Лекция от 30 марта

$-\Delta u = f$ – уравнение Пуассона

$u = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|x|}$, $|x|$ – расстояние до заряда (Это кулоновский потенциал первичного заряда, сосред. в начала координат)

Должно быть: $\Delta u = \begin{cases} 0 & \text{, если } x \neq 0 \\ +\infty & \text{, если } x = 0 \end{cases}$

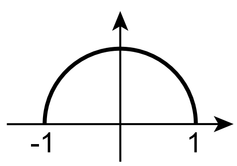
1. Основные функции ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$)

   $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ и имеющие компактный носитель в Ω

   $u: \ \Omega \to \mathbb{R} \quad \operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : \ u(x) \neq 0\}}$

   $\operatorname{supp} u \Subset \Omega$

   Пример: $1 - x^2$ на $[-1; 1]$. У неё не компактный носитель.

   $u_k \in D(\Omega)$

   $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u \in D(\Omega)$, если:

   (a) $\operatorname{supp} u_k \subset K \Subset \Omega$

   (b) $u_k \rightrightarrows u$

   Мультииндекс $(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \alpha$ ($\mathbb{N}$ и 0)

   $|\alpha| = \sum \alpha_i$

   $\mathrm{D}^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$

   Пример. $\mathrm{D}^{(1,0,1)} u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

$D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$

2. Обобщённые функции

   $v \in D'(\Omega)$ – линейные и непрерывные функционалы на пространстве функций.

   Обозначим $v(u)$:

   (a) $v(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 v(u_1) + \lambda_2 v(u_2)$

   (b) если $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u$, то $v(u_k) \to v(u)$

   Примеры.

   (a) $v \in L^1_{loc}(\Omega) \rightsquigarrow \varphi_v(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx$

   $v(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)\,dx$

   (b) $\varphi_\mu(v) = \int\limits_\Omega v(x)\,d\mu(x)$

   Линейность: очевидна.

   Непрерывность:

   $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u$

   $\varphi_\mu(u_k) = \int\limits_\Omega \underset{\rightrightarrows u(x)}{u_k(x)}\,d\mu(x) = \int\limits_\Omega u(x)\,d\mu(x)$

   (c) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (\Omega = \mathbb{R}^n)$

   $\delta(u) = u(0)$

   (d) $\delta'(0) = -u'(0) \quad \Omega = \mathbb{R}$

   Упр. Доказать, что это линейный непрерывный функционал.

   Упр. Доказать, что он не порождается никакой линейной интегр. функцией. (доказательство как для δ-функции с использованием основной леммы вариационного исчисления)

3. $D'(\Omega)$ (линейное пространство), $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое

Def: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \quad V \in D'(\Omega)$

$(\mathrm{D}^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|} v(\mathrm{D}^\alpha u) \quad \forall u \in D(\Omega)$

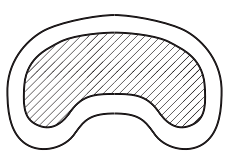
Назовём это производной обобщённой. (это функционал, то есть обощенная функция)

Пример.

Пусть $V \in C^\infty(\Omega)$ (в частности, это значит, что $V \in L^1_{loc}(\Omega)$). Тогда, $D^\alpha V$ в классическом смысле является и обобщенной производной.

Далее не будем писать $\varphi_v(u)$, а сразу $v(u)$. Формально это неверно, но так все пишут.

$(\mathrm{D}^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|} v(\mathrm{D}^\alpha u) = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (\mathrm{D}^\alpha u)(x) v(x)\, dx =$


она = 0 в окрестности границы

$= (-1)^{2|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)(\mathrm{D}^\alpha v)(x)\, dx$. $(\mathrm{D}^\alpha v)(x)$ – это уже настоящая производная.

Отличия: $(\mathrm{D}^\alpha v)(x)$ – производная в каждой точке.

$(\mathrm{D}^\alpha v)(u)$ – линейный оператор на пространстве обобщённых функций. Его действие на дифференциируемых функциях сводится к обычному диффиренциированию.

Утв. Обобщённая производная дифф. функции есть классическая производная.

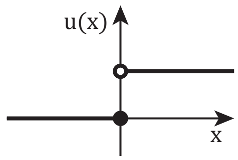
1. $u(x) = 1 + x^2$

   $u'(x) = 2x$

2. А если функция не дифференциируема?

   $\Omega = \mathbb{R}$

   $$u(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

   Найдём по определению $V \in D(\mathbb{R})$

   $$u'(v) = -u(v') = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} v'(x)\,dx = -v(x)\Big|_0^{+\infty} =$$

   $$= \underset{\text{(т.к. осн. ф-я и комп. носит.)}}{0 + v(0)} = \delta(v)$$

   $\boxed{u' = \delta}$

3. $\Omega = \mathbb{R}$

   $\delta'(u) = -\delta(u') = -u'(0) \quad \forall u \in D(\mathbb{R})$

   $\forall$ обобщённую функцию можно обобщённо дифференцировать бесконечное число раз.

$\sphericalangle \Delta u = f$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – откр.

Дано: $f \in D(\Omega)$

Найти: $u \in D'(\Omega)$: $\Delta u = f$, но теперь Δ – это не обычные производные, а обобщённые производные.

Иначе говоря: $\forall v \in D(\Omega) \Delta u(v) = f(v)$

$$\Delta u(v) = u_{x_1x_1}(V) + \cdots + u_{x_nx_n}(v) = u(v_{x_1x_1}) \cdot (-1)^2 + \ldots u(v_{x_nx_n}) \cdot (-1)^2 \underset{u\text{ – лин.}}{=}$$

$= u(v_{x_1x_1} + \cdots + v_{x_nx_n}) = u(\Delta v)$

Т.е. $u(\Delta v) = f(v)$

Упр. u – классическое решение уравнения Пуассона $\Rightarrow u$ – обобщённое решение тоже.

Док-во. Нужно д-ть: $\forall v \in D(\Omega) u(\Delta v) = f(v)$

$$u(\Delta v) = \int\limits_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx \overset{?}{=} \int\limits_\Omega f(x)v(x)\,dx$$

(по частям) $\displaystyle\int\limits_\Omega \Delta u(x)v(x)\,dx$

$\Delta u(x) = f(x) \Rightarrow u$ – обобщ. решение, чтд

Обратное неверно.

Пример. $\Omega = \mathbb{R}^n, n > 2$

$-\Delta u = \delta$ – хотим решить.

Нужно: $u(\Delta v) = \delta(v) = v(0)$

Физика ($n = 3$). $\delta(e) = \begin{cases} 0 & , e \not\ni 0 \\ 1 & , e \ni 0 \end{cases}$

$\delta(e)$ - вероятн. мера, сосредоточенная в 0

$e \in R^n$ (борелевская).

Т.е. при $n = 3$ мы ищем формулу потенциала единичного заряда.

Должно быть: $u(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$

в $\mathbb{R}^n$: $u(x) = \dfrac{C}{|x|^{n-2}}$ – захотелось нам так.

Напоминание:

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\int\limits_\Omega v\Delta u\,dx = -\int\limits_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma \text{ (1я формула Грина)}$$

$$\ominus \int\limits_{\Omega} u\Delta v\,dx = -\int\limits_{\Omega} \nabla v\cdot\nabla u\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma \text{ (2я формула Грина)}$$

$$u(x) = \frac{C}{|x|^{n-2}}$$

$$\begin{array}{ccc} -(\Delta u)(v) & = & \delta(v) = v(0) \\ \parallel & & \\ -u(\Delta v) & = & \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\,dx \end{array}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{B_\varepsilon^c(0)} u(x)\Delta v(x)\,dx \overset{\text{(2я ф-ла Грина)}}{\underset{(c-\text{ внешность})}{=}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{B_\varepsilon^c(0)} v(x)\Delta u(x)\,dx + \int\limits_{B_\varepsilon^c(0)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dx \ominus$$

Нужно честно посчитать Δu и увидеть, что $\Delta u = 0$.

$$\left|\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\frac{\partial v}{\partial r}\right| \underset{u=\frac{C}{|x|^{n-2}}}{=} \left|\frac{C}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{\partial v}{\partial r}\right| \le \frac{C}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{\partial B_\varepsilon}\left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|d\sigma \le$$

(замена ∂n на ∂r, т.к. нормаль совпадает с радиус-вектором)

$$\le \frac{C}{\varepsilon^{n-2}}\cdot\|\nabla v\|_\infty\cdot \underbrace{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}_{S\text{ пов-ти шара рад. }\varepsilon} = C(n,v)\cdot\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

Т.е. первое слагаемое исчезло.

$$u = \frac{C}{r^{n-2}}$$

$$u'_r = -\frac{C}{r^{n-1}}(n-2)$$

$$\ominus \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C(n-2)}{|\varepsilon|^{n-1}}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} v\,d\delta = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{C(n-2)}{|\varepsilon|^{n-1}}\int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} v\,d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{n\omega_n C(n-2)\cancel{\varepsilon^{n-1}}}{\cancel{|\varepsilon|^{n-1}}}\fint\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} v\,d\sigma =$$

$$= n\omega_n C(n-2)\lim_{\varepsilon\to 0+}\fint\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} v\,d\sigma = n\omega_n C(n-2)\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0+}\fint\limits_{\partial B_\varepsilon} v\,d\sigma}_{\to v(0)}$$

Итого: $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\,dx = n\omega_n(n-2)Cv(0)$

$(n-2)\omega_n C = 1 \Rightarrow C = \dfrac{1}{n\omega_n(n-2)}$

Утв.$n > 2$,

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

Тогда $-\Delta u = \delta$ (обобщ. смысл)

Док-во. Только что.

В частности, если $n = 3$, то $u(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$ – кулоновский потенциал единичного заряда.

$$-\Delta u = \delta \text{ означает: } \int\limits_{\mathbb{R}^n} u\Delta v = v(0) \quad \forall v \in D(\mathbb{R}^n)$$

Замечание. На самом деле, мы доказали правое утверждение, оно сильнее.

$(v \in C_0^2(\mathbb{R}))$

Упр. $n = 2 \qquad u(x) = -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x|$

Проделать то же самое, но с этой функцией.

$\Delta u = f(x)$

$\sphericalangle \Delta u = \delta(x - x_0)$ – обозн. δ в $(\cdot)$ x_0.

$u(x) = \dfrac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{1}{|x-x_0|^{n-2}} \qquad (n > 2)$

$\Delta u = f \Rightarrow u = \dfrac{1}{n(n-2)\omega_n} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^n} f(y)\,dy \ominus$

$\Phi(x) := \dfrac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \dfrac{1}{|x|^{n-2}}$ – фунд. решение ур-я Лапласа $(n > 2)$

$\ominus \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(x)\,dy$

Утв. $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,dy \Rightarrow$$ решение ур-я $\underline{\Delta u = f}$ (и в обобщ., и в классич. смысле), $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Док-во. $$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\,dy$$

$$D^\alpha u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)(D^\alpha f)(x-y)\,dy \qquad |\alpha| \le 2$$

$$\Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta u(v) = \int f v$$

$$u(\Delta v) = \int f v$$

$$u(\Delta v) = \int u \Delta v$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta v(x)\,dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\,dy = \int dy \int \Phi(y) \Delta v(x) f(x-y)\,dx$$

Для дальнейших вычислений смотрите лекцию от 6 апреля (7 суббота) до первого определения.

$\sigma = \Phi(x - x_0), x_0 \in \Omega$

Подст. во 2 ф-лу Грина

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon(x_0)} (u \underbrace{\cancel{\Delta\Phi(x-x_0)}}_{=0} - \Phi(x-x_0)\Delta u)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \cdot \frac{\partial \Phi(x-x_0)}{\partial u} - \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \text{——"——}\, d\sigma \ominus$$

Такие странные мн-ва (???), потому что Φ в $(\cdot)$ x_0 не опред. $\Delta\Phi = 0$ в остальных.

$$\ominus\, u(x_0) + 0 = u(x_0) - \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega \setminus \bar{B}_\varepsilon(x_0)} \Phi(x-x_0)\Delta u(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Phi(x-x_0)}{\partial n} - \phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + u(x_0)$$

Последнее слагаемое получилось из:

- $\Delta\Phi(x-x_0) \;=\; \delta_{x_0}$, где $\delta_{x_0}(\phi) := \phi(x_0)$

$$u(x_0) = -\int\limits_{\Omega} \Phi(x - x_0)\Delta u(x)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Phi(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x - x_0)\right) d\sigma$$

Почему $\Delta\Phi(x - x_0) = 0\ \forall x \neq x_0$? Просто вычислить $\Phi_{x_i x_i}$, просуммировать и проверить

$$u(x) = -\int\limits_{\Omega} \Phi(x-y)\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Phi(x - y)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x - y)\right) d\sigma$$ – 3я формула Грина.

Свойства гармонических функций

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω – откр., $\Delta u = 0$

Если не говорится отдельно, имеется ввиду классический смысл.

в $\mathbb{R}$: $u'' = 0$, т.е. u – лин. ф-я.

в $\mathbb{R}^2$: лин. функции

$x^2 - y^2$

xy, итд

в $\mathbb{R}^3$: $\dfrac{1}{|x|}$ – не гармоническая в $\mathbb{R}^3$

$u(x) = \dfrac{1}{4\pi|x|}$ – он гарм. в $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$

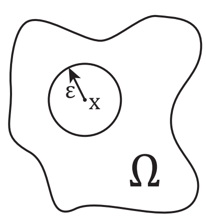
Утв. 1 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Выбирается Ω, такая, что формулы Грина выполняются.

$$\Delta u = 0 \Rightarrow 0 = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma \text{ (1я формула Грина)}$$

Утв. 2 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\Delta u = f \Rightarrow \int\limits_{\Omega} f\, dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma \text{ (1 ф-ла Грина)}$$

Утв. 3 $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω



$x \in \Omega$

$\varepsilon : \bar{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$

Тогда $u(x) = \displaystyle\fint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi) \quad \forall n \geq 1$

Док-во. $n > 2$:

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\frac{1}{|z-x|^{n-z}} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|z-x|^{n-z}} \right) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(z)}_{\leq C, \text{ т.к. } u \in C^2} \; d\sigma(z) - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{-(n-2)}{|z-x|^{n-1}} u(z) \right) d\sigma(z) =$$

$$= I_1 + \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-2}} u(z)\, d\sigma(z) = I_1 + I_2$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial b_\varepsilon(x)} \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|}_{\leq C} (z)\, d\sigma(z) \leq \frac{C}{\varepsilon^{n-2}} \cdot n\omega_n \varepsilon^{n-1} = C_1 \cdot \varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$$

$$I_2 = \frac{(n-2)\cancel{\varepsilon^{n-1}} n\omega_n}{\cancel{\varepsilon^{n-1}}} \fint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z) \underset{\varepsilon \to 0}{to} u(x)$$

$$I_1 = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(z)\, d\sigma(z) = 0 \text{ (т.к. гармон. ф-я)}$$

$$u(x) = \frac{1}{\cancel{n(n-2)\omega_n}} \cdot \cancel{n(n-2)\omega_n} \fint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z)$$

Итого: $u(x) = \fint\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z)$

ч. т. д.