(x, u) := u \longrightarrow \inf$ (8)

$f_i(x) \leq u,\ i \in 1:m$

$x \in P$

Пусть $x_0 \in P$ – план 7.

(x_0, u_0) – план 8, если $u_0 = \max\limits_{i \in 1:m} f_i(x_0)$

$u_0 = q(x_0, u_0)$ ———— $p(x_0)$

Обратно:

] (x_0, u_0) – план 8

$\Rightarrow x_0 \in P$ – план 7

$f_i(x_0) \leq u_0,\ i \in 1:m \Rightarrow \underbrace{\max\limits_{i \in 1:m} f_i(x_0)}_{p(x_0)} \leq \underbrace{u_0}_{q(x_0, u_0)}$

Значит, эти задачи эквив-ны.

Если (x_*, u_*) – реш-е 8 $\Rightarrow u_* = \max\limits_{i \in 1:m} f_i(x_*)$

2) $p(x) := \sum\limits_{i=1}^{m} |f_i(x)| \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (9)

$q(x, u, v) := \sum\limits_{i=1}^{m} (u_i + v_i) \longrightarrow \inf\limits_{x \in P}$ (10)

$f_i(x) = u_i - v_i$

$u_i \geq 0,\ v_i \geq 0$

$i \in 1:m$

~~$x \in P$~~

$\forall\, w \in \mathbb{R}\ \exists\, u, v \geq 0 : |w| = u + v,\ w = u - v$

/* $u = \frac{|w| + w}{2} \geq 0;\quad v = \frac{|w| - w}{2} \geq 0$ */

Докажем, что 9 и 10 – эквив.

$\exists\, x_0 \in P$ – план 9.

при каждом $i \in 1:m$: $f_i(x_0) = u_i - v_i$

$|f_i(x_0)| = u_i + v_i$

Тогда (x_0, u, v) – план 10.

$$p(x_0) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x_0)| = \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = q(x_0, u, v)$$

Обратно:

$\exists\, (x_0, u, v)$ – план 10.

$\Rightarrow x_0 \in P$ – план 9. – нужный?

$$p(x_0) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x_0)| = \sum_{i=1}^{m} |u_i - v_i| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) = q(x_0, u, v)$$

$\Rightarrow$ они эквив-ны.

Задачи:

① $P = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$

Док-ть, что $\inf\limits_{x \in P} f(x) = \min\limits_{i \in 1:m} \left\{ \inf\limits_{x \in P_i} f(x) \right\}$

② Пара экстр. задач:

$-|x| \longrightarrow \inf$, $-1 \leq x \leq 1$ $\qquad$ $-(u+v) \longrightarrow \inf$, $x = u - v$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$

Д-ть, что эти две задачи не эквив.

I. Линейные экстремальные задачи.

06.09.2012.

§1. Векторы и матрицы. Индексная техника.

Пр-во $\mathbb{R}^N$ – мн. вещ. пр-во.

$x = x[N]$ – массив данных – вектор

т.е. $x[j]$, $j \in N$, т.е. N – не число, а мн-во.

Если $N = 1:n$, то будем писать $\mathbb{R}^n$

$\langle x, y \rangle = x[N] \times y[N] =$

$= \sum\limits_{j \in N} x[j]\, y[j]$ – скалярное пр-е

Нулевой вектор: $\mathbb{O}[N]$: $\mathbb{O}[j] = 0$, $j \in N$

Матрицы:

$A = A[M, N]$: $A[i, j]$, $i \in M$, $j \in N$

$A[M_1, N_1]$, $M_1 \subset M$, $N_1 \subset N$ – подматрица м. A

$A[i,N]$, $i \in M$ – i-я строка матрицы A.

$A[M,j]$, $j \in N$ – j-й столбец м. A.

1) $y = Ax = A[M,N] \times x[N]$ – вектор с компонентами

$y[i] = A[i,N] \times x[N]$, $i \in M$

2) $v = uA = u[M] \times A[M,N]$ – вектор

$v[j] = u[M] \times A[M,j]$, $j \in N$

3) $\mathbb{0}[M,N]$: – нулев. матрица

$E[N,N]$: $E[i,j] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – един. матрица

4) Вектор $x[N] \geq \mathbb{0}[N]$ $(x \geq \mathbb{0})$, если

$x[j] \geq 0$, $j \in N$

5) $a, b \in \mathbb{R}^N$: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq \mathbb{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a[j] \geq b[j]$, $j \in N$

Свойства:

1) $N_1 \subset N$, $N_2 = N \setminus N_1$

тогда $c[N] \times x[N] = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \cdot x[N_2]$

Док-во $\sum\limits_{j \in N} = \sum\limits_{j \in N_1} + \sum\limits_{j \in N_2}$

2) $N_1 \subset N$, $N_2 = N \setminus N_1$

$A[M,N] \times x[N] = A[M,N_1] \times x[N_1] + A[M,N_2] \times x[N_2]$

Док-во $A[i,N] \times x[N] \overset{1}{=} A[i,N_1] \times x[N_1] + A[i,N_2] \times x[N_2]$

Аналог. $M_1 \subset M$, $M_2 = M \setminus M_1$

$u[M] \times A[M,N] = u[M_1] \times A[M_1,N] + u[M_2] \times A[M_2,N]$

Сл-е $A[M,N] \times x[N] = \sum\limits_{j \in N} A[M,j] \times x[j]$ – лин. комб. столбцов A.

$u[M] \times A[M,N] = \sum\limits_{i \in M} u[i] \times A[i,N]$ – лин. комб. строк м. A.

Решить систему $Ax = B$ значит, найти коэф-ты разложения вект. B по столбцам A.

3) $u[M] \times (A[M,N] \times x[N]) = (u[M] \times A[M,N]) \times x[N]$

Проверить!

Короче: $\langle u, Ax \rangle = \langle uA, x \rangle$

$A = A[M,N]$ $A^T = A^T[N,M]$: $A^T[j,i] = A[i,j]$ $i \in M$, $j \in N$

Векторы uA, и $A^T u$ равны покомпонентно (не с точки зрения алгебры! т.к. одно – строка, а второе – столбец)

$\Rightarrow \langle u, Ax \rangle = \langle A^T u, x \rangle$

4) $N_1 \subset N$

$E[N_1,N] \times x[N] = x[N_1]$

$$x[N] \times E[N, N_1] = x[N_1]$$

<u>Д-во</u>: $E[N_1, N] \times x[N] = E[N_1, N_1] \times x[N_1] +$

$$+ E[N_1, N \setminus N_1] \times x[N \setminus N_1] = x[N_1]$$

$$\text{"} \quad ⓘ$$

<u>Задачи</u>:

③ Пусть $A[M,N]$ – мат. с ЛНЗ столбцами.

$\exists M_0 \subset M$:

$\forall\, i \in M \setminus M_0$ можно записать:

$$A[i,N] = u_i[M_0] \times A[M_0, N]$$

<u>Д-ть</u>: столбцы $A[M_0, N]$ тоже ЛНЗ.

§2. Постановка задачи линейного программирования.

$$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf \qquad (1)$$

$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

$$x[N_1] \geq ⓘ[N_1]$$

Здесь $N_1 \subset N$, $N_2 = N \setminus N_1$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ $M_1 \cup M_2 = M$

Ω – мн-во планов задачи (1).

c, A, b – произвольные

<u>Пример</u> (Задача планирования производства).

m станков $(i = 1, 2, \ldots m)$

n видов деталей $(j = 1, \ldots n)$

$p_1, \ldots p_n$ – ассортим. деталей для производства 1 изделия.

a_{ij} – кол-во деталей j-го вида, кот. производит i-ый станок за смену.

x – план производства.

x_{ij} – часть смены, кот. i-ый станок будет делать деталь j-го вида.

Условие: нет простоев.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in m.$$

$a_{ij} x_{ij}$ – столько дет. j-го вида i-ый ст. за смену.

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$ – кол-во дет. j-го вида со всего завода за смену.

$\min\limits_{j \in 1:n} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}}{p_j}$ – общее кол-во изделий за смену.

<u>Задача</u>

$$\min_{j \in 1:n} \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij}}{p_j} \longrightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in 1:m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in 1:m, \; j \in 1:n$$

Эквив-ная: $u \longrightarrow \max$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \geq u, \quad j \in 1:n$$

(т.к. min)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i \in 1:m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in 1:m \quad j \in 1:n \qquad \underline{v = -u}$$

$$v \longrightarrow \inf$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} + v \geq 0, \quad v \in 1:m$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j \in 1:n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in 1:m, j \in 1:n$$

<u>Задача ЛП в канонич. форме запис.</u>

$$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf \qquad (2)$$

$$A[M,N] \times x[N] = b[M]$$

$$x[N] \geq \mathbb{0}[N]$$

Короче: $\langle c, x \rangle \longrightarrow \inf$

$$Ax = b, \quad x \geq \mathbb{0}$$

Пусть $x_0 \in \Omega$ - план зад. (1)

Положим: $w_0[M_1] = A[M_1, N] \times x_0[N] - b[M_1] \geq$

$\geq \mathbb{0}[M_1]$

$x_0[N_2] = y_0[N_2] - z_0[N_2], \quad y_0[N_2] \geq \mathbb{0}[N_2]$

$z_0[N_2] \geq \mathbb{0}[N_2]$

Ограничения на x_0: $A[M_1,N](y_0[N_2] - z_0[N_2])$

$$A[M_1,N_1] \times x_0[N_1] + A[M_1,N_2] \times y_0[N_2] - A[M_1,N_2] \times z_0[N_2] -$$

$$- w_0[M_1] = b[M_1]$$

$$A[M_2,N_1] \times x_0[N_1] + A[M_2,N_2] \times y_0[N_2] - A[M_2,N_2] \times z_0[N_2] =$$

$$= b[M_2]$$

$$x_0[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1], \quad y_0[N_2] \geq \mathbb{0}[N_2], \quad z_0[N_2] \geq \mathbb{0}[N_2]$$

$$w_0[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$$

Получили канонич. ор-я на план

$$v_0 = (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$$

М-ца ограничений:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A[M_1,N_1] & A[M_1,N_2] & -A[M_1,N_2] & -E[M_1,M_1] \\ A[M_2,N_1] & A[M_2,N_2] & -A[M_2,N_2] & \mathbb{0}[M_2,N_1] \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{0}[M_2,M_1] = -E[M_2,M_1] \qquad M_1 \cap M_2 = \varnothing$$

$\Rightarrow$

$$A_0 = (A[M,N_1], A[M,N_2], -A[M,N_2], -E[M,M_1])$$

$$\langle c, x_0 \rangle = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times y_0[N_2] -$$

$$- c[N_2] \times z_0[N_2]$$

Полож. $c_0 := (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{0}[M_1])$

$$\Rightarrow \langle c, x_0 \rangle = \langle c_0, v_0 \rangle$$

Задача:

$F(v) := \langle c_0, v\rangle \longrightarrow \inf$ (3)

$A_0 v = b,\ v \geq \mathbb{0}$

(T) Задачи (1) и (3) эквивалентны.

Док-во

Если x_0 - план (1) $\longrightarrow$ $v_0 = (x_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$ - план (3)

Это мы сделали ранее. Т.е. план з. (1) сопоставили плану з. (3).

В обрат. сторону: пусть v_0 - план (3)

$v_0 = (v_0[N_1], y_0[N_2], z_0[N_2], w_0[M_1])$

сопоставим $x_0 = (v_0[N_1], y_0[N_2] - z_0[N_2])$

будет ли это план (1)?

$A[M,N] \times x_0[N] = b[M_1] + w_0[M_1] \geq b[M_1]$

$A[M_2,N] \times x_0[N] = b[M_2]$

$x_0[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1] \Rightarrow$ да, это план.

При этом $\langle c, x_0\rangle = c[N_1] \times x_0[N_1] + c[N_2] \times y_0[N_2] - c[N_2] \times z_0[N_2] = \langle c, v_0\rangle$

ч.т.д.

Задача:

(4) Решить экстр. задачу:

$v \longrightarrow \inf$

$u_k - v = a_k,\ k \in 1:m$

$v \geq 0,\ u_k \geq 0,\ k \in 1:m$

где $a_1, \dots a_m$ - фикс. числа

§3. Теорема о существовании решений.

$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf$ (1)

$A[M,N] \times x[N] = b[M]$

$x[N] \geq \mathbb{0}[N]$

Ω - мн-во планов

$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ - замкн. и огр.} \Rightarrow \text{компакт.} \\ \text{линейн. ф-я - ~~н~~ непр.}\end{array}\right\} \Rightarrow$ достиг. своего мин. (II т. Вейерш.)

Def: Пусть $x \in \Omega$ - план (1)

$N_+(x) = \{j \in N \mid x[j] > 0\}$ - носитель плана x.

Ясно, что $x[j] = 0$, $j \in N \setminus N_+(x)$ (т.к. $x[N] \geq 0$).

План x - базисный план (БП), если $A_j = A[M,j]$ - $j \in N_+(x)$ - ЛНЗ

Если $b = \mathbb{0}$, то $x = \mathbb{0}$ - тоже план, по опр-ю он ~~БП~~ БП.

Пусть $x \neq \mathbb{0}$ - БП. Что это значит?

$\sum_{j \in N_+} x[j] A_j = b$, обозн.: $N_+ := N_+(x) \neq \varnothing$

$x[j] > 0,\ j \in N_+$; $x[j] = 0,\ j \in N \setminus N_+$

$\sum_{j\in N_+} z[j]A_j = \mathbb{0}$ — СЛУ отн-но $z[j]$ имеет только нул. реш-е (т.к. БП).

$\Updownarrow$

$A[M,N_+]\times z[N_+] = \mathbb{0}[M]$ (2)

Зам-е: x - БП, $N_+ = N_+(x) \Longrightarrow$ (из опр-я) т.к. N_+ векторов размерности M л/нз

$|N_+| \le |M|$

если $|N_+| = |M|$, то x - невырожденный БП.

$|N_+| < |M|$, то x - вырожд. БП.

Т

Пусть в зад. (1) мн-во планов непусто и целев. ф-я огр. снизу на Ω.

$\Rightarrow$ У зад. (1) $\exists$ оптим. базисный план.

Л В усл-ях теоремы, если $b \ne \mathbb{0}$, любому плану $x_0 \in \Omega$ можно сопоставить y_0 - БП: $\langle c, x_0\rangle \ge \langle c, y_0\rangle$

Док-во.

$]\, x_0 \in \Omega$ - план (1), $N_+ := N_+(x_0)$

Рассм. СЛУ (2):

если (2) имеет только нул. реш., то x - БП $\Rightarrow$ $y_0 := x_0$ - ok.

Если (2) имеет нетрив. реш. $z_0[N_+] \ne \mathbb{0}$

Доопределим: $z_0[N\setminus N_+] := \mathbb{0}[N\setminus N_+]$

$\Rightarrow z_0 = z_0[N]$

Его св-ва: $Az_0 = \mathbb{0}$, $z_0 \ne \mathbb{0}$

Iсл. $\langle c, z_0\rangle = 0$. Считаем: $\exists j \in N_+$: $z_0[j] > 0$ (иначе вместо z_0 рассм. $-z_0$)

Рассм. луч $x(t) := x_0 - tz_0$, $t > 0$

$x(t) \in \Omega$?

$Ax(t) = Ax_0 - t\underbrace{Az_0}_{\mathbb{0}} = Ax_0 = b \quad \forall t$

$x_0 - tz_0 \ge \mathbb{0}$? — верно на $N\setminus N_+$

— верно на $j \in N_+$: $z_0[j] \le 0$ $\forall t > 0$

$x_0[j] - tz_0[j] \ge 0$ при $j \in N_+$: $z_0[j] > 0$ (таких j $\exists$ кот)

$t \le \frac{x_0[j]}{z_0[j]}$ при всех таких j.

Положим $t_0 = \min\left\{\frac{x_0[j]}{z_0[j]} \,\middle|\, j \in N_+, z_0[j] > 0\right\}$ (3)

Обозн. j_0 - индекс, на кот. достиг. min.

Рассм. $x_1 := x_0 - t_0 z_0$

$Ax_1 = b$, $x_1[N] \ge \mathbb{0}[N]$ - план (1)

$x_1[N\setminus N_+] = \mathbb{0}[N\setminus N_+]$

$x_1[j_0] = 0$ (!) - тоже!

Но $j_0 \in N_+$, $x_0[j_0] > 0$ $\Longrightarrow N_+(x_1) \subsetneq N_+(x_0)$

При этом: $\langle c, x_1\rangle = \langle c, x_0\rangle - t\underbrace{\langle c, z_0\rangle}_{0} = \langle c, x_0\rangle$

Т.е. от плана x_0 перешли к плану x_1.

II сл. $\langle c, z_0\rangle \neq 0$

Можем считать, что $\langle c, z_0\rangle > 0$

Покажем, что $\exists\, j\in N:\ z_0[j] > 0$?

Пусть не так: пусть $z_0 \leq \mathbb{0}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 - t z_0 \in \Omega \quad \forall\, t>0$

$$\langle c, x(t)\rangle = \langle c, x_0\rangle - t\underbrace{\langle c, z_0\rangle}_{>0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad ?!$$

противоречие с усл-ями теоремы.

$\Rightarrow \exists\, j\in N:\ z_0[j] > 0.$ /* $j\in N_+$ */

Так же, как в сл. I строим $x_1 := x_0 - t_0 z_0$, где t_0 – по ф-ле (3):

$N_+(x_1) \subsetneq N_+(x_0)$

$$\langle c_1, x_1\rangle = \langle c, x_0\rangle - \underbrace{t_0}_{>0}\underbrace{\langle c, z_0\rangle}_{>0} < \langle c, x_0\rangle$$

Вывод: таким образом, в $\forall$ случае, когда x_0 – не БП, мы можем перейти к плану x_1 с меньшим носителем и таким же, либо меньшим знач-ем целевой ф-ции. Если x_1 – не БП, то аналог. переходим к x_2, .. и т.д. пока не дойдем до БП.

Будем выкид. по одному эл-ту из носителя, и упремся.

ч.т.д. (леммы)

Док-во (теоремы)

Если $B = \mathbb{0}$:

$x_* = \mathbb{0}$ – БП – оптим.?

Покажем, что: $\langle c, x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x\in\Omega$

Пусть не так: $\exists\, x_0\in\Omega:\ \langle c, x_0\rangle < 0.$

Рассм. луч: $t x_0 \in \Omega \quad \forall\, t>0$

$$\langle c, t x_0\rangle = t\underbrace{\langle c, x_0\rangle}_{<0} \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty \quad ?!$$

$\langle c, x\rangle \geq 0 = \langle c, x_*\rangle \quad \forall\, x\in\Omega$

$\Rightarrow$ по опр. x_* – оптим. – ок.

Если $B \neq \mathbb{0}$:

$\Omega \neq \varnothing \Rightarrow x_0\in\Omega$ – план $\overset{\wedge}{\Rightarrow} \exists\, y_0$ – БП

Покажем, что баз. планов конечное число; а для этого покажем, что разл. носителям соотв-ют разл. БП:

Пусть не так: $]\, y_0, y_1$ – БП:

$y_0 \neq y_1,\quad N_+(y_0) = N_+(y_1) := N_+$

$$\sum_{j\in N_+} y_0[j] A_j = b \qquad \sum_{j\in N_+} y_1[j] A_j = b$$

$$\Rightarrow \sum_{j\in N_+} (y_0[j] - y_1[j]) A_j = \mathbb{0}$$

Но $\{A_j\}_{j\in N_+}$ – ЛНЗ (т.к. базисн) $\Rightarrow y_0[j] = y_1[j]$ $j\in N_+$

При этом на $N \setminus N_+$ $y_0[j] = y_1[j] = 0$

$\Rightarrow y_0[N] = y_1[N]$ – ?!

Разным соотв-ют разные.
Носителей конечное число. $\Rightarrow$ БП то-же конеч. число.

Пусть $y_0, y_1, \dots y_p$ – все БП зад. (1).

Обозн. y_* – БП: $\langle c, y_* \rangle = \min\limits_{i \in 0:p} \langle c, y_i \rangle$

$\forall x \in \Omega \ \exists y_k$ – БП: $\langle c, x \rangle \geq \langle c, y_k \rangle \geq$

$\geq \min\limits_{i \in 0:p} \langle c, y_i \rangle = \langle c, y_* \rangle$

$\Rightarrow y_*$ – оптим. БП.

ч.т.д.

Зам-е:

Т. показывает, что если реш-е з. (1) сущ-ет, то оно нах-ся среди базисных планов.
Если размерность задачи невелика, то её можно решить просто перебрав все БП.

13.09.2012

Пример:

1) Решить задачу:

$x_1 - 8x_2 - 5x_3 \longrightarrow \inf$

$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$x_j \geq 0, \ j \in 1:3$

Носит.	БП	Зн-е цел. ф-ции
{1}	НЕТ	—
{2}	НЕТ	—
{3}	НЕТ	—
{1,2}	(1, 1, 0)	−7
{1,3}	НЕТ	—
{2,3}	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	−7

– не разреш. с помощ. решениями.

({1,2,3} нет, т.к. 3 двумерных вектора не могут быть лин. независ).

Ответ: $y_0 = (1, 1, 0)$
$y_1 = (0, 2/3, 1/3)$

2) $-x_1 + x_2 - x_3 \longrightarrow \inf$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$x_j \geq 0, \ j \in 1:3$

Носит.	БП	ЦФ
{1}	нет	—
{2}	нет	—
{3}	(0,0,1)	−1
{1,2}	(1,1,0)	0
{1,3}	нет	—
{2,3}	нет	—

вырожд.

(т.к. вторая комп. =0, а должна >0).

Ответ: $y_0 = (0, 0, 1)$ – оптим. вырожд. б.п.

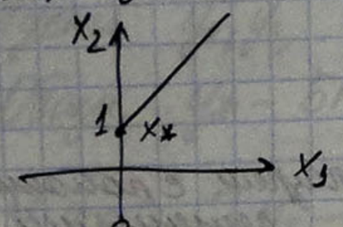
3) $f(x) := -x_2 \longrightarrow \inf$

$-x_1 + x_2 = 1$ $\quad \{1\}$ нет

$x_1 x_2 \geq 0$ $\quad \{2\}$ $(0,1) =: x_*$

x_* - реш-е? Нет!

Т.к. мн-во решений неограничч!



$\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = -\infty$

<u>Ответ:</u> решений нет

Рассмотрим задачу лин прогр. в общем виде:

$$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \qquad (4)$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1]$$

Ω - мн-во планов

(T)

Задача (4) имеет реш-е $\Longleftrightarrow$ мн-во $\Omega \neq \varnothing$ и целев. ф-я огр. снизу на Ω.

<u>Док-во</u>

"$\Rightarrow$" очевидно

"$\Leftarrow$" Задачу (4) можно свести к эквив. ей задаче в каноник. форме записи;

У последней мн-во планов $\neq \varnothing$, цел. ф-я огр. снизу на Ω;

По предыдущ. т. эта задача имеет решение;

По эквив-ти з. (4) тоже имеет реш-е.

ч.т.д.

<u>Задача</u> (и):

(5) Решить задачу ЛП:

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \longrightarrow \inf$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3$$

(6) Решить задачу ЛП:

$$-x_1 + 4x_2 - 5x_3 \longrightarrow \inf$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

(свести к задаче в каноник. форме).

(7) Рассм. параметрич. задачу ЛП:

$$ax_1 + x_2 + x_3 \longrightarrow \inf$$
$$x_1 - x_2 + (a-1)x_3 = a-2$$
$$x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = a+2$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3$$

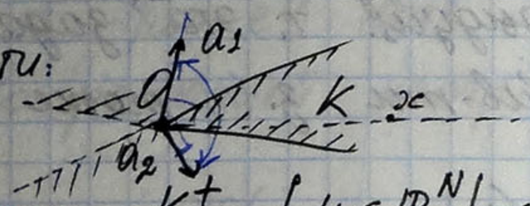
Построить график экстрем. знач-ий целевой ф-ции, как ф-ции от a.

§4. Линейные неравенства.

$K \subset \mathbb{R}^N$ – конус (с вершиной в $\mathbb{0}$):

$x \in K \Rightarrow \lambda x \in K \quad \forall \lambda > 0$

Конус на пл-ти:



Сопряж. конус: $K^+ = \{ u \in \mathbb{R}^N \mid \langle u, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in K \}$

– сопр. конус

Можно заметить, что конус – пересеч. двух полуплоскостей:

$K = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a_1, x \rangle \geq 0, \ \langle a_2, x \rangle \geq 0 \}$

$K^+ = \{ x = \underbrace{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2}_{\text{это коническая комбинация (т.к. } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0)} \mid \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \} \ominus$

$\ominus$ $\mathrm{cone}(a_1, a_2)$ – коническая оболочка

Т (Фаркаш)

Пусть конус K в $\mathbb{R}^n$ задается как пересеч-е m полупрост-в, задающихся нормалями a_i:

$K = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid \langle a_i, x \rangle \geq 0, \ i \in 1:m \}$

Тогда K^+ явл-ся конич. оболочкой:

$K^+ = \mathrm{cone}(a_1, \dots a_m)$.

Док-во: см. книгу. (факт из геометрии).

Т Для того, чтобы СЛУ $Ax = b$ имела неотриц. реш-е $x \geq \mathbb{0}$ необх. и дост, чтобы:

$\forall u: \ uA \geq \mathbb{0} \Rightarrow \langle b, u \rangle \geq 0$

Док-во.

$Ax = b, \ x \geq \mathbb{0} \quad (1)$

Что значит, что (1) – совместна?
Она совм., если:

$b = \sum_{j \in N} x[j] A_j, \quad$ все $x[j] \geq 0 \quad // A_j = A[M, j]$

$\Leftrightarrow b \in \mathrm{cone}(A_j, j \in N)$

Введем конус $K \subset \mathbb{R}^M$:

$K = \{ u \in \mathbb{R}^M \mid \langle A_j, u \rangle \geq 0, \ j \in N \} =$
$= \{ u \in \mathbb{R}^M \mid uA \geq \mathbb{0} \}$

По т. Фарк. $K^+ = \mathrm{cone}(A_j, j \in N)$

(1) совм. $\Leftrightarrow b \in K^+ \Leftrightarrow \langle b, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in K$

ч.т.д.

Зам-е: Эквив. формул.:

$Ax = b, \ x \geq \mathbb{0}$ – совм. $\Leftrightarrow (\forall u: \ uA \leq \mathbb{0} \Rightarrow \langle b, u \rangle \leq 0;$

(Т)

Система соотн-ний:

$$\begin{aligned} A[M_1,N]\times x[N] &\geq b[M_1] \\ A[M_2,N]\times x[N] &= b[M_2] \\ x[N_1] &\geq \mathbb{0}[N_1] \end{aligned} \quad (2)$$

совместна $\Longleftrightarrow$ $\forall u = u[M]$:

$$\begin{aligned} u[M]\times A[M,N_1] &\leq \mathbb{0}[N_1] \\ u[M]\times A[M,N_2] &= \mathbb{0}[N_2] \\ u[M_1] &\geq \mathbb{0}[M_1] \end{aligned} \quad (3)$$

выполняется $\langle b,u\rangle \leq 0$

Док-во.

(2) совм. $\Longleftrightarrow$ совместна сист. $A_0\sigma = b$, $\sigma \geq \mathbb{0}$, где (4)

$A_0 = (A[M,N_1],\ A[M,N_2],\ -A[M,N_2],\ -E(M,M_1))$

По предыд. Т. (4) совм. $\Longleftrightarrow$ $\forall u: uA_0 \leq \mathbb{0}$ выполн. $\langle b,u\rangle \leq 0$

Нужно проверить, что $uA_0 \leq \mathbb{0}$, то же, что и (3).

$u[M]\times A[M,N_1] \leq \mathbb{0}[N_1]$ – ok

$$\left.\begin{aligned} u[M]\times A[M,N_2] &\leq \mathbb{0}[N_2] \\ -u[M]\times A[M,N_2] &\leq \mathbb{0}[N_2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ldots = \mathbb{0}[N_2] \text{ – ok}$$

$-u[M]\times E[M,M_1] \leq \mathbb{0}[M_1] \Longleftrightarrow$

$u[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$ – ok

ч.т.д.

Зам-е: отрицание (критерий несовм-ти): сист. (2) несовм. $\Longleftrightarrow$ $\exists\, u = u[M]$, удовл. (3), такой что $\langle b,u\rangle > 0$.

17.09.2012.

(След.1) (Т. Фань-Цзы)

$Ax \geq b$ – совм. $\Longleftrightarrow$ $\forall u$: $uA = \mathbb{0}$, $u \geq \mathbb{0} \Rightarrow \langle b,u\rangle \leq 0$

Проверить!

(След.2) (из алгебры)

$Ax = b$ – совм. (разрешима) $\Longleftrightarrow$ $\forall u$: $uA = \mathbb{0} \Rightarrow \langle b,u\rangle = 0$

Задачи:

(8) Пусть $\Omega = \{x\in\mathbb{R}^N \mid Ax = b,\ x \geq \mathbb{0}\}$

Д-те, что понятие БП равносильно понятию крайней точки

/* $x_0\in\Omega$ – крайняя, если из рав-ва $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $x_1,x_2\in\Omega$, следует, что $x_1 = x_2$. */

(9) Пусть $K = \{x\in\mathbb{R}^N \mid x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1],\ x[N_2] = \mathbb{0}[N_2],\ x[N_3]$ – произвольн$\}$

где $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$

Найти K^+ по опр-ю сопряж. конуса.

§5. Критерий оптимальности

Основная лемма ЛП.

Пусть $A = A[M, N]$ – произв. матрица; пусть система

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle = \mu \\ &Ax = b, \quad x \geq \mathbb{0} \end{aligned} \qquad (1)$$

совместна, но при замене μ на $\mu - \varepsilon$ становится несовместной при $\forall \varepsilon > 0$.

Тогда совместна след. система:

$$\begin{aligned} &\langle b, u\rangle = \mu \\ &uA \leq c \end{aligned} \qquad (2)$$

Док-во.

Р. систему

$$\begin{aligned} &\langle c, x\rangle - t\mu = -1 \\ &Ax - tb = \mathbb{0} \\ &x \geq \mathbb{0}, \ t \geq 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Покажем, что (3) – несовместна. От противного.

Пусть пара (x_0, t_0) – реш-е сист. (3)

I сл. $t_0 = 0$.

Подставим:

$\langle c, x_0\rangle = -1, \quad Ax_0 = \mathbb{0}, \quad x_0 \geq \mathbb{0}$

По усл-ю (1) – совместна, т.е. $\exists\, y_0$ – удовл. (1).

Р. $x_1 := x_0 + y_0$.

$$\begin{aligned} &\langle c, x_1\rangle = \mu - 1 \\ &Ax_1 = b, \quad x_1 \geq \mathbb{0} \end{aligned} \quad ?!$$

(получим сист. 1, где $\mu \to \mu - 1$) т.е. $\varepsilon = 1$.

II сл. $t_0 > 0$.

$$\begin{aligned} &\langle c, \tfrac{x_0}{t_0}\rangle = \mu - \tfrac{1}{t_0} \\ &A\tfrac{x_0}{t_0} = b, \quad \tfrac{x_0}{t_0} \geq \mathbb{0} \end{aligned} \quad ?!$$

(3): (опять, $\varepsilon = \frac{1}{t_0}$)

$\Rightarrow$ сист. (3) – несовм.

$$\begin{pmatrix} c & -\mu \\ A & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \geq \mathbb{0}$$

– перепишем (3)

несовм. $\overset{\S 4}{\Longrightarrow} \exists\, (\gamma_0, u_0)$:

$$(\gamma_0, u_0) \begin{pmatrix} c & -\mu \\ A & -b \end{pmatrix} \geq \mathbb{0} \quad \text{и} \quad (\gamma_0, u_0) \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbb{0} \end{pmatrix} < 0$$

$$\boxed{\gamma_0 c + u_0 A \geq \mathbb{0}, \quad -\gamma_0 \mu - \langle b, u_0\rangle \geq 0, \quad -\gamma_0 < 0}$$

(1) – совместна:

$$\begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix}, \quad x \geq \mathbb{0} \quad \text{– совм.}$$

$$\overset{\S 4}{\Longrightarrow} \forall (\gamma, u): \quad (\gamma, u) \begin{pmatrix} c \\ A \end{pmatrix} \geq \mathbb{0} \quad \text{и} \quad (\gamma, u) \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} \geq 0$$

$\Leftrightarrow \left(\gamma c + uA \geq \mathbb{0} \Rightarrow \gamma\mu + \langle b, u\rangle \geq 0 \right)$

Но $\gamma_0 c + u_0 A \geq \mathbb{0} \Rightarrow \boxed{\gamma_0\mu + \langle b, u_0\rangle \geq 0}$

Что мы получили?

$$\begin{cases} \gamma_0 c + u_0 A \geq \mathbb{0} \\ \gamma_0\mu + \langle b, u_0\rangle = 0 \\ \gamma_0 > 0 \end{cases}$$

Р. $u_* = -\frac{1}{\gamma_0} u_0$ – реш-е (2)

ч.т.д.

Задача ЛП в общ. виде:

$$c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf$$

$$\Omega \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1] \end{cases} \quad (4)$$

Т (критерий оптимальности)

$x^* \in \Omega$ – опт. план (4) $\Leftrightarrow \exists\, u_* = u_*[M]$:

1. $\langle b, u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle$
2. $u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$
3. $u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$
4. $u_*[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$

(5)

Док-во.

"$\Rightarrow$" x_* – реш-е зад. (4) $\Rightarrow \exists\, v_*$ – решение эквив. задачи ЛП.

$$\langle c_0, v\rangle \longrightarrow \inf$$
$$A_0 v = b, \quad v \geq \mathbb{0} \qquad (6)$$

где $c_0 = (c[N_1], c[N_2], -c[N_2], \mathbb{0}[M_1])$

$A_0 = (A[M, N_1], A[M, N_2], -A[M, N_2], -E[M, M_1])$

~~v_* – реш-е (6) $\Rightarrow$ Система~~ при этом (по эквив-ти)

$$\langle c_0, v_*\rangle = \langle c, x_*\rangle := \mu.$$

$\Rightarrow$ система $\langle c_0, v\rangle = \mu$, $A_0 v = b$, $v \geq \mathbb{0}$

совместна, но при замене μ на $\mu - \varepsilon$ становится несовм. $\forall \varepsilon > 0$.

$\xRightarrow{\text{ОЛП}}$ совместна система $\langle b, u\rangle = \mu$, $u A_0 \leq c$

т.е. $\exists\, u_* = u_*[M]$: $\langle b, u_*\rangle = \mu = \langle c, x_*\rangle$, $u_* A_0 \leq c$

↑ усл-е 1. вып-ся.

$u_*[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$ – усл.-е 2.

$$\left.\begin{aligned} u_*[M] \times A[M, N_2] &\leq c[N_2] \\ -u_*[M] \times A[M, N_2] &\leq -c[N_2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{усл-е 3.}$$

$-u_*[M] \times E[M, M_1] \leq \mathbb{0}[M_1] \Leftrightarrow u_*[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$ – усл-е 4.

"$\Leftarrow$". Фиксируем $x \in \Omega$ - произвольн.

$$\langle c, x\rangle = c[N_1] \times \underbrace{x[N_1]}_{\geq \Phi} + c[N_2] \times x[N_2] \geq$$

$$\geq u_*[M] \times A[M, N_1] \times x[N_1] + u_*[M] \times A[M, N_2] \times x[N_2] =$$

$$= u_*[M] \times A[M, N] \times x[N] =$$

$$= u_*[M_1] \times A[M_1, N] \times x[N] + u_*[M_2] \times A[M_2, N] \times x[N] \geq$$

$$\geq u_*[M_1] \times b[M_1] + u_*[M_2] \times b[M_2] =$$

$$= \langle b, u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle \quad (7)$$

Итого: $\langle c, x\rangle \geq \langle c, x_*\rangle \quad \forall x \in \Omega$

$\Rightarrow x_*$ - опт. план.

ч. т. д.

Введем $\Lambda = \left\{ u \in \mathbb{R}^M \;\middle|\; \begin{array}{l} u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u[M_1] \geq \Phi[M_1] \end{array} \right\}$

(7): $\forall x \in \Omega, \ \forall u \in \Lambda$

$$\langle c, x\rangle \geq \langle b, u\rangle$$

<u>Переформул. крит. оптим.:</u>

$x_* \in \Omega$ - оптим. $\Longleftrightarrow \exists\, u_* \in \Lambda$:

$\langle b, u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle$

Короткая записы выкладки (7):

$$\langle c, x\rangle \underset{N = N_1 \cup N_2}{\geq} \langle u_* A, x\rangle = \langle u_*, Ax\rangle \geq$$

$$\underset{M = M_1 \cup M_2}{\geq} \langle u_*, b\rangle$$

§6. Теорема двойственности.

$$f(x) := \langle c, x\rangle \longrightarrow \inf_{x \in \Omega} \quad (1)$$

По крит. оптим.: $x_* \in \Omega$ - оптим. $\Longleftrightarrow$

$\exists\, u_* \in \Lambda$: $\langle c, x_*\rangle = \langle b, u_*\rangle$

Обозн.: $g(u) := \langle b, u\rangle$

из §5: $f(x) \geq g(u) \quad \forall x \in \Omega, \ \forall u \in \Lambda.$

$\Rightarrow g(u) \leq f(x_*) = g(u_*) \quad \forall u \in \Lambda.$

$\Rightarrow u_*$ - реш-е экстр. задачи

$$g(u) \longrightarrow \sup_{u \in \Lambda} \quad (2)$$

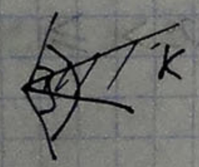
Зад. (2) - двойственная к з. (1).

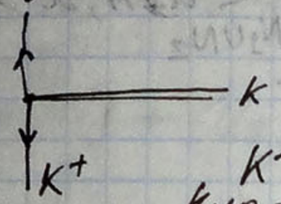
<u>Для задач:</u> сначала надо док-ть что Ω огр. Ну или то, что реш-е сущ-ет. 20.09.2012

БП сущ-ет только у задач в канонич. форме!

Доп. вопрос:

В пределе:





K^+ – прямая? куда деться поступ-ть?

$$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf \quad (1)$$

$$\Omega \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \text{Ⓘ}[N] \end{cases}$$

$$g(u) := b[M] \times u[M] \longrightarrow \sup \quad (2)$$

$$\Lambda \begin{cases} u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1] \\ u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2] \\ u[M_1] \geq \text{Ⓘ}[M_1] \end{cases}$$

Мы установим, что:

$x_* \in \Omega$ – реш-е (1) $\Rightarrow \exists\, u_* \in \Lambda$ (из крит. оптим): реш-е (2)

$\langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle$, т.е:

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) = \sup_{u \in \Lambda} g(u) \quad (3)$$

Верно ли обратное?

Верно ли, что из разреш-ти з. (2) следует разреш-ть з. (1)? И р-во (3)?

Пусть $u_* \in \Lambda$ – реш-е з (2) $\Rightarrow u_*$ – реш-е след. задачи:

$$-b[M] \times u[M] \longrightarrow \inf \quad (4)$$

$$-A^T[N_1, M] \times u[M] \geq -c[N_1]$$

$$-A^T[N_2, M] \times u[M] = -c[N_2]$$

$$u[M_1] \geq \text{Ⓘ}[M_1]$$

крит. оптим. $\Longrightarrow \exists\, x_* = x_*[N]$:

1. $-\langle b, u_* \rangle = \langle -c, x_* \rangle$
2. $x_*[N] \times (-A^T[N, M_1]) \leq -b[M_1]$
3. $x_*[N] \times (-A^T[N, M_2]) = -b[M_2]$
4. $x_*[N_1] \geq \text{Ⓘ}[N_1]$

так это же Ω! $\Rightarrow x_* \in \Omega$

Имеем: $x_* \in \Omega$, $\underline{\langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle}$, $u_* \in \Lambda$.

$\xRightarrow{\text{к.о.}}$ x_* – опт. план. з. (1) ↑а это (3).

Теперь мы знаем, что эти задачи равносильны.

Ⓣ (I теорема двойств-ти)

Если одна из пары двойств. задач имеет решение, то имеет

решение и другая. При этом выпол-ся соот-ние двойст-ти (3).

(3) – соотн-е двойств-ти.

Т Для того, чтобы з. (1) и (2) были разрешимы $\Longleftrightarrow$ чтобы мн-ва их планов были непусты:

$\Omega \neq \varnothing$, $\Lambda \neq \varnothing$

Док-во.

"$\Rightarrow$" трив.

"$\Leftarrow$" $\Omega \neq \varnothing$. ц.ф. огр. на Ω?

$\Lambda \neq \varnothing \Rightarrow \exists u_0 \in \Lambda$

Было: $f(x) \geq g(u)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall u \in \Lambda$.

$\Rightarrow$ $f(x) \geq g(u_0)$ $\forall x \in \Omega$ перейдем к инф:

$\Rightarrow$ $\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) \geq g(u_0) > -\infty$

ц.ф. огр. $\Rightarrow$ (по т. о сущ.) $\exists x_* \in \Omega$ – реш. (1)

$\Longrightarrow$ (по I т. дв.) $\exists u_* \in \Lambda$ – реш (2)

ч.т.д.

Этот вопрос явл-ся критическим! Надо уметь их строить.

„Правильные ограничения нер-в":

$\inf \sim$ "$\geq$"

$\sup \sim$ "$\leq$"

Знаковые огр-я: всегда "$\geq$"

Примеры:

1) Исслед. задачу ЛП:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \longrightarrow \inf$$

$$u_1: \; x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1$$

$$u_2: \; x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$u_1 + 2u_2 \longrightarrow \sup \quad \left(\text{умнож. } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot (1, 2)\right)$$

$$u_1 + u_2 \leq 1$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 2 \\ -4u_1 &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ нет знак. огр., поэтому "}=\text{"}$$

$$u_1 \geq 0$$

$\Lambda = \varnothing$ $(u_1 \geq 0,\ u_1 < 0)$ $\Rightarrow$ решений нет. у двойств. з.

$\Rightarrow$ (по I т. двойств) у исх. з. решений нет.

$\Omega \neq \varnothing$ (например, $(3, 1, 0) \in \Omega$)

$\Rightarrow$ ц.ф. не огр. снизу на Ω.

Т (II т. двойственности)

Планы x_0, u_0 задач (1), (2) — оптим. $\Leftrightarrow$ чтобы выполнялись условия дополнительности:

(5) $(A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) \times u_0[i] = 0, \quad i \in M_1$

(6) $(u_0[M] \times A[M,j] - c[j]) \times x_0[j] = 0, \quad j \in N_1$

Док-во:

"$\Rightarrow$" $\langle c, x_0 \rangle \underset{N=N_1 \cup N_2}{\geq} \langle u_0 A, x_0 \rangle = \langle u_0, A x_0 \rangle \geq$

$\underset{M=M_1 \cup M_2}{\geq} \langle u_0, b \rangle \underset{\text{I т.дв.}}{=} \langle c, x_0 \rangle$

$\Rightarrow$ везде равенства

$\langle c - u_0 A, x_0 \rangle = 0$

$\langle A x_0 - b, u_0 \rangle = 0$ (7)

$\sum_{j \in N} (c[j] - u_0[M] \times A[M,j]) \times x_0[j] =$

$= \sum_{j \in N_1} \underbrace{(\ldots)}_{\geq 0} \times \underbrace{\ldots}_{\geq 0} = 0$ (8)

$\sum_{i \in M} (A[i,N] \times x_0[N] - b[i]) \times u_0[i] =$

$= \sum_{i \in M_1} \underbrace{(\ldots)}_{\geq 0} \times \underbrace{\ldots}_{\geq 0} = 0$ (9)

Из (8), (9) $\Rightarrow$ (5), (6)

"$\Leftarrow$" (5), (6) $\Rightarrow$ (8), (9) $\Rightarrow$ (7):

$\langle c, x_0 \rangle = \langle u_0 A, x_0 \rangle$

$\langle b, u_0 \rangle = \langle A x_0, u_0 \rangle = \langle x_0, u_0 A \rangle$

$x_0 \in \Omega, \; u_0 \in \Lambda, \quad \langle c, x_0 \rangle = \langle b, u_0 \rangle \overset{\text{К.О.}}{\Longrightarrow} x_0$ — опт. план (1)

$\Rightarrow u_0$ — опт. план (2)

"I т.дв."

ч.т.д.

Зам-е 1:

Сокращённо усл-е доп-ти (5), (6) можно записать:

$\langle A x_0 - b, u_0 \rangle = 0, \quad \langle c - u_0 A, x_0 \rangle = 0$

Зам-е 2:

Развёрнутая запись:

$A[i,N] \times x_0[N] = b[i]$, если $u_0[i] > 0$, $i \in M_1$

$u_0[M] \times A[M,j] = c[j]$, если $x_0[j] > 0$, $j \in N_1$

Пример:

$x_1 - 8x_2 - 4x_3 \longrightarrow \inf$

$u_1 \mid x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$

$u_2 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$x_j \geq 0, \; j \in 1:3$

$2u_1 \longrightarrow \sup$

$u_1 + u_2 \leq 1$

$u_1 - u_2 \leq -8$

$4u_1 + 2u_2 \leq -4$

зн. огр. нет

Проверить, что $\hat{x} = (1,1,0)$ - оптим.?

($1,1 \geq 0$, т.е. в двойств задаче, если мы найдем план, кот. обращ первые две огран в рав-во, то все он:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 - u_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7/2 \\ u_2 = 9/2 \end{cases}$$

Нашли $\hat{u} = (-7/2, 9/2)$ - план дв. зад?

$4u_1 + 2u_2 = -14 + 9 = -5 \leq -4$

да! он явл-ся планом.

По II т. дв-ти $\hat{x}$ - опт. план.

Пример:

$$\begin{array}{l|l} -x_1 + x_2 - x_3 \longrightarrow \inf & 2u_1 + u_2 \longrightarrow \sup \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 & u_1 + 2u_2 \leq -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & u_1 - u_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0,\ j \in 1:3 & 2u_1 + u_2 \leq -1 \end{array}$$

Проверить $\hat{x} = (0,0,1)$ на оптим.

Усл. доп-ти: $2u_1 + u_2 = -1 \Rightarrow$

$u_2 = -2u_1 - 1$

Вып. нер-в: $\begin{cases} u_1 + 2(-2u_1 - 1) \leq -1 \\ u_1 - (-2u_1 - 1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3u_1 \leq 1 \\ 3u_1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 \in [-\frac{1}{3}, 0]$

$\Rightarrow \hat{u} = (u_1, -2u_1 - 1)$ при $u_1 \in [-\frac{1}{3}, 0]$ - план дв. зад.

удовл. усл. доп-ти

$\Rightarrow \hat{x}$ - опт. план

Пример:

24.09.2012.

$$\begin{array}{l|l} -x_1 + x_2 - x_3 \longrightarrow \inf & 2u_1 + u_2 \longrightarrow \sup \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 & u_1 + 2u_2 \leq -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & u_1 - u_2 \leq 1 \\ x_j \geq 0,\ j \in 1:3 & 2u_1 + u_2 \leq -1 \end{array}$$

$\hat{x} = (1,1,0)$ - проверить на опт-ть?

Усл-е доп-ти: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 = -1 \\ u_1 - u_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} u_1 = -1/3 \\ u_2 = -2/3 \end{array}$

$\hat{u} = (1/3, -2/3)$ - удовл. усл-ям доп-ти

$\Rightarrow \hat{x}$ - опт. план? Но! нужно проверить, что $\hat{u}$ - план?!

третье огр-е: $2u_1 + u_2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \not\leq -1$ - нет!

$\Rightarrow \hat{x}$ - не опт. план!

Задачи:

(10) $-x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 \longrightarrow \sup$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2$$
$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \le -1$$
$$x_j \ge 0, \quad j \in 1:4$$

Проверить $\hat{x} = (0,1,1,0)$ на опт-ть?

(11) Исслед. задачу ЛП:

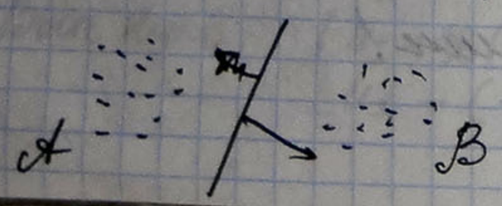
$$x_1 - 3x_2 + x_3 \longrightarrow \inf$$
$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1$$
$$x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0$$

Исслед. задачу (написать двойств, а там будет видно).

(12) Придумайте пару двойств. задач ЛП, мн-ва планов которых пусты.

§7. Математическая диагностика.

$A = \{a_i\}_{i=1}^m$, $B = \{b_j\}_{j=1}^k$ – мн-ва в $\mathbb{R}^n$



Хотим разделить на 2 кластера, гиперплоскостью.

Def: A и B строго отделимы, если $\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ – вектор, $w \ne \mathbb{0}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$\langle w, a_i \rangle < \gamma \text{ при всех } i \in 1:m \quad (1)$$
$$\langle w, b_j \rangle > \gamma \text{ при всех } j \in 1:k \quad (2)$$

При этом гиперпл-ть $H = \{x \mid \langle w, x \rangle = \gamma\}$ – строго отделяет A от B.

$t \in \mathbb{R}$

$$t_+ = \max\{0, t\} = \begin{cases} t, & \text{если } t \ge 0 \\ 0, & \text{если } t \le 0 \end{cases}$$

Обозн. $g = (w, \gamma)$ и рассм. ф-цию:

$$f(g) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\langle w, a_i \rangle - \gamma + c\right]_+ + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left[-\langle w, b_j \rangle + \gamma + c\right]_+, \quad \text{где } c > 0 \quad (3)$$

Заметим, что $f(g) \ge 0 \;\forall g$. [ ] – не цел. часть!

(T) A и B – строго отделимы $\Longleftrightarrow$ $\exists\, g_* : f(g_*) = 0$.

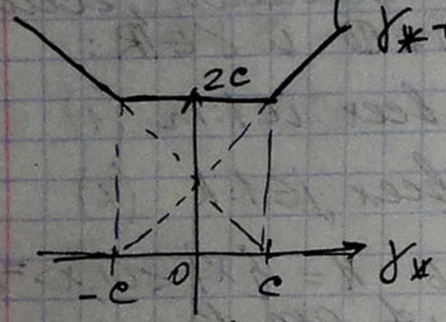
Док-во.

"$\Leftarrow$" $f(g_*) = 0$ на нек. $g_* = (w_*, \gamma_*)$.

Заметим, что $w_* \ne \mathbb{0}$

От прот.: если $w_* = \mathbb{0}$, то $f(g_*) = [-\gamma_* + c]_+ +$

$$+\,[\gamma_*+c]_+ = \begin{cases} -\gamma_*+c, & \gamma_* \le -c \\ 2c, & \gamma_* \in [-c,c] \\ \gamma_*+c, & \gamma_* \ge c \end{cases}$$



$\Rightarrow f(g_*) \geq 2c > 0$ - ?! , но $f(g_*)=0$?

Действительно, $w_* \neq \emptyset$.

Имеем: $f(g_*)=0 \Rightarrow$ все $[\ldots]_+ = 0$.

$\Rightarrow \langle w_*, a_i\rangle - \gamma_* + c \le 0$ при всех $i \in 1:m$ (4)

$-\langle w_*, b_j\rangle + \gamma_* + c \le 0$ при всех $j \in 1:k$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow$ (1),(2) при $w = w_*$, $\gamma = \gamma_*$.

~~ч.т.д~~

"$\Rightarrow$" (1),(2):

$\max\limits_{i\in 1:m} \langle w, a_i\rangle < \gamma$, $\min\limits_{j\in 1:k} \langle w, b_j\rangle > \gamma$

Положим:

(6) $d := \min\limits_j \langle w, b_j\rangle - \max\limits_i \langle w, a_i\rangle > 0$

$w_* = \left(\frac{2c}{d}\right)\cdot w$, $\gamma_* = \frac{1}{2}\left[\min\limits_j \langle w_*, b_j\rangle + \max\limits_i \langle w_*, a_i\rangle\right]$

(6) $\Rightarrow$

$\min\limits_j \langle w_*, b_j\rangle - \max\limits_i \langle w_*, a_i\rangle = 2c$

$\max\limits_i \langle w_*, a_i\rangle = 2\gamma_* - \min\limits_j \langle w_*, b_j\rangle =$

$= 2\gamma_* - 2c - \max\limits_i \langle w_*, a_i\rangle$

$\max\limits_{i\in 1:m} \langle w_*, a_i\rangle = \gamma_* - c$ (7)

Аналогично:

$\min\limits_j \langle w_*, b_j\rangle = 2\gamma_* - \max \langle w_*, a_i\rangle =$

$= 2\gamma_* + 2c - \min\limits_j \langle w_*, b_j\rangle$

$\Rightarrow \min\limits_{j\in 1:k} \langle w_*, b_j\rangle = \gamma_* + c$ (8)

Обозн. $g_* := (w_*, \gamma_*)$

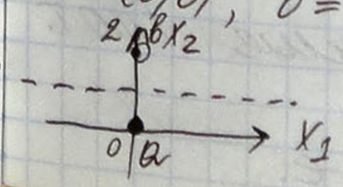
(7),(8) $\Rightarrow$ (4),(5) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $f(g_*)=0$

ч.т.д.

Зам-е 1: В док-ве теоремы показано как из вектора g, опред-ющего разд. гиперпл-ть, построить g_*, на котором $f(g_*)=0$. Дело в том, что на самом векторе g зн-е f может быть положит.

Пример 1:

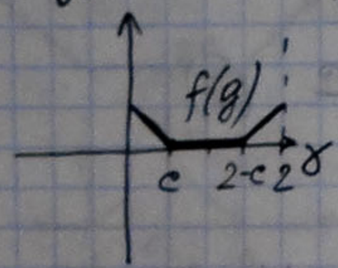
$A, B \subset \mathbb{R}^2$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, где $a=(0,0)$, $b=(0,2)$



При $w=(0,1)$ и $\forall \gamma \in (0,2)$ прямая $x_2 = \gamma$ строго отделяет A от B.

При этом $f(g)$, где $g=(\omega,\gamma)$, не обязательно $=0$.

$f(g) = (-\gamma+c)_+ + (-2+\gamma+c)_+$ $\quad c\in(0,1]$.



При $\gamma\in[c,2-c]$ $f(g)=0$

при $\gamma\in(0,c)\cup(2-c,2)$

$f(g)>0$, но при этом

прямая $x_2=\gamma$ по-прежнему строго отделяет A от B.

Р. задачу. $f(g)\longrightarrow \inf$ (9)

Эквив. задача:

Обозн. в З. слагаемые из I суммы y_i, слаг. из II суммы – z_j.

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} z_j \longrightarrow \inf$$

$$\Omega\begin{cases} -\langle \omega, a_i\rangle + \gamma + y_i \geq c, & i\in 1:m \\ \langle \omega, b_j\rangle - \gamma + z_j \geq c, & j\in 1:k \\ y_i\geq 0,\ i\in 1:m,\ z_j\geq 0,\ j\in 1:k \end{cases} \quad (10)$$

$\Omega\neq\varnothing$ /*($\omega=\mathbb{0}$, $\gamma=0$, $y_i\equiv c$, $z_j\equiv c$) – план*/

ц.ф. огр. снизу нулём.

$\Rightarrow$ З. (10) имеет решение (по т. сущ. реш ЛП)

$\overset{\text{по экв-ти}}{\Longrightarrow}$ З. (9) имеет реш-е.

При этом экстр. знач-я ц.ф. (9) и (10) равны. $=:\mu\geq 0$.

Кроме того, $(\omega_*,\gamma_*,\{y_i^*\},\{z_j^*\})$ – реш-е (10)

$\Rightarrow g_*:=(\omega_*,\gamma_*)$ – реш-е (9)

Если $\mu=0$, то A и B – строго отделимы

$\Rightarrow H=\{x \mid \langle \omega_*, x\rangle=\gamma_*\}$ – отдел. гиперпл-ть.

Если $\mu>0$, то стр. отделимость невозможна.

Но в случае, $\omega_*\neq 0$, то можно построить $H_*=\{x \mid \langle \omega_*, x\rangle=\gamma_*\}$.

Будем говорить, что H_* – явл-ся наилучшей гиперпл-тью, приближенно разделяющей A и B (при заданном знач-нии c).

Остались (9) и (10).

27.09.2012.

(Т2) Зад. (9) имеет реш-е g_* с $\omega_*=\mathbb{0}$ $\Longleftrightarrow$ средние точки мн-в A и B – сов-падают.

Т.е.: $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} b_j$ (11)

<u>Док-во</u>

"$\Rightarrow$" $\mu=f(g_*)\overset{(3)}{=}\min\limits_{\gamma}\left[(-\gamma+c)_+ + (\gamma+c)_+\right]=2c$

Двойств. к (10):

$$c\left(\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{k} v_j\right) \longrightarrow \sup$$

$$-\sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{k} v_j b_j = \mathbb{0} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i - \sum_{j=1}^{k} v_j = 0 \quad (13)$$

$$0 \le u_i \le \frac{1}{m},\ i \in 1:m; \quad 0 \le v_j \le \frac{1}{k},\ j \in 1:k \quad (14)$$

По I т. двойств-ти $\exists \{u_i, v_j\}$: удовл. (12)–(14) и

$$c\left(\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{k} v_j\right) = 2c \quad (15)$$

$$(15), (13) \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i = 1; \quad \sum_{j=1}^{k} v_j = 1.$$

$$14 \Rightarrow u_i \equiv \frac{1}{m},\ v_j \equiv \frac{1}{k} \xrightarrow{(12)} (11)$$

$$\overset{и}{\Longleftarrow}$$

$(11) \Rightarrow \{u_i \equiv \frac{1}{m}, v_j \equiv \frac{1}{k}\}$ – план двойств. задачи.

$y.ф. = 2c$

$\{\omega_* = \mathbb{0}, \gamma_* = 0, y_i \equiv c, z_j \equiv c\}$ – план (10).

$y.ф. = 2c$

По пр. опт. это опт. план. $\Rightarrow$

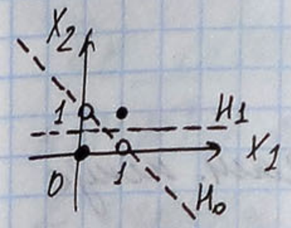
$g_* = (\omega_*, \gamma_*)$ – опт. план (9) с $\omega_* = \mathbb{0}$

ч.т.д.

Пример 2.

$A, B \subset \mathbb{R}^2$: $\quad A = \{(0,0), (1,1)\}$

$B = \{(1,0), (0,1)\}$



Вып-ся усл-е (11) $\Rightarrow$ зад. (9) имеет реш-е

$g_* = (\omega_*, \gamma_*)$ с $\omega_* = \mathbb{0}$

При этом $\mu = 2c$. Покажем, что у задачи (9) имеется другое реш-е

$g_0 = (\omega_0, \gamma_0)$ с $\omega_0 \ne \mathbb{0}$?

$$f(g) \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left[(-\gamma + c)_+ + (\omega^1 + \omega^2 - \gamma + c)_+\right] + \frac{1}{2}\left[(-\omega^1 + \gamma + c)_+ + (-\omega^2 + \gamma + c)_+\right],$$ где $\omega = (\omega^1\ \omega^2)$

Р. $\omega_0 = (c, c)$, $\gamma_0 = c$, $g_0 = (\omega_0, \gamma_0)$

$$f(g_0) = \frac{1}{2}\left[0 + 2c\right] + \frac{1}{2}\left[c + c\right] = 2c$$

$\Rightarrow$ это тоже опт. план

Проходит прямую: $H_0 = \{x \mid x_1 + x_2 = 1\}$ – наилучшая прямая, приближ. отдел. A от B.

Р. $\omega_1 = (0, c)$, $\gamma_1 = \frac{c}{2}$, $g_1 = (\omega_1, \gamma_1)$

$$f(g_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{c}{2} + \left(2c - \frac{c}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{c}{2} + c\right) + \frac{c}{2}\right] = 2c$$ – тоже опт. план

$H_1 = \{x \mid x_2 = \frac{1}{2}\}$

(T3) При $\mu>0$ у зад. (9) $\exists$ реш-е y_0 с $w_0 \neq \mathbb{0}$.

Без док-ва.

Задачи.

(13) Пусть K – конус; K^+ – сопряж. конус

$\langle c, x\rangle \longrightarrow \inf$ $\qquad$ $\langle b, u\rangle \longrightarrow \sup$

$Ax = b,\ x \in K$ $\qquad$ $c - Ua \in K^+$

Д-ть, что если $\exists$ планы x_0, u_0 т.ч.:

$\langle c, x_0\rangle = \langle b, u_0\rangle$, то x_0, u_0 – опт. планы.

! (14) $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$

1) $c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf$

$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$

$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$

$A[M_3, N] \times x[N] \leq b[M_3]$

$x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1]$, $x[N_3] \leq \mathbb{0}[N_3]$

2) $b[M] \times u[M] \longrightarrow \sup$

$u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$

$u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$

$u[M] \times A[M, N_3] \geq c[N_3]$

$u[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$, $u[M_3] \leq \mathbb{0}[M_3]$

Д-те, что для этих задач вып-ся теоремы двойств-ти.
(достаточно д-ть только первую).

§8. Матричные игры.

$A[M,N]$ – произв. ненул. м-ца.

2 игрока. I выбирает i строку; II выб. столбец j. (независимо).

Получаем $A[i,j]$ – сумма, кот. II платит I-ому.

Нас интересует средняя величина.

$p = p[M]$ – стратегия I: $\sum\limits_{i \in M} p[i] = 1$, $p \geq \mathbb{0}$.

P – мн-во всех стратегий

$q = q[N]$ – страт. II: $\sum\limits_{j \in N} q[j] = 1$, $q \geq \mathbb{0}$

Q – мн-во всех страт.

$a(p,q)$ – сред. величина платежа

Чистые стратегии: если выбирают всегда одно и то же:

$e_i = e_i[M]$, $e_j = e_j[N]$ – орты

$a(e_i, e_j) = A[i,j]$

$a(e_i, q) = \sum\limits_{j \in N} A[i,j] \times q[j] = A[i,N] \times q[N]$

$a(p,q) = \sum\limits_{i \in M} p[i] \times A[i,N] \times q[N] = p[M] \times A[M,N] \times q[N]$

$a(p, e_j) = p[M] \times (A[M,N] \times e_j[N]) =$
$= p[M] \times A[M,j]$

Пусть $p \in \mathcal{P}$: Пусть II узнал стратегию I, а хочет:

$$\min_{q \in Q} a(p,q) =: \varphi(p)$$ – гарантированный выигрыш I го.

Но I хочет увеличить свой гарант. выигрыш:

$$p_* \in \mathcal{P}: \quad \varphi(p_*) = \max_{p \in \mathcal{P}} \varphi(p) = \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{q \in Q} a(p,q) \quad (1)$$

$$q \in Q: \quad \max_{p \in \mathcal{P}} a(p,q) =: \psi(q)$$ – величина, больше которой II не пропускает.

II хочет:

$$q_* \in Q: \quad \psi(q_*) = \min_{q \in Q} \psi(q) = \min_{q \in Q} \max_{p \in \mathcal{P}} a(p,q)$$

Эти стратегии p_*, q_* – оптимальные стратегии (если они $\exists$).

Т (Дж. фон Нейман)
Опт. стратегии p_*, q_* – существуют. При этом пара $\{p_*, q_*\}$ – образует ситуацию равновесия:

$$a(p, q_*) \le a(p_*, q_*) \le a(p_*, q) \quad (3)$$
$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall q \in Q$$

Л (об очистке)

$$\varphi(p) = \min_{j \in N} a(p, e_j), \quad p \in \mathcal{P} \quad (4)$$

$$\psi(q) = \max_{i \in M} a(e_i, q), \quad q \in Q \quad (5)$$

Док-во.

Фикс. $p \in \mathcal{P}$; $\varphi(p)$ – экстр. знач-е задачи

$$(p[M] \times \underbrace{A[M,N]}_{\text{const}} \times q[N] \longrightarrow \inf$$

$$Q \left\{ \sum_{j \in N} q[j] = 1, \quad q \ge \mathbb{0} \right.$$ – зад. ЛП в канон. форме зап.

Q – огр. $\overset{\text{по т.}}{\underset{\text{сущ.}}{\Longrightarrow}}$ сущ. оптим. БП

1 ограничение $\Rightarrow$ т.е. матрица размер. 1
т.е. мин. из елементов $= 1$.

Все БП: e_i, $i \in M \Rightarrow \varphi(p) = \min_{i \in M} a(p, e_i)$

Аналогично при фикс $q \in Q$
– $\psi(q)$ – экстр. зн-е в зад.:

$$-p[M] \times (A[M,N] \times q[N]) \longrightarrow \inf$$

$$\sum_{i \in M} p[i] = 1, \quad p \ge \mathbb{0}$$ – ЗЛП в кан. форме

$\Rightarrow$ реш-е на БП.

ч.т.д.

01.10.2012 Решение задачи (10):

Двойств:

$$2u_1 - u_2 \longrightarrow \inf$$

$$u_1 + u_2 \geq -1$$

$$u_1 + 2u_2 \geq 3$$

$$u_1 - 4u_2 \geq -3$$

$$u_1 + u_2 \geq 1$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$$

Усл. доп.: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 = 3 \\ u_1 - 4u_2 = -3 \\ u_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$

$\hat{u} = (1,1)$ – это план

$\Rightarrow \hat{x}$ – опт. план

$f(\hat{x}) = 0 \qquad g(\hat{u}) = 1$?!

Усл-е доп-ти состоит из двух частей!

$A[M,N] \qquad a(p,q) = p[M] \times A[M,N] \times q[N]$

$$\varphi(p) = \min_{q \in Q} a(p,q) \longrightarrow \sup_{p \in P} \quad (1)$$

$$\psi(q) := \max_{p \in P} a(p,q) \longrightarrow \inf_{q \in Q} \quad (2)$$

Перепишем задачи с использ. леммы: (об очист.)

$$\varphi(p) := \min_{j \in N} \underbrace{p[M] \times A[M,j]}_{s} \longrightarrow \sup_{p \in P} \quad (6)$$

$$\psi(q) := \max_{i \in M} \underbrace{A[i,N] \times q[N]}_{t} \longrightarrow \inf_{q \in Q} \quad (7)$$

Запишем эквив. задачи:

$t \longrightarrow \inf \quad (7')$	$s \longrightarrow \sup \quad (6')$
$p[i] \cdot -A[i,N] \times q[N] + t \geq 0,\ i \in M$	$-p[M] \times A[M,j] + s \leq 0,\ j \in N$
$s \cdot \sum_{j \in N} q[j] = 1$	$\sum_{i \in M} p[i] = 1$
$q[N] \geq \mathbb{0}[N]$	$p[M] \geq \mathbb{0}[M]$

Докажем, что з. (6') и (7') – двойств.

Построим двойств. к (7'): (обозначаем переменные $p[i]$, s).

Да, это так.

Мн-ва планов (6'), (7') не пусты:

Берем $\forall\, p \in P$, подбираем s. Аналогично $q \in Q$, подбир. t.

$\Rightarrow \exists$ реш-ея (s_*, p_*) и (t_*, q_*)

$\xRightarrow{\text{по эв-ти}}$ p_* – реш-е з. (6), q_* – реш-е (7)

По I т. дв-ти экстр. знач-я ф-ций совпадают:

$$S_* = t_* \overset{\text{экв.}}{=} \psi(q_*) \Rightarrow \underline{\varphi(p_*) = \psi(q_*)} \quad (8)$$

$\overset{\text{экв.}}{\parallel}$ $\varphi(p_*)$

(это очень важно)

Подробнее: $\min\limits_{q\in Q} a(p_*, q) = \max\limits_{p\in P} a(p, q_*)$ (8')

Д. $a(p_*, q_*) \le$ (т.е. каждый игрок играет выигрышной стратегией).

$$\le \max_{p\in P} a(p, q_*) \overset{8'}{=} \min_{q\in Q} a(p_*, q) \le$$

т.к. max

$$\le a(p_*, q_*)$$

т.к. min

$\Rightarrow$ здесь везде рав-ва, и:

$$\max_{p\in P} a(p, q_*) = a(p_*, q_*) = \min_{q\in Q} a(p_*, q) \quad (9)$$

Очевидно, что (9) $\Leftrightarrow$ (3)

ч.т.д.

Зам-е:

(8) (1) (2) $\Rightarrow$ $\max\limits_{p\in P} \min\limits_{q\in Q} a(p,q) =$ ~~min~~

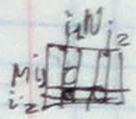
$= \min\limits_{q\in Q} \max\limits_{p\in P} a(p,q)$ (10)

Т.е. в смеш. стратегиях max-min всегда равен min-max.

Задачи:

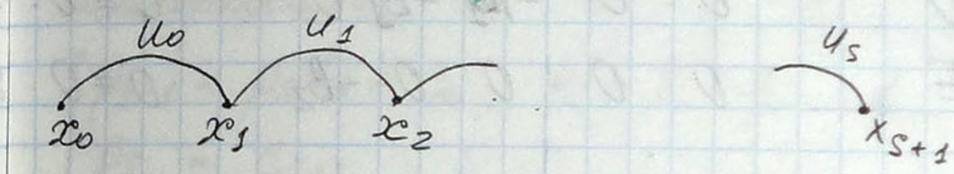
(15) $A = A[M,N]$ - произв. матрица. Док-те:

$$\max_{i\in M} \min_{j\in N} A[i,j] \le \min_{j\in N} \max_{i\in M} A[i,j]$$



Приведите пример, когда нер-во строгое.

§9. Принцип максимума для линейных дискретных систем



x_i - состояния системы;
u_i - управление

Линейные - осуществл-ся линейный переход:

$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, A_k, B_k - матрицы

Это траектория.

Возьмем мин. функционал:

$$\sum_{k=1}^{s+1} \langle c_k, x_k \rangle + \sum_{k=0}^{s} \langle b_k, u_k \rangle \longrightarrow \sup \quad (1)$$

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k = 0, 1, \dots s$$

$$D_k u_k \le d_k, \quad k \in 0:s$$

$$x_0 = \hat{x} \text{ - фикс.}$$

где $A_k = A_k[N,N]$, $B_k = B_k[N,M]$, $D_k = D_k[T,M]$ - они фикс.

(1) - задача поиска оптим. управления.

Ищем $\{u_k^*\}_{k=0}^{s}$ - оптим. упр-е.

	x_1	x_2	x_3	...	x_s	x_{s+1}	u_0	u_1	u_2	...	u_s	
	c_1	c_2	c_3	...	c_s	c_{s+1}	b_0	b_1	b_2	...	b_s	
p_0	E	0	0	...	0	0	$-B_0$	0	0	...	0	$=A_0\hat{x}$
p_1	$-A_1$	E	0	...	0	0	$-A_1$	$-B_1$	0	...	0	$=0$
	0	$-A_2$	E	...	0	0	0	0	$-B_2$	...	0	$=0$
					$\vdots$							
p_s	0	0	0	...	$-A_s$	E	0	0	0	...	$-B_s$	$=0$
q_0							D_0	0				$\le d_0$
q_1							0	D_1				$\le d_1$
									$\ddots$			
q_s								0			D_s	$\le d_s$

p_i - N-мерн; q_j - T-мерн.

Запишем двойств. задачу:

$$\langle A_0\hat{x}, p_0\rangle + \sum_{k=0}^{s}\langle d_k, q_k\rangle \longrightarrow \inf \qquad (2)$$

$$p_{k-1} - p_k A_k = c_k, \quad k\in 1:s$$

$$p_s = c_{s+1}$$

$$-p_k B_k + q_k D_k = b_k, \quad k\in 0:s$$

$$q_k \geq \Theta, \quad k\in 0:s$$

Из огр-ний з. (2) выделяется сопряж. система:

$$\begin{cases} p_{k-1} = p_k A_k + c_k, & k = s, s-1, \dots 1 \\ p_s = c_{s+1} \end{cases}$$

из которой однозначно вычисл-ся $p_s, \dots p_0$

Т.о. векторы p_k явл-ся конст-ми, завис. только от м. A_k и не явл-ся переменными.

Т.е. можем их исключить из задачи. Получится:

$$\sum_{k=0}^{s}\langle d_k, q_k\rangle \longrightarrow \inf \qquad (2')$$

$$D_k^T q_k = b_k + B_k^T p_k, \quad k\in 0:s$$

$$q_k \geq \Theta, \quad k\in 0:s$$

где, $\{p_k\}$ - реш-е сопряж. системы.

04.10.2012

Мн-во решений для (2'), (2) совп-ют. Для (2), (2') можно применять дв-ные теоремы, кроме рав-ва экстр. зн-ний.

Мы имеем задачу о min нез. сумм, то есть можем min каждое слаг-е.

Задача (2') распадается на $s+1$ шту-ку независ. задач ЛП.

$$\begin{cases} \langle d_k, q_k\rangle \to \inf \\ U_k \mid D_k^T q_k = b_k + B_k^T p_k \\ q_k \geq 0 \end{cases} \quad (3) \qquad k \in 0:s$$

Запишем двойств. к задаче (3):

$$\begin{cases} \langle b_k + B_k^T p_k, u_k\rangle \to \sup \\ D_k u_k \leq d_k \end{cases} \quad (4) \qquad k \in 0:s$$

! u_k никак не связаны с зад. (1)

U_k - мн-во планов (4).

Def: $H_k(u_k, p_k) = \langle b_k, u_k\rangle + \langle p_k, B_k u_k\rangle$ - ф-я Гамильтона

(это же и ЦФ в з. (4)).

(T) (принцип максимума)

$\{u_k^*\}$ - опт. упр-е в задаче (1) $\Leftrightarrow \forall k \in 0:s \quad u_k^* \quad \max\limits_{u_k \in U_k} H_k(u_k, p_k) = H_k(u_k^*, p_k)$,

где $\{p_k\}$ - реш-я сопряж. системы

($\Leftrightarrow u_k^*$ - опт. план задачи (4))

Док-во:

„$\Rightarrow$" $\{\{x_k^*\}, \{u_k^*\}\}$ - опт. план (1)

Но по I т. дв. $\exists \{\{p_k\}, \{q_k^*\}\}$ - опт. план (2)

$\Rightarrow$ (по II т. дв-ти) имеют место усл-я дополнительности

$$\langle D_k u_k^* - d_k, q_k^*\rangle = 0 \qquad k \in 0:s$$

Зафикс. $k \in 0:s$ и рассмотрим для него задачи (3) и (4).

q_k^+ - план (3)

u_k^* - план (4) и для этих планов вып-ся усл-е доп-ти:

$$\langle D_k u_k^* - d_k, q_k^+\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ (по II дв.) u_k^* - опт. план (4), то есть

$$\max_{u_k \in U_k} H_k(u_k, p_k) = H_k(u_k^*, p_k).$$

„$\Leftarrow$" u_k^* - реш-е (4) $\Rightarrow q_k^*$ - реш-е (3) $k \in 0:s$

$\{p_k\}$ - реш-е сопряж. системы

Подставим u_k^* в ограничение задачи (1):

$$x_{k+1}^* = A_k x_k^* + B_k u_k^*, \quad k \in 0:s$$

$$x_0^* = \hat{x}$$

$\Rightarrow Y^* = \{\{x_k^*\}, \{u_k^*\}\}$ - план (1)

$Z^* = \{\{p_k\}, \{q_k^*\}\}$ - план (2)

На уровне задач (3) и (4) вып-ся усл-е доп-ти

$\langle D_k u_k^* - d_k, q_k^* \rangle = 0 \quad \forall k$

Эти усл-я в сов-ти дают нам усл-е доп-ти для задач (1) и (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (по II т.дв.) Y^* – опт. план (1).

В частности, $\{u_k^*\}$ – опт. упр-е

ч.т.д.

Задачи.

(16) $A = A[N,N] \quad A \in GL(N)$ (обратим.)

$B = xy^T$

$x = x[N,1] \quad y = [N,1]$

(!) $(A+B) \in GL(N)$

$(A+B)^{-1} = A^{-1} - \beta A^{-1} B A^{-1}$, где

$\beta = \frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha = \langle y, A^{-1}x \rangle$, при усл-ии $\alpha \neq -1$

(!) При $\alpha = -1$ обратимости не будет

(17) $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & H \end{pmatrix}$

где B, H – квадр. матрицы

$B \in GL$. Положим $F = H - DB^{-1}C$

(!) если $F \in GL \Rightarrow A \in GL$

и при этом

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}CF^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CF^{-1} \\ -F^{-1}DB^{-1} & F^{-1} \end{pmatrix}$$

§10. Симплекс-метод

$f(x) := c[N] \times x[N] \longrightarrow \inf$

$A[M,N] \times x[N] = b[M]$ (1)

$x[N] \geq \mathbb{0}[N]$

Усл-е доп-ти:

$u[M] \times A[M,j] = c[j]$, если $x[j] > 0$

Напоминание:

$N_+(x) = \{ j \in N \mid x[j] > 0 \}$

x – БП, если $A[M,j]$, $j \in N_+(x)$ – ЛНЗ.

Предполож-е. Все БП з. (1) – невырожденны.

/* x – невырожд. БП $\Leftrightarrow |N_+(x)| = |M|$

$\Leftrightarrow A[\underset{\text{базис. м.}}{M, N_+(x)}]$ - квадр. и невырожд.

$\Leftrightarrow \exists \underset{\text{обр. базис. м.}}{B[N_+(x), M]} = (A[M, N_+(x)])^{-1}$ */

] x_0 - БП

$N_+ = N_+(x_0)$, $A[M, N_+]$ - БМ, $B[N_+, M]$ - ОБМ

$f(x_0) = \langle c_0, x_0 \rangle$

1) проверим x_0 на опт-ть:

построить $u_0 = u_0[M]$:

$u_0[M] \times A[M, j] = c[j]$, $j \in N_+$

Короче: $u_0[M] \times A[M, N_+] = c[N_+]$ (2)

$\Leftrightarrow \quad u_0[M] = c[N_+] \times B[N_+, M]$ (3)

~~2) проверим,~~ и u_0 - двойств. вектор?

$\Delta_0[j] = u_0[M] \times A[M, j] - c[j]$, $j \in N \setminus N_+$ - оценки

Если все $\Delta_0[j] \le 0$, то u_0 - двойств. вектор и x_0 - опт. БП.

Задача решилось :). УРА! Иначе - шаг 2.

2) $\exists j_0 \in N \setminus N_+$: $\Delta_0[j_0] > 0$

$\Delta_0[j_0] \overset{(3)}{=} (c[N_+] \times \underbrace{B[N_+, M]) \times A[M, j_0]}_{z_0[N_+]}$ (4) $- c[j_0]$

Эквив-но: $A[M, N_+] \times z_0[N_+] = A[M, j_0]$ (4')

Доопределим: $z_0[j] := \begin{cases} -1, & j = j_0 \\ 0, & \text{остал. } j \in N \end{cases}$

$\Rightarrow z_0 = z_0[N]$:

$\Delta_0[j_0] = c[N_+] \times z_0[N_+] - c[j_0] =$

$= c[N_+] \times z_0[N_+] + c[j_0] \times \underset{(-1)}{z_0[j_0]} = \langle c, z_0 \rangle > 0$

(4'): $Az_0 = \mathbb{0}$ переходим к 3.

3) проверим ц.ф. на огр-ть снизу:

Р. мус $x(t) = x_0 - t z_0$, $t > 0$

$f(x(t)) = \langle c, x_0 \rangle - t \langle c, z_0 \rangle = \langle c, x_0 \rangle -$

$- t \underbrace{\Delta_0[j_0]}_{>0}$ - убыв.

$A(x(t)) = Ax_0 - t \underbrace{Az_0}_{= \mathbb{0}} = Ax_0 = b \quad \forall t$

Когда $x(t) \ge \mathbb{0}$?

Если $z_0[N_+] \le \mathbb{0}[N_+]$, то $z_0[N] \le \mathbb{0}[N]$

и $x(t) \ge \mathbb{0} \quad \forall t > 0$.

$\Rightarrow x(t) \in \Omega \quad \forall t > 0$ и $f(x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$

$\Rightarrow$ задача (1) не имеет реш-я. УРА!

Иначе - шаг 4.

4) улучшение:

$\exists s \in N_+$: $z_0[s] > 0$

$t_0 := \min\limits_{\text{таких } s} \dfrac{x_0[s]}{z_0[s]} > 0$ (5)

s_0 - индекс, на кот. достиг. min в (5)

Р. $x_1 := x_0 - t_0 z_0$ – план (1)

$f(x_1) = \langle c, x_0\rangle - \underbrace{t_0 \Delta_0[j_0]}_{>0} < f(x_0)$ – улучшили

x_1 – БП?

$x_1[s_0] = 0$

$x_1[s] = x_0[s] - t_0 z_0[s]$ при ост. $s \in N_+$

$x_1[j_0] = -t_0 z_0[j_0] = t_0$

$x_1[j] = 0$ при ост. $j \in N \setminus N_+$

Обозн. $\widetilde{N}_+ = (N_+ \setminus \{s_0\}) \cup \{j_0\}$

$\Rightarrow N_+(x_1) \subset \widetilde{N}_+$

$A[M, \widetilde{N}_+]$ – ЛНЗ? (~~все~~

$\exists\ A[M, \widetilde{N}_+] \times v[\widetilde{N}_+] = \mathbb{0}$, т.е.

$$\sum_{j \in \widetilde{N}_+} v[j] A[M, j] = \mathbb{0}$$

08.10.2012. $A[M, \widetilde{N}_+]$ получилась из $A[M, N_+]$ заменой столбца с инд. s_0 на столбец j_0.

$$A[M, j_0] \overset{(4)}{=} \sum_{j \in N_+} z_0[j] A[M, j], \quad z_0[s_0] > 0$$

$$\mathbb{0} = \sum_{j \in \widetilde{N}_+} v[j] A[M, j] = \sum_{j \in N_+ \setminus \{s_0\}} v[j] A[M, j] + v[j_0] \cdot$$

$$\cdot \sum_{j \in N_+} z_0[j] A[M, j] =$$

$$= \sum_{j \in N_+ \setminus \{s_0\}} (v[j] + v[j_0] z_0[j]) A[M, j] + v[j_0] z_0[s_0] \cdot A[M, s_0]$$

лин. комбинация столбцов $\{A_j\}_{j \in N_+}$

лин. нез (т.к. x_0 – базис).

Всё равно $\mathbb{0} \Rightarrow$ коэф-ты $= 0 \Rightarrow$ первая скоб. $= 0$ и коэф. перед $A[M, s_0] = 0$

$z_0[s_0] > 0 \Rightarrow v[j_0] = 0 \Rightarrow$ (из первой скобки)

$v[j] \equiv 0, \quad j \neq$ ~~Б~~ s_0

$\Rightarrow \{A_j\}_{j \in \widetilde{N}_+}$ – ЛНЗ $\Rightarrow x_1$ – БП

Предполож. о невырожд-ти $\Rightarrow |N_+(x_1)| = |M| = |N_+|$

$\Rightarrow N_+(x_1) = N_+ \setminus \{s_0\} \cup \{j_0\}$

Продолжая далее таким же образом, мы в силу строгого убывания целевой ф-ции за конеч. число шагов либо найдём оптим. план, либо покажем, что ЦФ не огр. снизу.

<u>Опишем общий шаг симплекс-метода:</u>

x_k – БП, $N_k = N_+(x_k)$, $A[M, N_k]$, $B_k[N_k, M] = (A[M, N_k])^{-1}$, $f(x_k) = \langle c, x_k\rangle$

1. $u_k[M] = c[N_k] \times B_k[N_k, M]$
2. Последовательно вычисляем оценки.

$\Delta_k[j] = u_k[M] \times A[M,j] - c[j]$, $j \in N \setminus N_k$

<u>Если</u> $\Delta_k[j] \le 0$ при всех $j \in N \setminus N_k$, <u>то</u>

x_k – оптим. БП. <u>КОНЕЦ</u>

<u>ИНАЧЕ</u> $\exists\, j_k \in N \setminus N_k : \Delta_k[j_k] > 0$

3. $z_k[N_k] = \cancel{c[N_k] \times B_k[}\ B_k[N_k, M] \times A[M, j_k]$

<u>Если</u> $z_k[N_k] \le \mathbb{0}[N_k]$, <u>то</u>

ЦФ не огр. снизу на Ω $\Rightarrow$ реш-ний нет. <u>КОНЕЦ</u>.

<u>ИНАЧЕ</u> $\exists\, s \in N_k : z_k[s] > 0$

4. $t_k = \min \left\{ \frac{x_k[s]}{z_k[s]} \,\middle|\, s \in N_k : z_k[s] > 0 \right\}$

s_k – индекс, на кот. достиг. min

$x_{k+1} = x_k - t_k z_k$,

$f(x_{k+1}) = f(x_k) - \Delta_k[j_k] \cdot t_k$

$N_{k+1} = N_k \setminus \{s_k\} \cup \{j_k\}$

На носителе: $x_{k+1}[j] = x_k[j] - t_k z_k[j],\ j \ne j_k$

$x_{k+1}[j_k] = t_k$

5. $B_{k+1}[N_{k+1}, M] = (A[M, N_{k+1}])^{-1}$

<u>goto</u> 1

Самое сложное при больших размерностях – вычисл. обратной матрицы.

<u>Алгебра</u>. (как быстро обращать матрицы).

$C = C[1:m, 1:m]$ – невырожд. ($\exists\, C^{-1}$)

В м-це C заменим столбец C_s на вектор-столбец $P = \sum_{j \in 1:m} v_j C_j$, причем $v_s \ne 0$.

Новую м. обозначим D.

(1) М. D – обратима и $D^{-1} = VC^{-1}$, где V – матрица, отлич. от E только s-ым столбцом.

$$V_s = \left(-\frac{v_1}{v_s}, -\frac{v_2}{v_s}, \dots -\frac{v_{s-1}}{v_s}, \frac{1}{v_s}, -\frac{v_{s+1}}{v_s}, \dots -\frac{v_m}{v_s}\right)^T$$

<u>Док-во</u>:

$$D = C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 & & 0 \\ 0 & 1 & v_2 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & v_s & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & v_m & & 1 \end{pmatrix}$$

обратима?

А именно: обратная к ней – это V?

$$\begin{pmatrix} 1 & & v_1 & \\ & 1 & \vdots & \\ & & v_s & \\ & & v_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & -v_1/v_s & 0 \\ & 1 & \vdots & 0 \\ & & 1/v_s & \\ & & -v_m/v_s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$D^{-1} = VC^{-1}$

ч.т.д.

$$\bar{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -\frac{v_1}{v_s} & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1/v_s & & \\ & & & \ddots & \\ & & -v_n/v_s & & 1 \end{pmatrix} \bar{C}^{-1}$$

По строкам:

$\bar{D}^{-1}[s,\cdot] = \bar{C}^{-1}[s,\cdot] \cdot \frac{1}{v_s}$ – рабочая строка

$\bar{D}^{-1}[i,\cdot] = \bar{C}^{-1}[i,\cdot] \underbrace{- v_i \bar{D}^{-1}[s,\cdot]}_{-\frac{v_i}{v_s}\bar{C}^{-1}[s,\cdot]}, \quad i \neq s$

$B_{k+1}[N_{k+1}, M] = (A[M, N_{k+1}])^{-1}$ – как?

$A[M, N_{k+1}]$ получ-ся из м. $A[M, N_k]$ заменой столбца $A[M, s_k]$ на $A[M, j_k]$ =

$= \sum_{s \in N_k} z_k[s] A[M, s], \quad z_k[s_k] > 0$

Да это же лемма! $\Rightarrow$

(6) $B_{k+1}[j_k, M] = B_k[s_k, M] / z_k[s_k]$

$B_{k+1}[s, M] = B_k[s, M] - z_k[s] B_{k+1}[j_k, M], \quad s \neq j_k$

Модификация:

5.' Пересчитываем B_{k+1} по ф-ле (6).
goto 1.

На след. шаге:

$u_{k+1}[M] = c[N_{k+1}] \times B_{k+1}[N_{k+1}, M]$

(1) $u_{k+1}[M] = u_k[M] - \Delta_k[j_k] B_{k+1}[j_k, M]$ (7)

Док-во

$u_{k+1} = \sum_{s \in N_{k+1}} c[s] B_{k+1}[s, M] =$

$= \sum_{s \in N_k \setminus \{s_k\}} c[s] B_{k+1}[s, M] + c[j_k] B_{k+1}[j_k, M] \overset{(6)}{=}$

$= \sum_{s \in N_k \setminus \{s_k\}} c[s] (B_k[s, M] - z_k[s] B_{k+1}[j_k, M]) + c[j_k] \cdot B_{k+1}[j_k, M] =$

$= \sum_{s \in N_k} c[s] B_k[s, M] - c[s_k] B_k[s_k, M] - \left(\sum_{s \in N_k \setminus \{s_k\}} c[s] z_k[s] - c[j_k]\right) B_{k+1}[j_k, M] =$

$= c[N_k] \times B_k[N_k, M] - \left(\sum_{s \in N_k \setminus \{s_k\}} c[s] z_k[s] + c[s_k] z_k[s_k] - c[j_k]\right) B_{k+1}[j_k, M] =$

$= u_k[M] - \sum_{s \in N_k} \underbrace{(c[N_k] \times z_k[N_k] - c[j_k])}_{(4):\ \Delta_k[j_k]} B_{k+1}[j_k, M]$

ч.т.д.

Можно модифицировать:

5.'' Перес. B_{k+1} по ф-ле (6).
Перес. u_{k+1} по ф-ле (7).
goto 2

Это наз-ся метод обратных матриц (разновидность симплекс-метода).

(18) Решить задачу ЛП симплекс-методом:

$$x_1 - 8x_2 - 5x_3 \longrightarrow \inf$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_j \geq 0,\ j \in 1:3$$

11.10.2012

§ 11. Вычислительная схема метода обратных матриц.

Как хранить данные?

$\#k$	$f(x_k)$	$u_k[M]$	$\Delta_{j_k} = \Delta_k[j_k]$
N_k	$x_k[N_k]$	$B_k[N_k, M]$	$z_k[N_k]$

Пример.

$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \longrightarrow \inf$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$$
$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 7$$
$$x_j \geq 0,\ j \in 1:5$$

$N_0 = \{2, 5, 4\}$ $\quad A[M, N_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_0[N_0, M] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_0[N_0] = B_0[N_0, M] \times b[M] = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f(x_0) = c[N_0] \times x_0[N_0] = (1, 0, -1) \times \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 3$$

$\cancel{\Delta_1 = \Delta_0[1] =}$

$$u_0[M] = c[N_0] \times B_0[N_0, M] = (1, 0, -1)$$

$$\Delta_1 = \Delta_0[1] = u_0[M] \times A[M, 1] - c[1] =$$
$$= (1, 0, -1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = 3 > 0 \Rightarrow \text{план - не оптим.}$$

$$z_0[N_0] = B_0[N_0, M] \times A[M, 1] = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\#0$	3	1	0	-1	$\Delta_1 = 3$
$\boxed{2}$	10	1	0	0	2
5	4	0	1	0	-3
4	7	0	0	1	1

выходит из носителя $\left(\frac{10}{2} < \frac{7}{1}\right)$

$\#1$	-12	$-1/2$	0	-1	$\Delta_3 = \frac{7}{2}$	
1	5	$1/2$	0	0	$-3/2$	$\leftarrow -3$ рабочая строка
5	19	$3/2$	1	0	$-13/2$	-2
$\boxed{4}$	2	$-1/2$	0	1	$5/2$	1

$$x_{k+1}[j_k] = t_k = \frac{x_k[s_k]}{z_k[s_k]}$$

$$x_{k+1}[j] = x_k[j] - t_k z_z[j] = x_k[j] - z_k[j]\, x_{k+1}[j_k]$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) - t_k \Delta_k[j_k] = f(x_k) - \Delta_k[j_k]\, x_{k+1}[j_k]$$

$$\Delta_2 = \left(-\tfrac{1}{2}, 0, -1\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1 < 0$$

$$\Delta_3 = \left(-\tfrac{1}{2}, 0, -1\right)\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} + 3 = \tfrac{7}{2} > 0$$

#2	$-74/5$	$1/5$	0	$-12/5$
1	$31/5$	$1/5$	0	$3/5$
5	$12/5$	$1/5$	1	$13/5$
3	$4/5$	$-1/5$	0	$2/5$

$$\Delta_2 = \left(1/5, 0, -\tfrac{12}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1 < 0$$

$$\Delta_4 = \left(1/5, 0, -\tfrac{12}{5}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 1 < 0 \Rightarrow \text{опт. план}$$

<u>Ответ:</u> $x_* = (31/5, 0, 4/5, 0, 12/5)$

$f_* = -74/5$

Метод искуственного базиса

Если начальный БП найти сложно.

Пример.

$$-3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \longrightarrow \inf$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6$$

$$x_j \geq 0,\ j \in 1:4$$

Р. вспомог. задачу:

$$x_5 + x_6 + x_7 \longrightarrow \inf$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_6 = 9$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_7 = 6$$

$$x_j \geq 0,\ j \in 1:7$$

По идее, решив эту задачу, мы получим $x_5^* = x_6^* = x_7^* = 0$ и $f_* = 0$.

Если этого не случится, ~~что~~ то значит, у исх. задачи мн-во ограничений несовместно.

#0	15	1	1	1	$\Delta_3 = 4$
5	0	1	0	0	-1
$\boxed{6}$	9	0	1	0	3
7	6	0	0	1	2

БП-вырожд. Есть тонкости!

$\Delta_1 = 1+2+1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = 2-2-1 < 0$

$\Delta_3 = -1+3+2 = 4 > 0$

, все равно считаем дальше.

– будем с ней работать

#1	3	1	$-1/3$	1	$\Delta_2 = \frac{5}{3}$
5	3	1	1/3	0	4/3
3	3	0	1/3	0	-2/3
$\boxed{7}$	0	0	-2/3	1	1/3

$\Delta_1 = (1, -1/3, 1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 0 = \frac{4}{3}$

$\Delta_2 = (1, -\frac{1}{3}, 1)\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \frac{5}{3}$

#2	3	1	3	-4	$\Delta_1 = 3$
$\boxed{5}$	3	1	3	-4	3
3	3	0	-1	2	0
2	0	0	-2	3	-1

$\Delta_1 = (1, 3, -4)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = 3$

Зн-е ф-ции не уменьшилось! Вот она — подстава выроожд. плана. Может быть цикл. Борьба: считать Δ_i по порядку.

«У нас здесь произошло счастье!»

#3	7 0	$-\frac{2}{3}$ 0	-7 0	35/3 0
1	1	1/3	1	-4/3
3	3	0	-1	2
2	1	1/3	-1	5/3

?!

Выкинем все несуществующие индексы! Мы перейдём к исход. задаче => поменяем вектор c!

Зн-е ф-ции и двойств. вектор ме-

няются!

$\Delta_4 = (-2/3, -7, \frac{35}{3})\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + 1 < 0$

<u>Ответ:</u> $x_* = (1, 1, 3, 0)$

$f_* = 7$.

Подробнее о борьбе с вырожденностью см. по ссылке:

сайт кафедры: Агафоново, Дадлавет „Выр-ть задач ЛП"

+ Мамозимов „Модиф. симплекс-метод"

<u>Задачи:</u>

(19) Решить з. симпл.-методом:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \longrightarrow \sup$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

$-2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6$

$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 12$

$x_j \geq 0,\ j \in 1:5$

(20) Решить СМ (с исх. иск. базиса)

$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \longrightarrow \inf$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7$

$x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = -2$

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5$

$x_j \geq 0;\ j \in 1:6$

15.10
2012

II. Нелинейные экстремальные задачи

§1. Необходимые условия оптимальности в задаче с линейными ограничениями.

$$f(x) \longrightarrow \inf \qquad (1)$$

$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1]$$

Ω - мн-во планов - замкн., выпуклое.

Предпол-ния:

$\Omega \subset \Omega^\circ$ - откр., вып.

f - дифф. на Ω°

Напоминание:

f - дифф. в $(\cdot)\, x$: $\exists\, a \in \mathbb{R}^N$:

$$f(x+h) = f(x) + \langle a, h\rangle + o(\|h\|), \text{ где } \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Если a сущ-ет, то

$$a = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x[j]}(x) \right\}_{j \in N} = f'(x) = f'(x)[N]$$

градиент

f - дифф. на Ω°, если она дифф. в каждой точке Ω°.

Пример: Квадратич. ф-я:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha, \text{ где } D = D^T$$

fix $x \in \mathbb{R}^N$

$$Q(x+h) = \frac{1}{2}\langle D(x+h), x+h\rangle + \langle c, x+h\rangle + \alpha =$$
$$= Q(x) + \langle Dx + c, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Dh, h\rangle \qquad (2)$$

$$\frac{|\langle Dh, h\rangle|}{\|h\|} \leq \frac{\|Dh\| \cdot \|h\|}{\|h\|} = \|Dh\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ Q - дифф-ма в $\forall\, (\cdot)\, x \in \mathbb{R}^N$

$$Q'(x) = Dx + c$$

(1) Пусть $x_* \in \Omega$ - реш. зад. (1). Тогда:

$$\langle f'(x_*), x - x_*\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega \qquad (3)$$

Док-во

при $x = x_*$ - очевид.

при $x \neq x_*$

Ω - вып. $\Rightarrow$ $[x_*, x] \subset \Omega$, т.е. (параметризуем):

$$x_* + t(x - x_*) \in \Omega \text{ при } t \in [0, 1]$$

x_* - реш-е (1) $\Rightarrow$ $\forall\, t \in (0, 1)$

$$0 \leq f(x_* + \underbrace{t(x - x_*)}_{h}) - f(x_*) =$$
$$= \langle f'(x_*), t(x - x_*)\rangle$$

$+ o(\|t(x-x_*)\|)$

Поделим на $t>0$:

$$\langle f'(x_*), x-x_*\rangle + \frac{o(t\|x-x_*\|)}{t\cdot\|x-x_*\|}\cdot\|x-x_*\| \geq 0$$

$t \to 0 \to 0$

Перейдем к пределу при $t \to 0+$, получим (3).

ч.т.д.

Перепишем (3):

$$\langle f'(x_*), x\rangle \geq \langle f'(x_*), x_*\rangle \quad \forall x \in \Omega$$

$\Rightarrow x_*$ - реш-е задачи ЛП:

$$\langle f'(x_*), x\rangle \xrightarrow[x\in\Omega]{} \inf$$

(T)

Для того, чтобы $x_* \in \Omega$ - реш-е м (1) необходимо, чтобы $\exists\, u_* = u_*[M]$ со свойствами:

$$\langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle \qquad (4)$$

$$u_*[M] \times A[M, N_1] \leq f'(x_*)[N_1]$$

$$u_*[M] \times A[M, N_2] = f'(x_*)[N_2]$$

$$u_*[M_1] \geq 0[M_1]$$

Важные частные случаи:

I. $N_1 = \varnothing$, $M_1 = \varnothing$, $N_2 = N$, $M_2 = M$

$$f(x) \longrightarrow \inf$$

$$A[M, N] \times x[N] = b[M] \qquad (5)$$

(T) (Лагранжа)

x_* - реш. (5) $\Rightarrow f'(x_*)$ допускает представление:

$$f'(x_*) = u_* A$$

Док-во.

Из общей теоремы:

$$\langle b, u_*\rangle = \langle f'(x_*), x_*\rangle, \quad u_* A = f'(x_*)$$

Первое усл-е на самом деле избыточно.

$$\langle f'(x_*), x_*\rangle = \langle u_* A, x_*\rangle = \langle u_*, A x_*\rangle = \langle u_*, b\rangle$$

(т.е. оно просто след-е второго)

ч.т.д.

II $N_1 = \varnothing$, $[N_2 = N]$

$$f(x) \longrightarrow \inf \qquad (6)$$

$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

(T) (Куна-Таккера)

Если x_* - реш-е (6) $\Rightarrow \exists\, u_* = u_*[M]$:

$f'(x_*) = u_* A$

(7) $(A[i,N] \times x_*[N] - b[i]) \times u_*[i] = 0 \quad i \in M_1$

$u_*[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$

Док-во.

из общей теоремы:

$\langle b, u_* \rangle = \langle f'(x_*), x_* \rangle$, $u_* A = f'(x_*)$,

$u_*[M_1] \geq \mathbb{0}[M_1]$.

Нужно проверить только (7).

$\langle b, u_* \rangle = \langle f'(x_*), x_* \rangle = \langle u_* A, x_* \rangle =$

$= \langle u_*, A x_* \rangle$

$\Rightarrow \langle A x_* - b, u_* \rangle = 0$

Подробно: $\sum\limits_{i \in M_1} \underbrace{(A[i,N] \times x_*[N] - b[i])}_{\geq 0} \times \underbrace{u_*[i]}_{\geq 0} = 0$

(на M_2 будут 0)

$\Rightarrow$ (7) ч.т.д.

Зам-е.

Усл-е доп-ти (7) можно записать

$\langle A x_* - b, u_* \rangle = 0$

Задачи:

1. Найти градиент ф-ции $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$, где $A = A[M,N]$ - произвольн.

2. Q - квадр. ф-ция, $P = P[N,M]$ - произв., $x_0 \in \mathbb{R}^N$ - фикс.
Найти градиент ф-ции $F(y) = Q(x_0 + Py)$

3. Запишите м-цу квадр. ф-ции
$Q(x) = x_1 x_2 - x_3 + x_4$

Коммент. к I.20. 18.10.2012.

$\ldots + x_7 = 7$

$\ldots + x_8 = -2$

$\ldots + x_9 = 5$

$x_j \geq 0,\ j \in 1:9 \Rightarrow (7, -2, 5)$ - не план!

Как бороться? Можно домнож. на -1, а можно:

$\ldots + x_7 = 7$

$\ldots - x_8 = 2$

$\ldots + x_9 = 5$

§2. Критерий оптимальности для задач с вып. цел. ф-ций и смешанными ограничениями.

Ω° - вып. откр. мн-во.

f - выпукла на Ω° - ?

f - выпуклая на Ω°, если $\forall\, x_0, x_1 \in \Omega^\circ$; $\forall\, t \in [0,1]$:

$$f(t x_1 + (1-t)x_0) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_0) \quad (1)$$

Эквив.:

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \le f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)) \quad (1')$$

(Л) (критерий выпуклости дифф-мой функции)

Для того, чтобы дифф-мая на Ω° ф-я f - б. выпуклой $\iff \forall\, x_0, x_1 \in \Omega^\circ$:

$$\cancel{\langle f'(x_0),\ x_1 - x_0\rangle \ge 0} \quad (2')$$

$$f(x_1) - f(x_0) \ge \langle f'(x_0),\ x_1 - x_0\rangle \quad (2)$$

Док-во:

"$\Rightarrow$" при $x_0 = x_1$ - очев.;

при $x_0 \ne x_1$:

(1'): при $t \in (0,1)$:

$$f(x_1) - f(x_0) \ge \frac{1}{t}\left(f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)\right) =$$

дифф-ма

$$= \langle f'(x_0), x_1 - x_0\rangle + \frac{o(\|t(x_1 - x_0)\|)}{t\|x_1 - x_0\|} \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Перейдем к пределу $t \to 0+$ получ. (2).

"$\Leftarrow$" фикс. $x_0, x_1 \in \Omega^\circ$, $t \in [0,1]$

Р. $x(t) = t x_1 + (1-t) x_0 \in \Omega^\circ$, т.к. Ω° - вып.

$\Rightarrow$

$$f(x_1) - f(x(t)) \ge \langle f'(x(t)),\ x_1 - x(t)\rangle \quad |\cdot t \ge 0$$

$$\oplus\ f(x_0) - f(x(t)) \ge \langle f'(x(t)),\ x_0 - x(t)\rangle \quad |\cdot (1-t) \ge 0$$

$$t f(x_1) + (1-t) f(x_0) - f(x(t)) \ge \langle f'(x(t)),\ \underbrace{t x_1 + (1-t) x_0 - x(t)}_{=\,0}\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ (1)

ч.т.д.

(Л) (крит. вып-ти квадратичной ф-ции)

Квадр. ф-я $Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha$, $D^T = D$ выпукла $\iff$

D - неотриц. определена

(т.е. $\langle Dh, h\rangle \ge 0 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^N$).

Док-во.

$\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$

$$Q(x_1) - Q(x_0) - \langle Q'(x_0),\ x_1 - x_0\rangle \overset{(1),\,(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\langle D(x_1 - x_0),\ x_1 - x_0\rangle$$

ч.т.д.

$$f(x) \longrightarrow \inf \quad (3)$$

$$A[M_1, N] \times x[N] \ge b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

$$x[N_1] \ge 0[N_1]$$

Ω - мн-во планов; $\Omega \subset \Omega^0$ - откр. вып; f - дифф. и вып. на Ω^0.

(T) (критерий оптимальности)

x_* - реш-е зад. (3) $\Longleftrightarrow$ $\exists\, u_* = u_*[M]$:

$$\langle b, u_* \rangle = \langle f'(x_*), x_* \rangle$$

$$u_*[M] \times A[M, N_1] \le f'(x_*)[N_1]$$

$$u_*[M] \times A[M, N_2] = f'(x_*)[N_2]$$

$$u_*[M] \ge \text{Ⓓ}[M_1]$$

Док-во:

"$\Rightarrow$" см. §1.

"$\Leftarrow$" $\forall\, x \in \Omega$

$$f(x) - f(x_*) \overset{(2)}{\ge} \langle f'(x_*), x - x_* \rangle =$$

$$= \langle f'(x_*), x \rangle - \langle b, u_* \rangle \underset{N = N_1 \cup N_2}{\ge} \langle u_* A, x \rangle -$$

$$- \langle u_*, b \rangle =$$

$$= \langle u_*, Ax - b \rangle \underset{M = M_1 \cup M_2}{\ge} 0$$

$\Rightarrow f(x) \ge f(x_*)$ ч.т.д.

Р. частные случаи:

I. $f(x) \longrightarrow \inf$, $Ax = b$ (4)

(T) x_* - реш-е зад. (4) с вып. дифф. ц.ф. f $\Longleftrightarrow$ $f'(x_*) = u_* A$ - допускает представление.

Док-во:

"$\Rightarrow$" см. §1.

"$\Leftarrow$" $\forall\, x \in \Omega$

$$f(x) - f(x_*) \ge \langle f'(x_*), x - x_* \rangle =$$

$$= \langle u_* A, x - x_* \rangle = \langle u_*, \underbrace{Ax}_{b} - \underbrace{Ax_*}_{b} \rangle = 0$$

ч.т.д.

II. $f(x) \longrightarrow \inf$ (5)

$$A[M_1, N] \times x[N] \ge b[M_1]$$

$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$

(T)

x_* - реш-е (5) с вып. дифф. f $\Longleftrightarrow$ $\exists\, u_* = u_*[M]$:

$$f'(x_*) = u_* A$$

$$(A[i, N] \times x_*[N] - b[i]) \times u_*[i] = 0, \quad i \in M_1$$

$$u_*[M_1] \ge \text{Ⓓ}[M_1]$$

Док-во

"$\Rightarrow$" см. §1.

"$\Leftarrow$" $\forall\, x \in \Omega$

$$f(x) - f(x_*) \ge \langle f'(x_*), x - x_* \rangle =$$

$$= \langle u_* A, x - x_* \rangle = \langle u_*, (Ax - b) + (b - Ax_*) \rangle =$$

$$= \langle u_*, Ax - b \rangle + 0 \underset{M = M_1 \cup M_2}{\ge} 0$$

(усл-е доп-ти) ч.т.д.

Задачи.

④ Д-те, что квадр. ф-я $Q(x)$, огр. снизу на $\mathbb{R}^N$, явл-ся выпуклой на $\mathbb{R}^N$.

⑤ Пусть D - симм. неотр. опр. м-ца. Д-те: если $\exists x_0$: $\langle Dx_0, x_0\rangle = 0 \Rightarrow$ необходимо $Dx_0 = \mathbb{0}$

⑥ Пусть D - симм. полож. опр. м-ца (т.е. $\langle Dx, x\rangle > 0 \ \forall x \neq \mathbb{0}$).

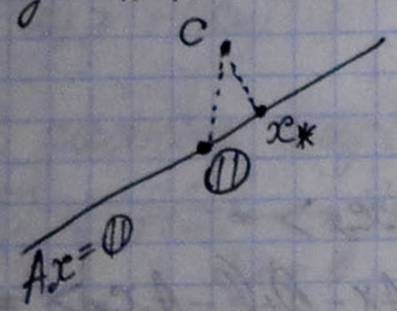
Д-те: D - обратима, и D^{-1} тоже симм. и полож. опр-на.

§3. Проектирование точки на подпространство и стандартный симплекс.

1°. Дано: $c \in \mathbb{R}^N$, $A = A[M,N]$ - м-ца с ЛНЗ строками.

$$\|x - c\| \longrightarrow \inf$$
$$Ax = \mathbb{0}$$

, где $\|\cdot\|$ - евкл. норма в $\mathbb{R}^N$



x_* (если сущ-ет) наз-ся ортогональной проекцией точки c на подпр-во.

Р. "эквив." задачу:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2 \longrightarrow \inf$$
$$Ax = \mathbb{0}$$

"эквив" - мн-во решений совпадает. т.к: нер-ва $\|x - c\| \geq \|x_* - c\|$ и $\frac{1}{2}\|x - c\| \geq \frac{1}{2}\|x_* - c\|$ - эквив.

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle x - c, x - c\rangle = \frac{1}{2}\langle Ex, x\rangle - \langle c, x\rangle + \frac{1}{2}\|c\|^2$$

$Q(x)$ - квадр. ф-я с симм. неотр. опр-ной м-цей E.

$\Rightarrow$ Q - выпукла на $\mathbb{R}^N$

- дифф-ма на $\mathbb{R}^N$,

$$Q'(x) = x - c$$

Крит. опт-ти: $\begin{cases} x - c = A^T u \\ Ax = \mathbb{0} \end{cases}$ $\Big| \cdot A$ слева

индекс. метод.

$$\Rightarrow \underbrace{Ax}_{\mathbb{0}} - Ac = AA^T u \Rightarrow -Ac = AA^T u$$

AA^T - обратима?

$AA^T v = \mathbb{0}$ имеет только нул. реш-е?

] v_0 - какое-то реш.-е $\Rightarrow$

$$0 = \langle AA^T v_0, v_0\rangle = \langle A^T v_0, A^T v_0\rangle = \|A^T v_0\|^2$$

$\Rightarrow A^T v_0 = \mathbb{0}$, т.е. лин. комб. столбцов $A^T = \mathbb{0} \Rightarrow$ лин. комб. строк $A = \mathbb{0}$, а они ЛНЗ $\Rightarrow v_0 = \mathbb{0}$

$\Rightarrow \exists\ (AA^T)^{-1}$

$\Rightarrow u_* = -(AA^T)^{-1}Ac$

$\Rightarrow x_* = c + A^T u_* = (E - A^T(AA^T)^{-1}A)c =: Pc$,

где $P = E - A^T(AA^T)^{-1}A$ - м-ца ортогон. проектирования.

22.10.2012. Комментарии к заданам:

① $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 = \frac{1}{2}\langle Ax-b, Ax-b\rangle =$

$= \frac{1}{2}\langle A^TAx, x\rangle - \langle A^Tb, x\rangle + \frac{1}{2}\|b\|^2$

Квадратич. ф-я! Мы знаем её градиент.

$P = E - A^T(AA^T)^{-1}A$

Лемма.

М. ортог. проектир-я P облад. след. св-вами:

1) $PA^T = \mathbb{O}$, $PP = P$

2) P - симм., неотр. опред.

3) $\operatorname{rank} P = |N| - |M|$

4) с.ч. м-цы P: 0 - кратности $|M|$
1 - кратности $|N|-|M|$

Док-во.

1) По опр-ю:

$PA^T = E\cdot A^T - A^T(AA^T)^{-1}AA^T = \mathbb{O}$

$P\cdot P = P(E - A^T(AA^T)^{-1}A) = P\cdot E - \underbrace{P\cdot A^T}_{=\mathbb{O}} \ldots = P$

2) $P^T = (E - A^T(AA^T)^{-1}A)^T = E^T - A^T(AA^T)^{-1}A =$
$= P \Rightarrow$ симм.

$\forall x \in \mathbb{R}^N\ \langle Px, x\rangle \geq 0$?

$\langle Px, x\rangle = \langle PPx, x\rangle \overset{\text{т.к. симм.}}{=} \langle Px, Px\rangle =$
$= \|Px\|^2 \geq 0$

3) Р. однород. СЛУ:

$Px = \mathbb{O}$

Заметим: $PA^T = \mathbb{O} \Rightarrow$ у системы есть как минимум $|M|$ ЛНЗ решений - строки A (столбцы A^T)

$\exists\ x_0$ - какое-то другое решение:

$\mathbb{O} = Px_0 = E\cdot x_0 - A^T\underbrace{(AA^T)^{-1}Ax_0}_{=:w} =$
$= x_0 - A^Tw \Rightarrow$

$x_0 = A^Tw$ - лин. комбинация столбцов A^T или лин. комб. строк A.

$\Rightarrow$ строки A образуют базис в подпр-ве решений $\{x \mid Px = \mathbb{O}\}$

$\Rightarrow$ разм-ть подпр-ва $= |M|$

С др. стороны: $\dim\{x \mid Px = \mathbb{O}\} =$

$= |N| - \operatorname{rank} P$

$\operatorname{rank} P = |N| - |M|$ ч.т.д.

Задачи:

⑦ Найти все сч. м-цы ортогон. проектирования.
/* $\Leftrightarrow$ д-ть 4) из леммы) */

⑧ Найти м-цу P ортогон. проект. на подпр-во:

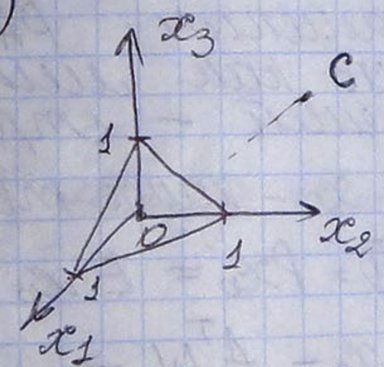
$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

2°. $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$

$$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \longrightarrow \inf$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \ j \in 1:n$$



Будем считать знак. огр-я — ограничениями-нер-вами.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Критерий оптимальности:

$$x_j - c_j = \lambda + u_j, \quad j \in 1:n$$

$$x_j u_j = 0, \quad j \in 1:n$$

$$u_j \geq 0, \quad j \in 1:n$$

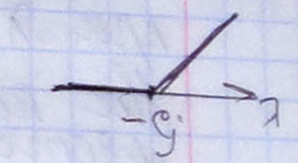
Можно:

$$\lambda + c_j = x_j - u_j$$

$|\lambda + c_j| = |x_j - u_j| = x_j + u_j$, т.к. либо $x_j > 0$ и $u_j = 0$, либо $x_j = 0$ и $u_j \geq 0$

$$\Rightarrow x_j = \frac{\lambda + c_j + |\lambda + c_j|}{2} = (\lambda + c_j)_+$$

λ - ?



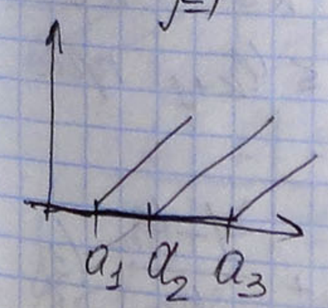
Воспольз. усл-ем, что $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ - получим ур-е

$$\varphi(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} (\lambda + c_j)_+ = 1$$

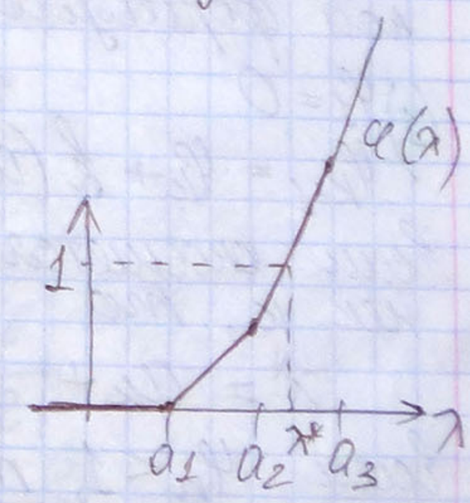
Упоряд. посл-ть $\{-c_j\}$ по неубыванию:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda - a_j)_+$$



сложим:



Видно, что $\varphi(\lambda)$ – непр., выпуклая, ломаная, монот. возраст. при $\lambda \geq a_1$ от 0 до $+\infty$.

$\Rightarrow \exists!\ \lambda^*: \varphi(\lambda^*) = 1$.

Запишем:

при $\lambda \leq a_1$ $\varphi(\lambda) = 0$

при $\lambda \in [a_k, a_{k+1}]$: $\varphi(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda - a_j) =$

$= k\lambda - S_k$, где $S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$

при $\lambda \geq a_n$: $\varphi(\lambda) = n\lambda - S_n$

На каждом интервале φ определяется значениями на узлах однозначно.

$\varphi_k := \varphi(a_k)$

т.к. $\varphi_k = ka_k - S_k \Rightarrow \varphi(\lambda) = \varphi_k + k(\lambda - a_k)$ на интервале $[a_k, a_{k+1}]$

φ_k можно вычислить по рекурентной формуле:

(1) $\varphi_1 = 0$

$\varphi_{k+1} = \varphi_k + k(a_{k+1} - a_k)$ $\quad k \in 1:n-1$.

Если окажется, что $\varphi_k < 1 \leq \varphi_{k+1}$ при нек. k, то

$$\lambda^* = a_k + \frac{1-\varphi_k}{k} \quad (2)$$

Если $\varphi_n < 1$, то $\lambda^* = a_n + \frac{1-\varphi_n}{n}$ (3)

Окончательно:

$$x_j^* = (\lambda^* + c_j)_+, \quad j \in 1:n \quad (4)$$

т.е. реш-ем явл-ся не формула, а алгоритм.

Алгоритм проектирования на симплекс.

1. Упорядочим посл-ть $\{-c_j\}$ по неубыванию. Получим посл-ть a_k.
2. Последовательно вычисляем $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ по ф-ле (1) до тех пор, пока не сбудется $\varphi_k < 1 \leq \varphi_{k+1}$, при нек. k.
   и вычисляем λ^* по ф-ле (2).
   Если $\varphi_n < 1$, то λ^* – по (3).
3. Находим компоненты проекции по ф-ле (4).

Пример.

$\mathbb{R}^6$, $c = (1, -1, 0, 1, 0, -2)$

Спроект. на симплекс:

k	1	2	3	4	5	6
a_k	-1	-1	0	0	1	2

$\varphi_1 = 0$

$\varphi_2 = 0 + 1 \cdot 0 = 0$

$\varphi_3 = 0 + 2 \cdot 1 = 2$.

$\varphi_2 < 1 < \varphi_3$, т.е. $k = 2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \lambda^* = -1 + \frac{1-0}{2}$

$\lambda^* = -\frac{1}{2}$.

<u>Ответ:</u> $x^* = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$

Задачи:

(9) Найти проекцию на симплекс

$c = (1, -1, 1, 1, 0, -3)$

25.10.2012. Разбор (5):

D - неотр. опр.: $x_0 : \langle Dx_0, x_0 \rangle = 0 \overset{?}{\Rightarrow} Dx_0 = \mathbb{0}$

Р. $Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$

+: x - точка min $\Rightarrow Q'(x_0) = \mathbb{0} = Dx_0$

−: x_0 - точка min в ~~зад~~ экстр. задаче:

$Q(x) \longrightarrow \inf$

$Ax = b$, где $A = \mathbb{0}$, $b = \mathbb{0}$

это слишком сложно...

Задачи:

(10). Решить задачу проек-я на куб:

$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \longrightarrow \inf$

$|x[j]| \leq 1, \ j \in N$

(11) Решить экстр. задачу

$\frac{1}{2}\|x - c\|^2 \longrightarrow \inf$

$x \geq \mathbb{0}$

(12) Док-те: ортогон. проекция $(\cdot)$ c на $\forall$ вып. замкн. мн-во Ω $\exists!$.

§4. Квадратичное программирование

$Q(x) := \frac{1}{2}\langle Dx, x \rangle + \langle c, x \rangle \longrightarrow \inf$

$$\Omega \begin{cases} A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1] \\ A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2] \\ x[N_1] \geq \mathbb{0}[N_1] \end{cases} \quad (1)$$

D - симм., неотр. опред. ($\Rightarrow Q$ - выпуклая)

(T) (о существовании)

Зад. (1) имеет реш-е $\Leftrightarrow \Omega \neq \varnothing$ и $\inf\limits_{x \in \Omega} Q(x) > -\infty$ (огр. снизу).

<u>Док-во</u> не будет.

1971 - Feaves - для невып.

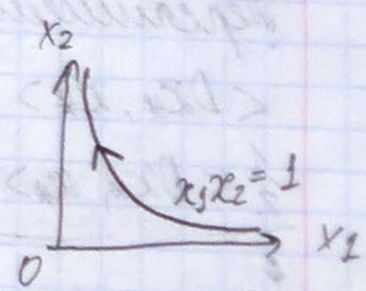
1979 Харламов - для $r \geq 4$ теор. не верна.

Пример:

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

$f(x) = (1 - x_1 x_2)^2 + x_1^r$, $r \geq 4$

$f(x) \geq 0$ на Ω, $\inf\limits_{x \in \Omega} f(x) = 0$



Т.е. inf есть, но он не достигается.

Не $\exists\, x_*^*: f(x_*)=0$

1982 – Малозёмов док-ал для куб. случая.

(T) (критерий опт-ти)

$x_* \in \Omega$ – решение зад. (1) $\Leftrightarrow \exists\, u_* = u_*[M]$:

$$\langle b, u_* \rangle = \langle Dx_* + c, x_* \rangle \quad (2)$$

$$-x_*[N] \times D[N, N_1] + u_*[M] \times A[M, N_1] \le c[N_1]$$

$$-x_*[N] \times D[N, N_2] + u_*[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$$

$$u_*[M_1] \ge \mathbb{0}[M_1]$$

Док-во.

Это просто переформулировка общего критерия из §2.

учесть: $Q'(x_*) = Dx_* + c$ * это слобец, а нужна строка.

поэтому $D[N_1, N] \times x_*[N] = x_*[N] \times D[N, N_1]$ для N_2

ч.т.д.

Перепишем (2):

$$\langle Dx_*, x_* \rangle + \langle c, x_* \rangle = \langle b, u_* \rangle$$

$$\frac{1}{2}\langle Dx_*, x_* \rangle + \langle c, x_* \rangle = -\frac{1}{2}\langle Dx_*, x_* \rangle + \underset{\overset{\shortparallel}{q(x_*, u_*)}}{\langle b, u_* \rangle}$$

Введем Λ – мн-во пар $z = \{v, u\}$:

$$-v[N] \times D[N, N_1] + u[M] \times A[M, N_1] \le c[N_1]$$

$$-v[N] \times D[N, N_2] + u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$$

$$u[M_1] \ge \mathbb{0}[M_1]$$

Перефрмулир. прит. опт-ти:

$x_* \in \Omega$ – реш. зад. (1) $\Leftrightarrow \exists\, u_* = u_*[M]$:

пара $z_* = \{x_*, u_*\} \in \Lambda$ и $Q(x_*) = q(z_*)$

(1) $\forall\, x \in \Omega,\ \forall\, z \in \Lambda$

$$Q(x) \ge q(z)$$

Док-во: $z = \{v, u\} \in \Lambda$, $x \in \Omega$:

$$\langle b, u \rangle \underset{M = M_1 \cup M_2}{\le} \langle Ax, u \rangle = \langle uA, x \rangle \underset{N = N_1 \cup N_2}{\le} \langle Dv + c, x \rangle =$$

$$= \langle Dv, x \rangle + \langle c, x \rangle \quad (3)$$

D-неотр. опр-ная $\Rightarrow$

$$0 \le \langle D(v - x), v - x \rangle \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\langle Dv, v \rangle + \frac{1}{2}\langle Dx, x \rangle - \langle Dv, x \rangle$$

Подставим в (3):

$$\langle b, u \rangle \le \frac{1}{2}\langle Dv, v \rangle + \frac{1}{2}\langle Dx, x \rangle + \langle c, x \rangle$$

$$\Rightarrow q(z) \le Q(x)$$

ч.т.д.

Пусть зад. (1) разрешима, x_* – её решение.

Из крит. опт-ти и леммы $\Rightarrow$

$\exists\, u_*: \; z_* = \{x_*, u_*\} \in \Lambda$ и

$$q(z) \le Q(x_*) = q(z_*) \quad \forall z \in \Lambda$$

Значит, z_* – реш-е экстр. задачи:

$$q(z) \xrightarrow[z\in\Lambda]{} \sup \qquad (4)$$

Зад (4) наз-ся двойственной к задаче (1).

Установимо: Если зад. (1) имеет реш-е x_*, то и зад (4) имеет реш-е z_*, и при этом экстр. знач-я этих задач равны.

$$\min_{x\in\Omega} Q(x) = \max_{z\in\Lambda} q(z) \qquad (5)$$

Вопрос: верно ли обратное?

Можно док-ть, что из разреш-ти зад. (4) следует разр-ть зад. (1) и равенство (5).

(T) (1-я теорема двойств-ти)

Если одна из пары двойств. задач (1), (4) разрешима, то разрешима и другая, при этом вып-ся соотн-е двойств-ти (5).

<u>Док-во</u> (мы уже её док-ли).

(4) подробнее:

$$q(z) := -\frac{1}{2}\langle Dv, v\rangle + \langle b, u\rangle \longrightarrow \sup$$

$$\begin{aligned} -v[N]\times D[N,N_1] + u[M]\times A[M,N_1] &\le c[N_1] \\ -v[N]\times D[N,N_2] + u[M]\times A[M,N_2] &= c[N_2] \\ u[M_1] &\ge \Theta[M_1] \end{aligned} \qquad (4')$$

Мин. пр:

	c	
u	A	b
	зн. огр.	

Кв. пр-е:

	c	
v	$-D$	$-\frac{1}{2}Dv$
u	A	b
	зн. огр.	

(T)

Зад. (1), (4) одновр. разрешимы $\Longleftrightarrow$ $\Omega \ne \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$

<u>Док-во</u>

"$\Rightarrow$" очевид.

"$\Leftarrow$" $\Lambda \ne \varnothing \Rightarrow \exists\, z_0 \in \Lambda \xrightarrow{\text{по (1)}} Q(x) \ge q(z_0) \;\forall x \in \Omega$

$\Rightarrow \inf\limits_{x\in\Omega} Q(x) \ge q(z_0)$, $\Omega \ne \varnothing \xrightarrow{\text{т. } \exists} (1)$ разрешима

$\xrightarrow{\text{1 пр. дв.}}$ (4) разрешима.

ч. т. д.

(T) (2-я теорема дв-ти)

Планы x_0, $z_0=\{u_0, v_0\}$ двойств-ных задач (1),(4) - оптимальны $\Longleftrightarrow$ вып-ся усл-я доп-ти:

$$(A[i,N]\times x_0[N]-b[i])\times u_0[i]=0 \quad \forall i\in M_1$$

$$(-v_0[N]\times D[N,j]+u_0[M]\times A[M,j]-c[j])\times x_0[j]=0 \quad \forall j\in N_1$$

Опт. от мин: $Dx_0=Dv_0$.

Док-во (без док-ва).

(13) Решите экстр. задачу:

$$\frac{1}{2}\|x\|^2+v\longrightarrow \inf$$

$$\langle c,x\rangle+v\geq 0$$

25. Основная лемма линейного программирования.

Р. Систему нелин. ур-ий.

$$a_i(x)=0,\ i\in I \quad (1)$$

$|I|<|N|$

Пусть $x_0\in\mathbb{R}^N$ удовл. (1).

(Л) (Осн. лемма НЛП)

Пусть $a_i(x)$, $i\in I$ непр. дифф. в окр-ти x_0. и

$a_i'(x_0)$, $i\in I$ - ЛНЗ. Тогда $\forall\, g_0\neq \mathbb{0}$, орт. этим градиентам, т.е:

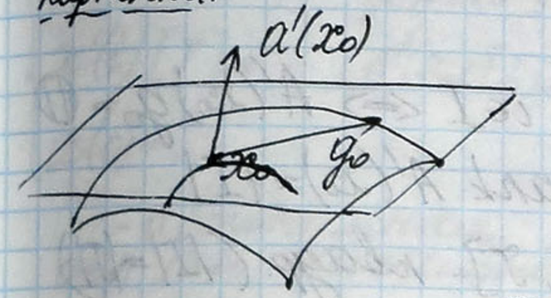
$$\langle a_i'(x_0), g_0\rangle=0,\ i\in I$$

$\exists$ параметрич. непр. дифф-мая кривая $x=x(t)$, в окр-ти точки $t=0$:

$$x(0)=x_0,\quad x'(0)=g_0,$$

$$a_i(x(t))=0,\ i\in I,\ \forall t\in(-\delta,\delta) \quad (2)$$

Картинка:



Система нелин. ур-ий - пов-ть;
непр. дифф. - гладкая;
градиенты - нормали;
ортог. нормали - кас. пл-ть;
g_0 - вектор из кас. пл-ти.

Т.е. из x_0 можно выпустить кривую в напр-ии g_0, кот. лож. будет лежать на нашей пов-ти.

$A(x)$ - вектор-столбец с компонентами $a_i(x)$. Тогда (1): $A(x)=\mathbb{0}$ 29.10.2012.

$A'(x)$ - м-ца Якоби: её строки - градиенты $a_i'(x)$.

$$(a_i(x(t)))'\underset{\text{цепное правило}}{=}\langle a_i'(x(t)), x'(t)\rangle,\quad i\in I$$

Короче:

$$(A(x(t)))'=A'(x(t))\cdot x'(t)$$

Продифф. (2):

$$\left.\begin{aligned} A'(x(t))\cdot x'(t)&=\mathbb{0}\\ x(0)&=x_0\end{aligned}\right\}\ (3)\qquad t\in(-\delta,\delta)$$

Из (3) $\Rightarrow$ (2): т.к.

$\forall i \in I \quad a_i(x(t)) \overset{\text{т.о сред.}}{=} a_i(x(0)) + \langle a_i'(x(\tau_i)), x'(\tau_i)\rangle t$, где $\tau_i \in (0,t)$ - ф. точка. $(\exists t>0)$.

$a_i(x_0)=0$

$\langle .. \rangle = 0$ т.к. (3)

Поэтому (3) $\Rightarrow$ (2).

$g_0: \langle a_i'(x_0), g_0\rangle = 0, i\in I \Leftrightarrow A'(x_0)g_0 = \mathbb{0}$

$\{a_i'(x_0)\}_{i\in I}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ rank $A'(x_0) = |I|$

$\Rightarrow \exists J \subset N$: $A'(x_0)[I,J]$ - квадр. $(|I|=|J|)$ и неособая.

$A'(x_0)g_0 = \mathbb{0}$:

$A'(x_0)[I,J]\times g_0[J] + A'(x_0)[I,N\setminus J]\times g_0[N\setminus J] = \mathbb{0}[I]$ $\quad / \cdot A^{-1}(x_0)$

(4) $g_0[J] = (A'(x_0)[I,J])^{-1} \times A'(x_0)[I,N\setminus J]\times g_0[N\setminus J]$

Р. $A'(x)\cdot x' = \mathbb{0}$:

$A'(x)[I,J]\cdot x'[J] + A'(x)[I,N\setminus J]\times x'[N\setminus J] = \mathbb{0}$

Если бы $A'(x)[I,J]$ была обратима, то

$x'[J] = -(A'(x)[I,J])^{-1}\times A'(x)[I,N\setminus J]\times x'[N\setminus J]$

На самом деле $A'(x)[I,J]$ - обратима в малой окр-ти x_0.

(т.к. $A'(x_0)[I,J]$ - обратима и $a_i'(x)$ - непр. в окр-ти x_0.)

Т.е. это рав-во верно в малой окр-ти x_0.

Док-во (осн. лемма НЛП):

Р. систему дифф. ур-ний:

$$\begin{cases} x'(t)[N\setminus J] = g_0[N\setminus J] \\ x'(t)[J] = -(A'(x)[I,J])^{-1}A'(x)[I,N\setminus J]\times g_0[N\setminus J] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

(5) - автономная. Прав. часть - непр. в окр-ти начальных данных. $(0, x_0)$.

По т. Пеано у системы (5) $\exists\, x = x(t)$ - реш-е, непр. дифф-мое в окр-ти $t=0$.

Выполняется (3) $\Rightarrow$ (2). При этом ~~выт-ся~~ (4) в систему (4) подставить $t=0$). $x'(0) = g_0$ (если

ч.т.д.

Задачи:

(14) D - симм., полож. опр. матрица. Д-те, что все с. ч. отлич. от 1.

$D + D^{-1} - 2E$ - полож. опр. м.

(15) D - симм., полож. опр. м. Док-те, что

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}\langle Dx,x\rangle + \langle c,x\rangle\right) = -\frac{1}{2}\langle D^{-1}c,c\rangle$$

(сим, что D^{-1} - $\exists$ - доказано).

(16) D – симм., полож. опр.

Р. экстр. задачи:

$$\langle Dx,x\rangle \longrightarrow \inf \qquad\qquad \langle x,x\rangle \longrightarrow \sup$$

$$\langle x,x\rangle = 1 \qquad\qquad \langle Dx,x\rangle = 1$$

$$\langle a_i,x\rangle \geq 0,\ i\in 1:m \qquad\qquad \langle a_i,x\rangle \geq 0,\ i\in 1:m$$

(такой переход – взаимные по Эйлеру задачи).

Док-те, что экстр. знач-я этих задач μ и ν связаны соотношением:

$$\mu\cdot\nu = 1.$$

§6. Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме.

$$f(x)\longrightarrow \inf$$

$$a_i(x)\geq 0,\ i\in M_1 \qquad (1)$$

$$a_i(x)=0,\ i\in M_2$$

$$x\in U \qquad\qquad M_1\cup M_2 = M$$

где $U\subset\mathbb{R}^N$ – откр.

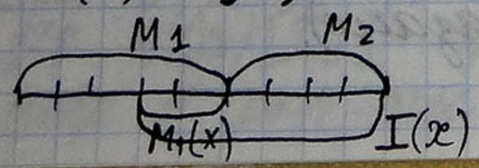
f, a_i – непр. дифф. на U.

Ω – мн-во планов.

fix $x\in\Omega$ – план (1).

$M_1(x)=\{i\in M_1:\ a_i(x)=0\}$

$I(x)=M_1(x)\cup M_2$ – активные ограничения



Остаток $M\setminus I(x) = M_1\setminus M_1(x)$

$a_i(x)>0,\quad i\in M\setminus I(x)$

Если $a_i'(x)$, $i\in I(x)$ – ЛНЗ, то говорят, что ограничения в (·) x – регулярны.

Def: $x_*\in\Omega$ – точка локального минимума в зад. (1), если $\exists\,\delta>0$:

$$f(x)\geq f(x_*)\quad \forall x\in\Omega\cap U_\delta(x_*),\ \text{где}$$

$U_\delta(x_*)=\{x\in\mathbb{R}^N \mid \|x-x_*\|<\delta\}$ – откр. δ-окр-ть x_*

(T) (К.-Т.)

Пусть x_* – т. лок. мин. в зад (1) и ограничения в (·) x_* – регулярны.

Тогда $\exists\ u_* = u_*[I(x_*)]$:

$$f'(x_*) = \sum_{i\in I(x_*)} u_*[i]\,a_i'(x_*) \qquad (2)$$

при этом $u_*[i]\geq 0,\quad i\in M_1(x_*)$

Док-во.

(2) – система лин. соот-ний отн-но u_* – совместна?

/* Вспомним признак совместности:

из §4

$$A[N,M]\times u[M] = c[N] \quad u[M_1]\geq \mathbb{O}[M_1] \quad \text{– совм.} \iff$$

$$\forall g\in\mathbb{R}^N:\quad g[N]\times A[N,M_1]\geq \mathbb{O}[M_1]$$

$$g[N]\times A[N,M_2] = \mathbb{O}[M_2]$$

выполн. $\langle e, g\rangle \geq 0$. */

Покажем $\forall g$:

$$\begin{aligned} &\langle a_i'(x_*), g\rangle \geq 0, \quad i\in M_1(x_*) \\ &\langle a_i'(x_*), g\rangle = 0, \quad i\in M_2 \end{aligned} \qquad (3)$$

вып-ся $\langle f'(x_*), g\rangle \geq 0$?

fix g_0 - удовл. (3).

Можем считать, что $g_0 \neq \mathbb{0}$.

Обозначим $I_0 = \{i\in M_1(x_*) \mid \langle a_i'(x_*), g_0\rangle = 0\} \cup M_2$

$$(3): \quad \begin{aligned} &\langle a_i'(x_*), g_0\rangle = 0, \quad i\in I_0 \\ &\langle a_i'(x_*), g_0\rangle > 0, \quad i\in I(x_*)\setminus I_0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Р. систему нелин. ур-ий.

$a_i(x) = 0, \quad i\in I_0.$

$$\left.\begin{aligned} &x_* \text{ - удовл. (т.к. } I_0 \subset I(x_*)) \\ &a_i'(x_*),\ i\in I_0 \text{ - ЛНЗ (т.к. — " —)} \\ &g_0 \neq \mathbb{0},\ g_0 \text{ ортог. } a_i'(x_*),\ i\in I_0. \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{НЛП}]{\text{осн. лем.}}$$

$\exists\ x = x(t)$ - непр. дифф. в окр-ти $t=0$:

$x(0) = x_*, \quad x'(0) = g_0,$

$a_i(x(t)) = 0, \quad i\in I_0$ при малых t.

Покажем, что $x(t)\in\Omega$ при малых $t>0$?

При $i\in I_0$ (в частности, $i\in M_2$):

$a_i(x(t)) = 0$ при малых t.

при $i\in I(x_*)\setminus I_0$: $a_i(x(t)) = a_i(\underbrace{x(0)}_{= x_*}) + \langle a_i'(\underbrace{x(0)}_{x_*}), \underbrace{x'(0)}_{= g_0}\rangle t + o(t) =$

$= t\left(\langle a_i'(x_*), g_0\rangle + \frac{o(t)}{t}\right) \overset{(4)}{>} 0$ при малых $t>0$

при $i\in M\setminus I(x_*)$: $a_i(x_*) > 0$, a_i - непр. в окр-ти x_* $\Longrightarrow$ (по т. о стабилизации знака) $a_i(x(t)) > 0$ при малых t.

Итог: $x(t)$ при малых $t>0$ удовл. ор-ям задачи (1), т.е. $\in \Omega$.

x_* - точка лок. min $\Rightarrow$ при малых $t>0$

$0 \leq f(x(t)) - f(x_*) = f(x(t)) - f(x(0)) =$

$= \langle f'(x(0)), x'(0)\rangle t + o(t) =$

$= t\left(\langle f'(x_*), g_0\rangle + \frac{o(t)}{t}\right)$

Поделим на $t>0$ и перейдем к пределу при $t \longrightarrow +0$:

$\langle f'(x_*), g_0\rangle \geq 0.$

ч.т.д.

01.11.2012.

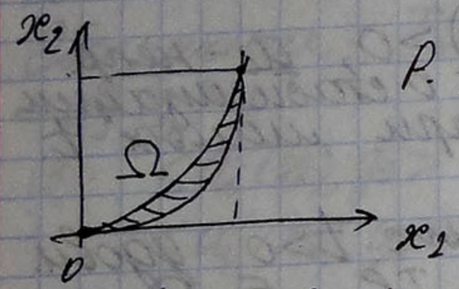
Зам-е

Усл-е регулярности огран-ний существенно для справедливости т. К-Т. Без него т. может быть неверна.

Пример 1

$\mathbb{R}^2 \supset \Omega: \quad a_1(x) := x_1^3 - x_2 \geq 0$

$a_2(x) := -x_1^4 + x_2 \geq 0$



Р. $f_1(x) := x_1 \longrightarrow \inf\limits_{x \in \Omega}$

Очевид: $x_* = (0,0)$ – единств. решение.

$f_1'(x) = (1,0) \qquad a_1'(x) = (3x_1^2, -1)$

$a_2'(x) = (-4x_1^3, 1)$

$I(x_*) = M(x_*) = \{1,2\}$

$f_1'(x_*) = (1,0) \quad a_1'(x_*) = (0,-1) \quad a_2'(x_*) = (0,1)$

Усл. (2): $f_1'(x_*) = u_*[1]\, a_1'(x_*) + u_*[2]\, a_2'(x_*)$

$u_*[1] \geq 0, \quad u_*[2] \geq 0$

Но! Первая строка невозможна ни при каких усл-ях $1 = 0$?!

Огр-я в x_* не регулярны:

$a_1'(x_*) + a_2'(x_*) = 0$, т.е. a_1', a_2' – лин. зав.

Впрочем, усл-я опт. (2) без гарантии могут вып-ся и при отсутствии регулярности.

Пример 2.

Ω – из примера 1.

$f_2(x) := x_2 \longrightarrow \inf\limits_{x \in \Omega}$

$x_* = (0,0)$ – ед. реш-е; огр-я не регулярны.

$f_2'(x_*) = (0,1) = a_2'(x_*)$

т.е. усл. (2) вып. с коэф-тами $u_*[1] = 0$, $u_*[2] = 1$.

Def: в (.) x_* вып-ся усл-я Куна-Такера, если $\exists\, u_* = u_*[M]$:

$$f'(x_*) = \sum_{i \in M} u_*[i]\, a_i'(x_*) \qquad (5)$$

$$u_*[i]\, a_i(x_*) = 0, \quad i \in M_1 \qquad (6)$$

$$u_*[i] \geq 0, \quad i \in M_1. \qquad (7)$$

(!) Усл-я К-Т равносильны усл-ям оптим-ти (2).

Док-во.

"$\Leftarrow$" Пусть вып. (2). $u_* = u_*[I(x_*)]$ т.ч..

доопределим $u_*[i] := 0$ при $i \in M \setminus I(x_*)$

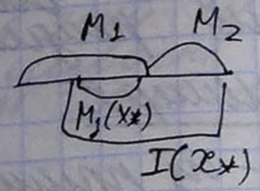
Получим $u_*[M]$

Очевид, что он удовл. (5) и (7).

(6): $i \in M_2(x_*)$: $a_i(x_*) = 0$ — ok.

$i \in M_1 \setminus M_1(x_*) =$

$= M \setminus I(x_*)$: $u_*[i] = 0$ — ok.



"$\Rightarrow$" вып-ся (5)-(7)

(6) $\Rightarrow$ $u_*[i] = 0$ при $i \in M_1 \setminus M_1(x_*) =$

$= M \setminus I(x_*)$

Остается $u_*[I(x_*)]$ — он удовл. (2).

ч.т.д.

Т. К-Т. можно переформулировать:

Пусть x_* — (·) лок. мин. в зад. (1) и фр-я в ней регулярны. Тогда в (·) x_* вып-ся усл-я К-Т.

Усл-я (5), (6), (7) наз-ся усл-ем лок-ранга, усл-ем доп-ти и усл-ем неотрицательности.

Иногда усл-ия опт-ти (2) называют усл-ями К-Т. в очищенном виде.

Поскольку в усл-я К-Т. входят первые производные ф-ций, участвующих в постановке задачи (1) их называют усл-ями оптимальности первого порядка необходимости ~~необ~~ мн.

2.7. Достаточные условия строгого локального min.

$f(x) \longrightarrow \inf$

$$\begin{aligned} &a_i(x) \geq 0, \quad i \in M_1 \\ &a_i(x) = 0, \quad i \in M_2 \\ &x \in U. \end{aligned} \qquad (1)$$

$f, a_i \in C^1(U)$

Def: $x_* \in \Omega$ — точка строгого лок. min, если $\exists\, \delta > 0$:

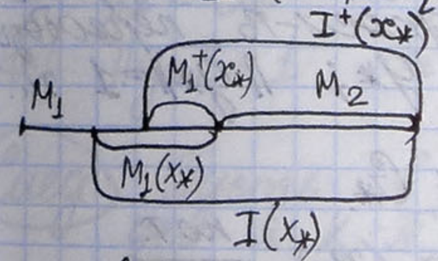
$$f(x_*) < f(x) \quad \forall\, x \in \Omega \cap \mathring{U}_\delta(x_*)$$

где $\mathring{U}_\delta(x_*) = U_\delta(x_*) \setminus \{x_*\}$ — проколотая δ-окр-ть x_*.

Пусть в (·) x_* вып. усл-я К-Т., т.е. $\exists\, u_*$, т.ч...

Обозн.: $M_1^+(x_*) = \{ i \in M_1(x_*) \mid u_*[i] > 0 \}$

$I^+(x_*) = M_1^+(x_*) \cup M_2$



$M_1(x_*) \setminus M_1^+(x_*) = I(x_*) \setminus I^+(x_*)$

$u_*[i] = 0, \quad i \in I(x_*) \setminus I^+(x_*)$

$$G_* = \left\{ g \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \begin{aligned} &\langle a_i'(x_*), g \rangle = 0, \quad i \in I^+(x_*) \\ &\langle a_i'(x_*), g \rangle \geq 0, \quad i \in I(x_*) \setminus I^+(x_*) \end{aligned} \right\}$$

G_* — конус в $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{0} \in G$

(T) Пусть в (·) $x_* \in \Omega$ вып-ся усл-я К-Т. и G_* состоит только из нул. вектора: $G_* = \{\mathbb{0}\} \Longrightarrow$

x_* - точка строгого лок. миним. задачи (1).

<u>Док-во.</u>

от противного. Пусть x_* - не точка строгого лок. мин.

$\exists \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ - посл-ть планов:

$$y_k \neq x_* \ \forall k; \quad y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_*$$

$$f(y_k) \le f(x_*) \quad \forall k$$

$$y_k = x_* + (y_k - x_*) = x_* + \underbrace{\|y_k - x_*\|}_{\lambda_k} \cdot \underbrace{\frac{y_k - x_*}{\|y_k - x_*\|}}_{g_k} =$$

$$= x_* + \lambda_k g_k$$

$\lambda_k > 0, \ \forall k, \quad \lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0+$

$\|g_k\| = 1 \Rightarrow$ из огр. можно выбрать сход. подпосл-ть, переобозн., получим $g_k \to g_*$; $\|g_*\| = 1$ т.к. норма непр.

Покажем, что $g_* \in G_*$.

При $i \in M_2$: $0 = a_i(y_k) - a_i(x_*) \overset{\text{по т. о сред.}}{=} \langle a_i'(\xi_{ik}), g_k \rangle \lambda_k$, где $\xi_{ik} \in [x_*, y_k]$ - сред. точка.

При $i \in M_1(x_*)$:

$0 \le a_i(y_k) - a_i(x_*) = \langle a_i'(\xi_{ik}), g_k \rangle \lambda_k$

поделим на $\lambda_k > 0$ и перейдем к пределу при $k \to \infty$

$\langle a_i'(x_*), g_* \rangle = 0, \quad i \in M_2$

$\langle a_i'(x_*), g_* \rangle \ge 0, \quad i \in M_1(x_*)$

Остается проверить $M_1^+(x_*)$.

Вопрос: верно ли, что $\langle a_i'(x_*), g_* \rangle = 0, \ i \in M_1^+(x_*)$

$$\underset{0}{\ge} f(y_k) - f(x_*) \overset{\text{т.о сред.}}{=} \langle f'(\eta_k), g_k \rangle \lambda_k, \quad \eta_k \in [x_*, y_k]$$

$\Rightarrow \langle f'(x_*), g_* \rangle \le 0$

$$0 \ge \langle f'(x_*), g_* \rangle \overset{\text{усл. К-Т.}}{=} \sum_{i \in I(x_*)} u_*[i] \langle a_i'(x_*), g_* \rangle =$$

$$= \sum_{i \in I^+(x_*)} u_*[i] \langle a_i'(x_*), g_* \rangle = \sum_{i \in M_1^+(x_*)} \underbrace{u_*[i]}_{>0} \underbrace{\langle a_i'(x_*), g_* \rangle}_{\ge 0} \ge 0$$

$\Rightarrow$ все слагаемые $= 0$.

$\Rightarrow \langle a_i'(x_*), g_* \rangle = 0, \ i \in M_1^+(x_*)$

т.о. $g_* \in G_*$

Но! $\|g_*\| = 1$, $G_* = \{0\}$?!

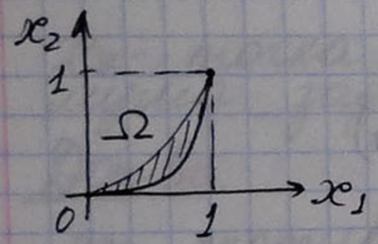
ч.т.д

След. Пусть в (·) $x_* \in \Omega$ вып-ся усл-я К.-Т. Если $|I^+(x_*)| = |N|$ и $a_i'(x_*)$, $i \in I^+(x_*)$ - ЛНЗ, то x_* - т. строгого лок. мин.

/* $G_* = \{0\}$, т.к. $\langle a_i'(x_*), g \rangle = 0, \ i \in I^+(x_*)$ */

<u>Пример</u>

Ω - лунка из прим. 1 и 2.



$f_3(x) := -x_1 \longrightarrow \inf\limits_{x\in\Omega}$

$x_* = (1,1)$ – единств. реш.

$f_3'(x_*) = (-1,0)$; $a_1'(x_*) = (3,-1)$; $a_2'(x_*) = (-4,1)$

$I(x_*) = \{1;2\}$

$f_3'(x_*) = a_1'(x_*) + a_2'(x_*)$ – усл. К-Т. выполнены

с $u_*[1] = u_*[2] = 1$.

$I^+(x_*) = \{1,2\}$, $a_1'(x_*), a_2'(x_*)$ – ЛНЗ

$\Rightarrow$ по след. x_* – точка строгого лок. мин.

08.11.2012.

§8. Условия оптимальности второго порядка.

$$f(x) \longrightarrow \inf \qquad (1)$$
$$a_i(x) \geq 0, \quad i\in M_1$$
$$a_i(x) = 0, \quad i\in M_2$$
$$x\in U$$

$f, a_i \in C^2(U)$ – дважды дифф-мы.

/* $F\in C^1(U)$: $F'(x)$ – в каждой точке есть градиент.

Дважд. дифф-ть: если градиент дифф-ем, т.е.

$\exists\ D = D[N,N]$:

$F'(x+h) = F'(x) + Dh + o(\|h\|)$, где

$o(\|h\|)$ – вектор.: $\dfrac{o(\|h\|)}{\|h\|} \xrightarrow[h\to\Theta]{} \Theta$

если F – дв. дифф-ма, то можно вывести, что

$$D = \left\{\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x[i]\,\partial x[j]}\right\}_{i,j\in N} = F''(x) \text{ – м-ца Гессе}$$

Пример.

$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha$, D – симм.

$Q'(x) = Dx + c$

$Q'(x+h) = D(x+h) + c = Q'(x) + Dh \Rightarrow$

кв. ф-я $\in C^2(\mathbb{R}^N)$ и

$Q''(x) \equiv D$. */

/* Т (о среднем)

$F\in C^2(U)$; $x, x+h$: $[x, x+h]\subset U$.

Тогда $F(x+h) = F(x) + \langle F'(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle F''(x+\theta h)h, h\rangle$, где $\theta\in(0,1)$

Это известно из матана */

Задачи.

17 $F(x) = z(f(x))$, где

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $z: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f, z\in C^2$

Найти $F'(x)$ и $F''(x)$ в матричном векторном виде.

(18) (критерий выпуклости)

$\Omega^0 \subset \mathbb{R}^N$ - откр., вып. $f \in C^2(\Omega^0)$

Док-ть: f - выпукла $\Leftrightarrow$

$\langle f''(x)h, h\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Omega^0, \forall h \in \mathbb{R}^N$

(19) $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ - наз-ся сильно выпуклой, если

$\exists\, m>0: \langle f''(x)h, h\rangle \geq m\|h\|^2 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^N$

Д-ть: У сильно вып. ф-ции т. min $\exists!$.

Ф-ция Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x,u) = f(x) - \sum_{i\in M} u[i]\, a_i(x)$$

fix $x_* \in \Omega$; усл-я К-Т: $\exists\, u_* = u_*[M]$:

$\mathcal{L}'_x(x_*, u_*) = \mathbb{0}$ - усл-е Лаг. (2)

$u_*[i]\, a_i(x_*) = 0, \quad i \in M_1$ (3)

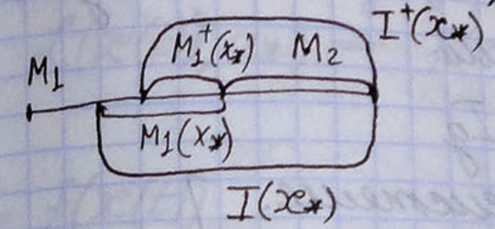
$u_*[i] \geq 0, \quad i \in M_1$ (4)

$M_1(x_*) = \{i \in M_1 \mid a_i(x_*) = 0\}$

$I(x_*) = M_1(x_*) \cup M_2$

$M_1^+(x_*) = \{i \in M_1(x_*) \mid u_*[i] > 0\}$

$I^+(x_*) = M_1^+(x_*) \cup M_2$



(3), (4) $\Rightarrow u_*[i] = 0, \quad i \in M \setminus I^+(x_*)$

G_* - конус:

$\langle a_i'(x_*), g\rangle = 0, \quad i \in I^+(x_*)$

$\langle a_i'(x_*), g\rangle \geq 0, \quad i \in I(x_*) \setminus I^+(x_*)$

(T) (необх. усл-е опт-ти второго порядка).

Пусть $x_* \in \Omega$ - т. лок. мин. зад. (1) и огр-ся в точке x_* - регулярны.

Тогда в (.) x_* вып-ся усл-я К.-Т., т.е. $\exists\, u_*$ со св-вами (2)-(4).

Более того, для $\forall g \in G_*$ вып-ся нер-во:

$$\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*)\, g, g\rangle \geq 0. \quad (5)$$

Док-во

усл. К-Т. - известно (см. §6)

fix $g \in G_*$, $g \neq \mathbb{0}$

Обозн.: $I_g = \{i \in I(x_*) \mid \langle a_i'(x_*), g\rangle = 0\}$

$M_2 \subset I^+(x_*) \subset I_g \subset I(x_*)$

$\Rightarrow \quad \langle a_i'(x_*), g\rangle > 0, \quad i \in I(x_*) \setminus I_g$

Р. сист. нелин. ур-ний:

$$a_i(x) = 0, \quad i \in I_g$$

x_* – удовл. этой системе.

$a_i'(x_*)$, $i \in I_g$ – ЛНЗ

$g \neq 0$, g орт. $a_i'(x_*)$, $i \in I_g$

$\xrightarrow{\text{осн. лемма НЛП}}$

$\exists\ x = x(t)$ – непр. дифф. в окр-ти $t=0$, т.ч.:

$x(0) = x_*$,

$x'(0) = g$

$a_i(x(t)) = 0$, $i \in I_g$ при малых t

Покажем, что $x(t) \in \Omega$ при малых $t > 0$.

При $i \in I_g$ (в част., $i \in M_2$):

$a_i(x(t)) = 0$ при малых t.

При $i \in I(x_*) \setminus I_g$:

$$a_i(x(t)) = a_i(\underbrace{x(0)}_{x_*}) + \langle a_i'(\underbrace{x(0)}_{x_*}), \underbrace{x'(0)}_{g}\rangle t + o(t) =$$

$$= t\left(\langle a_i'(x_*), g\rangle + \frac{o(t)}{t}\right) > 0$$ при малых $t > 0$.

При $i \in M \setminus I(x_*)$:

$a_i(x_*) > 0 \Rightarrow a_i(x(t)) > 0$ при малых

<u>Вывод</u>:

$x(t)$ – план зад. (1) при малых $t > 0$.

$$\mathcal{L}(x(t), u_*) = f(x(t)) - \sum_{\substack{i \in I^+(x_*) \\ \text{(остальные нули)}}} u_*[i] \cdot a_i(x(t)) =$$

$$= f(x(t))$$

$$\mathcal{L}(x_*, u_*) = f(x_*)$$

x_* – точка лок. мин. $\Rightarrow$ при малых $t > 0$.

$$0 \le f(x(t)) - f(x_*) = \mathcal{L}(x(t), u_*) - \mathcal{L}(x_*, u_*) =$$

$$\overset{\text{по т. о сред.}}{=} \langle \mathcal{L}_x'(x_*, u_*), x(t) - x_*\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{xx}''(\xi(t), u_*)(x(t) - x_*), x(t) - x_*\rangle,$$

где $\xi(t) \in [x_*, x(t)]$ – сред. точка.

Зам-е. $\xi(t)$ может $\notin \Omega$. Но это не важно.

Важно: $\xi(t) \xrightarrow[t \to 0]{} x_*$

$$(2) \Rightarrow \left\langle \mathcal{L}_{xx}''(\xi(t), u_*) \frac{x(t) - x(0)}{t}, \frac{x(t) - x(0)}{t}\right\rangle \ge 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_{xx}''(\xi(t), u_*) \xrightarrow[t \to +0]{} \mathcal{L}_{xx}''(x_*, u_*) \\ &\frac{x(t) - x(0)}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} x'(0) = g \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

переход к пределу при $t \to +0$ $\Rightarrow$ (5).

ч.т.д.

Т (дост. усл-я опт-ти второго порядка)

Пусть в (·) $x_* \in \Omega$ вып. усл-я К-ТТ. и для $\forall\, g \in G_*$, $g \neq \mathbb{0}$ вып-ся

$$\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) g, g \rangle > 0.$$

Тогда x_* – т. строгого лок. мин. зад. (1).

<u>Док-во.</u>

от противного:

Пусть не точка строг. лок. мин. $\Rightarrow$

$\exists\, \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ – посл-ть планов, т.ч.:

$y_k \neq x_*$; $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_*$,

$f(y_k) \le f(x_*) \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

$y_k = x_* + \lambda_k g_k$, где $\lambda_k = \|y_k - x_k\|$,

$$g_k = \frac{y_k - x_*}{\|y_k - x_*\|}$$

$\lambda_k > 0$, $\lambda_k \longrightarrow +0$

$\|g_k\| = 1$, $g_k \longrightarrow g_*$, $\|g_*\| = 1$, $g_* \in G_*$ (см. §7)

$\Rightarrow \langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) g_*, g_* \rangle > 0$ (6)

Р. $\mathcal{L}(y_k, u_*) - \mathcal{L}(x_*, u_*) =$

$= \cancel{f(y_*)} + f(y_k) - f(x_*) - \underbrace{\sum_{i \in M_1} u_*[i]\,(a_i(y_k) - a_i(x_*))}_{(\text{ост.} = 0)} \le$

можем выкинуть т.к. ≤ 0.

$\overset{(3)}{\le} -\sum_{i \in M_1} u_*[i]\, a_i(y_k) \overset{(4)}{\le} 0$

Имеем:

$0 \ge \mathcal{L}(y_k, u_*) - \mathcal{L}(x_*, u_*) \overset{\text{т.о сред.}}{=}$

$= \langle \mathcal{L}'_x(x_*, u_*), g_k \rangle \lambda_k + \frac{1}{2} \langle \mathcal{L}''_{xx}(x_* + \theta_k \lambda_k g_k, u_*) g_k, g_k \rangle \lambda_k^2$, где $\theta_k \in (0,1)$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \langle \mathcal{L}''_{xx}(x_* + \theta_k \lambda_k g_k, u_*) g_k, g_k \rangle \le 0$

перейдем к пред. при $k \to \infty$:

$\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) g_*, g_* \rangle \le 0$

Но противор. с (6) ?!

ч.т.д.

12.11.2012.

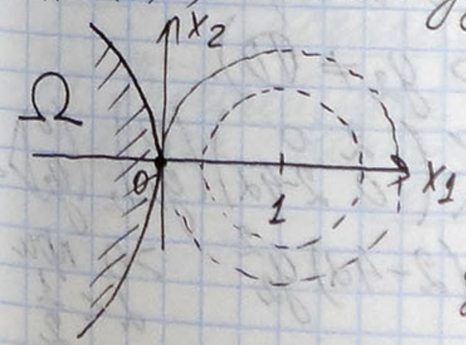
Пример.

$f(x) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \longrightarrow \inf$

$a(x) := -x_1 + \alpha x_2^2 \ge 0$

$\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр

$x_* = (0,0)$ – исследуем. Почему $(0,0)$?



На окр-ти – const.

$x_1 = \alpha x_2^2$

Ясно, что в $(0,0)$ расст. до $(1,0)$ – самое маленькое.

$f'(x) = (2(x_1-1),\ 2x_2)$

$a'(x) = (-1,\ 2\alpha x_2)$

$f'(x_*) = (-2, 0) \qquad a'(x_*) = (-1, 0) \neq \mathbb{0} \Rightarrow$ огр. регулярны

при этом $f'(x_*) = 2a'(x_*)$ $\forall \alpha$.

Усл. К-Т вып-но с $u_* = 2$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$G_* = \{\mathbb{0}\}$?? $\qquad I^+(x_*) = I(x_*) = M_1(x_*)$

$G_* = \{g \in \mathbb{R}^2 \mid \langle a'(x_*), g\rangle = 0\} =$

$= \{g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \mid (-1, 0)\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = 0 =$

$= \{g = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix} \mid g_2 \in \mathbb{R}\}$

$f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad a''(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(x, u) = f(x) - u a(x)$

интересует знакоопр-ть $\mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*)$ на G_*.

$\mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) = f''(x_*) - u_* a''(x_*) =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-4\alpha \end{pmatrix}$

fix $g \in G_*$, $g \neq \mathbb{0}$ $(\Leftrightarrow g_2 \neq \mathbb{0})$.

$\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) g, g\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-4\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}\right\rangle =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ (2-4\alpha)g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \end{pmatrix}\right\rangle = (2-4\alpha)g_2^2 \quad > 0$ при $\alpha < \frac{1}{2}$

При $\alpha < \frac{1}{2}$:

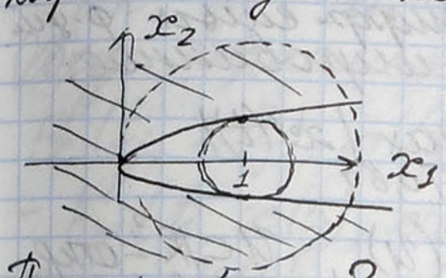
$\langle \mathcal{L}''_{xx}(x_*, u_*) g, g\rangle > 0 \quad \forall g \in G_*,\ g \neq \mathbb{0}$

$\Rightarrow x_*$ — т. строгого лок. мин.

При $\alpha > \frac{1}{2}$

Нарушается необх. усл-е опт-ти. $\Rightarrow$ x_* — НЕ точка лок. мин.

Картинка для полож. α:



При $\alpha = \frac{1}{2}$: ?

Задача имеет вид:

Решить экстр. задачу:

$f(x) := (x_1-1)^2 + x_2^2 \longrightarrow \inf$

$-x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0$

Задача (20):

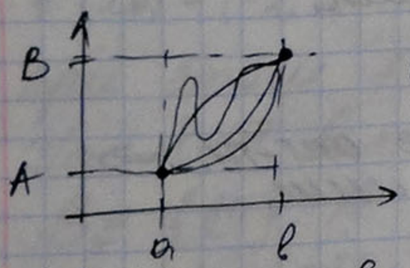
Часть III. Вариационное исчисление

§1. Простейшая вариационная задача. Конечномерная аппроксимация.

$$J(x) := \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\,dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B$$

$$x \in C^1[a,b]$$



Т.е. две точки заданы. Рассм. глад. ф-ции через них проходящие.

$C^1[a,b]$ - пр-во непр. дифф-емых ф-ций. Оно линейное, нормированное:

$$\|x\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$$

$F = F(t, x, y)$ $\quad F \in C^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^3$ - откр., связное.

Ω - мн-во планов

$Z(x) = \{(t, x(t), x'(t)) \mid t \in [a,b]\}$ - кривая в $\mathbb{R}^3$.

$\Omega^0 = \{x \in C^1[a,b] \mid Z(x) \subset U\}$

Воспользуемся квадратурной ф-лой правых прямоугольников.

$\{t_j\}_{j=0}^{n+1}$: $\quad t_j = a + jh$, $j \in 0:n+1$, где $h = \dfrac{b-a}{n+1}$.

$$J(x) \approx \sum_{j=1}^{n+1} F(t_j, x(t_j), x'(t_j)) \cdot h$$

Обозн. $x_j = x(t_j)$; $\quad x'(t_j) \approx \dfrac{x_j - x_{j-1}}{h}$

Тогда:

$$\sum_{j=1}^{n+1} F\left(t_j, x_j, \frac{x_j - x_{j-1}}{h}\right) \longrightarrow \inf \quad (2)$$

$$x_0 = A, \quad x_{n+1} = B$$

(на h - const можно не домножать)

- задача отн-но неизвестных $(x_1, \dots x_n)$

Необх. усл-е опт-ти: градиент $= 0$.

Дифф. по x_j: $F'_x\left(t_j, x_j, \dfrac{x_j - x_{j-1}}{h}\right) + \dfrac{1}{h} \cdot F'_{x'}(\dots) +$

$$+ (-1) \cdot \frac{1}{h} \cdot F'_{x'}\left(t_{j+1}, x_{j+1}, \frac{x_{j+1} - x_j}{h}\right) = 0$$

~~Обозн.~~ Вернемся:

$$F'_x(t_j, x(t_j), x'(t_j)) - \frac{1}{h}\Big(F'_{x'}(t_{j+1}, x(t_{j+1}), x'(t_{j+1})) - F'_{x'}(t_j, x(t_j), x'(t_j))\Big)$$

Обозн.: $\varphi(t) = F'_{x'}(t, x(t), x'(t))$. тогда:

$$F'_x(t_j, x(t_j), x'(t_j)) - \frac{\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)}{h} = 0 \quad (3)$$

$j \in 1:n$

Фикс. $\hat{t} \in (a,b)$, и при каждом n обозн. через t_j точку сетки, ближайшую к $\hat{t}$.

Перех. к пределу в (3), при $n \to \infty$

$$\boxed{F'_x(\hat{t}, x(\hat{t}), x'(\hat{t})) - \underbrace{\frac{d}{dt} F'_{x'}(\hat{t}, x(\hat{t}), x'(\hat{t}))}_{\varphi'(\hat{t})} = 0} \quad (4)$$

$\hat{t} \in (a,b)$

(4) - необх. усл-е оптимальности для зад. (1)

- ур-е Эйлера

Def: $J'(x)(t) = F'_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x(t), x'(t))$ – вариац-ная произв-ная ф-ционала

Тогда ур-е Эйлера: $\boxed{J'(x) = 0}$ (5)

$x(a) = A, \; x(b) = B$

(5) – краевая задача.

15.11.2012. Про (20) задачу:

$f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 \geq x_1^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in \Omega$

$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2^2 = 0 \\ x_1^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

$x = (0,0)$ – ед решение.

Пример 1

$J(x) = \int_0^1 [(x')^2 + tx]\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0) = x(1) = 0$

$x \in C^1[0,1]$

Запишем ур-е Эйлера:

$F(t, x, x') = (x')^2 + tx$

$F'_x = t \qquad F'_{x'} = 2x'$

$J'(x)(t) = F'_x(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} F'_{x'}(t, x(t), x'(t))$

$= t - 2x''(t)$

$t - 2x''(t) = 0$

$\begin{cases} 2x''(t) = t \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$ – краев. задача для дифф-ра II порядка

Может реш-я не иметь, а может иметь и не одно.

$\Rightarrow x' = \frac{1}{4}t^2 + c_1$

$x(t) = \frac{1}{12}t^3 + c_1 t + c_2 \qquad t=0 \quad c_2 = 0$

$t = 1 \quad \frac{1}{12} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{12}$

$x_0(t) = \frac{1}{12}(t^3 - t)$ – подозрительная на экстремум

$h \in C^1[0,1]$: $h(0) = h(1) = 0$ – допустимая вариация

если x_0 – план, то $x_0 + \lambda h$ – тоже план для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Р. $J(x_0 + h) = \int_0^1 [(x_0' + h')^2 + t(x_0 + h)]\,dt =$

$= J(x_0) + \int_0^1 [2x_0'h' + th]\,dt + \int_0^1 (h')^2\,dt$

Р. $\int_0^1 2x_0'h'\,dt = \int_0^1 2x_0\,dh \underset{\text{част.}}{\overset{\text{по}}{=}} \underbrace{2x_0'h\Big|_0^1}_{0 \text{ т.к. } h \text{ на концах} = 0} - 2\int_0^1 2x_0''h\,dt =$

$= \underset{\langle 2x_0'' = t \rangle}{\text{ур-е Эйлера:}} = -\int_0^1 th\,dt$

Линейная часть обнулилась.

$J(x_0 + h) = J(x_0) + \underbrace{\int_0^1 (h')^2\,dt}_{\text{интег. от неотр. ф-ции}} \geq J(x_0) \Rightarrow$ $\forall$ доп вар

$\Rightarrow x_0$ – решение задачи.

Осталось проверить, ед-ть:

$J(x_0 + h) = J(x_0) \Leftrightarrow \int_0^1 (h')^2\,dt = 0 \Leftrightarrow h' \equiv 0$ на $[0,1]$

т.е. $h(t) \equiv const$. Но $h(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ везде равна 0.

Eg-ть док-ли.

$x_0(t) = \frac{1}{12}(t^3 - t)$ – единств. реш-е.

$J(x_0) = \int_1^1 \left[\frac{1}{144}(3t^2-1)^2 + \frac{1}{12}(t^4 - t^2)\right]dt = -\frac{1}{180}$

Пример 2.

$$J(x) = \int_0^1 [x^2 + 2txx']dt \longrightarrow \inf$$
$$x(0) = 0$$
$$x(1) = 1$$
$$x \in C^1([0,1])$$

$F'_x = 2x + 2tx'$ $\qquad F'_{x'} = 2tx$

$J'(x)(t) = 2x(t) + 2tx'(t) - \frac{d}{dt}(2tx(t)) \equiv 0$

Это означает, что наш ф-ал – const (на планах).

Под интегралом – полный дифф.

$(tx^2)' = x^2 + txx'$

$J(x) = \int_0^1 (tx^2)dt = tx^2\Big|_0^1 = 1 \quad \forall$ планов x.

Значит, у этой задачи все планы оптимальные.

Задачи.

① Решить оптим. задачу:

$$J(x) = \int_{-1}^2 (t^2x' + (x')^2)dt \longrightarrow \inf$$
$$x(-1) = 1$$
$$x(2) = 4$$
$$x \in C^1[-1,2]$$

§2. Основная лемма вариационного исчисления.

Def: $h \in C^1[a,b]$, т.ч. $h(a) = h(b)$ – допустимая вариация.

Мн-во всех вариаций – линейное подпр-во.

$C_0^1[a,b] = \{h \in C^1[a,b] : h(a) = h(b) = 0\}$

Л (вспомогат.)

Пусть $\alpha \in C[a,b]$. Если $\int_a^b \alpha(t)h'(t)dt = 0 \ \forall h \in C_0^1[a,b]$, то $\alpha(t) = const$ на $[a,b]$.

Док-во.

Обозн. $\varphi(t) = \int_a^t \alpha(\tau)d\tau$

$\varphi \in C^1[a,b]$, $\varphi' = \alpha$

Р. $P_1(t)$ – интерполяц. полином. I степени, построенный так:

$P_1(a) = \varphi(a)$

$P_1(b) = \varphi(b)$

Р. $h = \varphi - P_1$ – доп. вар-я $\Rightarrow$ (1)

/* $h' = \varphi' - P_1' = \alpha - c$ */

пр-ая ф-и лин-ой const

$\int_a^b \alpha(t)(\alpha(t) - c)dt = 0$

Р. $\int_a^b (\alpha(t) - c)^2 dt = \underbrace{\int_a^b \alpha(t)(\alpha(t) - c)dt}_{=0} -$

$-c\int_a^b \underbrace{(\alpha(t) - c)}_{=h'}dt = 0$ $\quad = 0$

$h\big|_a^b$ А это м.б. $\Leftrightarrow$ $\alpha(t) \equiv c$ на $[a,b]$ ч.т.д.

(Л) (основная)

Пусть $\alpha, \beta \in C[a,b]$

Если $\int_a^b (\alpha(t)h'(t) + \beta(t)h(t))dt = 0$ (2) $\forall h \in C_0^1[a,b]$

то $\alpha \in C^1[a,b]$ и $\alpha'(t) \equiv \beta(t)$ на $[a,b]$

<u>Док-во.</u>

Обозн. $\psi(t) = \int_a^t \beta(\tau)d\tau$: $\psi \in C^1[a,b]$ и $\psi' = \beta$

Р. $\int_a^b \beta h dt = \int_a^b \psi' h\, dt \underset{(h\text{-непр.в.})}{\overset{\text{пох.}}{=}} \psi h\Big|_a^b - \int_a^b \psi h' dt$

Подставим в (2):

$\forall h \in C_0^1[a,b]$: $\int_a^b (\alpha - \psi)h' dt = 0$ а это формула из вспом. леммы.

$\Rightarrow \alpha - \psi \equiv const$ на $[a,b]$

то есть $\alpha = \psi + const \Rightarrow \alpha \in C^1[a,b]$

$\alpha' = \psi' = \beta$

ч.т.д.

Пример: минимизация линейного интегрального ф-нала.

$$l(x) := \int_a^b (\alpha(t)x'(t) + \beta(t)x(t))dt \longrightarrow \inf$$

$x(a) = A$

$x(b) = B$ $\quad x \in C_1[a,b]$

Пусть x - план, h - доп. вариация $\Rightarrow$

$\Rightarrow x+h$ - тоже план.

$l(x+h) = l(x) + b(h)$

(I) $l(h) = 0$ $\forall h \in C_0^1[a,b]$ /* $\ker l \supset C_0^1[a,b]$ */

$l(x+h) = l(x)$ $\forall h \in C_0^1[a,b]$

все планы оптим.

(II) $\exists h_0 \in C_0^1[a,b]$ $l(h_0) \neq 0$ Можем счит, что $l(h_0) < 0$

fix x - план. $\Rightarrow$ $x + \lambda h_0$ - тоже план $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Р. $l(x + \lambda h_0) = l(x) + \lambda \underbrace{l(h_0)}_{<0} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} -\infty$

Не огр. снизу на мн-ве планов $\Rightarrow$ решений нет.

<u>Вывод:</u> задача минимизации лин. интегр. ф-нала несодержательна, т.к. либо она не имеет реш, либо все планы оптим.

Задачи:

(2) Пусть $u \in C[a,b]$: $\int_a^b u(t)h(t)dt = 0$ $\forall h \in C_0^1[a,b]$

Д-ть: необх. $u(t) = 0$ на $[a,b]$

(3) Как изменится заключение осн. леммы, если:

$\int_a^b (\alpha h' + \beta h)dt = 0$ вып-ся $\forall h \in C^1[a,b]$, т.ч. $h(a) = 0$?

Зам-е Иногда осн. лемму вар. исчисл. называют 1ю лемму.

§3. Минимизация квадратного интегрального ф-ла.

$l(x) = \int_a^b (\alpha x' + \beta x)\,dt$ – лин. форма

$k(x) = \int_a^b (p(x')^2 + 2u x x' + v(x)^2)\,dt$ – квадр. форма.

$Q_0(x) = k(x) + l(x) + c$.

$Q_0(x) \to \inf$

$x(a) = A,\ x(b) = B$

$x \in C^1[a,b]$

Предпол. $\alpha, \beta, p, u, v \in C[a,b]$

Дополнительно предпол.: $\alpha, u \in C^1[a,b]$

Р. $\int_a^b \alpha x'\,dt = \alpha x\Big|_a^b - \int_a^b \alpha' x\,dt$

На планах $l(x) = \int_a^b (\beta - \alpha')x\,dt + \underbrace{(B\alpha(b) - A\alpha(a))}_{const}$

Р. $\int_a^b 2u x x'\,dt = \int_a^b u\,dx^2 = ux^2\Big|_a^b - \int_a^b u' x^2\,dt$

На планах $k(x) = \int_a^b (p(x')^2 + (v - u')x^2)\,dt + \underbrace{(B^2 u(b) - A^2 u(a))}_{const}$

$q := v - u'$

$f := \frac{1}{2}(\alpha' - \beta)$

Конст. можно отбросить

Задача в каноник. форме.

$Q(x) := \int_a^b (p(x')^2 + qx^2 - 2f(x))\,dt \to \inf$

$x(a) = A,\ x(b) = B,\ x \in C^1[a,b]$

Задачи.

19.11.2012.

(4) Пусть $u \in C[a,b]$: $\int_a^b u(t)h'(t)\,dt = 0$

$\forall h \in C^2[a,b]$: $h(a) = h(b) = 0$

$h'(a) = h'(b) = 0$

Д-ть: необх. $u(t) = c_1 t + c_0$, $t \in [a,b]$ – лин. ф-я.

(5) В усл-ях предыдущ. задачи $h \in C^2[a,b]$, $h(a) = h(b) = 0$ (без производ.)

Д-ть: $u(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.

(6) Решить:

$J(x) := \int_1^2 \frac{(x')^2}{t^3}\,dt \to \inf$

$x(1) = 1 \quad x(2) = 0$

$x \in C^1[1,2]$.

$Q(x) := \int_a^b (p(x')^2 + qx^2 - 2f(x))\,dt \to \inf$ (1)

$x(a) = A,\ x(b) = B,\ x \in C^1[a,b]$

$p, q, f \in C[a,b]$

Ω – мн-во планов

x_* – план (1) – реш-е (оптим. план.) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q(x) \geq Q(x_*)\ \forall x \in \Omega$

$h \in C_0^1[a,b]$ – доп. вариация: $h(a) = h(b) = 0$

$x \in \Omega$, h – доп. вар $\Rightarrow x + \lambda h \in \Omega\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$Q(x + \lambda h) = \int_a^b (p(x' + \lambda h')^2 + q(x + \lambda h)^2 - 2f(x + \lambda h))\,dt =$

$= Q(x) + 2\lambda \int_a^b (px'h' + qxh - fh)\,dt +$

$+ \lambda^2 \int_a^b ((ph')^2 + qh^2)\,dt$

$$l(x,h)=\int_a^b (px'h'+(qx-f)h)\,dt$$

$$D(h)=\int_a^b (p(h')^2+qh^2)\,dt$$

$$Q(x+\lambda h)=Q(x)+2\lambda\, l(x,h)+\lambda^2 D(h) \quad (2)$$

(Л) Пусть $\exists\, h_0\in C_0^1[a,b]:\ D(h_0)<0$

Тогда:

Ф-ал Q не огр. снизу на мн-ве допустимых:

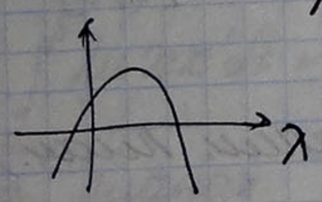
$$\inf_{x\in\Omega} Q(x)=-\infty$$

Док-во.

Фикс. $x_0\in\Omega$; $x_0+\lambda h_0\in\Omega\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$.

$Q(x_0+\lambda h_0)$ – согласно (2) – квадр. трехчлен с отриц. старшим коэф.

Очев. $Q(x_0+\lambda h_0)\xrightarrow[\lambda\to\infty]{}-\infty$



ч.т.д.

(След.) Задача (1) содержательна только при вып-ии усл-я:

$$D(h)\geq 0\ \ \forall h\in C_0^1[a,b] \quad (3)$$

Далее будем считать, что усл-е (3) вып-ся. Иначе решений задачи (1) нет.

(Т)

$x_*\in\Omega$ – реш-е зад. (1) $\Longleftrightarrow$ $l(x_*,h)=0$ (4) $\forall h\in C_0^1[a,b]$

Док-во.

"$\Rightarrow$" fix $h\in C_0^1[a,b]$; $x_*+\lambda h\in\Omega\ \ \forall\lambda\in\mathbb{R}$

x_* – реш-е $\Rightarrow$ $0\leq Q(x_*+\lambda h)-Q(x_*)\overset{(2)}{=}$
$=2\lambda l(x_*,h)+\lambda^2 D(h)$

Поделив на $\lambda>0$ и перейдя к пределу при $\lambda\to+0$:

$$\underline{l(x_*,h)\geq 0}.$$

h – допуст. вар. $\Rightarrow$ $-h$ – тоже доп. вар.

$\Rightarrow$ $l(x_*,-h)\geq 0$, или: $\underline{-l(x_*,h)\geq 0}$

$\Rightarrow$ $l(x_*,h)=0$. $\Rightarrow$ (4)

"$\Leftarrow$" $x\in\Omega$, положим $h:=x-x_*$ – доп. вариация.

$$Q(x)=Q(x_*+h)\overset{(2)(4)}{=\!=}Q(x_*)+D(h)\overset{(3)}{\geq}Q(x_*).$$

ч.т.д.

(4) подробно:

$$\int_a^b (px_*'h'+(qx_*-f)h)\,dt=0 \quad \forall h\in C_0^1[a,b] \quad (4')$$

(Т) $x_*\in\Omega$ – оптим. $\Longleftrightarrow$ $px_*'\in C^1[a,b]$ и

$$-(px_*')'+qx_*=f \quad \text{на } [a,b] \quad (5)$$

Док-во.

"$\Rightarrow$" Осн. лемма вар. исч. (если обозн. $\begin{matrix} px_*' = \alpha \\ qx_* - f = \beta \end{matrix}$) $\in C^1[a,b]$

$$\alpha' = (px_*')' = \beta.$$

"$\Leftarrow$" (4') – ?

$$P.\ \int_a^b px_*'h'dt = \underbrace{px_*'h\Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b (px_*')'h\,dt, \quad h \in C_0^1[a,b]$$

$$\Rightarrow l(x_*, h) = \int_a^b \underbrace{(-(px_*')' + qx_* - f)}_{\overset{(5)}{=}0} h\,dt = 0$$

$\Rightarrow$ x_* – реш-е (1) ч.т.д.

Установлено, что реш-я квадр. вар. задачи (1) сводится к решению краевой задачи:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\left(p\frac{dx}{dt}\right) + qx = f \\ x(a) = A, \quad x(b) = B \end{cases} \quad (6)$$

$$L(x,t) = -\frac{d}{dt}\left(p\frac{dx}{dt}\right) + qx$$ – оператор Штурма-Лиувилля.

Ур-я Эйлера для Q:

$$F(t,x,x') = p(x')^2 + qx^2 - 2fx$$

$$F_x' = 2qx - 2f, \quad F_{x'}' = 2px'$$

$$Q'(x) = 2\left(qx - f - \frac{d}{dt}(px')\right)$$

(3) подробно:

$$\int_a^b (p(h')^2 + qh^2)dt \geq 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b] \quad (3')$$

Очевид: $D(h) \geq 0$, если $p(t) \geq 0$ и $q(t) \geq 0$ на $[a,b]$.

(T) Пусть $D(h) \geq 0$ $\forall h \in C_0^1[a,b] \Rightarrow$ $p(t) \geq 0$ на $[a,b]$.

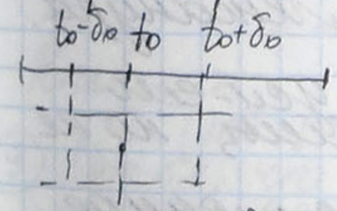
Док-во

от противного: $\exists t_0 \in (a,b)$: $p(t_0) < 0$.

Обозн. $\varepsilon_0 := -\frac{p(t_0)}{2} > 0$.

$\exists \delta_0 > 0$: $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \subset [a,b]$ и

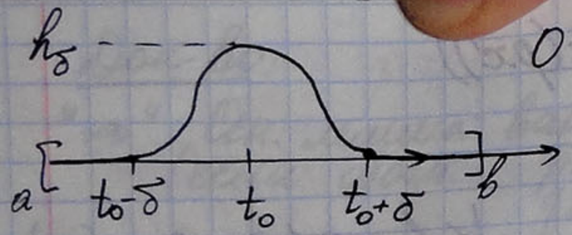
$|p(t) - p(t_0)| < \varepsilon_0$ при $|t - t_0| < \delta_0$



$\Rightarrow$ $p(t) < p(t_0) + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0$ $\forall t \in (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$

фикс. $\delta \in (0, \delta_0]$ и рассм.

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{\delta}(t - t_0)\right)\right), & t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \\ 0, & \text{при остальн. } t \in [a,b] \end{cases}$$



$0 \le h_\delta(t) \le 2\sqrt{\frac{\delta}{\pi}}$, $t\in[a,b]$

$h_\delta'(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{\delta}}\sin\left(\frac{\pi}{\delta}(t-t_0)\right)$,

$t\in(t_0-\delta, t_0+\delta)$.

$\Rightarrow h_\delta \in C_0^1[a,b]$ – доп. вариация.

Р. $D(h_\delta) = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\left(p(h_\delta')^2 + q h_\delta^2\right)dt \le$

$$\le -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\sin^2\Big(\underbrace{\frac{\pi}{\delta}(t-t_0)}_{\tau}\Big)dt + \frac{4\delta}{\pi}\int_a^b |q|\,dt =$$

$$= -\varepsilon_0 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\tau\,d\tau}_{\text{число } \pi} + \underbrace{\frac{4\delta}{\pi}\int_a^b |q|\,dt}_{\text{const от } \delta} < 0$$

при мал. $\delta>0$.

ч.т.д.

Зам-е.

$p(t)\ge 0$ на $[a,b]$ – усл-е Лежандра.

Усл-е Леж. явл-ся необх. усл-ем неотр-ти интегр. кв. формы, но не явл-ся достаточным.

Более того, даже усиленное ($p(t)>0$ на $[a,b]$), оно не гарантирует неотриц. $D(h)$.

Пример.

Р. $D(h) = \int_0^{\pi}\left((h')^2 - \mu h^2\right)dt$, где $\mu\in\mathbb{R}$ – параметр.

$p(t)\equiv 1$ – усил. усл-е Л. вып-ся.

Р. $h_0(t) = \sin t$ – допуст. вар.

$D(h_0) = \int_0^{\pi}(\cos^2 t - \mu\sin^2 t)\,dt = \frac{\pi}{2}(1-\mu) < 0$ при $\mu>1$.

т.е. D не явл. неотриц. при $\mu>1$.

Задачи

(7) Решить: $J(x) = \int_0^1 \left(x^2 + (x')^2\right)dt \to \inf$ 22.11.2012.

$x(0)=0$

$x(1)=1$

$x\in C^1[0,1]$

(8) Док-те: след. экстр. задача не имеет реш-я:

$J(x) = \int_0^1 x^2\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0)=0$

$x(1)=1$

$x\in C^1[0,1]$.

Найдите $\inf J(x)$ на мн-ве планов.

($\inf \exists$ всегда, но не достиг-ся).

(9) Док-те, что след. экстр. задача НЕ имеет реш.:

$J(x) = \int_{-1}^1 t^2(x')^2\,dt \longrightarrow \inf$

$x(-1) = -1$

$x(1) = 1$

$x\in C^1[-1,1]$

Найти inf на мн-ве планов.

§4 Критерий неотрицательности интегральной квадратичной формы.

$$D(h)=\int_a^b (p(h')^2+qh^2)\,dt \quad \text{на } C_0^1[a,b]$$

Предпол.: $\left.\begin{array}{l} q\in C[a,b]; \\ p\in C^1[a,b]; \\ p(t)>0 \text{ на } [a,b]. \end{array}\right\}$ (1)

$(a_0,b_0)\supset[a,b]$ – на нём вып-ся (1)

$(ph')'=qh$ (2) – ур-е Эйлера.

$ph''+p'h'-qh=0$ (можно, т.к. $p\in C^1$)

$h''+\frac{p'}{p}h'-\frac{q}{p}h=0$ (2') (можно, т.к. $p>0$)

(2') – ур-е Якоби.

Ур-е Якоби – однорд. ур-е 2 порядка, разреш-ое относит. старшей производной с непрерывными на (a_0,b_0) коэф-тами.

Из курса дифф. ур-ий известно, что оно будет иметь единств. реш-е для ∀ нач. данных вида $h(c)=A$, $h'(c)=A'$, где $c\in(a_0,b_0)$.

Def: Главным реш-ем ур-я Якоби наз-ся реш-е $h_0(t)$ с нач. данными:

$$h_0(a)=0, \quad h_0'(a)=1.$$

(T) (Якоби).

Пусть вып-ся усл. (1).

$D(h)$ – неотриц. на $C_0^1[a,b] \Leftrightarrow$ гл. реш. ур-я Якоби $h_0(t)>0$ на (a,b).

Док-во.

("$\Leftarrow$") Покажем, что $D(h)$ можно предст.:

$$D(h)=\int_a^b p\left(h'-\frac{h}{h_0}h_0'\right)^2 dt \quad (3) \quad ? \text{ на } C_0^1[a,b]$$

Заметим: h/h_0 – непр. на $[a,b]$. ?

$$\lim_{t\to a+0}\frac{h(t)}{h_0(t)}=\lim_{t\to a+0}\frac{h'(t)}{h_0'(t)}=h'(a)$$ – непр. в (·) a.

(Лопиталь)

Если $h_0(b)>0$, то $\frac{h(t)}{h_0(t)}\xrightarrow[t\to b-0]{}0$ – непр. в (·) b.

если $h_0(b)=0$: тогда $h_0'(b)\neq 0$ (т.к. иначе h_0 – реш-е (2') с нач. данными $h_0(b)=h_0'(b)=0$ $\Rightarrow h_0\equiv 0$ на (a_0,b_0) – ?! $h_0>0$ на (a,b)).

$$\Rightarrow \lim_{t\to b-0}\frac{h(t)}{h_0(t)}=\frac{h'(b)}{h_0'(b)} \text{ – } \exists \text{ – непр. в (·) } b$$

$\Rightarrow$ Под интегралом – непр. ф-я.

При малых $\varepsilon>0$ рассм.

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h'-\frac{h}{h_0}h_0'\right)^2 dt =$$

$$-\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p(h')^2 dt - 2\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\,\frac{h_0'}{h_0}\cdot hh'dt + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(\frac{h_0'}{h_0}\right)^2 h^2 dt \qquad (4)$$

Р. $-2\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0}\cdot hh'dt = -\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{ph_0'}{h_0}\, dh^2 =$ (по част.)

$$= -\frac{ph_0'}{h_0}\cdot h^2\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\left(\frac{ph_0'}{h_0}\right)' h^2 dt =$$

$$= -p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{(ph_0')'}{h_0}\cdot h^2 dt - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\cdot\frac{(h_0')^2}{h_0^2}h^2 dt$$

(2) $\parallel q$

~ " ~ - это же одно и тоже!

Подставим в (4):

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\left(h' - \frac{h}{h_0}h_0'\right)^2 dt = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\left(p(h')^2 + qh^2\right)dt - \underbrace{p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}}_{\text{непр.}}$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим: (3)

"$\Rightarrow$"

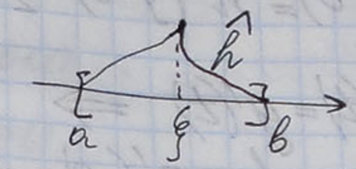
(Л) (о скруглении углов).

Пусть $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a,b]$ и $\hat{h} \in C[a,b]$:

$\hat{h}(a) = \hat{h}(b) = 0$

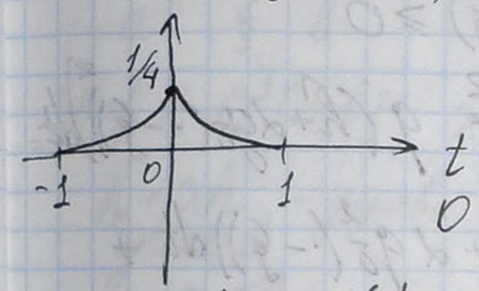
$\hat{h} \in C^1[a,\xi]$, $\hat{h} \in C^1[\xi,b]$, где $\xi \in (a,b)$

Тогда $D(\hat{h}) \geq 0$.



Док-во.

Р. $g(t) = \begin{cases} \left(\frac{1-|t|}{2}\right)^2, & t \in [-1,1] \\ 0, & \text{при остальн. } t \in \mathbb{R} \end{cases}$



$g \in C(\mathbb{R})$

$g \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$0 \leq g(t) \leq \frac{1}{4}$, $t \in \mathbb{R}$

на $(0,1)$: $g'(t) = -\frac{1}{2}(1-t)$ $\qquad g'(+0) = -\frac{1}{2}$

на $(-1,0)$: $g'(t) = \frac{1}{2}(1+t)$ $\qquad g'(-0) = \frac{1}{2}$

$|g'(t)| \leq \frac{1}{2}$ при $t \neq 0$.

При малых $\delta > 0$ рассм. $g_\delta(t) = \delta g\left(\frac{t}{\delta}\right)$.

Γ - график g

Γ_δ - график g_δ $\Rightarrow$ $\Gamma_\delta = \delta\Gamma$ (т.е. гомотетия с коэф. δ).

($\delta > 0$ - малое: $(\xi-\delta, \xi+\delta) \subset [a,b]$).

Обозн.: $\alpha := \hat{h}'(\xi+0) - \hat{h}'(\xi-0)$ и рассм.:

$h_\delta(t) = \hat{h}(t) + \alpha g_\delta(t-\xi)$ "подправим"

$h_\delta \in C[a,b]$, $h_\delta(a) = h_\delta(b) = 0$, $h_\delta \in C^1[a,\xi] \cup C^1[\xi,b]$

что в (.) ξ?

$h_\delta'(\xi+0) = \hat{h}'(\xi+0) - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $h_\delta'(\xi+0) - h_\delta'(\xi-0) = 0$

$h_\delta'(\xi-0) = \hat{h}'(\xi-0) + \frac{\alpha}{2}$ т.е. $h_\delta \in C_0^1[a,b]$

/* $g_\delta'(t) = g'(t) \Longrightarrow$

$g_\delta'(+0) = -\frac{1}{2}$, $g_\delta'(-0) = \frac{1}{2}$, $|g_\delta'(t)| < \frac{1}{2}$ при $t \neq 0$ (5)

$0 \le g_\delta(t) \le \frac{\delta}{4}$, $t \in \mathbb{R}$ (6) */

h_δ - доп. вар $\Rightarrow D(h_\delta) \ge 0$

$$0 \le \int_a^b \left(p(\hat{h}' + \alpha g_\delta'(\cdot - \xi))^2 + q(\hat{h} + \alpha g_\delta(\cdot - \xi))^2\right) dt =$$

$$= D(\hat{h}) + \alpha \int_a^b q(2\hat{h} g_\delta(\cdot - \xi) + \alpha g_\delta^2(\cdot - \xi))\, dt +$$

$$+ \alpha \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} p(2\hat{h}' g_\delta'(\cdot - \xi) + \alpha (g_\delta'(\cdot - \xi))^2)\, dt =$$

$$= D(\hat{h}) + \alpha I_\delta + \alpha J_\delta \text{ (обозначим)} \quad (7)$$

Оценим:

$$|I_\delta| \overset{(6)}{\le} \frac{\delta}{2} \int_a^b |q| \left(|\hat{h}| + |\alpha| \frac{\delta}{8}\right) dt$$

$$|J_\delta| \overset{(5)}{\le} \left(\int_{\xi-\delta}^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi+\delta}\right) p \left(|\hat{h}'| + \frac{|\alpha|}{4}\right) dt$$

Очевид.: $I_\delta \to 0$, $J_\delta \to 0$ при $\delta \to +0$.

Перейдем в (7) к пределу, получим:

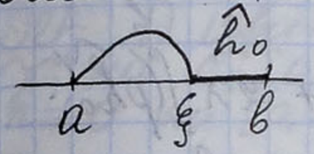
$D(\hat{h}) \ge 0$.

ч.т.д.

$\Leftarrow$ от противного.

$\exists\, \xi \in (a,b)$: $h_0(\xi) = 0$;

Заметим: $h_0'(\xi) \neq 0$



Обозн. $\hat{h}_0(t) = \begin{cases} h_0(t), & t \in [a, \xi) \\ 0, & t \in [\xi, b] \end{cases}$

$\forall\, h \in C_0^1[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\hat{h}_0 + \lambda h$ - удовл. усл. леммы о струн. узлов.

$\Rightarrow D(\hat{h}_0 + \lambda h) \ge 0$

Заметим: $\int_a^\xi (p(h_0')^2 + q h_0^2)\, dt = 0$ (8)

/* потому что:

$$\int_a^\xi p(h_0')^2 dt = \int_a^\xi p h_0' dh_0 = \underbrace{p h_0' h_0 \Big|_a^\xi}_{=0} - \int_a^\xi \underbrace{(p h_0')'}_{(2)\ -qh_0} h_0 dt =$$

$$= -\int_a^\xi q h_0^2 dt \quad */$$

(8) $\Rightarrow D(\hat{h}_0) = 0$

26.11.2012 Разбор задач

$l(x_*, h) \equiv 0 \Leftrightarrow x_*$ - реш-е?

Но! Нужно: $\underline{D(h) \geq 0}$?

Продолжение:

$\forall h \in C_0^1[a,b]$, $\forall \lambda \in R$

Р. $D(\hat{h_0} + \lambda h) = \underbrace{D(\hat{h_0})}_{=0} + \lambda^2 D(h) + 2\lambda \int_a^b (p\hat{h_0}' \cdot h' + q\hat{h_0} h) dt =$

$= \lambda^2 D(h) + 2\lambda \int_a^b (p h_0' h' + q h_0 h) dt$

$\int_a^\xi p h_0' h' dt = p h_0' h \Big|_a^\xi - \int_a^\xi \underbrace{(p h_0')'}_{q h_0} h dt$

Т.о. $D(\hat{h_0} + \lambda h) = \lambda^2 D(h) + 2\lambda \underbrace{p(\xi)}_{>0} \underbrace{h_0'(\xi)}_{\neq 0} h(\xi)$

Подберем $h \in C_0^1[a,b]$:

$V := 2p(\xi) h_0'(\xi) h(\xi) < 0$ (мы брали h-?)

то $D(\hat{h_0} + \lambda h) = \lambda (V + \lambda D(h)) < 0$ при малых $\lambda > 0$.

Но! $\hat{h_0} + \lambda h$ - удовл. усл-ям леммы о скруглении углов.

$\Rightarrow D(\hat{h_0} + \lambda h) \geq 0$ - ?!

ч.т.д.

25. Критерий положительности интегр. квадратичной формы

$$D(h) = \int_a^b (p(h')^2 + qh^2) dt \quad \text{на } C_0^1[a,b]$$

Предп. (1) из 24: $q \in C[a,b]$, $p \in C^1[a,b]$, $p(t) > 0$ на $[a,b]$

Def. D явл-ся положительной на $C_0[a,b]$, если $D(h) > 0$ $\forall h \in C_0^1[a,b]$, $h \not\equiv 0$ на $[a,b]$.

Л. Пусть $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a,b]$. И $h_* \in C_0^1[a,b]$: $D(h_*) = 0$.

Тогда необх.: $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $[a,b]$, $\lambda \in R$.

Док-во

по т. якоби $h_0(t) > 0$ на (a,b)

По ф-ле (3) из 24:

$$D(h_0) = \int_a^b p\left(h_*' - \frac{h_*}{h_0} h_0'\right)^2 dt$$

$D(h_*) = 0$, $p > 0 \Rightarrow h_*' - \frac{h_*}{h_0} h_0' \equiv 0$ на $[a,b]$

$\Leftrightarrow \frac{h_*' h_0 - h_* h_0'}{h_0^2} \equiv 0$ на $[a,b]$ ← делим на h_0, чтобы был полный дифф-л.

$\Leftrightarrow \left(\frac{h_*}{h_0}\right)' \equiv 0$ на (a,b)

$\Leftrightarrow \frac{h_*}{h_0} \equiv const := \lambda$ на (a,b)

т.е. $h_*(t) = \lambda h_0(t)$, $t \in (a,b)$

$\Rightarrow$ по непр-ти на $[a,b]$ ч.т.д.

(T) (критерий полож-ти)

Пусть вып. усл. (1).

D - положит. на $C_0^1[a,b] \Leftrightarrow h_0(t)>0$ на $(a,b]$

Док-во.

"$\Rightarrow$" $D(h)\geq 0$ на $C_0^1[a,b] \xRightarrow{\text{т. Якоби}} h_0(t)>0$ на (a,b).

Нужно: $h_0(b)>0$?

От противного: $h_0(b)=0$.

$\Rightarrow D(h_0)=0$ (см. (8) из §4 при $\xi=b$).

Но $h_0\neq 0$ на $[a,b] \Rightarrow D(h_0)>0$?!

"$\Leftarrow$" значит, $h_0(t)>0$ на $(a,b) \xRightarrow{\text{т. Якоби}}$

$\Rightarrow D(h)\geq 0$ на $C_0^1[a,b]$.

От прот.: $\exists\, h_*\in C_0^1[a,b]$, $h_*\neq 0$ на $[a,b]$:

$D(h_*)=0$.

По лемме: $h_*(t)=\lambda h_0(t)$ на $[a,b]$, причем $\lambda\neq 0$

$\Rightarrow h_*(b)=0 \Rightarrow h_0(b)=0$?! ч.т.д.

(Л) (об оценке снизу)

В усл-ях предыдущ. теоремы

$\exists\, \mu>0$: $D(h)\geq \mu\int_a^b (h')^2\,dt$ на $C_0^1[a,b]$

Док-во

Рассм. $D_\mu(h)=\int_a^b\left((p-\mu)(h')^2+qh^2\right)dt$

Обозн. $\mu_0=\min\limits_{t\in[a,b]} p(t)>0$

Рассм. D_μ при $|\mu|<\mu_0 \Rightarrow$ усл. (1) для D_μ - вып.

$\exists\, \mu>0$: $D_\mu\geq 0$? надо рассм. ур. Якоби:

$$h''+\frac{p'}{p-\mu}h'-\frac{q}{p-\mu}h=0 \quad (2)$$

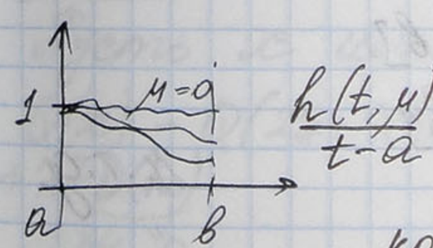
Обозн. $h(t,\mu)$ - ч. реш. (2): $h(a,\mu)=0$, $h'(a,\mu)=1$.

При $\mu=0$: $h(t,0)=h_0(t)>0$ на $(a,b]$

Р. ф-ю $\frac{h_0(t)}{t-a}$ - непр. на $(a,b]$, положит. на $(a,b]$.

$$\lim_{t\to a}\frac{h_0(t)}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{h_0(t)-\overset{0}{h_0(a)}}{t-a}=h_0'(a)=1.$$

Аналогично Р. $\frac{h(t,\mu)}{t-a}$, $\lim\limits_{t\to a}\frac{h(t,\mu)}{t-a}=1$.



Ур-е (2) - диф. ур-е, разреш. отн-но старшей произв. с коэф-ми, непр. завис. от парам-ра μ. (в окр-ти $\mu=0$).

$\Rightarrow$ по т. о непр. зависимости реш-я д.у. от парам-ра.

$\exists\, \mu_1\in(0,\mu_0)$: $h(t,\mu)$, $h'(t,\mu)$ - непр. на $[a,b]\times[-\mu_1,\mu_1]$

Покажем, что $\exists\ \mu\in(0,\mu_1):\ \dfrac{h(t,\mu)}{t-a}>0\ \ \forall t\in[a,b]$

От противного:

$\forall \mu_k \longrightarrow +0\ \ \exists\ t_k\in(a,b]:\ \dfrac{h(t_k,\mu_k)}{t_k-a}\le 0$

Можем счит., что $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} t_*\in[a,b]$

$t_*=a$? Если так, то

$$0\ge \lim_{k\to\infty}\frac{h(t_k,\mu_k)-h(a,\mu_k)}{t_k-a} \quad \text{т. Лагранжа}$$

$$=\lim_{k\to\infty} h'(\underbrace{a+\theta_k(t_k-a)}_{\xi_k\to a},\mu_k) = h'(a,0) = h_0'(a) = 1. \ ?!$$

Значит, $t_*>a$.

В пределе $\dfrac{h(t_*,0)}{\underbrace{t_*-a}_{>0}}\le 0 \Rightarrow h_0(t_*)\le 0$?! $\quad t_*\in(a,b]$

Значит, действительно

$\exists\mu>0:\ \dfrac{h(t,\mu)}{t-a}>0$ на $[a,b]$.

$\Rightarrow h(t,\mu)>0$ на $(a,b]$.

$\Rightarrow D_\mu\ge 0$ на $C_0^1[a,b]$ ч.т.д.

$$Q(x):=\int_a^b\left(p(x')^2+qx^2-2fx\right)dt \longrightarrow \inf \qquad (3)$$

$x(a)=A,\ x(b)=B,\ x\in C^1[a,b]$

(T) Пусть x_* - реш-е (3) и D - соотв-ая интегр. функц-ну Q, положительна на $C_0^1[a,b]$. Тогда x_* - единств. реш-е.

Док-во.

Пусть x_1 - другое реш-е. Положим $h_1:=x_1-x_*$.

$h_1\in C_0^1[a,b]$, $h_1\ne 0$ на $[a,b]$.

$Q(x_1)=Q(x_*+h_1)\overset{33}{=}Q(x_*)+\underbrace{2l(x_*,h_1)}_{=0}+D(h_1)$

Но $Q(x_1)=Q(x_*)\Rightarrow$

$\Rightarrow D(h_1)=0$?! (она полож.)

ч.т.д.

(T) Пусть x_* - реш-е (3) и $h_0(b)=0$. Тогда всё мн-во реш-ий допускает прест.:

$$x(t)=x_*(t)+\lambda h_0(t),\quad \lambda\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

Док-во.

Пусть x имеет вид (4). (* в усл-ях т. $h_0\in C_0^1[a,b]$ *)

$Q(x)=Q(x_*+\lambda h_0)=Q(x_*)+\underbrace{2\lambda l(x_*,h_0)}_{=0}+\lambda^2\underbrace{D(h_0)}_{=0}$

Т.о. $\overset{34}{}$ $Q(x)=Q(x_*)\Rightarrow x$ - реш-е.

Наоборот: $\exists\ x_*$ - реш-е, $h_*:=x-x_*$ - доп. вар.

$Q(x)=Q(x_*+h_*)=Q(x_*)+D(h_*)\Rightarrow D(h_*)=0$

$\overset{1.}{\Longrightarrow} h_*=\lambda h_0$ на $[a,b]$.

$\Rightarrow x=x_*+\lambda h_0$ на $[a,b]$ ч.т.д.

Шашковой Елизаветы, 344

§6. Схема решения квадратичной вариационной задачи

29.11.2012.

$$Q(x) := \int_a^b (p(x')^2 + qx^2 - 2fx)\,dt \to \inf \quad (1)$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[a,b]$$

① Проверяем вып-е усл-ий:

$q, f \in C[a,b]$, $p \in C^1[a,b]$, $p(t) > 0$ на $[a,b]$

② Находим нач. реш-е ур-я Якоби:

$$-(ph')' + qh = 0$$

$$h(a) = 0, \quad h'(a) = 1.$$

Обозн. $h_0(t)$ – его.

③ Если $\exists\, \xi \in (a,b)$: $h_0(\xi) = 0$, то

$$\inf_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty$$

Решений у зад. (1) нет.

Иначе переходим к 4.

④ Решаем краевую задачу Штурма-Лиувилля.

$$-(px')' + qx = f$$

$$x(a) = A, \quad x(b) = B.$$

Пусть x_* - реш-е краевой зад. (какое-то).

<u>Внимание!</u> Сущ-е решения у краевой задачи не гарантируется, равно как и не исключается беспон. мн-во решений.

Если нашли - переходим к 5.

(5) Если $h_0(b) > 0$, то x_* - единств. реш-е зад. (1).

Если $h_0(b) = 0$, то все мн-во реш-ий:

$$x = x_* + \lambda h_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

<u>Примеры</u>

1) $Q(x) = \int_0^{\pi/2} ((x')^2 - x^2)\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1,$

$x \in C^1[0, \frac{\pi}{2}]$

1. $p \equiv 1, \; q \equiv -1, \; f \equiv 0.$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$

2. Ур-е Якоби: $-h'' - h = 0$

$h(0) = 0 \quad h'(0) = 1$

Общ. реш: $h(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$h(0) = 0: \quad C_1 = 0$

$h'(0) = 1: \quad C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{h_0(t) = \sin t}$

3. $h_0(t) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2}]$

4. Кр. зад. Штурма-Лиувилля:

$$-x'' - x = 0$$

$$x(0) = 0, \quad x(\tfrac{\pi}{2}) = 1$$

Общ. реш: $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

очев.: $x_*(t) = \sin t$

5. Т.к. $h_0(\frac{\pi}{2}) > 0$, то x_* - единств. реш-е.

$Q(x_*) = \ldots$

2) $Q(x) := \int_0^{\pi} ((x')^2 - x^2)\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1, \quad x \in C^1[0, \pi]$

$h_0(t) = \sin t, \quad h_0(t) > 0$ на $(0, \pi)$

Кр. зад.: $-x'' - x = 0$

$x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1.$

Общ. реш. $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$x(0) = 0: \quad C_1 = 0$

$x(\pi) = 1: \quad C_2 \sin \pi = 1$?!

У краевой задачи реш. нет!

Покажем, что $\inf\limits_{x \in \Omega} Q(x) = -\infty$

Р. $x_n(t) = \frac{1}{\pi}(t + n \sin t), \quad n = 1, 2, \ldots$

$$Q(x_n) = \int_0^{\pi}((x_n')^2 - x_n^2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}((1+n\cos t)^2 - (t+n\sin t)^2)\,dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}(1-t^2)\,dt}_{const} + \underbrace{\frac{2n}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\cos t - t\sin t)\,dt}_{?} +$$

$$+ \underbrace{\frac{n^2}{\pi^2}\int_0^{\pi}(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt}_{=0}$$

Рассмотрим: $-\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \int_0^{\pi} t\,d(\cos t) =$

$$= \underbrace{t\cos t\Big|_0^{\pi}}_{=-\pi} - \int_0^{\pi}\cos t\,dt$$

Т.о.

$$Q(x_n) = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{\pi^2}{3} - 2n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

3) $Q(x) = \int_0^{\pi}((x')^2 - x^2)\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0)=0,\ x(\pi)=0,\ x\in C^1[0,\pi]$

$h_0(t) = \sin t,\ h_0(t)>0$ на $(0,\pi)$

Кр. задача: $-x''-x=0$

$x(0)=0,\ x(\pi)=0$

Какое-то реш: $x_*\equiv 0$, например.

$h_0(\pi)=0 \Rightarrow$ все мн-во реш:

$x(t) = \lambda\sin t,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Их бесон. много.

Зам-е:

Усл-я из п.1 и главное реш-е ур-я Якоби нужны для того, чтобы убедиться в неотриц.-ти кв. формы $D(h)$.

В нек. случаях в этом можно убедиться непосред-но. Например, если $p(t)\geq 0$ на $[a,b]$ и $q(t)\geq 0$ на $[a,b]$.

В таких случаях нужно переходить сразу к п.4.

Задачи:

(10) (задача Гильберта) Решить:

$$Q(x) := \int_0^1 (t^2(x')^2 + 12x^2)\,dt \longrightarrow \inf$$

$x(0)=0,\ x(1)=1,\ x\in C^1[0,1]$

// не вып-ся усил. усл-е Лежандра, можно идти к 4, но нужно д-ть, что получится действительно реш-е.

(11) Решить:

$$Q(x) := \int_0^{\pi/2}((x')^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \longrightarrow \inf$$

$x(0)=0,\ x(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2},\ x\in C^1[0,\frac{\pi}{2}]$

(12) $\varepsilon>0$ – параметр. Исслед. зависимости от параметра.

$$Q(x) := \int_0^1 (\varepsilon (x')^2 - x^2)\,dt \longrightarrow \inf$$
$$x(0)=0,\quad x(1)=1,\quad x\in C^1[0,1]$$

§7. Первый и второй дифф-лы интегрального функционала

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\,dt$$

На $x\in C^1[a,b]$

$F\in C^2(U)$, $U\subset\mathbb{R}^3$ – откр., связ.

$\Omega^0 = \{x\in C^1[a,b] : Z(x) = \{(t, x(t), x'(t)),\ t\in[a,b]\} \subset U$ – естеств. обл. опр-я.

Ω^0 – откр в $C^1[a,b]$?

Будем счит, что C^1 – пр-во с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{[a,b]}|x| + \max\limits_{[a,b]}|x'|$. Получаем топологию, индуц. нормой (из шара), т.е. $x\in\Omega^0 \Rightarrow x+h\in\Omega^0$ при $\|h\|_1<\delta$.

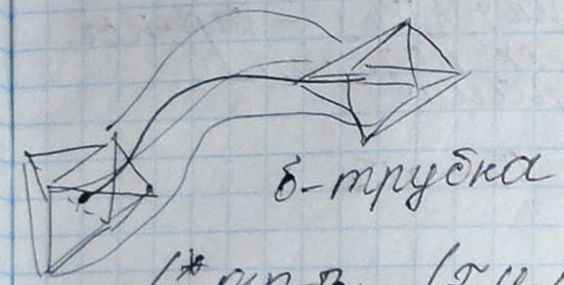
Док-во

fix $x_0\in\Omega^0$, обозн. $Z_0 = Z(x_0)$ – замкн, огр.

возьмём $\delta>0$,

$$Z_\delta = \{(\tau, u, v) \mid \exists t\in[a,b] : |\tau - t| + |u - x_0(t)| + |v - x_0'(t)| \le \delta\}$$

δ – расст. до Z_0 не превосх. δ.



Z_δ – замкн. и огр. мн-во

δ-трубка

/* Огр-ть: $(\tau, u, v)\in Z_\delta \Rightarrow |\tau| \le |t| + \delta$,
$|u| \le |x_0(t)| + \delta$
$|v| \le |x_0'(t)| + \delta$ – ok

замк-ть: $\exists (\tau_k, u_k, v_k)\in Z_\delta$

$(\tau_k, u_k, v_k) \longrightarrow (\tau_*, u_*, v_*) \overset{?}{\in} Z_\delta$

по опр-ю: $\exists t_k\in[a,b]$: $|\tau_k - t_k| + |u_k - x_0(t_k)| + |v_k - x_0'(t_k)| \le \delta$

Мы ок, что $t_k \longrightarrow t_*\in[a,b] \xrightarrow{\text{в пред}}$

$|\tau_* - t_*| + |u_* - x_0(t_*)| + |v_* - x_0'(t_*)| \le \delta$

т.е. $(\tau_*, u_*, v_*)\in Z_\delta$ – ok */

(1) $\exists \delta_0>0$: $Z_{\delta_0}\subset U$.

Док-во

от противного: $\forall \delta_k \to +0$ $\exists$ ~~$t_k\in[a,b]$~~

$\exists (\tau_k, u_k, v_k)\in Z_{\delta_k}$: $(\tau_k, u_k, v_k)\notin U$

По опр.: $\exists\, t_k \in [a,b]$:

$$|\tau_k - t_k| + |u_k - x_0(t_k)| + |v_k - x_0'(t_k)| \le \delta_k$$

Посл-ти $\{t_k\}, \{\tau_k\}, \{u_k\}, \{v_k\}$ – огр-ны

Можем выбрать сх. подпосл-ть

сист., что уже выбрали.

$$\tau_k \to \tau_*, \quad u_k \to u_*, \quad v_k \to v_*$$

В пределе:

$$|\tau_* - t_*| + |u_* - x_0(t_*)| + |v_* - x_0'(t_*)| = 0$$

$$\Rightarrow (\tau_*, u_*, v_*) = (t_*, x_0(t_*), x_0'(t_*)) \in Z_0 \subset \mathcal{U}$$

$(\tau_k, u_k, v_k) \longrightarrow (\tau_*, u_*, v_*) \in \mathcal{U}$ – откр.

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \forall k \ge N$

$(\tau_k, u_k, v_k) \in \mathcal{U}$?!

чтд

(T) (об открытости ...)

Ω^0 откр. в $C^1[a,b]$.

Док-во.

fix $x_0 \in \Omega^0$ и покажем:

$x_0 + h \in \Omega^0 \quad \forall\, h \in C^1[a,b],\ \|h\|_1 \le \delta_0$ – „то самое" из леммы

Надо: $Z(x_0+h) \subset \mathcal{U}$

Достат. пок-ать: $Z(x_0+h) \subset Z_{\delta_0}$

При fix $t \in [a,b]$:

Р. $\xi = (t, x_0(t) + h(t), x_0'(t) + h'(t)) \in Z(x_0+h_0)$

$\xi_0 = (t, x_0(t), x_0'(t)) \in Z_0$

ℓ_1 – расст. между ξ и ξ_0:

$$|h(t)| + |h'(t)| \le \|h\|_1 \le \delta_0$$

ч.т.д.

$$J(x) = \int_a^b F(t, x, x')\,dt$$

03.12.2012

J – дифф. в $x_0 \in \Omega^0$?

$$J(x_0+h) = J(x_0) + \underline{\ell(h)} + o(\|h\|_1), \quad \|h\|_1 \le \delta_0 \quad (1)$$

лин. непр. ф-л

Фикс. $h \in C^1[a,b]$, $\|h\|_1 < \delta_0$

Р. $J(x_0+h) - J(x_0) =$

$$= \int_a^b \underbrace{\left(F(t, x_0(t)+h(t), x_0'(t)+h'(t)) - F(t, x_0(t), x_0'(t))\right)}_{H(t)} dt$$

fix $t \in [a,b]$;

по т. о среднем:

$\sim$ – в сред. точке

$$H(t) = \tilde{F}_x' h(t) + \tilde{F}_{x'}' h'(t) =$$

$$= F_x' h + F_{x'}' h' + \left((\tilde{F}_x' - F_x')h + (\tilde{F}_{x'}' - F_{x'}')h'\right) =$$

$$=: H_1(t) + G_1(t)$$

Арг. у F'_x, $F'_{x'}$: $(t, x_0(t), x_0'(t))$

арг. у $\tilde{F}'_x$, $\tilde{F}'_{x'}$: $(t, x_0(t)+\theta h(t), x_0'(t)+\theta h'(t))$, $0<\theta<1$

Т.о. $J(x_0+h)-J(x_0) = \underbrace{\int_a^b H_1(t)\,dt}_{l(h)} + \underbrace{\int_a^b G_1(t)\,dt}_{\omega_1(h)}$

Проверим, что
$l(h)$ – лин. непр. ф-ал;
$\omega_1(h)$ – бесконеч. мал.

$l(h) = \int_a^b (F'_x(t, x_0(t), x_0'(t))h(t) + F'_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \cdot h'(t))\,dt$

лин-ть: очевид.

огр-ть: $|l(h)| \le \|h\|_1 \int_a^b (|F'_x| + |F'_{x'}|)\,dt =: K\|h\|_1$ – ок

$\Rightarrow l$ – лин. огр. ф-л. $\Rightarrow l$ – непр.

Более того, он липшицевый (?):
$|l(h_1)-l(h_2)| = |l(h_1-h_2)| \le K\|h_1-h_2\|_1$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ \delta \le \frac{\delta_0}{2}$:
$|F'_x(t, x_0(t)+u, x_0'(t)+v) - F'_x(t, x_0(t), x_0'(t))| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

$|F'_{x'}(t, x_0(t)+u, x_0'(t)+v) - F'_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t))| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

Нер-ва будут вып-ся $\forall t\in[a,b]$, $|u|\le\delta$, $|v|\le\delta$, т.к.:
F'_x, $F'_{x'}$ – непр. на Z_{δ_0} – компакт $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ равномер. непр. ф-ции.
$\Rightarrow |\tilde{F}'_x - F'_x| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$, $|\tilde{F}'_{x'} - F'_{x'}| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$
$\forall t\in[a,b]$, $\|h\|_1 \le \delta$

/* арг у ф. с ~: $(t, x_0(t)+\underbrace{\theta h(t)}_{u}, x_0'(t)+\underbrace{\theta h'(t)}_{v})$ */

$\Rightarrow |\omega_1(h)| \le \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b (|h|+|h'|)\,dt \le$
$\le \varepsilon\|h\|_1$, при усл. $\|h\|_1 \le \delta$

На языке "$\varepsilon-\delta$": $\frac{\omega_1(h)}{\|h\|_1} \xrightarrow[\|h\|_1\to 0]{} 0$, т.е.

$\omega_1(h) = o(\|h\|_1)$.

Т.о. факт разм-я по ф-ле (1) установлен.

Единств-ть?

$J(x_0+h) - J(x_0) \le l(h) + o(\|h\|_1)$
$\le l_1(h) + o(\|h\|_1)$ $\Rightarrow$ ⊖

$\Rightarrow l(h) - l_1(h) = o(\|h\|_1)$, $\|h\|_1 \le \delta_0$

Если $h\equiv 0$, то $l_1(h) = l(h) = 0$

Фикс. $h \in C^1[a,b]$, $h \not\equiv 0$.

при малых $\lambda > 0$, $\|\lambda h\|_1 \le \delta_0$

$$l(\lambda h) - l_1(\lambda h) = o(\|\lambda h\|_1)$$

$$l(h) - l_1(h) = \underbrace{\frac{o(\|\lambda h\|_1)}{\|\lambda h\|_1}}_{\to 0} \|h\|_1 \xrightarrow[\lambda \to +0]{} 0$$

т.о. $l(h) = l_1(h)$ $\forall h$

$\Rightarrow$ единств-ть установлена.

Def: Ф-л $l(h)$ из ф-лы (1) наз-ся первым дифф-лом интегр. ф-ла J в (.) x_0.

Обозн.: $dJ(x_0; h)$

(1): $J(x_0+h) - J(x_0) = dJ(x_0; h) + o(\|h\|_1)$ (1')

(T) Инт. ф-л J в каждой точке $x_0 \in \Omega^0$ дифф-ем. При этом для первого дифф-ла dJ имеется ф-ла:

$$dJ(x_0; h) = \int_a^b (F'_{x'} h' + F'_x h)\, dt$$

$$J(x_0+h) - J(x_0) = \int_a^b H(t)\, dt$$

fix $t \in [a,b]$; по т. о сред. для C^2:

$$H(t) = F'_x h + F'_{x'} h' + \frac{1}{2}\left(F''_{xx} h^2 + 2F''_{xx'} hh' + F''_{x'x'} (h')^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((\tilde{F}''_{xx} - F''_{xx}) h^2 + 2(\tilde{F}''_{xx'} - F''_{xx'}) hh' + (\tilde{F}''_{x'x'} - F''_{x'x'})(h')^2\right) =: H_1(t) + \frac{1}{2} H_2(t) + \frac{1}{2} G_2(t)$$

$$J(x_0+h) - J(x_0) = \underbrace{\int_a^b H_1(t)\, dt}_{l(h) = dJ(x_0 h)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^b H_2(t)\, dt}_{D(h)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^b G_2(t)\, dt}_{\omega_2(h)}$$

$$D(h) = \int_a^b \left(F''_{xx} h^2 + 2F''_{x'x'} hh' + F''_{x'x'} (h')^2\right) dt$$ – квадр. форма

$\omega_2(h) = o(\|h\|_1^2)$ – ?

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, $\delta \le \frac{\delta_0}{2}$:

$|\tilde{F}''_{xx} - F''_{xx}| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$,

$|\tilde{F}''_{xx'} - F''_{xx'}| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

$|\tilde{F}''_{x'x'} - F''_{x'x'}| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\forall t \in [a,b]$, как только $\|h\|_1 \le \delta$.

$$\Rightarrow |\omega_2(h)| \le \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_a^b \left(|h|^2 + 2|hh'| + |h'|^2\right) dt$$

$\leq \varepsilon \|h\|_1^2 \quad \forall\ h \in C^1[a,b],\ \|h\|_1 \leq \delta$ — ok.

// Поделим на $\|h\|_1^2$, получим, что хотим.

Можно представить:

$$J(x_0+h) - J(x_0) = dJ(x_0, h) + \frac{1}{2} d^2 J(x_0; h) + o(\|h\|_1^2) \quad (2)$$

Здесь $d^2 J(x_0; h) := D(h)$ — второй дифф.-л.

Док-во того, что D — лин. ф-л, и единств. — аналогично с первым случаем.

(T) Лин. ф-л J в каждой (.) $x_0 \in \Omega^0$ имеет помимо первого, также и второй дифф-л., кот. опред-ся формулой:

$$d^2 J(x_0; h) = \int_a^b \left(p(h')^2 + 2uhh' + vh^2\right) dt,$$

где $p(t) = F''_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t))$

$u(t) = F''_{xx'}$ (— " —)

$v(t) = F''_{xx}$ (— " —)

28 Необх. усл-е локального минимума.

$$J(x) := \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

$$x(a) = A,\ x(b) = B,\ x \in C^1[a,b]$$

$F \in C^2(U)$

Def: Допус. x_0 зад. (1) — точка loc min, если:

$\exists\ \rho > 0\ (\rho \leq \delta_0)$: $J(x_0+h) \geq J(x_0) \quad \forall\ h \in C_0^1[a,b],\ \|h\|_1 \leq \rho$

(Л) Пусть x_0 — т. loc min в зад. (1). Тогда необх.:

$$dJ(x_0, h) = 0 \quad \forall\ h \in C_0^1[a,b] \quad (2)$$

$$d^2 J(x_0, h) \geq 0 \quad \forall\ h \in C_0^1[a,b] \quad (3)$$

Док-во

при $h \equiv 0$ на $[a,b]$ (2), (3) трив.

фикс. $h \in C_0^1[a,b]$, $h \not\equiv 0$ на $[a,b]$

при дост. малых $\lambda > 0$ $\|\lambda h\|_1 \leq \rho\ (\leq \delta_0)$ ↑ доп. вар.

(2): $0 \leq J(x_0 + \lambda h) - J(x_0) =$

$= dJ(x_0, \lambda h) + o(\|\lambda h\|_1) \quad / : \lambda$

$dJ(x_0; h) + \dfrac{o(\|\lambda h\|_1)}{\|\lambda h\|_1} \cdot \|h\|_1 \geq 0$

В пределе $\lambda \to +0$: $\quad dJ(x_0; h) \geq 0$

~~Если $h<0$ ⇒~~

$-h$ – тоже доп. вар ⇒ $dJ(x_0;-h)\geq 0$

т.е. $\underline{-dJ(x_0;h)\geq 0}$.

$\Rightarrow dJ(x_0;h)=0$ – ОК.

док-ем ф-лу (2).

(3): $0\leq J(x_0+\lambda h)-J(x_0)\overset{(2)}{=}$

$=\frac{1}{2}d^2J(x_0;\lambda h)+o(\|\lambda h\|_1^2)$

$\frac{1}{2}d^2J(x_0,h)+\frac{o(\|\lambda h\|_1^2)}{\|\lambda h\|_1^2}\cdot\|h\|_1^2\geq 0$

$\Rightarrow d^2J(x_0;h)\geq 0$

ч.т.д.

(T) Пусть x_0 – точка loc min в зад. (1). Тогда x_0 – удовл. ур-ю Эйлера:

$J(x):=F'_x-\frac{d}{dt}F'_{x'}=0$ на $[a,b]$ (4)

Док-во

Следует из (2) и ОЛВИ

ч.т.д.

Зам-е

Из ОЛВИ также следует, что $F'_{x'}(t,x_0(t),x_0'(t))\in C^1[a,b]$

Задачи

(13) Выведите ур-е Эйлера для задачи:

$$J(x):=\int_a^b F(t,x,x',x'')\,dt\longrightarrow\inf$$

$x(a)=A,\ x'(a)=A'$ $\quad x\in C^2[a,b]$

$x(b)=B,\ x'(b)=B'$

Def: Все инт. кривые диф. ур-я (4) наз-ся экстремальными, ями. Экстремаль, удовл. краевым усл-ям, наз-ся стационарной кривой. 06.12.2012.

Если x_0 – (·) лок. мин., то он – стац. кривая.

Обратное – неверно. Пример:

$$J(x):=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}((x')^2-x^2)\,dt\longrightarrow\inf$$

$x(0)=x(\frac{3\pi}{2})=0,\quad x\in C^1[0,\frac{3\pi}{2}]$

$F=(x')^2-x^2,\quad F'_x=-2x,\quad F'_{x'}=2x'$

Ур-е Эйлера: $\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}x'=-x\\ x(0)=x(\frac{3\pi}{2})=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_0(t)\equiv 0$ – единств. стац. крив.

$J(x_0)=0$ – но это не loc min, т.к:

Р. $x_\lambda(t)=\lambda\sin\frac{2t}{3}$, $\lambda\in\mathbb{R}_+$ – план

$x_\lambda'(t) = \frac{2\lambda}{3}\cos\frac{2t}{3}$

$\|x_\lambda\|_1 = \max|x_\lambda| + \max|x_\lambda'| = \lambda + \frac{2\lambda}{3} = \frac{5}{3}\lambda$

$J(x_\lambda) = \lambda^2 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right) dt$

$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\frac{2t}{3}\,dt = \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\tau\,d\tau = \frac{3\pi}{4} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\frac{2t}{3}\,dt$

$\Rightarrow J(x_\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) = -\frac{5\pi}{12}\lambda^2 < \underset{J(x_0)}{0} \quad \forall \lambda$

$\Rightarrow x$ - <u>НЕ</u> точка loc min.

Более того, $J(x_\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} -\infty$, т.е.

$\inf\limits_{x\in\Omega} J(x) = -\infty$

У этой задачи вообще нет решений.

<u>Пример.</u>

$J(x) := \int_{-1}^{1} \left((x')^3 + 24tx\right) dt \longrightarrow \inf$

$x(-1) = -1,\ x(1) = 1,\ x \in C^1[-1,1]$

Ур-е Э.: $F_x' = 24t \qquad F_{x'}' = 3(x')^2$

$\frac{d}{dt}(x')^2 = 8t$

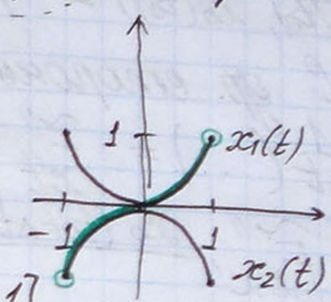
$\Rightarrow (x')^2 = 4t^2 + C$

$x' = \pm\sqrt{4t^2 + C} \Rightarrow x = \ldots$

Р. $x_1(t) = t^2$ $\left(x_1' = 2t,\ (x_1')^2 = 4t^2,\ \frac{d}{dt}(x_1')^2 = 8t\right)$ - экстремаль

$x_2(t) = -t^2$ - тоже экстремаль

$x_0(t) = \begin{cases} t^2, & t \ge 0 \\ -t^2, & t \le 0 \end{cases}$ - стац. кривая



$x_0'(t) = 2|t|$, $x_0 \in C^1[-1,1]$

$x_0 \notin C^2[-1,1]$

такое тоже бывает (есть только C^1-гладкость, а больше - нет...).

Предпол., что x_0 - экстремаль зад. (1) из $C^2[a,b]$

$\Rightarrow x_0$ удовл. (4):

$F_x' - F_{tx'}'' - F_{xx'}'' \cdot x' - F_{x'x'}'' \cdot x'' = 0$

(T) (Гильберта)

$T = \{t \in [a,b] \mid F_{x'x'}''(t, x_0(t), x_0'(t)) \ne 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \in C^2(T)$

<u>Док-во.</u>

Из ОЛВП $\Rightarrow F_{x'}'(t, x_0(t), x_0'(t)) \in C^1[a,b]$

fix $t_0 \in T$

Р. $\frac{1}{\Delta t}\left(F'_{x'}(t_0, x_0+\Delta t, x_0(t+\Delta t), x_0'(t_0+\Delta t)) - F'_{x'}(t_0, x_0(t_0), x_0'(t_0))\right) \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \frac{d}{dt}F'_{x'}(t_0, x_0(t_0), x_0'(t_0)) \overset{(4)}{=} F'_{x}(t_0, x_0(t_0), x_0'(t_0))$

С др. стороны, по т. о среднем:

$$\frac{1}{\Delta t}(\dots) = \tilde{F}''_{x't} + \tilde{F}''_{x'x}\frac{x_0(t_0+\Delta t)-x_0(t_0)}{\Delta t} + \tilde{F}''_{x'x'}\frac{x_0'(t_0+\Delta t)-x_0'(t_0)}{\Delta t}$$

Аргумент у $\tilde{F}''_{\cdot\cdot}$:

$$(t_0+\theta\Delta t,\ x_0(t_0)+\theta(x_0(t_0+\Delta t)-x_0(t_0)),\ x_0'(t_0)+\theta(x_0'(t_0+\Delta t)-x_0'(t_0)))$$

$0<\theta<1$

$\tilde{F}''_{x'x'} \neq 0$ при малых Δt.

Перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$, поделив на $\tilde{F}''_{x'x'}$:

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{x_0'(t_0+\Delta t)-x_0'(t_0)}{\Delta t} =$ (т.к. у всех остальных в рав. есть предел).

$\overset{def}{=} x_0''(t_0)$

Более того,

$$x_0''(t_0) = \frac{1}{F''_{x'x'}}\left(F'_x - F''_{tx'} - F''_{xx'}x_0'(t_0)\right) \text{ - непрерывна}$$

$\Rightarrow x_0 \in C^2(T)$

ч.т.д.

Def: Задача (1) регулярна, если подинтегр. ф-я $F=F(t,x,y)$ такова, что: $F''_{yy}\neq 0$ на U.

Задача (1) - положительно регулярна, если $F''_{yy}>0$ на U.

x_0 - точка loc min $\Rightarrow$ вып. (3):

$$d^2J(x_0,h) = \int_a^b (p(h')^2 + 2uhh' + vh^2)\,dt \geq 0 \text{ на } C_0^1[a,b]$$

, где $p = F''_{x'x'}$, $u = F''_{xx'}$, $v = F''_{xx}$, аргумент: $(t, x_0(t), x_0'(t))$

Предположим, что $F\in C^3(U)$, $p(t)\geq 0$ на $[a,b]$ - усил. усл-е Леж.

По т. Гильберта: экр-ль $x_0\in C^2[a,b]$, а также $p,u\in C^1[a,b]$

Упростим:

$$2\int_a^b uhh'\,dt = \int_a^b uh^2\,dt = \underbrace{uh^2\Big|_a^b}_{=0 \text{ на } C_0^1[a,b]} - \int_a^b u'h^2\,dt$$

$$d^2J(x_0;h) = \int_a^b (p(h')^2 + \underbrace{(v-u^2)}_{=:q}h^2)\,dt = \int_a^b (p(h')^2 + qh^2)\,dt \geq 0 \text{ на } C_0^1[a,b]$$

$q \in C[a,b]$, $p \in C^1[a,b]$, $p(t)>0$ на $[a,b]$

$\xrightarrow[\text{Якоби}]{\text{Т.}}$ ~~ч~~ гл. реш-е ур-я Якоби

$$\begin{cases} h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{q}{p}h = 0 \\ h(a)=0, \quad h'(a)=1 \end{cases}$$

будет полож. на (a,b)

(Т)

Пусть x_0 - точка loc min в зад (1), $F \in C^3(U)$ и вып-ся усил. усл-е Лежандра.

$\Rightarrow h_0(t)>0$ на (a,b) - гл. реш. ур-я Якоби.

§9. Достаточные усл-я строгого локального мин-ма.

$$J(x) := \int_a^b F(t,x,x')\,dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

$$x(a)=A, \quad x(b)=B, \quad x \in C^1[a,b]$$

$F \in C^3(U)$

(Т) Пусть вып-ся след. усл-я:

1) x_0 - стац. кривая зад. (1) (т.е. удовл. ур. Э.:

$$F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'} = 0, \quad x(a)=A, \quad x(b)=B \ ^{*)}$$

2) $p(t) := F''_{x'x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) > 0$ на $[a,b]$ (усил. усл-е Леж.)

3) Гл. реш. ур-я Якоби $h_0(t)>0$ на $(a,b]$ (усил. усл-е Якоби)

Тогда $\exists\, \rho>0$:

$$J(x_0+h) > J(x_0) \quad \forall\, h \in C_0^1[a,b], \ h \not\equiv 0 \text{ на } [a,b], \ \|h\|_1 \le \rho$$

/* x_0 - точка строгого loc min */

Задачи:

(14) Д-те, что $x_0(t) \equiv 0$ - т. loc min в задаче

$$J(x) := \int_0^1 (x')^2(1-x^2)\,dt \longrightarrow \inf$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=0, \quad x \in C^1[0,1]$$

Вместе с тем $\inf\limits_{\Omega} J(x) = -\infty$

(15) Д-те:

$x_0(t) = \frac{1}{2}(t+1)$ доставл. loc max в задаче

$$J(x) := \int_{-1}^1 (x')^2(1-x')^2\,dt \longrightarrow \sup \ \cancel{\max}$$

$$x(-1)=0, \quad x(1)=1, \quad x \in C^1[-1,1]$$

(16) (Задача Эйлера)

$\rho > 0$ – параметр

$$J(x) := \int_0^1 \left((x')^2 + \rho \cos x\right) dt \longrightarrow \inf$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad x \in C^1[0,1]$$

Найти мн-во таких ρ, при кот. $x_0(t) \equiv 0$ явл. точкой loc min

10.12.2012. Док-во (теоремы)

Усл. Леж. $\xrightarrow{\text{Т. Гильб.}}$ $x_0 \in C^2[a,b]$

$p \in C^1[a,b]$

$q = F''_{xx} - \frac{d}{dt} F''_{xx'} \in C[a,b]$

$$\Rightarrow D(h) = d^2 J(x_0, h) = \int_a^b \left(p(h')^2 + q h^2\right) dt$$

полож. на $C_0^1[a,b]$

по (1) (§5): $\exists \mu > 0 \quad D(h) \geq \mu \int_a^b (h')^2 dt$

При малых $h \in C_0^1[a,b]$: $\|h\|_1 \leq \delta_0$

$$J(x_0+h) - J(x_0) = \underbrace{dJ(x_0,h)}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{d^2 J(x_0,h)}_{\text{оценка}} + \omega_2(h)$$

(т.к. x_0 – стац. (кривая))

(тоже самое)

Было (в §7): $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |\omega_2(h)| \leq$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b \left(|h|^2 + 2|hh'| + |h'|^2\right) dt$$

$\forall h \in C_0^1[a,b], \ \|h\|_1 \leq \delta$

$$h(t) = \int_a^t 1 \cdot h'(\tau) d\tau \Rightarrow \text{нер-во К-Б-Ш} \quad \text{при } t \in [a,b]$$

$$|h(t)|^2 \leq \left(\int_a^t 1^2 d\tau\right)\left(\int_a^t (h')^2 d\tau\right) \leq$$

$$\leq \left(\int_a^b 1^2 d\tau\right)\left(\int_a^b (h')^2 d\tau\right) \leq (b-a) \int_a^b (h')^2 d\tau$$

$$\Rightarrow \int_a^b |h|^2 dt \leq (b-a)^2 \int_a^b (h')^2 dt$$

$$\int_a^b |hh'| dt \overset{\text{К-Б.}}{\leq} \left(\int_a^b h^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b (h')^2 dt\right)^{1/2} \leq (b-a) \int_a^b (h')^2 dt$$

то. $|\omega_2(h)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \left((b-a)^2 + 2(b-a) + 1\right) \int_a^b (h')^2 dt \ (\leq)$

всегда можем выбрать δ так, что:

$(\leq) \ \frac{\mu}{4} \int_a^b (h')^2 dt \quad \forall h \in C_0^1[a,b], \ \|h\|_1 \leq \delta_1$

Имеем:

$$J(x_0+h) - J(x_0) \geq \frac{\mu}{2} \int_a^b (h')^2 dt - \underbrace{|\omega_2(h)|}_{\text{оценим снизу } \omega_2} \geq$$

$$\geq \frac{\mu}{4} \int_a^b (h')^2 dt > 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b] : \ h \not\equiv 0, \ \|h\|_1 < \delta_1$$

А это и есть строгий loc. min.

ч.т.д.

Задачи

(17) $$J(x) := \int_0^1 x^2 \cdot (x')^2 dt \longrightarrow \inf$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \sqrt{2}, \quad x \in C^1[0,1]$$

(18) $J(x) := \int_0^1 t^{2/3}(x')^2\,dt \longrightarrow \inf$

$x(0)=0,\ x(1)=1$

Здесь реш-е не из $C^1[0,1]$

Доп. задание: описать класс ф-ций, в кот. решается задача.

(19) Решить $J(x) := \int_{-1}^{1} x^2(1-x')^2\,dt \longrightarrow \inf$

$x(-1)=0,\ x(1)=1$

реш-е тоже не из $C^1[-1,1]$

Важное замечание.

Если $F=F(x,x')$ (не зав. от t) порядок ур-ий Эйлера можно понизить

$0 = F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'} = F'_{x'} - F''_{xx'}x' - F''_{x'x'}x''$ (*)

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(F - x'F'_{x'}) = F'_x\cdot x' + \cancel{F'_{x'}x''} - \cancel{x''F'_{x'}} - x'(F''_{xx'}x' + F''_{x'x'}x'') = 0$ - почти (*)

$\Rightarrow$ ур-е $\frac{d}{dt}(F - x'F'_{x'}) = 0$

или $F - x'F'_{x'} = const$ (**) - ОПАСНОСТЬ

(**) - ур-е Эйлера пониж. порядка.

(*) $\Rightarrow$ (**), но не наоборот!

Может оказаться лишнее реш-е!

$x \equiv const$ (если $x'=0$)

Эквив. $\Longleftrightarrow$ x' обращ. в 0 не более, чем в конеч. числе точек.

§10. Параметрический метод решения ур-я Якоби.

$J(x) := \int_a^b F(t,x,x')\,dt \longrightarrow \inf$ (1)

$x(a)=A,\ x(b)=B,\ x\in C^1[a,b]$

$F\in C^3(U)$

$F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'} = 0$

$x(a)=A,\ x(b)=B$

$x_0(t)$ - стац. кривая - (.) ее min?

Обозн.: $\alpha_0 = x_0'(a)$ (x_0 - реш. з. Коши ур-е Эйлера + $x(a)=A$, $x'(a)=\alpha_0$)

Параметрич. з. Коши:

$F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'} = 0$

$x(a)=A,\ x'(a)=\alpha$, где α - param.

У такой з. всегда будет! реш-е; обозначим его $x(t,\alpha)$. (в частн.: $x(t,\alpha_0)=x_0(t)$)

(2) $F'_x(t,x(t,\alpha),x'_t(t,\alpha)) - \frac{d}{dt}F'_{x'}(t,x(t,\alpha),x'_t(t,\alpha)) = 0$

(3) $x(a,\alpha)=A,\ x'_t(a,\alpha)=\alpha$

$]\ x\in C^3([a,b]\times(\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0+\varepsilon))$

Продифф. (2) по α, подставим $\alpha=\alpha_0$:

$F''_{xx}\cdot x'_\alpha(t,\alpha_0) + F''_{xx'}\cdot x''_{t\alpha}(t,\alpha_0) - \frac{d}{dt}(F''_{xx'}\cdot x'_\alpha(t,\alpha_0) + F''_{x'x'}\cdot x''_{t\alpha}(t,\alpha_0)) = 0$

Арг. у $F''_{xx'}$; F''_{xx}; $F''_{x'x'}$: $(t, x_0(t), x_0'(t))$

т.о. $F''_{xx} = v$; $F''_{xx'} = u$; $F''_{x'x'} = p$

~~Пр~~ Перепишем:

$$v x'_\alpha + \cancel{u x''_{\alpha t}} - u' x'_\alpha - \cancel{u x''_{\alpha t}} - \frac{d}{dt}\left(p \dot{x}''_{\alpha t}\right) = 0$$

$$\underbrace{(v - u')}_{q} x'_\alpha - \frac{d}{dt}\left(p x''_{\alpha t}\right) = 0$$

Обозн.: $h_0(t) := x'_\alpha(t, \alpha_0)$

$h_0(t)$ - реш-е ур-я Якоби, т.к. $q h_0 = (p h_0)'$

$h_0(a) = x'_\alpha(a, \alpha)\big|_{\alpha=\alpha_0} \overset{(3)}{=} (A)'_\alpha = 0$

$h_0'(a) = x''_{\alpha t}(a, \alpha_0) = x''_{tt}(a, \alpha_0) \overset{(3)}{=} (\alpha^2)'_\alpha\big|_{\alpha=\alpha_0} = 1$

$\Rightarrow h_0$ - глав. реш-е ур-я Якоби

<u>Вывод</u>: Если вып-ся усил. усл-е Лежандра и $x'_\alpha(t, \alpha_0) > 0$ на $(a, b]$, то стац. кривая x_0 явл. (.) строгого loc min.

<u>Пример</u>. $J(x) := \int_0^1 \frac{x}{(x')^2} dt \longrightarrow \inf$

$x(0) = 1$, $x(1) = 4$, $x \in C^1[0,1]$

$U = \{(t, x, y) : y > 0\}$ ($y \neq 0$ нельзя, т.к. U должно быть связ., по кр. усл. $y > 0$).

Ур. Эйлера (понижен. порядка т.к. $F = F(x, x')$)

$$F - x' \cdot F'_{x'} = const$$

$$\frac{x}{(x')^2} + x' \cdot \frac{2x}{(x')^3} = const =: \frac{3}{4a^2}, \quad a > 0$$

$$4a^2 x = (x')^2$$

$x' = 2a\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = a\,dt \Rightarrow \sqrt{x} = at + b$

$x(t) = (at+b)^2$ - двупарам. сем-во экстремалей

x_0: $x(0) = 1$, $x(1) = 4$,

$\begin{cases} b^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ - образуют две стац. кривые

$x_0(t) = (t+1)^2$; $x_1(t) = (3t-1)^2$ - эти кривые

Но x_1 не подх., т.к. $x_1'(t)$ обращ. в 0 при $t = 1/3$. ($x_1 \notin \Omega^0$)

$\Rightarrow x_0$ - ! претендент.

Усил. усл-е Леж.: $F''_{x'x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(-\frac{2x}{(x')^3}\right) = \frac{6x}{(x')^4} > 0$ - ok

Ус. усл-е Якоби:

Использ. парам. метод, чтобы найти глав. реш. ур-я Якоби.

$(\alpha_0 := x_0'(0) = 2)$

Из двупарам. сем-ва экстремалей $x = (at+b)^2$ выделим однопар. сем-во $x(t, \alpha)$, удовл. условиям:

$x(0, \alpha) = 1$, $x'_t(0, \alpha) = \alpha$

$$\begin{cases} b^2 = 1 \\ 2ab = \alpha \end{cases} \Rightarrow x(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{2b}t + b\right)^2 \ominus$$

$$\ominus \left(\frac{\alpha}{2b} + b + b\cdot b\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}t + 1\right)^2$$

$$h_0(t) = x'_\alpha(t,\alpha_0) = 2\frac{t}{2}\left(\frac{\alpha}{2}t+1\right)\Big|_{\alpha=\alpha_0} = t(t+1)$$ – реш-е ур-я Якоби.

$t(t+1) > 0$ на $(0,1] \Rightarrow$

x_0 – (·), строг. lоc min.

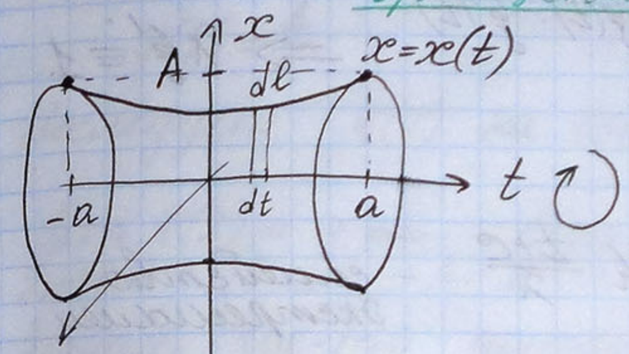
$$J(x_0) = \int_0^1 \frac{(t+1)^2}{(2(t+1))^2}\,dt = \frac{1}{4}$$

$$J(x_1) = \int_0^1 \frac{(3t-1)^2}{(6(3t-1))^2}\,dt = \frac{1}{36}$$

Но теория ничего не сказала про x_1.

§11. Минимальная поверхность вращения

13.12.2012



Вспомним ф-лу для площади пов-ти:

$2\pi x\,dl$ $\qquad (dl)^2 = (dx)^2 + (dt)^2 = \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 1\right)(dt)^2$

т.е. $dS = 2\pi x\sqrt{1+(x')^2}\,dt$

а потом интегрируем.

$$J(x) := 2\pi\int_{-a}^{a} x\sqrt{1+(x')^2}\,dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

$$x(-a) = x(a) = A, \quad x \in C^1[-a,a]$$

$F = F(x,x') \Rightarrow$ ур-е Эйл.: $F = x'\cdot F'_{x'} \equiv const$

$$x\sqrt{1+(x')^2} - x'\cdot\frac{x\cdot 2x'}{2\sqrt{1+(x')^2}} \equiv \lambda \quad \Big/ \cdot\sqrt{1+(x')^2}$$

$$x = \lambda\sqrt{1+(x')^2} \quad (2)$$

Параметризуем:

$x' = sh\,\xi \qquad \xi = \xi(t) \qquad 1 + sh^2\xi = ch^2\xi$

$\Rightarrow x = \lambda\, ch\xi$

$x'(t) = \lambda\, sh\xi(t) \cdot \xi'(t) \Rightarrow \lambda\xi' \equiv 1$

$\| \; sh\xi(t)$

$\Rightarrow \xi = \frac{t+c}{\lambda}$

$\Rightarrow x(t) = \lambda\, ch\frac{t+c}{\lambda}$ – семейство экстремалей

Стац. кривая?

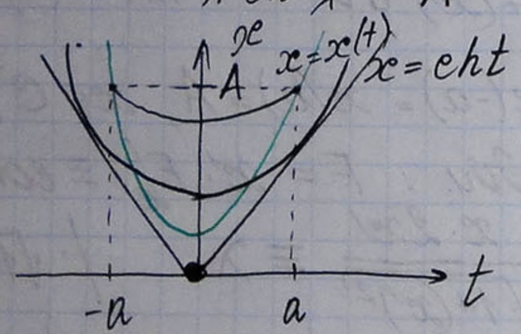
$x(-a) = x(a) = A$

симметр. $\Rightarrow c = 0 \Rightarrow x(t) = \lambda\, ch\frac{t}{\lambda}$

График $x(t)$ – гомотетия графика $ch t$ с коэф-том λ.

λ – ?

$\lambda\, ch\frac{a}{\lambda} = A$ (3)



Будем его растягивать, он будет подниматься и растягиваться и вскоре пройдет через эти две точки.

Как решать (3)?

Обозн. $\tau = \frac{a}{\lambda}$

(3): $ch\tau = \frac{A}{\lambda} = \frac{A}{a}\tau$

Обозн. $\varphi(\tau) = \frac{ch\tau}{\tau}$

(3): $\varphi(\tau) = \frac{A}{a}$ (4)

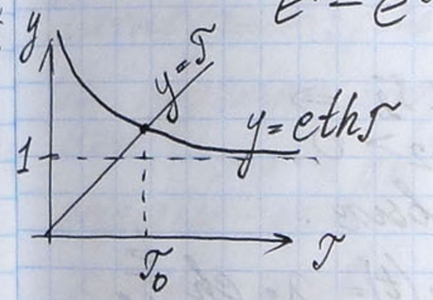
Исследуем $\varphi(\tau)$ на $(0; +\infty)$.

$\lim\limits_{\tau\to+0} \varphi(\tau) = +\infty$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} \varphi(\tau) = +\infty$

Значит, где-то должен быть минимум.

$\varphi'(\tau) = \frac{\tau\, sh\tau - ch\tau}{\tau^2} = \frac{sh\tau}{\tau^2}(\tau - cth\tau) = 0$

$cth\tau = \frac{e^{\tau} + e^{-\tau}}{e^{\tau} - e^{-\tau}} = \frac{e^{2\tau}+1}{e^{2\tau}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2\tau}-1}$



Очев., что $\exists!$ точка:

$\tau_0 = cth\tau_0$

$\tau_0 \approx 1{,}199678$

$\varphi'(\tau_0) = 0$

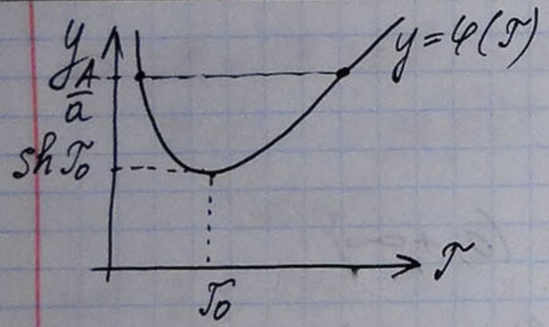
$\varphi'(\tau) < 0$ при $\tau \in (0, \tau_0)$

$\varphi'(\tau) > 0$ при $\tau \in (\tau_0, +\infty)$

$\Rightarrow \tau_0$ – единств. т. min $\varphi(\tau)$ на $(0, +\infty)$

$\varphi(\tau_0) = \frac{ch\tau_0}{\tau_0} = \frac{ch\tau_0}{cth\tau_0} = sh\tau_0 \approx 1{,}50888$

График $\varphi(\tau)$:



Решаем $\varphi(t)=\frac{A}{a}$.

при $\frac{A}{a} > sh\,\tau_0$ ур-е имеет 2 корня. (4)

при $\frac{A}{a} = sh\,\tau_0$ ур-е имеет 1 корень. (4)

при $\frac{A}{a} < sh\,\tau_0$ нет корней.

Почему так?
Нет корней — растянули очень сильно, пленка лопнула.
Один корень — понятно.
Но два корня?

∡ случай $\frac{A}{a} > sh\,\tau_0$

(4) имеет корни $0 < \tau_1 < \tau_2 \Rightarrow$
(3) имеет корни $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

$\Rightarrow$ две стационар. кривых:

$$x_1(t) = \lambda_1\, ch\frac{t}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad x_2(t) = \lambda_2\, ch\frac{t}{\lambda_2}$$

Понятно! Мы можем не растягивать, а сжимать. И получилось бы линия — на второй картинке.

Кто же из них точка loc min?

Усл-е Лежандра:

$$F''_{x'x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{x x'}{\sqrt{1+(x')^2}}\right) =$$

$$= x\cdot\frac{\sqrt{1+(x')^2} - \frac{(x')^2}{\sqrt{1+(x')^2}}}{1+(x')^2} = \frac{x}{(1+(x')^2)^{3/2}}$$

$F''_{x'x'} > 0$ на обеих стац. кривых.

Нужно найти т. реш. ур-я Якоби, т.е. нужно решить ур-е Якоби:
~~Но~~ Нужно записать ур-е Якоби.

Задачи.

(20) Записать ур-е Якоби для задачи о мин. пов-ти вращ-я.

А мы воспользуемся параметрич. методом реш-я ур-я Якоби.

Из двупараметрич. сем-ва экстремалей $x = \lambda\, ch\frac{t+c}{\lambda}$ выделим однопарам.-ное сем-во экстремалей $x(t,\alpha)$, удовл. условиям:

$$x(-a,\alpha) = A \qquad x'_t(-a,\alpha) = \alpha \qquad // \; x'_t = \ldots \; !$$

$$\lambda\cdot ch\frac{-a+c}{\lambda} = A, \qquad sh\frac{-a+c}{\lambda} = \alpha$$

это ур-я отн-но λ и c.

$$\Rightarrow (-a+c)A = arsh\,\alpha$$

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \qquad c = a + \lambda\cdot arsh\,\alpha$$

$$x(t,\alpha) = \lambda(\alpha)\, ch\, \frac{t + c(\alpha)}{\lambda(\alpha)} \qquad (5)$$

Стац. кривые $x_k(t)$ получ-ся из (5) при $\alpha = \alpha_k$:

$$\lambda(\alpha_k) = \lambda_k, \quad c(\alpha_k) = 0, \quad k = 1, 2.$$

$$\Rightarrow arsh\, \alpha_k = -\frac{x_c}{\lambda_k} = -\tau_k, \quad \alpha_k = -sh\, \tau_k$$

$k = 1, 2.$

В §10 было доказано, что

$$h_0^{(k)}(t) = x'_\alpha(t, \alpha_k)$$

Сначала: $\lambda'(\alpha_k) = -\frac{A}{2} \frac{2\alpha_k}{(1+\alpha_k^2)^{3/2}} =$

$$= \frac{A\, sh\, \tau_k}{ch^3 \tau_k} = \frac{a}{\tau_k} \cdot \frac{sh\, \tau_k}{ch^2 \tau_k} = \lambda_k \frac{sh\, \tau_k}{ch^2 \tau_k}$$

(т.к. $\frac{ch\, \tau_k}{\tau_k} = \frac{A}{a}$, т.е. $ch\, \tau_k = \frac{A}{a} \tau_k$)

$$c'(\alpha_k) = \lambda'(\alpha_k)\, arch\, \alpha_k + \lambda_k \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_k^2}} =$$

$$= -\lambda_k \frac{sh\, \tau_k}{ch^2 \tau_k} \cdot \tau_k + \lambda_k \cdot \frac{1}{ch\, \tau_k} =$$

(т.к. $\tau_k = \frac{a}{\lambda_k}$ ...) $\quad \lambda_k \cdot ch\, \tau_k = \frac{a \cdot ch}{\tau} = A$

$$= \frac{A\, \cancel{ch\, \tau_k} - a\, sh\, \tau_k}{ch^2 \tau_k}$$

Это нужно проверить! Возможны ошибки! Точно есть ошибка!

дифф. (5) и подставл. $\alpha = \alpha_k$:

$$x'_\alpha(t, \alpha_k) = \lambda'(\alpha_k) \cdot ch\, \frac{t}{\lambda_k} + \lambda_k \cdot sh\, \frac{t}{\lambda_k} \cdot \frac{c'(\alpha_k)\lambda_k - t\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k^2} =$$

$$= c'(\alpha_k)\, sh\, \frac{t}{\lambda_k} - \frac{\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k}\left(t\, sh\, \frac{t}{\lambda_k} - \lambda_k\, ch\, \frac{t}{\lambda_k}\right) =$$

(подставим $c'(\alpha_k)$ и $\lambda'(\alpha_k)$).

$$= \ldots$$

/* см. статью на сайте */

Можно показать:

$h_0^{(1)}(t) > 0$ на $(-a, a] \Rightarrow x_1(t)$ – точка строгого loc min.

$h_0^{(2)}(a) < 0$ ~~но~~ $\Rightarrow x_2(t)$ – не точка loc min.

Значит, нам подходит первая кривая.

Но можно было сделать гораздо проще:

(T) Верно нер-во:

$$J(x_1) < J(x_2)$$

Док-во.

$$J(x_1) = 2\pi \int_{-a}^{a} x \sqrt{1 + (x')^2}\, dt = 2\pi \int_{-a}^{a} \lambda_k\, ch^2 \frac{t}{\lambda_k}\, dt =$$

$$= 2\pi\lambda_k \int_0^a 2\,ch^2\frac{t}{\lambda_k}\,dt =$$

/* $ch\,2z = 2ch^2 z - 1$, $sh\,2z = 2ch\cdot sh\,z$ */

$$= 2\pi\lambda_k \int_0^a \left(ch\frac{2t}{\lambda_k}+1\right)dt = 2\pi\lambda_k\left(\frac{\lambda_k}{2}\,sh\frac{2a}{\lambda_k}+a\right) =$$

$$= 2\pi\lambda_k\left(\lambda_k\, sh\,\tau_k\, ch\,\tau_k + a\right)$$

$$\Rightarrow \frac{J(x_k)}{2\pi a^2} = \frac{sh\,\tau_k\cdot ch\,\tau_k}{\tau_k^2} + \frac{1}{\tau_k} \overset{// \frac{a}{\lambda_k}=\tau_k}{\underset{(4)}{=}}$$

$$= \left(\frac{A}{a}\right)^2 th\,\tau_k + \frac{1}{\tau_k}$$

Обозн. $\varphi(\tau) = \left(\frac{A}{a}\right)^2 th\,\tau + \frac{1}{\tau}$

$$\varphi'(\tau) = \left(\frac{A}{a}\right)^2\frac{1}{ch^2\tau} - \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{ch^2\tau}\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - \varphi^2(\tau)\right)$$

$\varphi'(\tau_1) = \varphi'(\tau_2) = 0$ (см. график $\varphi(\tau)$).

$\varphi'(\tau) \geq 0$ на (τ_1, τ_2)

$\Rightarrow \varphi(\tau_1) < \varphi(\tau_2)$

т.к. $J(x_k) = 2\pi a^2\varphi(x_k) \Rightarrow$

$J(x_1) < J(x_2)$ ч.т.д.

§ 12. Изопериметрическая задача.

17.12.2012.

$$J(x) := \int_a^b F(t,x,x')\,dt \longrightarrow \inf \quad (1)$$

огр-я $\begin{cases} \int_a^b G(t,x,x')\,dt = \ell \\ x(a)=A \quad x(b)=B \quad x\in C^1[a,b] \end{cases}$

$F, G \in C^2(U)$

$\exists\, x_0$ - реш-е з. (1) (точка loc min)

fix $h_1, h_2 \in C_0^1[a,b]$

$\measuredangle\ x(t,\xi) = x_0(t) + \xi_1 h_1(t) + \xi_2 h_2(t) \quad (\xi\in\mathbb{R}^2)$

$$f(\xi) := \int_a^b F(t, x(t,\xi), x'(t,\xi))\,dt$$

$$g(\xi) = \int_a^b G(t, x(t,\xi), x'(t,\xi))\,dt - \ell$$

Очевид., что $\xi = \mathbb{0}$ - реш-е задачи:

$$\begin{cases} f(\xi) \longrightarrow \inf \\ g(\xi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

З. (2) — задача гладкого нелин. программир. (т.к. f, g — непр. дифф. в окр-ти точки $\xi = \mathbb{0}$).

Хотим воспр. т. Куна-Таккера по кушна реглм. огр-ний, т.е.:

Рег-ть: $g(\mathbb{0}) \neq \mathbb{0}$

$\neq \frac{\partial g}{\partial \xi_2}(\mathbb{0})$ (для определенности — вторая компонента).

$$\int_a^b \left(G'_x \cdot h_2 + G'_{x'} \cdot h_2'\right) dt$$

Аргумент у G'_x, $G'_{x'}$: $(t, x_0(t), x_0'(t))$

Предположим, что

$$G'_x - \frac{d}{dt} G'_{x'} \not\equiv 0 \text{ на } [a,b]$$

$\Rightarrow$ по ОЛВЛ $\exists\, \tilde{h}_2 \in C_0^1[a,b]$:

$$\int_a^b \left(G'_x \tilde{h}_2 + G'_{x'} \cdot \tilde{h}_2'\right) \neq 0$$

Положим $h_2 := \tilde{h}_2$ — фиксируем её окончательно.

$$\Rightarrow \frac{\partial g(\mathbb{0})}{\partial \xi_2} \neq 0.$$

Имеем: точка $\xi = \mathbb{0}$ — точка loc min в гладкой задаче нелин. прогр. (2) и огранич-я в ней регулярны.

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа (т. К.-Т.)

$\exists\, u_* \in \mathbb{R}$: $f'(\mathbb{0}) = u_* g'(\mathbb{0})$

Подробно:

$$\frac{\partial f(\mathbb{0})}{\partial \xi_1} = u_* \frac{\partial g(\mathbb{0})}{\partial \xi_1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial f(\mathbb{0})}{\partial \xi_2} = u_* \frac{\partial g(\mathbb{0})}{\partial \xi_2} \quad (4)$$

(4) $\Rightarrow u_* = \frac{\partial f(\mathbb{0})}{\partial \xi_2} \Big/ \frac{\partial g(\mathbb{0})}{\partial \xi_2}$ — не зав. от h_1!

Введем $L := F - u_* G$ — ф-я Лагранжа

(3): $\int_a^b \left(L'_x \cdot h_1 + L'_{x'} \cdot h_1'\right) dt = 0$ при $u = u_*$ — верно для $\forall\, h_1 \in C_0^1[a,b]$

$\overset{\text{ОЛВИ}}{\Longrightarrow}$ x_0 удовл. условиям

$$\left.\begin{aligned} &L'_x - \frac{d}{dt} L'_{x'} = 0 \text{ на } [a,b] \\ &\int_a^b G(t, x_0(t), x_0'(t))\, dt = l \\ &x_0(a) = A, \quad x_0(b) = B \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(Т) (необх. усл-я оптимальности)

Пусть x_0 — точка loc min в зад. (1) и

(огр-я регулярны)

$$G'_x(t, x_0(t), x_0'(t)) - \frac{d}{dt} G'_{x'}(t, x_0(t), x_0'(t)) \not\equiv 0$$

на $[a,b]$

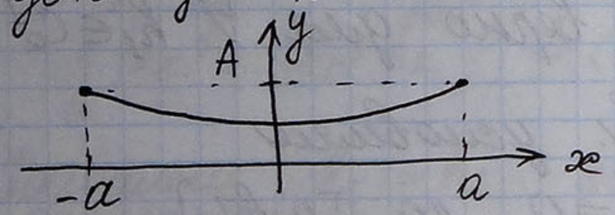
Тогда $\exists\ u_* \in \mathbb{R}$: выпол-ся усл-я (5).

<u>Док-во</u>

А мы уже.

<u>Пример</u>: (цепная линия)

<u>Задача</u>. Определить положение бесконечной нити длины $l > 2a$, подвешенной за концы в точках $(-a, A)$; (a, A), на которую действует только сила тяжести.



Пот. энергия стремится уменьшится, т.е. стремится уменьшится ордината центра тяжести.

Считаем вес нити $= 1$.

Вес эл-та $= \frac{1}{l} ds$.

$$y_{\text{центр. тяж.}} = \int_0^l y \frac{1}{l} ds \Big/ \underbrace{\int_0^l \frac{1}{l} ds}_{=1} =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l y\, ds = \frac{1}{l} \int_{-a}^{a} y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

Задача: $J(y) := \int_{-a}^{a} y \sqrt{1+(y')^2}\, dx \to \inf$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = l > 2a$$

$$y(-a) = A,\ y(a) = A,\ y \in C^1[-a,a]$$

Ф-я Лагранжа:

$$L = y\sqrt{1+(y')^2} - u\sqrt{1+(y')^2}$$

$L = L(y, y') \Rightarrow$ ур-е Эйлера:

$$L - y' L'_{y'} \equiv const$$

$$(y-u)\sqrt{1+(y')^2} - y'(y-u)\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \lambda\ (const) \quad \Big/ \cdot \sqrt{1+(y')^2}$$

$$y - u = \lambda \sqrt{1+(y')^2}$$

Замена: $y' = sh\, z$

$$\Rightarrow y = u + \lambda\, ch\, z$$

$$\underset{sh\, z}{\underset{\parallel}{y'(x)}} = \lambda z'(x)\, sh\, z(x) \Rightarrow \lambda z' = 1$$

$$z = \frac{x+c}{\lambda}$$

$$y = u + \lambda \operatorname{ch} \frac{x+c}{\lambda}$$

симм. $\Rightarrow$ $c=0$

длина: $l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{x}{\lambda}}\, dx = \int_{-a}^{a} \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda} dx =$

$= 2\lambda \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda}$

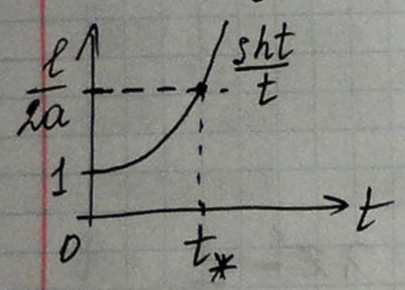
Обозн. $t = \frac{a}{\lambda} \Rightarrow l = 2 \frac{a}{t} \operatorname{sh} t$

$$\frac{\operatorname{sh} t}{t} = \frac{l}{2a}$$

$$\frac{\operatorname{sh} t}{t} = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} = 1 + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + \dots$$

Очевид., что $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$ строго возрастает на $(0, +\infty)$

$$\left.\frac{\operatorname{sh} t}{t}\right|_{t=0} = 1$$



$\Rightarrow \exists!\ t_* \in (0, +\infty)$:

$$\frac{\operatorname{sh} t_*}{t_*} = \frac{l}{2a}$$

$$\Rightarrow \lambda_* = \frac{a}{t_*}$$

$$y = u + \lambda_* \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_*}$$

u – ?

$y(a) = A$: $\quad u + \lambda_* \operatorname{ch} t_* = A \Rightarrow$

$$u_* = A - \lambda_* \operatorname{ch} t_*$$

$\Rightarrow y_*(x) = u_* + \lambda_* \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_*}$ – единств. стац. кривая.

Регулярность ???

$$G'_y - \frac{d}{dt} G'_{y'} \neq 0 \ ?$$

$G'_y = 0$; $G'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$

Пусть плохо:

$$G'_y - \frac{d}{dt} G'_{y'} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0$$

$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \equiv const$ – не может быть ни на каком плане

(если >0 – возр. ?! (т.к. $y'>0$)

<0 – убыв. ?! (т.к. $y'<0$)

$=0$ (т.к. $y'=0$))

Зам-е.

Реш-ем задачи о цеп. линии явл-ся (с точн. до $\parallel$ переноса) та же ф-я, что и в з. о мин. пов-ти вращ-ия.

Вопросы к экзамену:

http://www.math.spbu.ru/kio/

„Лекц. курсы"

↳ Экстр. задачи