Шашковой Елизаветы, 344

Невзоров Валерий Борисович

4515, 4512 04.09.2012.

# Глава I. Основные понятия теории вероятности.

11.09.2012

## §1. Вероятностное пространство.

Рассм. мн-во $\{\omega_1, \omega_2, .. \omega_n\}$ – мн-во элемент. событий

Примеры:

1) Игр. кость бросают $n$ раз. Эл. событие – цепочка из $n$ чисел. Всего их $6^n$.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$A = \{\omega_{i_1}, .. \omega_{i_m}\}$ – событие

Сколько всего событий?

$$\underset{\text{1 исход.}}{n} + \underset{\text{2 исх.}}{C_n^2} + \ldots + C_n^n + \underset{\text{0 исх.}}{1} = 2^n$$

Пример.

1) $\omega_1 = \{г\}, \ldots \qquad \omega_n = \{\underbrace{p, p, .. p}_{n-1}, г\} \ldots$

$\exists$ Исходов уже беск. много, но счетное число.

2) Бросаем точку на $[0, 1]$. Континуум эл. событий.

$\Omega = \{\omega\}$ - набор элемент. исходов = прост-во эл. событий.

$\mathcal{F}$ - мно-во событий ($\sigma$-алг. событий)

$\mathcal{F} = \{A, B, C, \ldots\}$

Он явл-ся $\sigma$-алгеброй, если:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$ (когда рассм. $\Omega$ как событие, назыв. его достоверным событием);

2) $A_1, A_2, \ldots \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ или $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$

3) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

След-но:

1) $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$ ($\varnothing$ - невозможное соб.)

2) $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k A_k$

3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

P - вероятностная мера.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Пример

$\Omega = \{1, 2, \ldots 6\}$

$\mathcal{F} = 2^6$

$A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k\} \longrightarrow P(A) = \frac{k}{n}$

Берем $A \in \mathcal{F}$ и сопоставляем ему $P(A)$.

Аксиомы для P:

1) $P(\Omega) = 1$;

2) $P(A) \geq 0$;

3) $P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k)$, где $A_k$ - несовместные (т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$)

Пример

$\Omega = \{г, р\}$

$\mathcal{F} = \{\varnothing, г, р, \Omega\}$

$P: \quad 0 \quad p \quad 1-p \quad 1$

## §2. Свойства вероятности

① $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

② $\varnothing = \overline{\Omega}$

$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$

③ $A \subset B \quad P(A) \leq P(B)$

$B = A \cup \overline{A}B \quad P(B) = P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A)$

$A \cup (B \setminus A)$ $\quad P(\overline{A}B) \geqslant 0$

4. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$A = A\cap B \cup A\cap \bar{B}$ $\qquad$ $AB = A\cap B$!

$B = AB \cup \bar{A}B$

$A\cup B = AB \cup A\bar{B} \cup \bar{A}B$

$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$

$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B)$

$P(A\cup B) = P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B})$

5. $P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)$

$P(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k P(A_k)$

6. $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}_{\Sigma_1} - \underbrace{\sum_{1\leq i\leq j\leq n} P(A_iA_j)}_{\Sigma_2} + \underbrace{\sum_{1\leq i\leq j\leq l\leq n} P(A_iA_jA_l)}_{\Sigma_3} -$

$-\sum + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \ldots A_n)$

7. $\Sigma_1 - \Sigma_2 \leq \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 - \Sigma_4 \leq \Sigma_1 \ldots - \Sigma_6 \leq$

$\leq \ldots \leq P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \Sigma_1 - \Sigma_2 + \ldots + (-1)^{22} \Sigma_{22-1} \leq$

$\leq \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 \leq \Sigma_1$

18.09.2012

8. $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$

Монот., огр $\Rightarrow \exists$ предел.

$A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \ldots$

$P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1})$

$P(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1})$

8'. $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$

## §3. Условные вероятности

Def:

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$ — услов. вер-ть события A при усл-ии B.

Проверим аксиомы для P:

1) $P(\Omega|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

2) $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k|B) = \frac{P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_kB)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_kB)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|B)$

3) $P(A|B) \geq 0$ — очевид.

## §4. Независимые события

A, B — события

$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) \end{cases}$

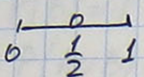
$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

Def: $A, B$ – независимые, если $P(AB) = P(A)P(B)$

События $\emptyset$ и $\Omega$, ~~то~~ ~~он~~ независимы с $\forall$ событием $B$.

(! вер-ть $= 1 \Leftrightarrow$ событие достоверное и
вер-ть $= 0 \Leftrightarrow$ соб. невозможное

:-)




$A$ и $B$ – нез. $\Rightarrow$ $\bar{A}, B$ – тоже независ.
$A, \bar{B}$
$\bar{A}, \bar{B}$

$(A, \bar{A}, \emptyset, \Omega)$ – σ-алг, порожд. соб. $A$
$(B, \bar{B}, \emptyset, \Omega)$ – — и — соб. $B$.

Если $A$ и $B$ – нез, то σ-алгебры тоже незав-вис.

Def: Соб. $A_1, \dots A_n$ – независимы попарно, если:

$$P(A_iA_j) = P(A_i)\cdot P(A_j) \qquad 1 \le i \ne j \le n$$

Прим

$A, B, C$ – поп. нез. $\Rightarrow$

$$P(A|BC) = \frac{P(ABC)}{P(BC)} \not= P(A) ?$$

это не так!

Пример: тетраэдр Бернштейна

1) красный
2) синий
3) белый
4) красный + синий + белый

λ

угадайте, кто сидел рядом со мной :)

конечно, Саша

Соб. $A = \{$на основании есть кр. цвет$\}$
$B = \{$ — и — син.$\}$
$C = \{$ — и — бел.$\}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ $A, B, C$ – независ. попарно.

Но! $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

Пример: $A = \emptyset$, $B = C$

$$P(ABC) = 0 = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Def: $A_1 \dots A_n$ – независ. в совокупности, если:

$$P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Сколько соотношений получится?

$$C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - n - 1$$

для пар, для троек

Пример: 1) $A, \bar{A}$

$P(A\bar{A}) = P(A)P(\bar{A})$

$\overset{\|}{0}$

т.е. $A$ и $\bar{A}$ – независ., только если $P(A)=0$ или $P(A)=1$.

2) $A \subset B$

$P(AB) = P(A) = P(A)P(B) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P(A)=0 \\ P(B)=1 \end{array}\right.$

Def: $A_1, A_2 \ldots$ – бесконеч.! наз-ся независ., если $\forall n \ \forall i_1, \ldots i_n$ события $A_{i_1}, \ldots A_{i_n}$ – независимы.

## §5. Схема независимых испытаний Бернулли.

1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ Бросаем монеты

$\mathcal{F}: \{\emptyset, \omega_1, \omega_2, \Omega\}$

$P: \{0, p, q, 1\}$, где $q = 1-p$

2) $P$. $\Omega = \{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}$

$\mathcal{F}: 2^4$

$P: \{ p^2, pq, pq, q^2 \}$

Соб. $A = \{\omega_1$ на I месте$\}$

$P(A) = p^2 + pq = p$

3) $\Omega = \{(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})\}$

$\mathcal{F}: 2^{2^n}$ эл-ов в σ-алгебре

$P\{(\omega_{i_1} \ldots \omega_{i_n})\} = p^m (1-p)^{n-m}$

где $m$ – число $\omega_1$ в нашем наборе.

$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$.

$P\{$на $k$ом месте стоит $\omega_1\} = p$

$P\{\omega_1$ – на $k$-ом, $\omega_2$ – на $l$-ом$\} = pq$

Пусть $\mu_n$ – число $\omega_1$.

$\mu_n = 0, \ldots n$

$P\{\mu_n = m\} = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}$

$P_n(0) = q^n$

$P_n(n) = p^n$

$P_n(\geq 1) = 1 - q^n$

$P_n(\leq n-1) = 1 - p^n$

25.09.2012.

## §6. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа.

$$\frac{\sqrt{npq}\,P_n(m)}{\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad (1)$$

т.е. $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$

при этом $-\infty < \alpha \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \beta < \infty$,

где $\alpha, \beta$ – произвольн. числа. (усл-е $\Leftrightarrow$ что дробь не обращ. в бесконеч.)

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность распред-я

(Т) Для всех $m$, т.ч. вып-ся усл-е на дробь, вып-ся соотн-е (1), где $\varphi(x)$ – плотность распр-я.

$$P\{\alpha \le \mu_n \le \beta\} = \sum_{\alpha \le m \le \beta} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

(Т) (интегральная предельная теорема)

$$P\{\alpha \le \mu_n \le \beta\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}\right)\right)$$

Можно записать по-другому:

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} - \Phi(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

, где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$P\{\alpha \le \mu_n \le \beta\} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \approx \Phi\left(\frac{\beta-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Погрешность оценивается числом $\frac{c}{\sqrt{npq}}$. Но это слишком много.

Рассматриваем др. схему – Пуассона.

1) $n = 1$ вер-ть $\lambda$ – успеха

2) $n = 2$ $\frac{\lambda}{2}$

3) $n = 3$ $\frac{\lambda}{3}$

. . .

n) $n = n$ $\frac{\lambda}{n}$, вер-ть успеха, $n$ испытаний.

(Т) (Пуассона)

При такой схеме испытаний при

$\forall$ фикс. $m$ мутант $P_n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$

Док-во

Понятно, что $P_n(m) = C_n^m \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$

$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{\lambda^m}{n^m}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\right]^{\frac{n-m}{n}}$

$\to 1 \qquad \to e^{-\lambda}$

ч. т. д.

$\Delta_n \le np^2$

$\Delta_n \le \frac{\lambda^2}{n}$

Перейдем к кости.

$(\omega_1, \ldots \omega_n)$

$\omega_1 - m$ исходов. Вер-ть каждого $p_1, p_2, \ldots p_m$.

$\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$

каждой цепочке $(\omega_1 \ldots \omega_n)$ сопоставляем $p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$

Обычная симм. кость: $p\left(\frac{1}{6}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{1}{6}\right)^{k_6}$

Это наз-ся полиномиальная схема

## §7. Формула полной вероятности.

$A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$

$A_iA_j = \varnothing \quad i \ne j; \quad \bigcup_i A_i = \Omega$

$\sum_i p(A_i) = 1$

$B$ - событие. Тогда:

$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$

$B = \bigcup_i (BA_i); P(B) = \sum_i P(BA_i)$ - док-во.

## §8. Ф-ла Байеса.

$A_1, \ldots A_n \ldots, B$ - события, $P(B) > 0$.

$$p(A_k|B) = \frac{p(A_kB)}{P(B)} = \frac{p(B|A_k)\cdot p(A_k)}{\sum_i p(B|A_i)\,P(A_i)}$$

Пример:

$A_k = \{$появл. грани $k\}$ $\quad k = 1, \ldots 6$

$B = \{$появилось 3 герба$\}$

$P(A_k|B) = 0, \; k = 1, 2$

$$P(A_k|B) = \frac{C_k^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}}{\sum_{i=3}^{6} C_i^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{i-3}}$$

$k = 3, 4, 5, 6$

02.10.2012.

# Глава II Случайные величины и распределение вер-ти.

## §1. Определения.

$\Omega = \{\omega\}$ $\quad \mathcal{F} = \{A, B, C, \dots\}$

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Def:** Конечная измеримая вещ. ф-я $X = X(\omega)$ наз-ся *случайной величиной*, опред. на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ф-я измерима, если $\forall B \in \mathcal{B}$ (борел.)

$\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

т.е. опр-ся $P\{X \in B\} = P\{\omega : X(\omega) \in B\}$

, где $\mathcal{B}$ - борел. $\sigma$-алгебра

Можем записать:

$P_X(B) = P\{X \in B\}$ — *распределение случ. величины X.*

Будем рассматривать только B вида:

$B = (-\infty, x)$ , где $-\infty < x < \infty$

С их помощью мы сможем построить $\forall$ борел. мн-во.

$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\}$ — *функция распредел-я сл. вел. X.*

Обозн: $F_X(x)$, $F_Y(x)$

$P\{X \geq x\} = 1 - F(x)$

$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$

Пример:

$\begin{cases} X(\text{четн.}) = 1 \\ X(\text{неч.}) = 2 \end{cases}$ Построим ф-ю для кости: и... всё.

$X^{-1}((-\infty, x))$ — можем рассм. только для таких мн-в, чтобы не рассм. всё.

## §2. Св-ва ф-ции распределения.

① $0 \leq F(x) \leq 1$

② $F(x)$ — не убыв.

$F(y) - F(x) = P\{\omega : x \leq X(\omega) \leq y\}$

$\Rightarrow F(y) \geq F(x)$ (т.к. вер-ть $\geq 0$) при $y > x$

$P\{-\infty < X < y\} - P\{-\infty < X < x\} =$

$= P\{x \leq X \leq y\}$

③ $P\{x \leq X \leq y\} = F(y) - F(x)$

④ $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Док-во:

④ $A_n = \{-n \le X < n\}$

$F(n) - F(-n) = P(A_n)$

$A_1 \subset A_2 \subseteq \dots \subset A_n \subset \dots$

$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P\{\bigcup\limits_n A_n\} = P\{\Omega\} = 1$

$P(A_n) = F(n) - F(-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = \alpha$ $\qquad \alpha \le 1$

$\alpha - \beta = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} F(-n) = \beta$ $\qquad \beta \ge 0$

$\alpha = 1$
$\beta = 0$

⑤ $F(x)$ – непр. слева.

$F(x) = P\{X < x\}$

Рассм. $x_n \nearrow x$

$A_n = \{X < x_n\}$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P\{X < x_n\}$

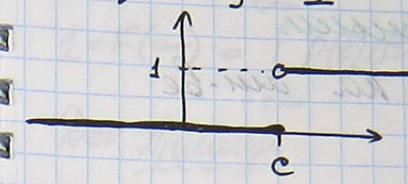
Для монот. посл-ти: $\lim P(A_n) = P\{\cup A_n\}$
$\cup A_n = (-\infty, x)$

Непр. справа может и не быть!

## §3. Примеры случайных величин

1) Вырожденное

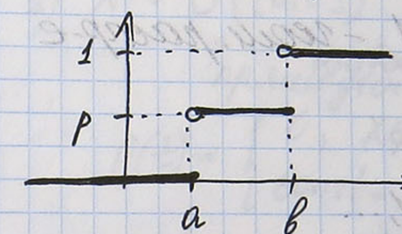
$P\{X = c\} = 1$




2) Двухточечное

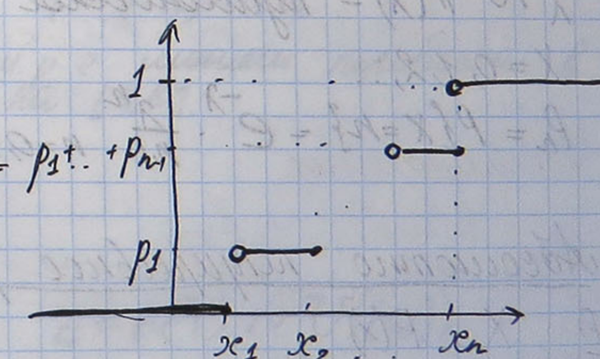
Монета, например.

$X = \begin{cases} a & p \\ b & 1-p \end{cases} \qquad a < b$




$X = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{cases}$

$1 - p_n = p_1 + \dots + p_{n-1}$



Такие случ. величины наз-ся дискретными.
(т.е. они приним. конеч. или бесконеч. набор вер-тей).

Распр-е наз-ся дискретным.

3) Равномерное распр-е на мн-ве точек $\{1, 2, .. n\}$

$P\{X=k\} = \frac{1}{n}$

$k = 1..n$

4) $X \sim B(n,p)$ – биномиальное расп-е

$X = 0, 1, 2, .. n$

$p\{X=m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

5) $X \sim Geom(p)$, $0<p<1$ – геом. распр-е

$X = 0, 1, ...$

$P\{X=m\} = (1-p)p^m$

$m = 0, 1, ...$

6) $X \sim \Pi(\lambda)$ – пуассоновское распр-е.

$X = 0, 1, 2, ..$ $\lambda > 0$

$P_n = P\{X=n\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ $n = 0, 1, 2, ..$

## Абсолютно непрерывное распр-е.

09.10.2012.

Def: $X$, $F(x)$

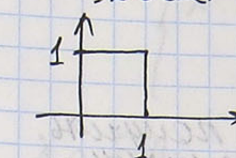
Распр-е – а.непрер., если:

$\exists\ p(t) \geq 0$ – плотность, т.ч.:

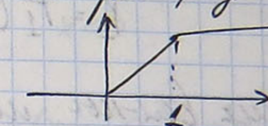
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

$$1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt$$

Def Пример.




Ф-я распред:




Абс. непр. распр-я: Равномерное:

1) $X \sim U([a,b])$ $-\infty < a < b < \infty$

uniform
прямоугольник

$$p(t) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ const = \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \end{cases}$$

$Y \sim U([0,1])$: $Y = (b-a)X + a$

т.е. $\forall$ равном. р-е можем перевести в равн. распр-е на $[a,b]$.

Ещё вариант:

$X \sim U([0,1])$

$Y \Rightarrow F(x)$ непр. $Z = F(Y) \sim U([0,1])$

Т.е. можем от произвольн. случ. величины перейти к ~~равн.~~ непр. сл. величине.

$$\theta(x) = F^{-1}(x) = \inf\{t : F(t) \geq x\} \qquad G(X) \overset{d}{=} Y$$

Если $Y_1$ $F_1$, $Y_2$ $F_2$ | $F_1(Y_1) \overset{d}{=} X \overset{d}{=} F_2(Y_2)$

$$Y_1 = F_1^{-1}(F_2(Y_2))$$

Т.е. из $\forall$ случ. вел-ны можем получить случ. величину с заранее заданным распр-ем.

2) Степенное:

$X \sim Power(\alpha)$

$U \sim U([0,1])$

$X = U^{1/\alpha}$ — возьмём. Тогда:

$$F_X(x) = P\{U^{1/\alpha} < x\} = P\{U < x^{\alpha}\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{\alpha}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3) Биномиальное

$X \sim B(a, b), \quad a, b > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0;1) \end{cases}$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

4) Экспоненциальное

$Z \sim E(\lambda), \quad \lambda > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\{-\frac{x}{\lambda}\}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$X \sim E(1)$: $\lambda = 1$, $\quad p(x) = e^{-x}, x \geq 0$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$Y = \lambda X$;

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x \geq 0$$

$$p_Y(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x \geq 0$$

$Z \sim E(1)$

$p(x) = e^{-x} \qquad P\{Z \geq x\} = 1 - F(x) = e^{-x}$

$F(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$

$$P\{Z \geq x + y \mid Z \geq x\} = e^{-y} = P\{Z \geq y\} \qquad y > 0$$

Эксп. распр-е — нестареющее

5) Гамма-распределение

$X \sim \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)}; & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{p(x)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

$\alpha = 1 \Rightarrow X \sim E(1)$

$Z_1, Z_2, \dots Z_n \sim E(1)$ (независимые)

$S_n = Z_1 + \dots + Z_n \sim \Gamma(n)$

6) Распределение Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$$

$$EX = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \overset{d}{=} X$$

7) Нормальное распр-е

$X \sim N(a, \sigma^2)$ $\qquad -\infty < a < \infty$, $\sigma > 0$

$Y \sim N(0,1)$; $\qquad X = a + \sigma Y$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

$\sigma = 1$, $a = 0$ $\qquad p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$

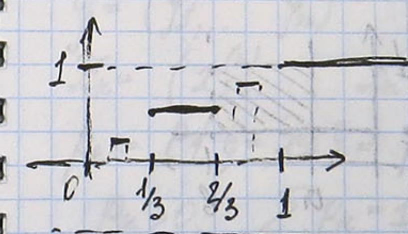
$Y \sim N(0,1) \qquad \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - \alpha_n}{\beta_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0,1)$$

$X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \qquad X_1 + X_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Сингулярные распред-я.




$F(x)$ - канторова лестница.

Т. Произвольную ф-ю распр-я

$$F(x) = p_1 F_{\text{дискр}}(x) + p_2 F_{\text{абс.н.}}(x) + p_3 F_{\text{сингул.}}(x)$$

$$p_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{3} p_i = 1$$

16.10.2012

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (R_1, \mathcal{B}_1)$

$B \in \mathcal{B}$, $\{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$

$P\{X \in B\} = P_X(B)$; $F_X(x) = P\{X < x\}$

Будем обозначать случ. величины греческими буквами $\xi, \eta, \nu, \mu$.

$\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{\tilde{\xi}} (R_n, \mathcal{B}_n)$ $\qquad B \in \mathcal{B}_n$

$\{\omega : \tilde{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots \xi_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{F}$

Тогда задана вер-ть:

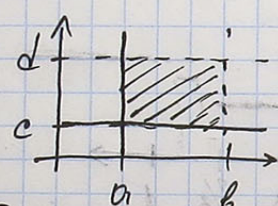
$P_{\tilde{\xi}}(B) = P\{\tilde{\xi} \in B\}$

$F_{\tilde{\xi}}(x_1, \dots x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots \xi_n < x_n\}$ — задаём таким образом ф-ю распред-я.

Пример.

$(\xi_1, \xi_2)$

$F(x,y) = P\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$



$p\{a \le \xi_1 < b,\ c \le \xi_2 < d\} =$

$= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$

(операции с углами)

## Св-ва n-мерных ф-ций распред

1. $0 \le F_{\tilde{\xi}}(\dots) \le 1$
2. $\lim\limits_{x_k \to -\infty} F_{\tilde{\xi}}(\ ) = 0$; для нек. $k$.

   $\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F_{\tilde{\xi}}(\ ) = 1$;
3. монот. по $\forall$ из $x_k$.
4. $F_{\xi_1, \dots \xi_n}(x_1, \dots x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots \xi_n < x_n\}$

   $F_{\xi_1 \dots \xi_k, \xi_{k+1}, \dots \xi_n}(x_1, x_2 \dots x_k, \infty, \infty, \dots \infty) =$

   $= F_{\xi_1 \dots \xi_k}(x_1, \dots x_k)$ (т.е. лишние $x$ можно устремить к $\infty$ и получить ф-ю меньшей размерности).

$\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots \xi_n)$

$\tilde{x}_k = (x_1^{(k)}, \dots x_n^{(k)})$, $k = 1, 2$

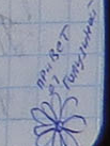
$p_k = P\{\tilde{\xi} = \tilde{x}_k\} = P\{\xi_1 = x_1^{(k)}, \xi_2 = x_2^{(k)}, \dots \xi_n = x_n^{(k)}\}$

$p_k \ge 0$, $\sum\limits_k p_k = 1$

$X \sim B(n|p)$ $\quad X = 0, 1, \dots n$; $\quad p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$A_1 \dots A_r$

$p_1 \dots p_r$



$$p\{\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \dots \xi_r = k_r\} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

$k_1 + \dots + k_r = n$. полиномиальное распред-е ($r$-мерное).

Также в одномерном случае было определена плотность:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)\,du, \quad \text{где} \quad p(u) \geq 0, \quad \int_{-\infty} p(u)\,du = 1$$

В многомер. случае:

$$F_{\bar\xi}(\bar x) = P\{\xi_1 < x_1, \dots \xi_n < x_n\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar\xi}(u_1, u_2, \dots u_n)\, du_1 \dots du_n$$

$p_{\bar\xi}$ - плотность распред-я, где

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(u_1 \dots u_n)\, du_1 \dots du_n$$

$p(u_1, \dots u_n) \Rightarrow (\xi_1, \dots \xi_n)$

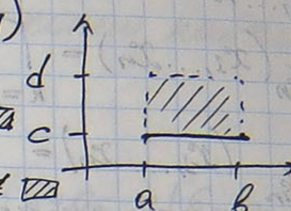
Получить ф-ю плотности меньшей размерности:

$$p(u_1 \dots u_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int p(u_1 \dots u_k)\, du_{k+1} \dots du_n$$

Пример:

1) $(\xi_1, \xi_2) \sim U([a,b] \times [c,d])$

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & x \in \square \\ 0, & x \notin \square \end{cases}$$




2) $\tilde\xi = (\xi_1, \xi_2) \sim N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$-\infty < a_1, a_2 < \infty$

$\sigma_1^2 > 0, \ \sigma_2^2 > 0$

$-1 < \rho < 1$

$$p_{\xi_1, \xi_2}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\,\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1 \sigma_2} + \left(\frac{y-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

Но мы об этом узнаем потом...

## §4 Независимость случайных величин.

Случ величины $\xi_1, \dots \xi_n$ наз-ся независимыми, если:

$$p\{\xi_1 \in B_1, \dots \xi_n \in B_n\} = p\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \dots \cdot p\{\xi_n \in B_n\}$$

Ещё одно опр-е:

$\xi_1 \ldots \xi_n$ — независимы, если для $\forall$ $-\infty < x_k < +\infty$
$k = 1, \ldots n$

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1, \ldots x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x_k)$$

$$F_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1 \ldots x_n) = G_1(x_1) \cdot \ldots \cdot G_n(x_n)$$

Если такое представление возможно, то $\xi_1, \ldots \xi_n$ — независимые. (критерий независимости?).

Плотность:

$$p_{\xi_1 \ldots \xi_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x_k)$$

$$P\{\xi_1 < x_1, \ldots \xi_n < x_n\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\xi_k < x_k\}$$

$$P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2\} = P\{\xi_1 < x_1\} \cdot P\{\xi_2 < x_2\} \text{ ?}$$

Означает ли попарная независ. — независим-ть в совокуп?

Нет. Пример: тетраэдр Бернш.

Тельно передавать в случ. величины.

Например, если выпала кр. грань $= 1$
не выпала — " — $= 0$.
и т.д.

## §5. Свертки распределений

23.10.2012.

$\xi, \eta$ — нез. сл. вел.

$\nu = \xi + \eta$

т.е. зная $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$, хотим найти $F_\nu(x) = P\{\nu < x\}$

$P\{\xi = x_k\} = p_k$; $\sum_k p_k = 1$

$$F_\nu(x) = P\{\xi + \nu < x\} = \sum_k P\{\xi + \eta < x \mid \xi = x_k\} p_k =$$
$$= \sum_k P\{\eta < x - x_k \mid \xi = x_k\} p_k = \quad \text{(т.к. независ)}$$
$$= \sum_k P\{\eta < x - x_k\} p_k = \sum_k F_\eta(x - x_k) p_k$$

$\xi = 0, 1, 2 \ldots$ $\quad p_k = P\{\xi = k\}$ $\quad k = 0, 1, 2.$

$\eta = 0, 1, 2 \ldots$ $\quad q_k = P\{\eta = k\}$

$$P\{\nu = m\} = \sum_{k=0}^{m} q_{m-k} p_k$$

$$F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(x-u)\, dF_\xi(u) = $$ — эта формула верна уже для любых $\xi$ и $\eta$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-u)\, dF_\eta(u)$$

$$F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-u)\, p_\eta(u)\, du$$ — через плотность распр-ия.

$$p_\nu(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x-u)\, p_\eta(u)\, du$$ – ф-ла для плотности.

Примеры.

① $\xi = \begin{cases} 0 & 1-p_1 \\ 1 & p_1 \end{cases}$ $\qquad \eta = \begin{cases} 0 & 1-p_2 \\ 1 & p_2 \end{cases}$

$\nu = \xi + \eta$

$p\{\nu = 0\} = (1-p_1)(1-p_2)$

$p\{\nu = 2\} = p_1 p_2$

$p\{\nu = 1\} = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$

② $\xi_1, \ldots \xi_n$ – независ. $= \begin{cases} 0 & q = 1-p \\ 1 & p \end{cases}$

$\nu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

$\nu_n \sim B(n, p)$

$P(\nu_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, \ldots n$

1)

$\xi \sim B(n, p)$

$\eta \sim B(m, p)$ $\quad 0 \le p \le 1 \qquad n, m = 1, 2, \ldots$

$\nu \sim B(n+m, p)$

2) $\xi \sim Geom(p)$

$\eta \sim Geom(p)$

$p_k = P\{\xi = k\} = P\{\eta = k\} = (1-p)p^k$, $k = 0, 1 \ldots$

$$p\{\nu = m\} = \sum_{k=0}^{m} p_{m-k}$$

$$p_k = \sum_{k=0}^{m} (1-p)p^{m-k}(1-p)p^k = (m+1)p^m(1-p)^2, \quad m = 0, 1 \ldots$$

3) $\xi \sim \Pi(\lambda) \quad \lambda > 0 \qquad p_k = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$

$\eta \sim \Pi(\mu) \quad \mu > 0 \qquad q_\ell = e^{-\mu} \cdot \dfrac{\mu^\ell}{\ell!}$

$$p\{\nu = m\} = \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{m-k}}{(m-k)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{m!} \cdot \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{k!(m-k)!}}_{C_m^k} \lambda^k \mu^{m-k} =$$

$$= \frac{(\lambda+\mu)^m}{m!} e^{-(\lambda+\mu)}, \quad m = 0 \ldots$$

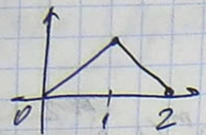
$\nu = \xi + \eta \sim \Pi(\lambda + \mu)$

4) $\xi \sim U([0,1])$

$\eta \sim U([0,1])$ $\qquad p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$\nu = \xi + \eta$

$$p_\nu(x) = \int p_\eta(x-u)\, p_\xi(u)\, du = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 \le x \le 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$




5) $\xi \sim E(1), \ \eta \sim E(1) \qquad \nu = \xi + \eta$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$p_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(x-u)\, p_\xi(u)\, du = \int_0^x e^{-(x-u)} e^{-u}\, du = x e^{-x}, \quad x \geq 0$$

$\xi_1 \dots \xi_n \sim E(1)$

$\nu_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$p_{\nu_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \underbrace{\frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}}_{=\ \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

6) $\xi \sim Gamma(n)$

$\eta \sim Gamma(m) \qquad \nu = \xi + \eta \sim Gamma(n+m)$

6') $\xi \sim Gamma(\alpha)$

$\eta \sim Gamma(\beta) \qquad \nu = \xi + \eta \sim Gamma(\alpha+\beta)$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \, x^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-x}, \quad x > 0$$

7) $\xi \sim N(a_1, \sigma_1^2)$

$\eta \sim N(a_2, \sigma_2^2)$

$\nu = \xi + \eta \sim N(a_1 + a_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

$N(a, \sigma^2)$: $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$

# Глава III. Моментные характеристики случайных величин.

## §1 Мат. ожидание.

$\xi$ - сл. вел.; $(\Omega = \{\omega\}, \mathcal{F}, P)$

$P_\xi(B) = P\{\omega: \xi(\omega) \in B\}$

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$

Пусть $\omega$ - конеч. или счет. кол-во.

$$\begin{matrix} \xi(\omega_1) & \xi(\omega_2) & \dots & \xi(\omega_k) \\ p_1 & p_2 & & p_k \end{matrix}$$

$E\xi = \sum_k \xi(\omega_k) p_k$ - мат. ожидание

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x P_\xi(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_\xi(x) \qquad p_k = P\{\xi = x_k\}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF_\xi(x) = \begin{cases} \sum_k x_k p_k \\ \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\, dx \end{cases}$$

- мат. ожидание при усл-ии $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF_\xi(x) < \infty$

**Пример** (распр-е Коши)

$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ – у этой сл. вел. нет мат. ожидания!

$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$ (т.к.: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \infty$)

---

$\xi$: $\eta = g(\xi)$

тогда $E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_\xi(x) = \begin{cases} \sum_k g(x_k) p_k \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x)\, dx \end{cases}$

$\parallel$

$Eg(\xi)$

$g(x) = x^n$

$E\xi^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF_\xi(x)$ – момент $n$-ого порядка

$\xi$ $F_\xi(x)$

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty}$

30. 10. 2012.

**Свойства мат. ожидания**

1) $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$

2) $-\infty \leq C_1 \leq \xi \leq C_2 < \infty$

$\Rightarrow$ $C_1 \leq E\xi \leq C_2$

3) $\left.\begin{matrix} \xi \geq 0 \\ E\xi = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P\{\xi = 0\} = 1$

4) $\xi \geq 0$ $\int_0^{\infty} x\, dF_\xi(x) = \infty$

5) $\xi = -\xi$ (симм. величина) $\Rightarrow$

если $\exists$ мат. ожидание, то $E(\xi) = 0$

т.к.: $E\xi = -E\xi$, т.е.: $E(\alpha\xi+\beta) = \alpha E\xi + \beta$

Сем-во случ. величин: $\eta = \alpha\xi + \beta$ – случ. величины получ-ся линейными преобразованиями.

6) Р. $g(\xi)$ – нек. новая сл. величина.

$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_\xi(x)$

Оно сущ-ет, если $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dF_\xi(x) < \infty$.

Ранее мы ввели моменты:

$\alpha_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_\xi(x)$ – начальный момент порядка $k$.

Это ч. случай, когда $g(x) = x^k$

Р. $\beta_k = E|\xi|^k$ – абсолютный нач. момент порядка $k$.

$\xi \leq \eta$

$E\xi \leq E\eta$, поэтому $\beta_k \geq \alpha_k$

Если $\xi = -\xi$, то $\xi^{2k+1} = -\xi^{2k+1}$

P. $E(\xi - E\xi)^k$ – центральный момент порядка k.

$E|\xi - E\xi|^k$ – абсолютный центральный момент.

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ – дисперсия случайной величины.

Пусть $\xi, \eta$ – сл. величины; $g(\xi,\eta)$ – неп. ф-я.

$$Eg(\xi,\eta) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, F_{\xi,\eta}(dx,dy)$$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$$

$$\xi \quad \alpha\xi + \beta = \eta \quad \alpha > 0$$

$E\xi^k\eta^l = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} x^k y^l F_{\xi,\eta}(dx,dy)$ – начальный момент сл. вел-н.

$E(\xi - E\xi)^k(\eta - E\eta)^l$ – центр. момент сл. величин.

$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta = \operatorname{cov}(\xi,\eta)$ – ковариация

$\rho(\xi,\eta) = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ – нормированная ковариация

$\mu_k = E\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$ – факториальный момент

7) $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$ – только если $\xi$ и $\eta$ – незав.!

## §2. Дисперсия и её свойства.

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 =$$

$$= E\xi(\xi-1) + E\xi - (E\xi)^2 = \mu_2 + \mu_1 - \mu_1^2$$

Свойства:

1) $D\xi \geq 0$
2) $D\xi = 0 \Longleftrightarrow P\{\xi = c\} = 1$
3) $D(\alpha\xi + \beta) = D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi$
4) $D(|\xi|) = E\xi^2 - (E|\xi|)^2 \leq D\xi$
5) $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = D\xi + D\eta \pm 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$

если $\xi, \eta$ – незав., то

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E(\xi - E\xi) \cdot E(\eta - E\eta) = 0$$

тогда $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

Обратное неправда! $\operatorname{cov} = 0 \not\Rightarrow \xi, \eta$ – незав!

## §3. Неравенство для моментов

$$D|\xi| = E\xi^2 - (E|\xi|)^2 = \beta_2 - \beta_1^2 \geq 0$$

$$\beta_1 \leq \beta_2^{1/2}$$

Докажем, что:

$$\beta_1 \leq \beta_2^{1/2} \leq \beta_3^{1/3} \leq \ldots \quad \leq \beta_n^{1/n} \leq \ldots$$

<u>Док-во:</u>

По инд.: $\beta_k^{k+1} \leq \beta_{k+1}^{k}$

$$\cancel{E(u|\xi|^{k-1}} \; 0 \leq E\left(u|\xi|^{\frac{k-1}{2}} - v|\xi|^{\frac{k+1}{2}}\right)^2 =$$

т.к. мат. ожид. квадрата

$$= u^2\beta_{k-1} - 2uv\beta_k + v^2\beta_{k+1}$$

$$v = u \cdot \frac{\beta_{k-1}^{1/2}}{\beta_{k+1}^{1/2}}$$

$$0 \leq u^2\beta_{k-1} - 2u^2\frac{\beta_{k-1}^{1/2}}{\beta_{k+1}^{1/2}} \cdot \beta_k + u^2\beta_{k-1} =$$

$$= 2u^2\beta_{k-1} - 2u^2\frac{\beta_{k-1}^{1/2}}{\beta_{k+1}^{1/2}} \cdot \beta_k$$ делим на $2u^2\beta_{k-1}^{1/2}$

$$\beta_{k-1}^{1/2} - \frac{\beta_k}{\beta_{k+1}^{1/2}} \geq 0$$

$$\beta_k^2 \leq \beta_{k-1}\beta_{k+1}$$

Запишем:

$$\cancel{\beta_1^2} \leq \cancel{\beta_2}$$

$$\cancel{\beta_2^4} \leq \cancel{\beta_1^2}\cancel{\beta_3^2}$$

$$\cancel{\beta_3^6} \leq \cancel{\beta_2^3}\beta_4^3 \qquad |\cdot x$$

$$\beta_4^8 \leq \cancel{\beta_3^4}\beta_5^4$$

$$\ldots$$

$$\beta_n^{2n} \leq \beta_{n-1}^n \beta_{n+1}^n$$

---

$$\beta_n^{n+1} \leq \beta_{n+1}^n$$

ч.т.д.

## §4. Вычисление моментов

1) Вырожд. распр-е

$$P\{x = c\} = 1$$

$$E\xi = c$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 0$$

2) $\xi = \begin{cases} 0 & q = 1-p \\ 1 & p \end{cases}$ — дискр. распр-е

$$E\xi = p, \quad D\xi = p(1-p) = pq$$

3) Бином. распр-е

$$\xi \sim B(n,p), \qquad \xi = 0, .. \, n$$

$$P_m = P\{\xi = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ — можно так рассматривать

$E\xi = nE\xi_1 \cancel{+\ldots} = np$

$D\xi = nD\xi_1 = np(1-p) = npq$

4) $\xi \sim Geom(p) \quad 0<p<1$

$P\{\xi = m\} = (1-p)p^m, \quad m = 0, 1, \ldots$

$a = E\xi$

$$a = 0\cdot(1-p) + p(1+a)$$

$$a(1-p) = p; \quad a = \frac{p}{1-p} = \frac{p}{q}$$

$D\xi = \mu_2 + \mu_1 - \mu_1^2$

$$\mu_2 = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)(1-p)p^m =$$

$$= (1-p)p^2 \sum_m m(m-1)p^{m-2} =$$

$$= (1-p)p^2\left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m\right)'' = (1-p)p^2\left(\frac{1}{1-p}\right)'' =$$

$$= 2(1-p)p^2 \cdot \frac{1}{(1-p)^3} = 2\frac{p^2}{(1-p)^2}$$

$$D\xi = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2}$$

5) $\xi \sim \Pi(\lambda), \ \lambda > 0$ 06. 11. 2012.

$$p_m = P\{\xi = m\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

/* $\eta = a + b\xi \quad b > 0$

$E\xi, \ E\xi^n$

$\mu_k = E\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)$

$D\xi = \mu_2 + \mu_1 - \mu_1^2$ */

$$\mu_k = E\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\ldots(m-k+1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^k \sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!} = \lambda^k$$

$E\xi = \mu_1 = \lambda \quad D\xi = \lambda$

**Непрерывные распределения:**

6) $\xi \sim U([0,1])$

$\eta \sim U([a,b]), \quad a < b$

$\eta = (b-a)\xi + a$ — преобр-е лин.

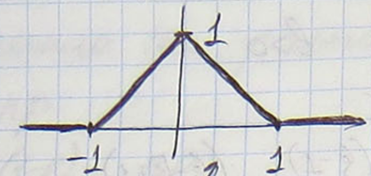
$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$E\xi^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)\,dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$E\xi = \frac{1}{2}; \quad E\xi^2 = \frac{1}{3}; \quad D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{12}$

$E\eta = \frac{a+b}{2}; \quad D\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$

7) треугольное распр-е




плотность

Представим:

$\xi = \eta_1 + \eta_2$ $\quad$ $\eta_1, \eta_2$ – независ. с.в.

$\eta \sim U([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}])$

$E\xi = 0$ $\quad$ $E\eta = 0;\ D\eta = \frac{1}{12}$

$D\xi = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

8) $\xi \sim E(1)$, $\quad p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - плотность

$\eta \sim E(\lambda)$, $\lambda > 0$:

$$p_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\{-\frac{x}{\lambda}\}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\eta = \lambda\xi$

$\alpha_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n!$

$\alpha_1 = 1 = E\xi;$ $\quad E\xi^2 = \alpha_2 = 2! = 2$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 1$

т.е. $E\eta = \lambda$

$D\eta = \lambda^2$

~~8~~ 9) Гамма-распределение

$\xi \sim Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\alpha = n$, $n = 1, 2, \ldots$

$\xi = \eta_1 + \ldots + \eta_k$ $\quad$ $\eta_k \sim E(1)$

$E\xi = n;$ $\quad D\xi = n$

$E\xi^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^n x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$

// $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

$E\xi = \alpha;$ $\quad E\xi^2 = \alpha(1+\alpha)$

$D\xi = \alpha$

10) Распр-е Лапласа

$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$

$E\xi^{2n+1} = 0;$

$E\xi^{2n} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{2n} e^{-x} dx = \Gamma(2n+1) = (2n)!$

#11) $\xi$ - Коши

$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $E|\xi| = \infty$

Мат. ожидания не сущ-ет!

⇒ не сущ-ет и дисперсии.

12) Нормальное распр-е

$\xi \sim N(a, \sigma^2)$ $\quad -\infty < a < \infty$, $\quad \sigma^2 > 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$ — плотность

если $\eta \sim N(0,1)$ (стандартное распр-е)

$$E\eta = 0; \quad D\eta = E\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty x\, d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1$$ (т.к. плотность)

В общ. случае:

$E\xi = a$; $\quad D\xi = \sigma^2$

## §5. Моды и квантили.

Дискр. р-е: $P\{\xi = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \dots$

Мода — точка $x_k$, кот. соотв-ет максимальное знач-е $p_k$.

Задача: Найти моду Пуассоновского распр-я (рассмотреть отн-е двух соседних вероятностей).

Непр. расп-е:

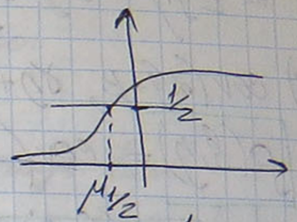
Мода — точка, в кот. достигается максимум плотности.

Квантили.

Например, это медиана

$\mu_{1/2}$ $\quad P\{\xi \ge \mu_{1/2}\} \ge \frac{1}{2}$

$\quad P\{\xi \le \mu_{1/2}\} \ge \frac{1}{2}$




Квантилы порядка $\lambda$ — это тоже самое, что и медиана, только там не $\frac{1}{2}$, а $\lambda$.

$\lambda = \frac{1}{2}$, медиана

$\lambda = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ — квартили

$\lambda = \frac{1}{10}, \dots, \frac{9}{10}$ — децили

$\lambda = \frac{1}{100}, \dots \frac{99}{100}$ — процентили (процентные точки)

## §6. Ковариации и коэф-ты корреляции.

$\xi, \eta$; $\quad \nu = \xi + \eta$.

$E\nu = E\xi + E\eta$

$D\nu = D\xi + D\eta$ — это верно, только если $\xi, \eta$ — независ.

Пример: $\eta = -\xi$

$$DD = D(\xi+\eta) = E((\xi-E\xi)\pm(\eta-E\eta))^2 =$$
$$= D\xi + D\eta \pm 2E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$$

$\xi, \eta$ $\boxed{cov(\xi,\eta) = E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)}$ – ковариация

$= E\xi\eta - E\xi\cdot E\eta$

Свойства:

1) $cov(\alpha\xi+\beta, \gamma\eta+\delta) = cov(\alpha\xi, \gamma\eta) = \alpha\gamma\, cov(\xi,\eta)$

$$\boxed{\rho(\xi,\eta)} = cov\left(\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}}, \frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}}}$$ – коэф-т корреляции.

Пример:

$\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$(\xi,\eta)$ – двумерное норм. распр-е.

$(\xi,\eta) \sim (a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

13.11.2012.

$\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$

$F(x_1, \dots x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$

$P\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots \xi_n = x_n\}$ – вер-ть

$p(x_1, \dots x_n)$ – плотность

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_\xi(x)$$

Рассм. ф-ю:

$g(x_1, x_2, \dots x_n)$

$g(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$ – нек. новая случ. вел.

$$Eg(\xi_1, \dots \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int g(x_1 \dots x_n)\, E_\xi(dx_1, \dots dx_n) =$$

$$= \sum_{\infty}\dots\sum g(x_1 \dots x_n)\, P\{\xi_1 = x_1, \dots \xi_n = x_n\} =$$

$$= \int_{-\infty}\dots\int g(u_1 \dots u_n)\cdot p_\xi(u_1 \dots u_n)\, du_1 \dots du_n$$

Моменты:

$E\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$ – начальные мом. $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$

Центральный: $E(\xi_1 - E\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_n - E\xi_n)^{\alpha_n}$

---

$\xi, \eta$ $D(\xi\pm\eta) = D\xi + D\eta \pm 2E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)$

$E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta) = cov(\xi,\eta)$

$$D\left(\frac{\xi-E\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta-E\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 2 \pm 2\,\frac{E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta)}{\sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}} =$$

$$= 2 \pm 2\rho \geq 0$$

$\rho$ - коэф. корреляции

$2 \pm 2\rho(\xi,\eta) \geq 0 \qquad |\rho| \leq 1$

1) $|cov(\xi,\eta)| \leq \sqrt{D\xi}\cdot\sqrt{D\eta}$

2) $cov(\xi+\nu,\eta) = cov(\xi,\eta) + cov(\nu,\eta)$

3) $\xi$ и $\eta$ - нез $\Rightarrow cov(\xi,\eta) = 0$, $\rho = 0$

Обратное не обязательно! Например,

$cov(\xi,\xi^2) = E\xi^3 - E\xi\cdot E\xi^2 = 0$ $\qquad$ $\xi$ - симметр. $\quad \eta = \xi^2$

$cov = 0$, $\rho = 0 \not\Rightarrow \xi,\eta$ - нез.

4) $\rho = 1 \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}\eta + c$

т.е. $|\rho| = 1 \Rightarrow \xi = \alpha\eta + \beta$ (т.е. лин. зависимость)

$sign\,\alpha = sign\,\beta$

Верно и „$\Leftarrow$"

5) $cov(\alpha\xi+\beta, \gamma\eta+\delta) = cov(\alpha\xi, \gamma\eta) = \alpha\gamma\, cov(\xi,\eta)$

$$\rho(\alpha\xi+\beta, \gamma\eta+\delta) = \rho(\alpha\xi, \gamma\eta) = \frac{\alpha\gamma\, cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\alpha^2 D\xi}\sqrt{\gamma^2 D\eta}} =$$

$$= sign(\alpha\gamma)\cdot\rho(\xi,\eta)$$

6) $(\xi,\eta) \sim N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

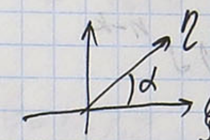
$-\infty < a_1, a_2 < \infty$

$\cancel{\sigma_1^2 > 0}$

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\cdot\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}$$

$\rho = 0 \qquad p(x,y) = p_{a_1\sigma_1^2}(x)\cdot p_{a_2\sigma_2^2}(y)$

$cov(\xi,\eta) = (\xi,\eta)$ - рассм. как скал. пр-е




$$\rho = \frac{(\xi,\eta)}{(\xi,\xi)^{1/2}(\eta,\eta)^{1/2}} = \cos\alpha$$

7) Вспомним:

$E|\xi|^k \leq 1 + E|\xi|^l$

$(E|\xi|^k)^{1/k} \leq (E|\xi|^l)^{1/l}$

$E|\xi|^k \leq (E|\xi|^l)^{k/l} \qquad k \leq l$

$\xi \geq 0$, $E\xi$ $\quad P\{\xi \geq t\} = \int_t^\infty dF_\xi(x) \leq \int_t^\infty \frac{x}{t}\, dF_\xi(x) \leq$

$\leq \frac{1}{t} \cdot E\xi$ – лемма Чебышёва.

$P\{\cancel{\xi \geq t}\}$

$\xi \quad E|\xi|^n < \infty$

$$P\{|\xi| \geq t\} = P\{|\xi|^n \geq t^n\} \leq \frac{E|\xi|^n}{t^n}$$

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} = P\{(\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

## Глава IV. Производящие функции.

### §1 Определения, примеры, св-ва

$\{a_n\}_{n=0,1..}$

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot s^n$$

$$A^{(k)}(s) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1) \dots (n-k+1) s^{n-k}$$

$$A^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

$$a_k = \frac{A^{(k)}(0)}{k!}$$

$\xi = 0, 1, 2, \dots \qquad p_n = P\{\xi = n\}$

$$P_\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot s^n = Es^\xi \qquad p_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$$

1) $0 \leq s \leq 1$

2) $P^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) p_n \cdot s^{n-k} \leq$

$$\leq \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) s^{n-k} \leq$$

$$= \left(\sum s^n\right)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-s}\right)^{(k)} = k! \frac{1}{(1-s)^{k+1}}$$

$P^{(k)}(s)$ – непр., монот., неуб., неогр., выпуклая ф-я.

$0 \leq s < 1 \qquad \lim_{s \to 0} P^{(k)}(s) = P^{(k)}(1) = \mu_k = E\xi(\xi-1) \cdot \ldots \cdot (\xi-k+1)$

---

$\xi, \eta$ – сл. в. нез.

$$P_{\xi+\eta}(s) = Es^{\xi+\eta} = Es^\xi \cdot s^\eta = Es^\xi \cdot Es^\eta =$$
$$= P_\xi(s) \cdot P_\eta(s)$$

20.11.2012.

$\xi = 0, 1, 2, \dots$

$p_k = P\{\xi = k\}$

$$P_\xi(s) = Es^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot s^k$$

1) $P(1) = 1$

2) $|P(s)| \leq 1 \qquad |s| \leq 1$

3) $\xi, \eta$ – незав. сл. вел.

$$P_{\xi+\eta}(s) = P_\xi(s) \cdot P_\eta(s)$$

$\nu_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ - нез. сл. вел.

$P_{\nu_n}(s) = (P(s))^n$

4) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - нез. сл. вел. $P(s)$ - производящая ф-я.

$N = 0, 1, 2 \ldots$

$Q(s) = E s^N$

$\nu_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$

$P_{\nu_N}(s) = Q(P(s))$

$P\{\xi_n = m / N = n\} = P\{\xi_1 = m / N = n\} = P\{\xi_n = m\}$

5) $P^{(n)}(s) = \sum_k k(k-1) \ldots (k-n+1) \le \sum k(k-1) \ldots (k-n+1) \cdot s^{n-k}$

$\ldots (k-n+1) \cdot s^{n-k} =$ $\quad \underline{0 \le s < 1}.$

$= \left(\frac{1}{1-s}\right)^{(n)} = n! \frac{1}{(1-s)^{n+1}}$

$P^{(n)}(1) = E\xi(\xi-1) \ldots (\xi-n+1) = \mu_n.$

$\mu_1 = E\xi = P'(1)$

$\mu_2 = E\xi^2 - E\xi \qquad E\xi^2 = \mu_2 + \mu_1$

$D\xi = \mu_2 + \mu_1 - \mu_1^2$

6) Взаимоодн. соотв-е?:

$P^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot p_n$

$p_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$ - одн. восст по производящей ф-ции

$\xi \Longleftrightarrow P_\xi(s)$

7) $p_n := P\{\xi = n\}$; $q_n = P\{\xi > n\} = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots$

$Q(s) = \sum q_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \right) s^n \ominus \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{n=0}^{k-1} s^n \ominus$

$\ominus \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot \frac{1-s^k}{1-s} \ominus$

$\cancel{k \le n+1} \quad \cancel{= \frac{1}{1-s} \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^{k-1} = \frac{1-P(s)}{1-s}}$

$\cancel{E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi \ge k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{}$

$\ominus \frac{1}{1-s} \left( \sum_{k=1}^{\infty} p_n - \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k \right) = \frac{1-P(s)}{1-s}.$

т.е. $\boxed{E\xi = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi > n\}}$

$Q(1) = E\xi.$

Итого: для распределений:

1) $\xi = \begin{cases} 0 & q = 1-p \\ 1 & p \end{cases}$ $\qquad P(s) = 1 - p + ps$

2) $\xi \sim B(n, p)$ $\qquad p_k = C_n^k p^k q^{n-k} \Rightarrow P(s) = (1-p+ps)^n$

$\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$

3) $\xi \sim Geom(p)$, $\qquad p_n = (1-p)p^n$; $\quad P(s) = \frac{1-p}{1+ps}$

$0 < p < 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)(ps)^k,$

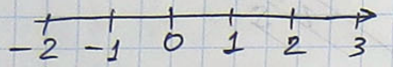
4) $\xi \sim \Pi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} s^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}$$

## §2 Моменты первого достижения некоторого уровня.

$\xi_0 = 0$

$\xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ ($\xi_i$ - нез. сл.в.)



$P\{\xi = 1\} = p$

$P\{\xi = -1\} = q = 1-p$

В каждый момент времени шагаем либо вправо, либо влево.
Хотим бросить игру как только достигнем уровня $k>0$.

$$\lambda_n^{(k)} = P\{\xi_1 \neq k, \xi_2 \neq k, \ldots \xi_{n-1} \neq k, \xi_n = k\}$$

$\lambda^{(k)} = \underbrace{T_1 + \ldots + T_k}$ ($T_i$ - время достиж. уровня $i$)

$T_j \overset{d}{=} \lambda^{(1)}$

Для случая $k<0$ - аналогично.

$\lambda^{(1)}$

$P\{\lambda^{(1)} = 1\} = p$ - достигли „1" на 1 шаге

$P\{\lambda^{(1)} = 3\} = (1-p)p^2$ - достиг. „1" на 3 шаге.

Сколько шагов потребуется в среднем?

$E\lambda^{(k)} = kE\lambda^{(1)}$

$a = E\lambda^{(1)}$

$a = 1 \cdot p + (1-p)(1+2a)$

достигли „1" на I шаге; шаг влево; из -1 нужно сделать столько шагов.

$a = 1 + 2(1-p)a$

$a = \frac{1}{p-q}$ она конечна при $p > \frac{1}{2}$

Но при $q=1$... $P\{\lambda^{(1)} < \infty\} < 1$

Обычно $P\{\xi < \infty\} = 1$

а здесь $P\{\lambda^{(1)} = \infty\} > 0$ - возможно.

Такое распр-е наз-ся несобственным.

$\lambda^{(1)}$

$\lambda_m^{(1)} = P\{\lambda^{(1)} = m\}$ $m = 1, 3, 5 \ldots$

$$\lambda(s) = Es^{\lambda^{(1)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{(1)} \cdot s^m$$

$\lambda^{(1)} \overset{d}{=} \begin{cases} 1 & p \\ 1+\lambda^{(2)}; & q = 1-p \end{cases}$ $\lambda(s) = ps + qs\lambda^2(s)$

$qEs^{1+\lambda^{(2)}} = qs\lambda^2(s)$

тогда $\lambda(s) = ps + qs\lambda^2(s)$

$$\lambda(s) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}.$$

$$x_{2n-1} = \frac{C_{2n}^{n} p^{n} q^{n-1}}{4n-2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Проверим:

$\lambda_1 = p$

$\lambda_3 = p^2 q$ (всё ок: 1 шаг влево, 2 шага вправо)

$\lambda_5 = 2p^3 q^2$

27.11.2012. Найдем среднее число шагов:

$$a = E\lambda^{(1)}$$

$$a = p \cdot 1 + q(1 + 2a)$$

$$a = \frac{1}{p-q}$$

$$1 - 4pq = p^2 + q^2 - 2pq = (p-q)^2$$

$$\lambda(1) = \frac{1 - \sqrt{4pq}}{2q} = \frac{1 - (p-q)}{2q} = \begin{cases} 1, & p \geq q \sim p \geq \frac{1}{2} \\ \frac{p}{q} < 1, & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

## Моменты первого возвращения

$$f_1 = P\{\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \ldots \mu_{n-1} \neq 0, \mu_n = 0\}$$

$f_{2n-1} = 0$; $f_{2n} = ?$

С какой вер-тью впервые вернемся в 0?

$$\boxed{F(s) = \sum_n f_n s^n}$$

$\nu$, $P\{\nu = 2n\} = f_{2n}$

$F(s) =$

$$\nu = \begin{cases} p, & 1 + \lambda^{(-1)} \\ q = 1-p, & 1 + \lambda^{(1)} \end{cases} \qquad F(s) = p \cdot s \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4qps^2}}{2ps} + q + \\ + qs \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2qs}$$

$$F(s) = 1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}$$

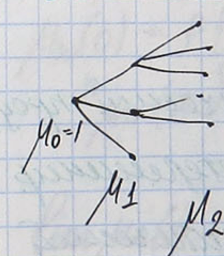
$$\mu_{2n} = P\{\nu = 2n\} = p\lambda_{2n-1}^{(-1)} + q\lambda_{2n-1}^{(1)} = \frac{C_{2n}^{n} p^n q^n}{2n-1}$$

$n = 1 \quad \mu_2 = 2pq$

$n = 2 \quad \mu_4 = 2p^2 q^2$

$$F(1) = \sum f_n = 1 - |p - q| = \begin{cases} 1, & p = q = \frac{1}{2} \\ < 1, & p \neq q \end{cases}$$

## § 3 Ветвящиеся процессы.




$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu = n\} \cdot s^n$$

есть частица, воздейств. на след. поколения.

$$F_n(s) = Es^{\mu_n}$$

$P(s)$ — $\xi_1, \xi_2, \ldots$

$Q(s)$ . $N$

$$S_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$$

$$E s^{S_N} = \sum_n P^n(s)\, P\{N = n\} = Q(P(s))$$

$\mu_0 = 1;$

$\mu_1 = \mu$

$$\mu_2 = \underbrace{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{\mu_1}}$$

$$\mu_2(s) = E s^{\mu_2} = \mu(\mu(s))$$

$$\mu_n(s) = \underbrace{\mu(\mu(\ldots\mu(s))))}_{n \text{ раз.}}$$

$$\mu_{n+1}(s) = \mu(\mu_n(s)) = \mu_n(\mu(s))$$

$$\mu'(1) = E\mu = a$$

$$A(n) = E\mu_n$$

$$A_{n+1} = \mu_{n+1}'(1) = \mu_n'(\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\mu(1)}}) \cdot \mu'(1) = \mu'(1) = a A(n)$$

$$\boxed{\begin{matrix} A(n) = a^n \\ a = E\mu \end{matrix}}$$

$a < 1$ $\quad A(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$a > 1$ $\quad A(n) \longrightarrow \infty$

$a = 1$ $\quad A(n) = 1$

$a < 1$ докритический проц.

$a = 1$, $D\mu = 0$ детерминир.

$a = 1$, $D\mu > 0$, критический

$a > 1$ — надкритический

$$B_n = \{\mu_n = 0\}$$

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$

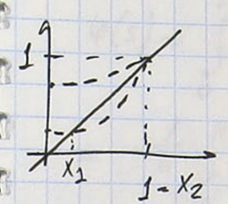
$$B = \bigcup_n B_n$$

$$q(B) = \lim_{n \to \infty} P(B_n) = \overset{\lim}{P}\{\mu_n = 0\} = \cancel{\mu_n(0)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mu_n(0)$$

$$q = \lim_{n \to \infty} \mu_n(0); \quad \mu_{n+1}(s) = \mu(\mu_n(s))$$

$$q = \mu(q), \quad 0 \le q \le 1$$




$$q = \mu(q) \qquad 0 \le q \le 1$$

~~если $a = \mu'(1) \le 1$ — верх. случай~~

~~$a = \mu'(1) < 1$ — ниж. кривая~~

$a = \mu'(1) \le 1 \Rightarrow q = 1$, $D\mu \ne 0$ — верх. кривая

$a = \mu'(1) > 1$ — ниж. кривая

$$\mu_n(0) = P\{\mu_k = 0\}$$

$$\mu_n(x_1) = \mu_{n-1}(\underset{\overset{\shortparallel}{x_1}}{\mu(x_1)}) = \ldots = \mu(x_1) = x_1$$

$$\lim \mu_n(0) = \lim P\{\mu_n = 0\} \le x_1$$

$$q \le x_1 \Rightarrow q = x_1$$

$a>1$, $q<1$

$a \le 1$; $\mu>0$, $q=1$

$\underbrace{a=1,\ D\mu=0}_{\text{детерм.}}$, $q=0$.

## § 4 Преобразование Лапласа

04.12.2012.

$$\varphi(s) = Ee^{-s\xi}, \quad s\ge 0; \ \operatorname{Re} s \ge 0$$

$$= \sum_k e^{-sx_k} \cdot P\{\xi = x_k\}$$

$\xi$ $p(x)$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-xs} p(x)\,dx$$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\,dF(x) \qquad F(x) = P\{\xi<x\}$$

$$\varphi(s) = P_\xi(e^{-s})$$

**Примеры**

1) $\xi \sim B(n,p)$

$$P(s) = (1-p+ps)^n$$

$$\varphi(s) = (1-p+pe^{-s})^n$$

2) $\xi \sim Geom(p)$

$$P(s) = \frac{1-p}{1-ps}$$

$$\varphi(s) = \frac{1-p}{1-pe^{-s}}$$

3) $\xi \sim \Pi(\lambda)$

$$P(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

$$\varphi(s) = e^{\lambda(e^{-s}-1)}$$

4) $\xi \sim U([0,1])$

$$\varphi(s) = \int_0^1 e^{-xs}\cdot 1 \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{s}\int_0^1 d(e^{-xs}) =$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}$$

5) $\xi \sim E(1)$ $\quad p(x) = e^{-x}$, $x\ge 0$

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-xs} e^{-x}\,dx = \frac{1}{1+s}$$

6) $\xi \sim Gamma(\alpha)$, $\alpha>0$

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \ x\ge 0.$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{(1+s)^\alpha}$$

$\varphi(s) = Ee^{-s\xi}, \ \xi \geq 0$

$$= \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$$

Св-ва:

1. $\varphi(0) = 1$

2. $\varphi(s), \ s \geq 0 \quad \varphi(s) \leq 1$

$|\varphi(s)| \leq 1$

$\operatorname{Re} s > 0$

3. $\varphi(\infty) = P\{\xi = 0\}$

4. $\varphi_{\xi+\eta}(s) =$ при $\xi, \eta$ – нез.

$= \varphi_\xi(s) \cdot \varphi_\eta(s)$

5. $\varphi^{(k)}(s) = (-1)^k E\xi^k e^{-s\xi} = (-1)^k \int_0^{\infty} x^k e^{-sx} dF(x)$

$(-1)^k \varphi^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} x^k e^{-sx} dF(x)$

$(-1)^k \varphi^{(k)}(0) = E\xi^k = \alpha_k$

$E\xi = \alpha_1 = -\varphi'(0)$

$E\xi^2 = \alpha_2 = \varphi''(0)$

$D\xi = \varphi''(0) - (\varphi'(0))^2$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}(1-F(x))\,dx \ \underset{\text{по част.}}{=} \ \frac{1-\varphi(s)}{s} \xrightarrow[s \to 0]{} -\varphi'(0)$$

Итого: $\int_0^{\infty} (1-F(x))dx = E\xi$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}(1-F(x))dx = \frac{1-\varphi(s)}{s}$$

6. $\eta = a + b\xi$

$\varphi_\eta(s) = e^{-as}\varphi_\xi(bs)$

# Глава V Характеристические ф-ции

## §1 Определения, примеры, св-ва

/* $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

$\xi_1 = \begin{cases} -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases}$

$\xi_2 = \begin{cases} -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases}$

$\xi_3 = \begin{cases} -1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{cases}$

Они нез. попарно, но зав. в сов-ти. */

11.12.2012.

$\xi$ – сл. вел.

Def: Характеристическая ф-я:

$$f_\xi(t) = Ee^{i\xi t} = E\cos t\xi + iE\sin t\xi$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_\xi(x) = \sum_k e^{itx_k} p\{\xi = x_k\} \text{ – дискр.}$$

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx$$

$f_\xi(t) = P(e^{it})$, где $P$ - производящая ф-я.

$f(t) = \varphi(-it)$

**Свойства**

$f(t) = Ee^{it\xi} = E\cos t\xi + iE\sin t\xi$

1) $|f(t)| \le E|e^{it\xi}| = 1$

2) $f(0) = 1$

3) $\xi$ и $\eta$ - нез. сл. вел., то

$$f_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi}e^{it\eta} = f_\xi(t)\cdot f_\eta(t)$$

4) $\xi;\ f_\xi(t)$ $\quad \eta = a\xi + b, \quad a>0$

$$f_\eta(t) = e^{itb} f_\xi(at)$$

5) $f_{-\xi}(t) = E\cos t\xi - iE\sin t\xi = f_\xi(-t) = \overline{f_\xi(t)}$

6) $\xi_1 \stackrel{d}{=} \xi_2$ (одинаковое распр-е) $f_{\xi_1} = f_{\xi_2}$

$\xi_1, \xi_2$ - незав.

Р. $\eta = \xi_1 - \xi_2 \qquad f_\eta(t) = f_{\xi_1}(t)\cdot\overline{f_{\xi_2}(t)} = |f(t)|^2$

7) $f_\xi(t)$ - вещ. ф-я, $\Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$

$$f_\xi(t) = f_\xi(-t) = f_{-\xi}(t)$$

$f(t)$ - вещ. $\Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$

$f(t)$ - четн.

$\|$

$E\cos t\xi$

## Формулы обращения.

$f(t) \Rightarrow F(x)$

$$f(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x)$$

$\xi \quad p(x)$ - плотность

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}p(x)\,dx$$

(применим обр. преобр-е фурье).

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(t)\,dt}$$

при $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt < \infty$

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx_2} - e^{-itx_1}}{-it}f(t)\,dt$$

$F(x) = P\{\xi < x\}$

при $\int \frac{|f(t)|}{t}\,dt < \infty$

$\eta \sim N(a, \sigma^2)$ $\quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$f_\eta(t) = e^{iat} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$\eta \sim N(0,1)$ $\quad e^{-\frac{t^2}{2}}$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x)$$

$$f^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{ixt} dF(x)$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{i^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x) = E\xi^k$$

при $k=1$ $\quad E\xi = -if'(0)$

$k=2$ $\quad E\xi^2 = -f''(0)$

$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$, где $g(t) = \ln f(t)$

$E\xi - ?$ $\quad E\xi^2 - ?$ $\quad D\xi - ?$

## Разбор теста.

1. $A, B, \overline{A}, A \cap B, A \cup B$

Макс. число независимых?

Например, невозмож. 5 d

2. $F(x)$, $F^4(x)$, $G(x)$, $G^3(x)$

Ровно одна явл-ся ф-ей распр-я

Если $F$ – ф-я распр. $\Rightarrow F^n$ – ф-я распр.

Т.к. $F^n(x) = P\{\max\{X_1 \dots X_n\} < x\}$

Т.е. $F(x)$ – не подх.;
$G(x)$ – не подх.

Если $H$ – ф. расп $\Rightarrow H^3$ тоже
(ничего не портится).

$\Rightarrow$ ответ – $F^4(x)$

(Например, $F(x)$ – отриц. ф-я).

3. $p(x)$, $g(x)$, $p(x)g(x)$, $p(x)+g(x)$

Макс число плотностей?

Их не более трех.

$p(x) = g(x) = 1, \ 0 \le x \le 1$. $\quad \underline{3}$.

4. a) $E\xi = -3$, $E\xi^2 = 2$ ✗ $D\xi < 0$

b) $E\xi^2 = 0$, $E\xi^5 = 3$ ✗

c) $E\xi^2 = 5$, $E\xi^3 = 9$, $E\xi^4 = 12$ ✗

d) $E\xi^4 = 16$, $E\xi^5 = -32$, $E\xi^6 = 64$ + (верно для вырожд. в точке $-2$).

нер-во моментов

(5) $P_1(s) = s^3$ ✓ (вырожд. сл. вел $= 3$)

$P_2(s) = \frac{3}{2+s}$ — ($s=0$, вер-ть $>1$?)

$P_3(s) = s^2 \cdot \exp\{s-1\}$ ✓

$P_4(s) = \frac{2}{3}s^2 - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}s^4$ (вер-ть $-\frac{1}{6} < 0$?)

Последняя лекция!

## Критерий Пойа

13.02.2013.

1) $f(0) = 1$
2) $f(t)$ - вещ., чётн
3) непр.
4) выпукл. на $(0, \infty)$
5) $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$

$\Rightarrow$ $f(t)$ - хар-кая ф-ция.

До этого был обзор ~~предудыдущего~~ предыдущего семестра...

$f_n(t)$ - посл-ть хар. ф-ций

1) $f_n(t) \longrightarrow f(t) \sim F_n(x) \longrightarrow F(x)$ в $\forall$ (·) непр-ти $F_n$

где $f_n(t)$ соотв. $F_n(x)$ $\quad$ $f(t)$ - х. ф-ции
$f(t)$ соотв. $F(x)$ $\quad$ $F(x)$ - ф-ции распред.

похожее: если $f_n(t)$ сходится к ф-ции $f(t)$, кот. явл-ся непр. в 0, то $f(t)$ - хар. ф-ия.

20.02.2013.

$X_1, X_2 \ldots X_n, \ldots$ - распред.

$F_1(x), F_2(x), \ldots F_n(x) \ldots$

$f_1(t), f_2(t) \ldots f_n(t)$ - хар. ф-ции.

$X \Longleftrightarrow f(t)$ распред. однозначно задаётся х. ф-цией.

Ⓣ $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ $\Longrightarrow$

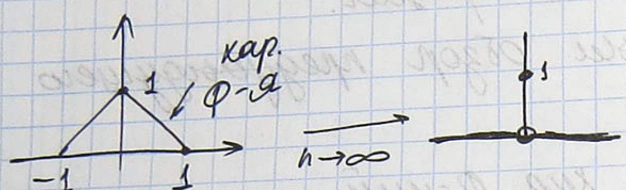
$f_n(t) \longrightarrow f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF(x)$

Ⓣ (обратное тоже верно)

$f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$

$\Rightarrow F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$

Пример.




$f_n(t)$ $a = \frac{1}{n}$

т.е. посл-ть хар.ф-ций может не сходиться!

Подумать: Может ли (обязана ли) посл-ть ф-ций распределения, сход. к нек. ф-ции, сход-ся обязательно к ф-ции распред.

$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$

$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

# Глава VI Предельные теоремы для сумм случайных величин.

## §1. Типы сход-ти сл. вел.

1) Сходимость по распр-ю.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ (d = distribution)

Сх. по распред., если $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$

2) Сх. по вероятности.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ (p = probability)

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) Сх. почти наверное

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} X$ (или a.s. = almost sure)

$P\{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\} = 1$

4) Сх. в среднем порядка r.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(r)} X$ $r > 0$

Сх. в ср., если:

1. $\exists\ E|X_n|^r < \infty$
2. $\exists\ E|X|^r < \infty$
3. $E|X_n - X|^r \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

T

$$\begin{tikzcd}
1.\ \boxed{X_n \xrightarrow{(r)} X} \arrow[d, Rightarrow, shift right, "\not" description] \arrow[rr, Leftrightarrow, "/" description] & & \boxed{X_n \xrightarrow{п.н.} X}\ 3. \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
2.\ \boxed{X_n \xrightarrow[r<s]{(s)} X} \arrow[u, Rightarrow, shift right] \arrow[rr, Rightarrow] & & \boxed{X_n \xrightarrow{P} X}\ 4. \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\not" description] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
& & \boxed{X_n \xrightarrow{d} X}\ 5. \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\not" description]
\end{tikzcd}$$

2⇒1 Нер-во для мом.: $(E|X|^r)^{1/r} \le (E|X|^s)^{1/s}$

2⇒4 $P\{|X| \ge \varepsilon\} \le \frac{E|X|^r}{\varepsilon^r}$

5⇏4 контр-пример: $X = \begin{cases} -1, & 1/2 \\ 1, & 1/2 \end{cases}$

$Y = -X$

$X_1, Y_1, X_2, Y_2$

Самый слабый тип — №5.

1,3) 0 —— 1 $x_0$ ; посл-ть: $X_n = 1$ на отрезке $[a, a+\frac{1}{n}]$

a – пр. край отрезка для $n-1$.

тогда $\to 0$

— — . — . . — .

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad n = 1, 2, \dots$

$a_k = EX_k$

$A(n) = ES_n = a_1 + \dots + a_n$

$\sigma_k^2 = DX_k$

$B_n^2 = DS_n$ нез. сл. в. $= \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

T (Леви)

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — посл-ть i.i.d. (= independent identically distributed) сл. вел. с $EX = a$ и $DX = \sigma^2$.

Тогда

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} < x \right\} - \Phi(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Док-во

$ES_n = an$; $DS_n = n\sigma^2$

$\frac{S_n - A(n)}{B_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$ $\quad a=0,\ \sigma^2=1$

$Y = \frac{X-a}{\sigma} \qquad EY = 0,\ DY = 1$

$$\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{n}}$$

$EX = 0$; $DX = 1$

$\frac{S_n}{\sqrt{n}} =: T_n \quad f(t) = Ee^{itx}$

$f_{T_n}(t) = \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$

$g_n(t) = \ln f_{T_n}(t) = n \cdot \ln f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$

$a = 0 \quad f'(0) = 0$

$f''(0) = -1$

$f(t) = f(0) + t \cdot f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + o(t^2)_{t \to 0}$ – разложим в ряд Тейлора

$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$

$\ln(1+\alpha) \underset{\alpha \to 0}{=} \alpha + o(\alpha)$

$n \ln\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)$ – взяли логарифм

$g_n(t) = -\frac{t^2}{2} + o(1)$

$\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$P\left\{\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi(x)$

$\sup_x \left| P\left\{\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} - \Phi(x) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

ч. т. д.

**Т** (А.М. Ляпунова)

Пусть $X_1, X_2 \ldots$ – посл-ть независ. сл. вел.

с мат. ож.: $a_k = EX_k$;

$\sigma_k^2 = DX_k$; $\gamma_k = E|X_k - a_k|^3 < \infty$

Тогда:

$$\sup_x \left| P\left\{\frac{S_n - A(n)}{B(n)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \le C \cdot L_n$$

где $L_n = \frac{\Gamma_n}{B_n^3}$ – дробь Ляпунова

$\Gamma_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$.

Док-во (не будет)

Ч. случай i.i.d. $L_n = \frac{n\gamma}{n^{3/2}\sigma^3} = \frac{\gamma}{\sigma^3\sqrt{n}}$

$C \approx 0{,}7655$

Зам-е

$$\left| P\left\{\frac{S_n - A(n)}{B(n)} < x\right\} - \Phi(x) \right| \le \frac{C_1 L_n}{1 + |x|^3}$$

~~§ Закон больших чисел~~

27.02 2013

$$^*\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \eta \sim N(0,1)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad f_n(t) \to e^{-t^2/2}$$

*

**Задача**

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ — незав. с.в.

$$\xi = \begin{cases} -1, & 1/2 \\ 1, & 1/2 \end{cases}$$

$\measuredangle\ \eta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{2^k}$, Найти: ~~вер-ть, сто~~:

$P\{\eta_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$

Ясно, что $H(x) \in [-1, 1]$

Подсказка: $\eta \sim U([-1,1])$ $\quad f_\eta(t) = \frac{\sin t}{t}$

см. док-во т. Леви.

---

$$\frac{S_n}{n^{1/2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\frac{S_n - A(n)}{B(n)} \sim \eta$$

$A(n) = ES_n$

$B^2(n) = DS_n$

Было:

$$\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \eta$$

т.е. $S_n \sim an + \eta\sigma\sqrt{n}$

## §2. Закон больших чисел

$\measuredangle\ \frac{S_n - ES_n}{n}$ — отн-е

**Т** (Чебышёва)

$X_1, X_2, \ldots$ — послед. независ. сл. вел. с мат. ожид. $a_1, a_2, \ldots$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$

Пусть $\sigma_k^2 \le c < \infty$. Тогда:

Данная посл-ть удовл. ЗБЧ.

Т.е $\frac{X_1 + \ldots + X_n - (a_1 + \ldots + a_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

Напомним: (сх. по вероятности)

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n - (a_1 + \ldots + a_n)}{n}\right| \ge \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

**Док-во.**

$$P\{|\xi - E\xi| \ge \varepsilon\} \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \le \frac{D(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2\varepsilon^2} \le$$

$$\le \frac{nc}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ч.т.д.

**Т** (Хинчина)

$X_1 X_2 \ldots$ — нез. од. расп. $\exists\ EX = a$

Тогда:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$$

Док-во (нет)

## ~~§3. Усиленный закон больших чисел.~~

## §3. Закон „0 или 1"

Лемма Бореля-Кантелли.

$A_1, A_2, \ldots$ – события

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ – то есть событие заключ. в том, что произой-дет бескон. число событий

Л (Бореля-Кантелли)

а) Если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, то $P(A_k) = 0$.

б) Если $A_1, A_2 \ldots$ – незав. и $\sum P(A_k) = \infty$, то $P(A) = 1$.

Т (Закон "0 и 1")

Если $A_1, A_2, \ldots$ – послед. незав. событий, то

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum P(A_k) < \infty \\ 1, & \text{если } \sum P(A_k) = \infty \end{cases}$$

## §4. Усиленный закон больших чисел.

$X_1, X_2 \ldots$ – удовл. УЗБЧ, если $\exists \beta_n$, т.ч.:

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $\qquad \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0$

Т1 (Колмогорова)

Пусть $X_1, X_2 \ldots$ – посл-ть незав. одинаково распред. сл. вел.

Тогда чтобы

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} a \iff E|X| < \infty \text{ и } EX = a.$$

Т2 (Колмогорова)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – посл-ть незав. сл. вел. с мат. ожид-ями $a_1, a_2, \ldots$ и дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$

Пусть вып-ся: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} < \infty$, тогда посл-ть удовл. УЗБЧ, т.е.

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - (a_1 + \ldots + a_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0.$$

## §5*. Асимптотические распределения экстремумов.

$X_1, X_2, \ldots$ – незав. од. расп. сл. вел.

$M(n) = \max\{X_1 \ldots X_n\}$

// для min: $Y_1 = -X_1, \ldots\ Y_n = -X_n$

$\min\{Y_1 \ldots Y_n\} = -\max\{X_1 \ldots X_n\}$ /

$P\{M(n) < x\} = F^n(x)$ $(\max < x \Leftrightarrow x_1 < x, \ldots x_n < x)$
ф-я распред.

$$P\left\{\frac{M(n) - a(n)}{b(n)} < x\right\} \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x)$$

Есть 3 типа семейств распределений:

1) $H_1(x) = \exp\{-\exp\{-x\}\}, \ -\infty < x < \infty$

2) $H_2(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\}, & -\infty < x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

$\alpha > 0$.

3) $H_3(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$G_k(x) = P\{Y < x\} = P\{-X < x\} = P\{X \geq -x\} =$
$= 1 - F(-x)$.

Т.е. для min классы будут: $1 - H_k(-x)$

## Глава VII. Цепи Маркова

08.03.2013.

$X_1, X_2, \ldots$ – нез. сл. вел.
$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$
$S_0 = 0,\ S_1 = X_1,\ S_2 = X_1 + X_2, \ldots$

пример

$S_0, S_1, S_2, \ldots$ – эти сл. вел. уже зависимые.

для незав. сл. вел.: $P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} =$
$= P\{X_1 < x_1\} P\{X_2 < x_2\}$

С зав. величинами перейти к одномерности не получится.

Теперь $S_i$ – просто сл. величины!

$S_{n+1} \mid S_0 = 0,\ S_1 = x_1, \ldots\ S_n = x_n$ $\qquad$ $S_{n+1} \mid S_n = x_n$

совпадают по распр-ю.

Т.е. предыдущей величины достаточно для определения текущей. (т.е. все не нужны).

$$P\{S_{n+1} = x_{n+1} \mid S_n = x_n, \ldots S_1 = x_1\} =$$
$$= \frac{P\{S_{n+1} = x_{n+1}, S_n = x_n, \ldots S_1 = x_1\}}{P\{S_n = x_n, \ldots S_1 = x_1\}}$$

Но можно проще:

$$= \frac{P\{S_{n+1} = x_{n+1}, S_n = x_n\}}{P\{S_n = x_n\}}$$

Осн. идея: зависимость не от всех предыдущих, а только от последнего.

$X_1, X_2, \dots$ – посл-ть сл. величин

$x_1, x_2, \dots x_N$ – зн-я, кот. эти сл. величины могут принимать.

Для простоты считаем, что принимаемые зн-я: $1, 2, \dots N$.

Def: $P\{X_{n+1} = \alpha_{n+1} / X_1 = \alpha_1, \dots X_n = \alpha_n\} = P\{X_{n+1} = \alpha_{n+1} / X_n = \alpha_n\}$ $\forall \alpha_i \in \{1, \dots N\}$

$P\{X_1 = \alpha_1, \dots X_n = \alpha_n\} \neq 0$

тогда ~~это~~ посл-ть $X_i$ наз-ся цепью Маркова с конеч. числом состояний.

Вместо $\alpha_i$ и $\alpha_j$ будем писать $i$ и $j$ (тоже для простоты).

$P\{X_{n+1} = i / X_n = j\} = P_{ij}$

Мы будем $\angle$ однородные цепи Маркова, когда переходные вер-ти не зависят от номера шага (от $n$).

$$\Pi = \begin{pmatrix} P_{11} \dots & P_{1N} \\ P_{21} \dots & P_{2N} \\ \dots & \\ P_{N1} \dots & P_{NN} \end{pmatrix}$$ – матрица переходов

Нач. величина (исходная) – $X_0$.

М. стохастическая, если ~~все~~ эл-ты – вер-ти;

1) $P_{ij} \geq 0$ 2) $\sum_{j=1}^{N} P_{ij} = 1$

Получим стохастическую м. переходов

$p(n) = (P\{X_n = 1\}, P\{X_n = 2\}, \dots P\{X_n = N\})$

строка, соотв. распр-ю $X_n$.

Нач. сост-ю соотв-ет вектор из нулей и одной единицы.

$p(0), p(1), \dots$

$\Pi$.

$\Pi^n$ ($n$-я степень) – м. $N \times N$, переход из $i$ в $j$ за $N$ шагов.

Начальные данные: $p(0), \Pi$.

Почему достаточно?

$p(1) = (P\{X_1 = 1\}, \dots P\{X_1 = N\})$

$P\{X_1 = j\} = P\{X_1 = j / X_0 = 1\} P\{X_0 = 1\} + \dots + P\{X_1 = j / X_0 = N\} P\{X_0 = N\} =$ (т.е. ф-ла полной вер-ти).

$= \sum_{i=1}^{N} P_{ij} \cdot P_i$, где $P_{ij} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}$, $P_i = P\{X_0 = i\}$

$p(1) = p(0) \cdot \Pi$

$\dots$

$p(n+1) = p(n) \cdot \Pi$

$(P\{X_{n+1} = 1\}, \dots P\{X_n = N\})$

$$\boxed{p(n) = p(0)\cdot \Pi^n}$$

Свойства:

1) $p(n+m) = p(m)\Pi^n = p(0)\cdot\Pi^{n+m}$

2) $\Pi^{n+m} = \Pi^n \cdot \Pi^m$

Обозн: $\Pi^n = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$

Def: состояние $j$ достижимо из сост. $i$, если $\exists n$: $p_{ij}^{(n)} > 0$

Def: $i$ и $j$ — сообщающиеся, если $i$ дост. из $j$, $j$ дост. из $i$.

Def: сост. $j$ — существенное, если оно дост. из $\forall$ сост. $i$, дост-ого из $j$.

Сост-я можно разбить на классы сущ. сост-ий.

Def: Если класс сущ. сост. сост. из одного сост-я, то оно наз-ся поглощающим.

Def: Если класс один, то цепь маркова неразложима.

## §2 Простейшая эргодическая теорема

$$p(n+1) = p(n)\cdot\Pi$$

$\tilde{p}$ — строка из вер-тей;

$\tilde{p} = (p_1, \dots p_N)$

$\tilde{p} = \lim p(n) = (\lim P\{X_n = 1\}, \dots \lim P\{X_n = N\})$

(X) Независимо от нач. состояния $X_0$, эти пределы $\exists$ и не зависят от $X_0$.

$p(n+1) \to \tilde{p} = \tilde{p}\cdot\Pi$

$\tilde{p}(\Pi - E) = 0$

(T)

$N = 2$

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} p_{11} + p_{12} = 1 \\ p_{21} + p_{22} = 1 \end{matrix} \qquad p_{ij} > 0$$

$$P\{X_{n+1} = 1\} = P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\}\cdot P\{X_n = 1\} + P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\}\cdot P\{X_n = 2\}$$

$$p_{n+1}(1) = p_n(1)\cdot p_{11} + (1 - p_n(1))\cdot p_{21}$$

$|q| < 1$

$$p_{n+1}(1) = p_{21} + p_n(1)\underbrace{(p_{11} - p_{21})}_{=q} = p_{21} + q\,p_n(1)$$

$$p_{n+1}(1) - c = p_{21} + q(p_n(1) - c) - c + qc$$

$$p_{21} = -qc^* + c^* = c^*(1-q) = c^*(p_{12} + p_{21});$$

(берем $c^*$) $\qquad c^* = \dfrac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}$

$$p_{n+1}(1) - c^* = q(p_n(1) - c^*) = \ldots = q^n(p_1(1) - c^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(т.к. $|q|<1$)

Итого: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(1) = c^* = \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n(2) = 1 - c^* = \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}$

$$\tilde{p} = \left(\frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}}, \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}}\right)$$

13.03.2013.

## §3. Возвратные состояния цепи Маркова.

1, 2, … N – состояния цепи Маркова.

$p_{ij}$ – вер-ть перехода за 1 шаг.

$p_{ij}^{(n)}$ – вер-ть перехода за n шагов.

$f_j^{(n)}$ – вер-ть того, что цепь через n шагов впервые вернется в сост-е j.

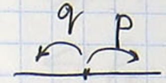
$n = 1, 2, \ldots$

$f_j^{(n)} = P\{X_1 \neq j, \ldots X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = j\}$ – вер-ть возвращ-я ровно через n шагов.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = 1$ – состояние j возвратно

$< 1$ – сост-е j невозвратно.

(т.е. j возв., если вернется хоть когда-нибудь)



$f_j^{(2)} = pq + qp = 2pq$

$p_{jj}^{(n)} = P\{X_n = j \mid X_0 = j\}$

j – возвратно, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ – т.е. ряд расх.

невозвратно, если … $< \infty$.

$p_{jj}^{(0)} = 1$ – положим. ; $f_j^{(0)} = 0$ – положим

$F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_j^{(n)} \cdot s^n$

$P(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n$

– производящие ф-ции.

$$\begin{cases} p_{jj}^{(0)} = 1 & | \cdot s^{(0)} \\ p_{jj}^{(n)} = f_j^{(0)} \cdot p_{jj}^{(n)} + f_j^{(1)} \cdot p_{jj}^{(n-1)} + f_j^{(2)} \cdot p_{jj}^{(n-2)} + \ldots + f_j^{(n)} p_{jj}^{(0)} & | \cdot s^{(n)} \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{\infty}$ :

$P_j(s) = 1 + P_j(s) F_j(s)$

↑ свертка

$F_j(s) = \sum f_j^{(n)} s^n$

$F_j(s) = \frac{P_j(s) - 1}{P_j(s)}$

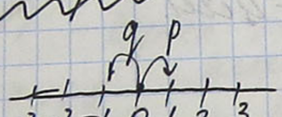
$\boxed{P_j(s) = \frac{1}{1 - F_j(s)}}$

$\lim_{s \to 1} P_j(s) = P_j(1) = \lim_{s \to 1} \frac{1}{1 - F_j(s)}$

Если $F_j(s) = 0 \Rightarrow \lim = \infty$ сост-ие невозвр.

$F_j(s) > 0 \Rightarrow \lim =$ конеч. число. сост-е возвр.

Примеры

1) 


$f^{(2)} = 2pq$

$f^{(4)} = 2p^2q^2$

2) Бернулли в 2n испыт. ⇒ ровно n успехов.

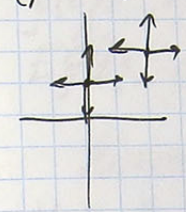
$\sqrt{npq}\, P_n(m) \approx \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$

$n \to 2n$, $m = n$ $\quad p = \frac{1}{2}$ $\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$

$P_{2n}(n) \approx \frac{c}{\sqrt{n}}$

$\sum P_{2n}(n) = \infty$! т.е. процесс возвратный

Симм. блуждание по прямой – возвр. $(p = \frac{1}{2})$



$\frac{c}{\sqrt{n}} \cdot \frac{c}{\sqrt{n}} \approx \frac{c_1}{n}$

Пример про мужа:)

Одномерн. – возвр.; деревня

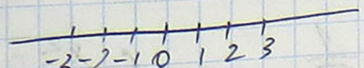
Двумерн. – возвр. маленький городок

Трехмерн.: – невозвр. мегаполис.

$\frac{c_2}{n^{3/2}}$, $\sum \frac{c}{n^{3/2}} < \infty$

Бонусная информация:

§ 4*. Блуждания по целочисленной решетке.




$$\tau^{(1)} = \begin{cases} 1 & p \\ 1+T^{(1)}+T^{(2)} & q \end{cases}$$

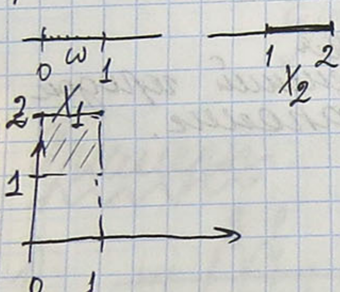
$T^{(1)}, T^{(2)}$

20.03.2013.

## §5. Случайные процессы

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Пример.




$\xi(t)$ — случайный процесс, $t \in T$

Обычно $T$ — время $T = \{1, 2, \dots n\}$

или $T = \{1, 2, 3 \dots\}$

$T = [0, \infty)$

Обозн: $\xi_t(\omega)$

$A(t) = E\xi(t)$ — мат. ожид.

$D(t) = D\xi(t)$ — дисперсия

$B(s,t) = E\xi(t)\xi(s)$ — ков. ф-я

$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta = cov(\xi, \eta)$

Всегда можем центрировать:

$\hat{\xi}(t) = \xi(t) - A(t)$

$E\hat{\xi}(t) = 0$ и второе слаг. исчезнет

Конечномерные распределения.

$\forall t_1, t_2 \dots t_n \in T$

$P\{\xi_{t_1} < x_1 \dots \xi_{t_n} < x_n\}$

Def: $\xi_t$ — с независимыми приращ., если

$\forall t_1 < \dots < t_n$

$\xi_{t_1}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ — независимы.

$F_t(x) = P\{\xi_t < x\}$

$\Delta$ $\xi_{t_1}$ $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$

$\xi_{t_1}$ $\xi_{t_2}$

$\xi_{t_2} = \xi_{t_1} + (\xi_{t_2} - \xi_{t_1})$

т.е. достаточно разобраться только с одномер. случаем (но только для пр. с незав. прираш-ями!)

Def: $\xi_t$ – пр. с нез. однородными (стационарными) приращениями – это пр. с нез. пр., если

$\xi_{t+\tau} - \xi_t$ – не зав. от $t$., т.е.:

$\xi_{t+\tau} - \xi_t \overset{d}{=} \xi_\tau$

$\triangle$ $\xi_1, \dots \xi_n$ – нез. сл. вел.

$S_0 = 0$, $S_1 = \xi_1$, $S_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

Если $\xi_1 \dots \xi_n$ – незав., то и прираш. будут незав.

Если одинак. распр-е – то однородные.

$A(t) = E\xi_t \quad A(s) = E\xi_s$

$\xi_s = \xi_t + (\xi_s - \xi_t)$

$E\xi_s = E\xi_t + E(\xi_s - \xi_t)$

$D(s) = D(t) + D(\xi_s - \xi_t)$

$A(s) = A(t) + A(s-t)$

$A(t_1 + t_2) = A(t_1) + A(t_2)$

$D(t_1 + t_2) = D(t_1) + D(t_2)$

Def: Пр. наз-ся стационарным (в узком смысле) пр., если

$(\xi_{t_1+\tau}, \dots \xi_{t_n+\tau}) \overset{d}{=} (\xi_{t_1} \dots \xi_{t_n}) \qquad \tau > 0$

Стац. прод.

$\left.\begin{array}{l} A(s) = const \\ D(s) = const \end{array}\right\}$ если существуют!

$B(s,t) = E\xi_s\xi_t = E\xi_0\xi_{t-s} = B(t-s) \qquad s<t$

Def: Пр. наз-ся стационарным (в широком смысле) пр., если

1) $A(t) = E\xi_t = const$ – здесь предполагается сущ-е моментов.

2) $B(s,t) = B(t-s)$

Эти два класса пр-ов только пересекаются! Один не содержится в другом.

Пример

~~$A(t) = E\xi_t = const$~~ $\quad \xi_1, \dots \xi_n$

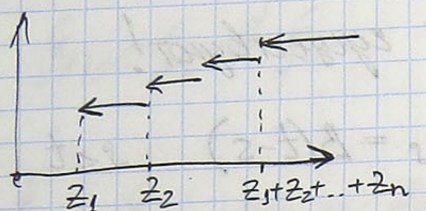
$B \qquad E\xi_k = const = c_1 \qquad D\xi_k = c_2$

Def: $\xi_t$ - пуассон. процесс, $t \geq 0$, если
$\xi_t$ - пр. с незав. однород. приращ-ями,
т.ч.:

1) $\xi_0 = 0$, $\lambda > 0$
2) $\xi_t \sim \Pi(\lambda t)$, т.е.:

$$P\{\xi_t = m\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}$$

$m = 0, 1, 2, \dots$




$z_k \sim E\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

~~$Ez_k$~~ $E\xi_k = \frac{1}{\lambda}$

$1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$

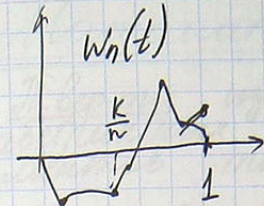
Def: ~~$W$~~ $w_t$ - винеровский пр. ~~если~~ $w_t$ - пр. с нез. однород. приращ., и:

1) $w(0) = 0$;
2) $w(t) \sim N(0, t)$ $\quad t \in [0, +\infty)$

Пример. $E\xi_k = 0$; $D\xi_k = 1$

$S_0 = 0$. $\quad S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$\Delta$ $[0,1]$ в точке $\frac{k}{n}$ ставим $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$



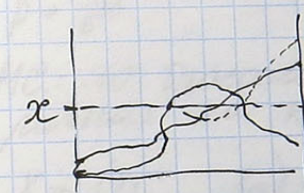

если теперь $n \to \infty$

$$W_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} W(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

более того, $H(W_n(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(W(t))$

Пример

$$P\left\{\frac{\max_{1\leq k\leq n} S_k}{\sqrt{n}} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\{\sup_{0\leq t\leq 1} w(t) < x\}$$




$P\{\sup w(t) \geq x\}$

можем отразить отн-но прямой.

$$P\{\sup_{0\leq t\leq 1} w(t) \geq x\} = 2P\{w(1) \geq x\} = 2(1 - \Phi(x))$$

т.е. $P\{\sup < x\} = 2\Phi(x) - 1$, $x \geq 0$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

# Математическая статистика

<u>Т. вер-ти</u> изучает мат модель абстрактных случайных экспериментов так: 27.03.2013.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – дано.

Нужно найти: $P(B)$, $E\xi$ и т.д.

<u>Мат. статистика</u> – изучает модели абс. случайных экспериментов.

Имеются данные;
$(\Omega, F, P)$ – модель
задача: проверить соответствие данных и модели.

<u>Пример.</u> ТВ: Найти $P$ получить 10 „6" при бросании симм. кости.

$\Omega$ – набор из 10 чисел.
$P = \frac{1}{6^{10}}$

МС.: 10 бросаний кости, 10 „6". Вопрос: симметричная ли кость?

$X = (X_1, \dots X_n)$ – выборка объема $n$.
$X_i$ – н.о.р.с.в. с ф.р. $F$

## <u>Нек. задачи МС</u>

$X = (X_1, \dots X_n)$ $F$ – выборка

1) Оценивание ф-ции р. $F$.
2) Оценивание парам-ов

2.1) точечное оцен. (рез-т — (·) в парам. пр-ве) кот. мы считаем приближ. для $\theta$

$\theta \in \Theta$ — парам. пр-во.

2.2) $\Theta \subset R$ доверит. интервалы

$(\underline{\theta_n}, \overline{\theta_n})$ $\quad \underline{\theta_n} < \overline{\theta_n}$ — сл. ф-ции

$\underline{\theta_n} = \underline{\theta_n}(x)$; $\overline{\theta_n} = \overline{\theta_n}(x)$

Интервал $(\underline{\theta_n}, \overline{\theta_n})$ с большой вер-тью накрывал бы $\theta$.

3) Оценивание ~~пр~~ пар-ов линейных моделей

## Проверка гипотез.

Гипотеза — предпол. о ~~ф-ц~~ расп $F$

$F(x) = \Phi(x)$

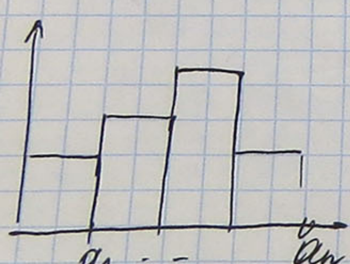
03.04.2013.

$x_1 \ldots x_n$ — выборка

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_k < x\}}$$ — эмпирическая ф-я распред.

$EF_n(x) = F(x)$

$DF_n(x) = \frac{1}{n}F(x)(1-F(x))$



— гистограмма.

$m_1$
$m_2$
$m_3$
$\vdots$

$x_1 \ldots x_n \qquad X_1 \ldots X_n$

$$\frac{F(x) \approx F_n(x)}{F(x,\theta)} \qquad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} - N(a, \sigma^2)$$

## § Вариационный ряд

(Важно! его тематика :)).

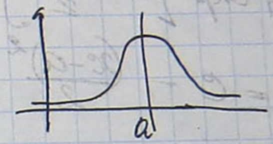
17.04.2013.

$\overline{X} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ — выборочное среднее

$E\overline{X} = \alpha_1 = EX$ — несмещ. оценка

$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} x_l^k$

$\hat{a} = \overline{X}$



$L(X_1 \ldots X_n)$ — статистика.

$\hat{a} = L(X_1 \ldots X_n)$ — м. ожид.

1) $E\hat{a} = a \Rightarrow$ оценка несмещ.

$E\overline{X} = a$.., т.е. $\overline{X}$ (выб. среднее) — несмещ. оценк

Смещ. оценка:

дисперсия смещ.: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$

несмещ.: $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2$

Т.е. св-во оценки — несмещенность.

2) $\hat{a}_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} a$

Если вып-ся, то оценка состоятельная.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p(x,\theta)\,dx$$ — информационное кол-во

$$\sum_k \left(\frac{\partial \ln p_k(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 p_k(\theta)$$

Пример:

$X \sim N(a, 1)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2}\right\}$$

$$\ln p(x) = c - \frac{(x-a)^2}{2}$$

$$\frac{\partial \ln p(x,a)}{\partial a} = x - a$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx = DX = 1$$

$$\Rightarrow \quad D\hat{a}_n \geq \frac{1}{n}$$

$$D(\overline{X}) = D\frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 1 = \frac{1}{n}$$

Упр. $p_k = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k = 1, 2, \ldots$

Д-ть: $\hat{\lambda} = \overline{X}$ (Аналогично, но вместо $\int$ будет $\sum$)

25.04.2013.

$\hat{\theta} = \theta(X_1 \ldots X_n)$

$X_1, \ldots X_n$

$x_1, \ldots x_n$ — числа.

$E\theta = a$

Стараемся выбрать оценку с наименьшей дисперсией.

Но если оценок очень много?

$$D\hat{\sigma} \geq \frac{c}{n}$$

## Методы оценивания неизвестных параметров.

### 1) Метод моментов.

$a = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$

$\alpha_k = EX^k$

$\hat{a} = f(\hat{\alpha}_1, \ldots \hat{\alpha}_k)$ т.е. подставляем выборочные моменты

$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$; $\dfrac{X_1^k + \ldots + X_n^k}{n}$

$e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ $\hat{\lambda} = \overline{X}$ — можем брать так.

$\lambda = EX$

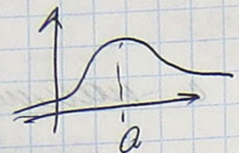
2) Метод максимального правдоподобия

$X \sim N(a,1)$

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2}\right\}$

$\hat{a}=\overline{X}$

$\hat{a}=X_{n/2,\,n}$




$x_1 \dots x_n$

$p(x,\theta)$

Набору соотв-ет плотность.

$p(x_1,\theta)\cdot p(x_2,\theta)\cdot \underset{n}{\ldots} \cdot p(x_n,\theta) =: L(x_1 \ldots x_n,\theta)$

$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2\right\}$

Взяли $\ln L$: $C-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$

$(\ )'_a: -\cancel{\frac{2}{2}}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)=0$

т.е. $a=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}$

т.е.: $\hat{a}=\frac{(X_1+\ldots+X_n)}{n}$

Если получилось: $\theta=R(x_1 \ldots x_n)$

То статистику берем: $\hat{\theta}=R(X_1 \ldots X_n)$

Δ $p_n=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}$ $n=0,1,2,\ldots$ $\hat{\lambda}=\overline{X}$

$k_1,\ k_2,\ \ldots\ k_n$

$x_1\ \ x_2\ \ldots\ x_n$

$p_{k_1}\cdot\ldots\cdot p_{k_n}=\frac{e^{-\lambda n}\cdot\lambda^{k_1+\ldots+k_n}}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!}=:L_n$

$\ln L_n=-\ln(k_1!\ldots k_n!)-\lambda n+(k_1+\ldots+k_n)\ln\lambda$

$(\ )'_\lambda=-n+(k_1+\ldots+k_n)\frac{1}{\lambda}=0$

$\lambda=\frac{k_1+\ldots+k_n}{n}$

т.е.: $\hat{\lambda}=\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

3) Доверительный интервал

$L_1(X_1 \ldots X_n)$

$L_2(X_1 \ldots X_n)$

$x_1 \ldots x_n$

$L_1<L_2$ $(L_1,L_2)$

$1-\alpha$

$P\{L_1<\theta<L_2\}\geq 1-\alpha$

$X_1 \ldots X_n \sim N(a,1)$ — один неизв. пар-р!

$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$

$E\overline{X} = a$ $\qquad \frac{X_1 + .. + X_n - an}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$D\overline{X} = \frac{1}{n}$

Мы знаем:

если $X_1 .. X_n \sim N(a, 1)$

$X_1 + .. + X_n \sim N(an, n)$

$$P\{ \alpha_1 \le \frac{X_1 + .. + X_n - an}{\sqrt{n}} \le \alpha_2 \} = \Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)$$

, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$$P\{ X_1 + .. + X_n - \alpha_2\sqrt{n} \le an \le X_1 + .. + X_n - \alpha_1\sqrt{n} \} =$$

$$= \Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1) =$$

$$P\{ \frac{X_1 + .. + X_n}{n} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{n}} \le a \le \frac{X_1 + .. + X_n}{n} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{n}} \}$$

$$\left(\overline{X} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{n}} ; \overline{X} - \frac{\alpha_1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1)$

если $\alpha_2 = 1{,}96$, $\alpha_1 = -1{,}96$, то

$\left(\overline{X} - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}\right)$ вер-ть попадания в интервал будет $p = 0{,}95$ – уровень доверия.

Отличия довер. интервала от толерантного:

$X_1, X_2, \ldots X_n$

$x_1, x_2, \ldots x_n$

$F(x, \theta)$

$(L_1(X_1 \ldots X_n),\ L_2(X_1 \ldots X_n))$

Теперь ищем не вер-ть того, что наблюдение накрывается интервалом;

а вер-ть того, что вновь пришедшее значение попадёт в интервал:

$P(L_1 < x_{n+1} < L_2) \ge 1 - \alpha$

$X_1 \ldots X_n$

$X_{1,n} \le \ldots \le X_{n,n}$ – вар. ряд.

$P\{ X_{1,n} \le X_{n+1} \le X_{n,n} \}$

↑ новое значение

Вар. ряд: $X_{1,n+1} \le \ldots \le X_{n+1,n+1}$

т.е. новый $X_{n+1}$ не должен быть min и max в новом ряду, т.е.:

$$P\{ X_{1,n} \le X_{n+1} \le X_{n,n} \} = \frac{n-1}{n+1}$$

# § Проверка статистических гипотез.

$H_0$ – осн. гипотеза;
$H_1$ – альтернатива

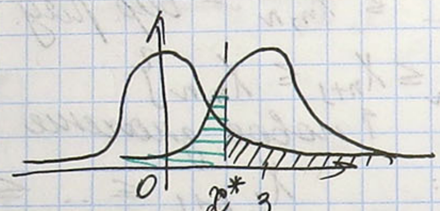
| | $H_0$ | $H_1$ |
|---|---|---|
| $H_0$ | + | ошибка I рода |
| $H_1$ | ошибка II рода | + |

$H_0$: $X \sim N(0,1)$
$H_1$: $X \sim N(3,1)$

Гипотеза - простая: $\theta=0$
$\theta=3$ - альтернатива.
сложная: $\theta\in[0,2]$
$\theta\notin[0,2]$ - альтерн.

$\overline{X}$

$H_0$: $\overline{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$
$H_1$: $\overline{X} \sim N(3, \frac{1}{n})$




$\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

$\overline{X} > x^* \Rightarrow H_1$
$\overline{X} \le x^* \Rightarrow H_0$
$(x^*, \infty)$ $H_1$
$(-\infty, x^*)$ $H_0$

/// – вер-ть ошибки I рода.
≡ – вер-ть ошибки II рода.

Т.е. нужно подобрать это $x^*$.

$P\{H_1|H_0\} \le \alpha$ – фиксируется $\alpha=0,05$
$\alpha$ – уровень значимости.

Будем 4 дополнения к /// и ≡ – мощности критерия.

$1 - P\{$ошибки II рода$\}$ = мощность.

## Разбор теста.

① $F(x)$
$F^2(x)$
$F^4(x)$
$\frac{F^2(x)+F^4(x)}{2}$

Если $F(x)$ – ф.р. $\Rightarrow F^2(x)$ ф.р. $\max(X_1, X_2)$

$\sum p_k F_k(x)$ – ф.р.
$\begin{cases} \sum p_k = 1 \\ p_k \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow F(x)$ – не ф.р. ⓐ

② ! max. плотн. распр-я

$p(x)$ $p^2(x)$ $\max\{p^3(x), p^4(x)\}$ $\min\{1, p(x)\}$

$p(x) \equiv 1$ на $[0,1]$

ответ (d)

(3) max хар. ф-ций?

$f(t) \quad f(t)-1 \quad 2f(t)-1 \quad \cos(f(t)-1)$

$f(0)=1 \Rightarrow$ не 4 шт.

3 шт: $f(t) \equiv 1$

$P\{\xi=0\}=1$

(c)

(4) Наиб. мат. ожид.?

$e^{-2it} \quad \cos^7 t \, \cos^{11}(2\pi t) \quad \frac{1}{(1+19|t|)^2} \quad e^{\frac{it}{2}}$

$E<0$ $\quad E=0$ (т.к. ф-я веществ; распр-е — симметричное). $\quad E=0 \quad E>0$

$-2 \qquad \frac{1}{2}$

(5) Сколько произв. ф-ций?

$s^2 \cdot e^{\pi(s-1)}$ ✓

$-e^{2(e^{s-1}-1)}$ ✓

$\frac{e^{s-1}+2s+1}{4}$ ✓

$\frac{e^{\frac{2s-2}{\ldots}}}{2-s}$ ✓

$e^{\lambda(s-1)}$ — произв. ф-я

$s^k$ — пр.ф вырожд. величины $=k$

если $P(s)$, $Q(s)$ — пр.ф.

$\Rightarrow P(Q(s))$ — пр. ф-я.