Экстремальные задачи: задачи с решениями (курс "Экстремальные задачи", 321 – 324 и 341 – 345 группы, 2004/2005 учебный год, проф. В.Н.Малозёмов)

Богатов Алексей, 345

25 января 2005 г.

Версия 2.00
Дата последнего обновления: 25 января 2005 года

Список непроверенных решений (список 1) – 28 шт.
1.1, 1.3, 1.6, 1.7, 1.10, 1.11, 1.14, 1.15, 1.16, 1.18, 1.19, 1.21, 1.23,
2.1, 2.3, 2.7, 2.8, 2.10, 2.14, 2.18,
3.2, 3.3, 3.6, 3.7, 3.14, 3.15, 3.18, 3.22

Список проверенных решений (список 2) – 32 шт.
(Решения, одобренные или предложенные В.Н.Малозёмовым)
1.2, 1.4, 1.5, 1.8, 1.9, 1.12, 1.13, 1.17, 1.20, 1.22, 1.24,
2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.9, 2.11, 2.13, 2.15, 2.16, 2.20,
3.1, 3.5, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.13, 3.16, 3.17, 3.20, 3.21

Список задач, пока приведенных без решений (список 3)

	Часть 1	Часть 2	Часть 3
*	—	—	—
без *	—	2.12	3.12, 3.19

Список задач, которых не будет на экзамене (их никто не решил)
2.19, 3.4

Благодарности:
Сабитову Рамису – за множество предоставленных решений
Иванову Антону – за решения и ценные идеи
Дубчук Николаю – за решение задачи 3.7
неизвестному автору старшего поколения – за хорошие идеи
(хотя и ошибки у него встречаются)

И, конечно, Василию Николаевичу Малозёмову :)

Документ подготовлен с использованием MiKTEX 2.2.

Реклама

Того, кто найдет в каком-либо решении (и тем более условии) ошибку и первым сообщит об этом на aobogatov@list.ru, ждет сюрприз!

1 Линейные экстремальные задачи

1.1 Задача Ферма
Вырезать квадратные уголки квадратного листа так, чтобы получилась коробка наибольшего объема.

Решение.
Пусть a – сторона квадрата, b – сторона уголка, V – объем коробки. Ясно, что $0 < b < a$.
[Здесь должна быть картинка]

$$V = (a-b)^2 b = (b^2 - 2ab + a^2)b = b^3 - 2ab^2 + a^2 b$$

$$V = V(b);\;\; V'(b) = 3b^2 - 4ab + a^2$$

$$V'(b) = 0 \iff b = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3a^2}}{3} = \frac{2a \pm a}{3}$$

$b = \frac{a}{3}$ – координата точки максимума, поскольку
$V'(b) > 0$ на $[0, \frac{a}{3})$, $V'(b) < 0$ на $(\frac{a}{3}, a)$.
[Здесь должна быть картинка, показывающая изменение знака производной]
Ответ: сторона уголка должна быть в 3 раза меньше стороны квадрата.

1.2* Задача Кеплера

В шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение.

Пусть V – объем цилиндра, r – радиус основания, h – высота цилиндра, R – радиус описанного шара.

[Здесь должна быть картинка]

$$V = \pi r^2 h$$

$$4r^2 + h^2 = 4R^2 \;\Rightarrow\; h = 2\sqrt{R^2 - r^2} \;\; (0 < h < 2R,\; 0 < r < R)$$

$$V = V(r);\;\; V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V'(r) = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} + 2\pi r\frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$V'(r) = 0$ при $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$

$V'(r) > 0$ на $(0, \sqrt{\frac{2}{3}}R)$, $V'(r) < 0$ на $(\sqrt{\frac{2}{3}}R, R)$

[Здесь должна быть картинка, показывающая изменение знака производной]

$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$ – координата точки максимума

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}}R$$

Ответ: $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R,\;\; h = \frac{2}{\sqrt{3}}R,\;\; V_{max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3.$

1.3 Задача о шатре

Найти прямой круговой конус наибольшего объема при заданной площади боковой поверхности.

Решение.

Пусть V – объем конуса, r – радиус основания, h – высота конуса,
l – образующая конуса, S – площадь боковой поверхности.

[Здесь должна быть картинка]

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;\; S = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \;\Rightarrow\; h = \frac{\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r};\; r \in (0, \sqrt{\frac{S}{\pi}})$$

$$V = \frac{1}{3}r\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4};\quad V'(r) = \frac{1}{3}\,\frac{S^2 - 3\pi^2 r^4}{\sqrt{S^2 - \pi^2 r^4}}$$

$$V'(r) = 0 \iff r = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}};\; V'(r) > 0 \text{ на } \left(0, \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}\right);\; V'(r) < 0 \text{ на } \left(\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$$

$r = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$ – координата точки максимума

Ответ: $r = \sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}},\quad V_{max} = \ldots.$

1.4*

$$\varphi(x) := \sum_{i=1}^{m} [f_i(x)]_+ \to \inf_{x \in P} \qquad (1)$$

Построить эквивалентную экстремальную задачу с линейными ограничениями.

Решение.
Рассмотрим задачу

$$\psi(x,u) := \sum_{i=1}^{m} u_i \to \inf_{x \in P} \qquad (2)$$

$$u_i \geq f_i(x), \;\; u_i \geq 0, \;\; i \in 1:m$$

Докажем, что задачи (1) и (2) эквивалентны.
Пусть $x \in P$; возьмем $u_{0_i} = \max\{f_i(x), 0\}$.
Тогда (x_0, u_0) – план задачи (2) и $\psi(x_0, u_0) = \varphi(x_0)$.
Пусть (x_0, u_0) – план задачи (2). Тогда x_0 – план задачи (1) и при этом

$$\varphi(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \max\{f_i(x), 0\} \leq \sum_{i=1}^{m} u_{0_i} = \psi(x_0, u_0)$$

Что и требовалось доказать.

1.5*

$$-|x| \to \inf, \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$-(u+v) \to \inf, \quad x = u - v, \quad u, v \geq 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Доказать, что задачи не эквивалентны.

Доказательство.
Рассмотрим план второй задачи: $u = v = 111 \;\Rightarrow\; -(u+v) = -222$

$$|x| \leq 1 \;\Rightarrow\; -|x| \geq -1 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ не существует такого плана x_0 первой задачи, что

$$-|x_0| \leq -(u+v)|_{u=v=111}$$

Значит, задачи не эквивалентны по определению.

Что и требовалось доказать.

1.6

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} P_i$$

Доказать, что

$$\inf_{x \in P} f(x) = \inf_{i \in 1:k} \inf_{x \in P_i} f(x)$$

Доказательство.
Инфимум конечного множества есть его минимум (разумеется, он может быть бесконечным).

$$\forall y \in P_i \;\; f(y) \geq \inf_{x \in P_i} f(x) \;\Rightarrow\; \forall y \in P \;\; f(y) \geq \min_{i \in 1:k} \inf_{x \in P_i} f(x) \;\Rightarrow\; \inf_{y \in P} f(y) \geq \min_{i \in 1:k} \inf_{x \in P_i} f(x)$$

$$\forall i \in 1:k \;\; \inf_{x \in P_i} f(x) \geq \inf_{x \in P} f(x) \;\Rightarrow\; \min_{i \in 1:k} \inf_{x \in P_i} f(x) \geq \inf_{x \in P} f(x)$$

Что и требовалось доказать.

1.7 Доказать, что

$$A[M,P] \times B[P,N] = \sum_{k \in P} A[M,k] \times B[k,N]$$

Доказательство.

$$\Big(A[M,P] \times B[P,N]\Big)[i,j] = \sum_{k \in P} A[i,k] \times B[k,j]$$

$$\Big(\sum_{k \in P} A[M,k] \times B[k,N]\Big)[i,j] = \sum_{k \in P} \Big(A[M,k] \times B[k,N][i,j]\Big) = \sum_{k \in P} \Big(A[i,k] \times B[k,j]\Big)$$

Что и требовалось доказать.

1.8* $A[M,N]$ – матрица с линейно независимыми столбцами.

$$M_0 \subset M: \quad \forall i \in M \setminus M_0 \quad \exists u_i \mid A[i,N] = u_i[M_0] \times A[M_0,N]$$

Доказать, что столбцы матрицы $A[M_0,N]$ линейно независимы.

Доказательство.
Пусть не так, т.е. $\exists x[N]: \ \ A[M_0,N] \times x[N] = \mathbb{O}[M_0]$.
Покажем, что тогда $A[M,N] \times x[N] = \mathbb{O}[M]$.

$$i \in M \setminus M_0: \ \ A[i,N] \times x[N] = (u_i[M_0] \times A[M_0,N]) \times x[N] =$$

$$= u_i[M_0] \times (A[M_0,N] \times x[N]) = \langle u_i[M_0], \mathbb{O}[M_0] \rangle = 0$$

Таким образом, все элементы вектора $A[M,N] \times x[N]$ равны 0, что противоречит условию линейной независимости столбцов матрицы $A[M,N]$.

Что и требовалось доказать.

1.9* Решить задачу линейного программирования:

$$v \to \inf$$

$$u[k] - v = a[k], k \in 1:n$$

$$v \geq 0, \quad u[k] \geq 0, \quad k \in 1:n$$

где $a[k]$ – заданные числа.

Решение.
Пусть

$$v_0 = \max_{k \in 1:n} \{-a[k], 0\}; \ \ u_0[k] = v_0 + a[k], \quad k \in 1:n$$

Проверим, что v_0 – оптимальный план.
$v_0 = 0 \Rightarrow$ указанный план оптимален, т.к. $v > 0$ по условию задачи.
$v_0 > 0$; пусть план v_0 не оптимален.
Тогда $\exists$ план $v_1 : v_1 < v_0; \ \ u_1[k] = v_1 + a[k]$.

$$\exists \ \Delta > 0 : v_1 - v_0 = \Delta$$

$v_0 = -a[k_0], \ k_0 \in 1:n$ (см. определение v_0) $\Rightarrow \ v_1 = -a[k_0] - \Delta \ \Rightarrow \ u_1[k_0] = -\Delta < 0$, что противоречит условию $u[k] \geq 0, \ k \in 1:n$.
Значит, план v_0 оптимален.
Ответ:

$$v_0 = \max_{k \in 1:n} \{-a[k], 0\}, \quad u_0[k] = v_0 + a[k].$$

1.10

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 \to \inf$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 5$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3$$

Решение.

$$\inf_{x \in \Omega} f(x) > -\infty$$

в силу 1-го ограничения и знаковых условий (x_1, x_2, x_3 ограничены сверху и снизу)

Носители	базисный план	знач. целевой ф-ции
$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	нет	
$\{1, 2\}$	$(1, 1, 0)$	1
$\{1, 3\}$	$(2, 0, 3)$	-5
$\{2, 3\}$	нет[получается $(0, 2, -3)$]	
$\{1, 2, 3\}$	нет[столбцы не могут быть лин. независимыми]	

Ответ: оптимальный базисный план – $(2, 0, 3)$; $f_* = -5$.

1.11

$$-x_1 + 4x_2 - 5x_3 \to \inf$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \geq -2$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ b = (-2, 4), \ c = (-1, 4, -5)$$

M_1 – ограничения-неравенства, M_2 – равенства, N_1 – есть знаковые ограничения, N_2 – нет

$$M = \{1,2,3\}, \ N = \{1,2\}, \ M_1 = \{1\}, \ M_2 = \{2\}, N_1 = \{1,2\}, \ N_2 = \{3\}$$

Сведем задачу к эквивалентной задаче без ограничений-неравенств:

$$\langle c_0, v\rangle \to \inf$$
$$A_0 v = b$$
$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$
$$c_0 = (c[N_1] \ \ c[N_2] \ \ -c[N_2] \ \ \mathbb{O}[M_1])$$
$$A_0 = (A[M, N_1] \ \ A[M, N_2] \ \ -A[M, N_2] \ \ -E[M, M_1]) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, получили эквивалентную задачу:

$$g(v) := -v_1 + 4v_2 - 5v_3 + 5v_4 \to \inf$$
$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 - v_5 = -2$$
$$2v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 4$$
$$v_j \geq 0, \ \ j \in 1:5$$

$\inf g(v) > -\infty$ по следующей причине:

$$g(v) = -v_1 + 9v_2 - 5v_2 - 5v_3 + 5v_4 = -v_1 + 9v_2 - 5(v_2 + v_3 - v_4) =$$
$$= -v_1 + 9v_2 - 5(4 - 2v_1) = 9v_1 + 9v_2 - 20 \geq -20$$

[Отсюда на самом деле легко получить и решение: $v_1 = v_2 = 0, \ v_5 = 6, \ v_4 \geq 0, \ v_3 = v_4 + 4$,
базисный план, очевидно, $(0,0,4,0,6)$]
Не имеет смысла искать базисные планы с носителем из 3 и более элементов (столбцы обязательно будут линейно зависимы).

Носители	базисный план	значение целевой ф-ции
$\{1\}$	$(2,0,0,0,0)$	-2
$\{i\}, \ i \in 2:5$	нет	
$\{1,i\}, \ i \in 2:5$	нет[получается $v_i = 0$]	
$\{i,j\}, \ i,j \in 2:4$	нет[столбцы линейно зависимы]	
$\{2,5\}$	$(0,4,0,0,6)$	16
$\{3,5\}$	$(0,0,4,0,6)$	-20
$\{4,5\}$	нет	

$$v_* = (0,0,4,0,6) = (x_*[N_1] \ \ y_*[N_2] \ \ z_*[N_2] \ \ w_*[M_1]), \ \ x_*[N_2] = y_*[N_2] - z_*[N_2]$$
$$x_* = (0,0,4), \ \ f_*(= g_*) = -20$$

Ответ: оптимальный базисный план – $(0,0,4)$; $f_* = -20$.

1.12* Параметрическая задача линейного программирования

$$ax_1 + x_2 + x_3 \to \inf$$

$$x_1 - x_2 + (a-1)x_3 = a - 2$$

$$x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = a + 2$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3$$

Построить график экстремальных (оптимальных) значений целевой функции как $F(a)$.

Решение.
Сначала докажем, что при каждом фиксированном значении a множество планов ограничено.
Пусть Ω – множество планов, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – план. Тогда

$$2x_2 + 2x_3 = 4 \text{ (из второго равенства вычли первое)}, \quad x_2 = 2 - x_3;$$

$$x_1 = a - 2 + x_2 - (a-1)x_3 = a - x_3 - (a-1)x_3 = a(1 - x_3)$$

$$0 \leq x_2, x_3 \leq 2$$

$$|x_1| = |a| \cdot |x_3| \leq |a|(1 + |x_3|) \leq 3|a|; \quad x_1 \geq 0$$

Значит, множество планов ограничено и $\inf_{x\in\Omega} f(x) > -\infty$.
Перебираем носители, содержащие не более двух элементов
(3 элемента $\mathbb{R}^2$ не могут быть линейно независимыми).

(a) Носитель $\{1\}$: базисных планов нет.

(b) Носитель $\{2\}$: при $a \neq 0$ планов нет, при $a = 0$ – базисный план $(0, 2, 0)$.

(c) Носитель $\{3\}$: получаем $x_3 = 2,\ (a-1)x_3 = a - 2$; при $a \neq 0$ планов нет, при $a = 0$ – базисный план $(0, 0, 2)$.

(d) Носитель $\{1, 2\}$: получаем $x_1 = a,\ x_2 = 2$; при $a > 0$ – базисный план $(a, 2, 0)$
(векторы $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ линейно независимы).

(e) Носитель $\{1, 3\}$: получаем $x_1 = -a,\ x_2 = 2$; при $a < 0$ – базисный план $(-a, 0, 2)$
(векторы $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a-1\\a+1\end{pmatrix}$ линейно независимы).

(f) Носитель $\{2, 3\}$: получаем $2ax_3 = 2a,\ x_2 + (a+1)x_3 = a + 2$;
при $a = 0$ построить базисный план не удастся (векторы $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a-1\\a+1\end{pmatrix}$ линейно зависимы).
При $a \neq 0$ поделим первое равенство на $2a$, получим $x_2 = x_3 = 1$; базисный план $(0, 1, 1)$.

Базисные планы:

(a) $a < 0: \quad (0, 1, 1),\ (-a, 0, 2)$

(b) $a = 0: \quad (0, 2, 0),\ (0, 0, 2)$

(c) $a > 0: \quad (0, 1, 1),\ (a, 2, 0)$

$$f(0, 1, 1) = f(0, 2, 0) = f(0, 0, 2) = 2,$$

$$f(-a, 0, 2) = -a^2 + 2, \quad f(a, 2, 0) = a^2 + 2$$

$\inf_{x\in\Omega} f(x)$ равен:

(a) $a < 0: \quad -a^2 + 2$

(b) $a = 0: \quad 2$

(c) $a > 0: \quad 2$

1.13*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = b, x \geq \mathbb{O}\}$$

Доказать, что понятие базисного плана равносильно понятию крайней (угловой) точки. Крайняя точка:

$$x_0 \in \Omega, \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad x_1 \in \Omega, \quad x_2 \in \Omega \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$: Пусть x_0 – базисный план, $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ x_1 \neq x_2,\ x_1, x_2 \in \Omega$.
Поскольку $x_0 \geq \mathbb{O},\ x_1 \geq \mathbb{O},\ x_2 \geq \mathbb{O}$, носители x_1 и x_2 содержатся в носителе x_0. А тогда

$$b = \sum_{j \in N_+} A[M, j] \times x_1[j] = \sum_{j \in N_+} A[M, j] \times x_2[j] \Rightarrow \mathbb{O} = \sum_{j \in N_+} A[M, j] \times (x_1[j] - x_2[j]),$$

где $N_+ = N_+(x_0)$. Если $x_1 \neq x_2$, то мы имеем нетривиальную линейную комбинацию столбцов матрицы A, соответствующих индексам из N_+, что противоречит их линейной независимости.

$\Longleftarrow$: Доказываем от противного. Пусть угловая точка x_0 не является базисным планом, т.е. $N_+ = N_+(x_0) \neq \varnothing$, столбцы матрицы $A[M, N_+]$ линейно зависимы.
Уравнение $A[M, N_+] \times z[N_+] = \mathbb{O}[M]$ имеет ненулевое решение $z_0[N_+]$.
Доопределим z_0 на $N \setminus N_+ :\ z_0[N \setminus N_+] := \mathbb{O}[N \setminus N_+]$.

$$x_1(t)[N] := x_0[N] - tz_0[N],\ x_2(t)[N] := x_0[N] + tz_0[N],\ t > 0;$$

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)); \quad x_1(t) \neq x_2(t),\ \text{т.к. } z_0[N] \neq \mathbb{O}[N]$$

Подберем t так, чтобы $x_1(t) \geq \mathbb{O},\ x_2(t) \geq \mathbb{O}, \quad \exists k \in N :\ x_1(t)[k] > 0,\ x_2(t)[k] > 0.$
При $j \in N \setminus N_+ \quad x_1(t)[j] = x_2(t)[j] = 0.$
Рассматривая $j \in N_+$, получаем, что нужно брать

$$t_0 = \min\left\{\frac{1}{2}\min\left\{\frac{x_0[j]}{z_0[j]} \mid z_0[j] > 0\right\}, \frac{1}{2}\min\left\{-\frac{x_0[j]}{z_0[j]} \mid z_0[j] < 0\right\}\right\} > 0;$$

этим при $j :\ z_0[j] > 0$ мы обеспечим $x_1(t)[j] > 0$,
при $j :\ z_0[j] < 0$ — $x_2(t)[j] > 0$.
Итак, при $x_1 = x_1[t_0],\ x_2 = x_2[t_0]$ получаем $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ x_1 \neq x_2$, т.е. x_0 не угловая точка. Противоречие.

Что и требовалось доказать.

1.14
$$A[M, N]$$

Доказать: $Ax = b$ совместна $\iff$

$$\iff \quad \langle b, u\rangle = 0 \quad \forall u : A^T u = 0.$$

Доказательство.
По критерию совместности системы линейных уравнений и неравенств
$Ax = b$ совместна $\iff \quad \langle b, u\rangle \le 0 \quad \forall u : A^T u = 0.$
(Достаточно в критерии взять $M_1 = N_1 = \varnothing$.)
$Ax = b$ совместна $\iff \quad Ax = -b$ совместна
(x_1 удовлетворяет $Ax = b \iff -x_1$ удовлетворяет $Ax = -b$.)
Значит, $Ax = b$ совместна $\iff \quad \langle -b, u\rangle \le 0 \quad \forall u : A^T u = 0.$
Итак, $Ax = b$ совместна $\iff \langle b, u\rangle = 0 \quad \forall u : A^T u = 0.$

Что и требовалось доказать.

1.15 Исследовать задачу линейного программирования:

$$x_1 - 3x_2 + x_3 \to \inf$$
$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 1$$
$$x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

Решение.
Запишем двойственную задачу:

$$2u_1 + u_2 \to \sup$$
$$2u_1 - u_2 = 1$$
$$-5u_1 + 2u_2 \le -3$$
$$2u_1 + u_2 \le 1$$
$$u_2 \ge 0$$

Из первого ограничения получаем $u_2 = 2u_1 - 1$; из второго: $-u_1 \le -1$; из третьего: $4u_1 \le 2$.
Значит, ограничения несовместны и множество планов двойственной задачи пусто.
Следовательно, по первой теореме двойственности и исходная задача не имеет решения.
Ответ: задача не имеет решения.

1.16 Построить пару двойственных задач линейного программирования, у которых множества планов пусты.

Решение.
Пример:

$$2x_1 + x_2 \to \inf$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 0$$

и

$$3u_1 + 4u_2 \to \sup$$

$$u_1 + u_2 = 2$$

$$u_1 + u_2 \leq 1$$

$$u_2 \geq 0$$

1.17*

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \sup$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \le 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Проверить план $\hat{x} = (0, 0, -2)$ на оптимальность.

Решение.
Очевидно, $\hat{x} = (0, 0, -2)$ является планом.
Запишем двойственную задачу:

$$u_1 + 2u_2 \to \inf$$

$$u_1 + u_2 \ge -1$$

$$-u_1 + u_2 \ge -2$$

$$u_1 - u_2 = 1$$

$$u_1 \ge 0$$

Для этой задачи $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$

Запишем условия дополнительности:

$$\begin{cases} \langle \hat{x}, A\hat{u} - b \rangle = 0 \\ \langle c - \hat{x}A, \hat{u} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left\langle (0, 0, -2), \begin{pmatrix} \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + 1 \\ -\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + 2 \\ \hat{u}_1 - \hat{u}_2 - 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - (0, 0, -2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \right\rangle = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -2(\hat{u}_1 - \hat{u}_2 - 1) = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, (\hat{u}_1, \hat{u}_2) \right\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{u}_1 - \hat{u}_2 = 1 \\ 3\hat{u}_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \hat{u}_1 = 0 \\ \hat{u}_2 = -1 \end{cases}$$

$\hat{u} = (0, -1)$ – план двойственной задачи, выполнены условия дополнительности $\Rightarrow \hat{x}, \hat{u}$ – оптимальные планы.
Ответ: $\hat{x} = (0, 0, -2)$ – оптимальный план.

1.18*

$$\langle c, x \rangle \to \inf$$

$$Ax = b, \quad x \in K$$

$$\langle b, u \rangle \to \sup$$

$$c - uA \in K^+$$

$$K \subset \mathbb{R}^N$$

K – конус, K^+ – сопряженный конус
Доказать: если x_0, u_0 – планы и $\langle c, x_0 \rangle = \langle b, u_0 \rangle$, то x_0, u_0 оптимальны.

Доказательство.
Обозначим Ω – множество планов первой задачи, Λ – множество планов второй задачи;
$f(x) := \langle c, x \rangle, \quad g(u) := \langle b, u \rangle$.
Докажем, что $\forall x \in \Omega \quad \forall u \in \Lambda \quad f(x) \geq g(u)$.
(Тогда, очевидно, если x_0, u_0 – планы и $f(x_0) = g(u_0)$, то x_0, u_0 оптимальны.)

$$x \in K, \ c - uA \in K^+ \ \Rightarrow \ \langle c - uA, x \rangle \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f(x) = \langle c, x \rangle \geq \langle uA, x \rangle = \langle u, Ax \rangle = \langle u, b \rangle = g(u)$$

Что и требовалось доказать.

1.19

$$c[N] \times x[N] \to \inf$$
$$A[M_1, N] \times x[N] \geq b[M_1]$$
$$A[M_2, N] \times x[N] = b[M_2]$$
$$A[M_3, N] \times x[N] \leq b[M_3]$$
$$x[N_1] \geq \mathbb{O}[N_1]$$
$$x[N_3] \leq \mathbb{O}[N_3]$$
$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3, \quad N = N_1 \cup N_2 \cup N_3, \quad M_i, N_i \; dis$$

$$b[M] \times u[M] \to \sup$$
$$u[M] \times A[M, N_1] \leq c[N_1]$$
$$u[M] \times A[M, N_2] = c[N_2]$$
$$u[M] \times A[M, N_3] \geq c[N_3]$$
$$u[M_1] \geq \mathbb{O}[M_1]$$
$$u[M_3] \leq \mathbb{O}[M_3]$$

x_0, u_0 – планы этих задач
Доказать: $\langle c, x_0 \rangle = \langle b, u_0 \rangle \quad \Rightarrow \quad x_0, u_0$ – оптимальные планы

Доказательство.
Пусть Ω – множество планов 1-й задачи, Λ – множество планов 2-й задачи.
Докажем, что $c[N] \times x[N] \geq b[M] \times u[M] \quad \forall x \in \Omega,\ u \in \Lambda$ (из чего, очевидно, следует требуемое).

$$c[N] \times x[N] = c[N_1] \times x[N_1] + c[N_2] \times x[N_2] + (-c[N_3]) \times (-x[N_3]) \geq$$
$$\geq (u[M] \times A[M, N_1]) \times x[N_1] + (u[M] \times A[M, N_2]) \times x[N_2] + (-u[M] \times A[M, N_3]) \times (-x[N_3]) =$$
$$= u[M] \times A[M, N] \times x[N] =$$
$$= u[M_1] \times A[M_1, N] \times x[N] + u[M_2] \times A[M_2, N] \times x[N] + (-u[M_3]) \times (-A[M_3, N] \times x[N]) \geq$$
$$\geq u[M_1] \times b[M_1] + u[M_2] \times b[M_2] + (-u[M_3]) \times (-b[M_3]) = b[M] \times u[M]$$

(Неравенства выполнены в силу неотрицательности $x[N_1]$, $-x[N_3]$ и т.д.)

Что и требовалось доказать.

1.20*

$$\sum_{j\in N}|x[j]| \to \inf \tag{1}$$

$$Ax = b, \quad b \neq \mathbb{O}, \quad \text{ограничения совместны}$$

$$\langle b, u\rangle \to \sup \tag{2}$$

$$\max_{j\in N}|u[M]\times A[M,j]| \le 1$$

Доказать, что обе задачи имеют решения и их экстремальные значения равны.

Доказательство.
Рассм. задачу (1). Перейдем к эквивалентной задаче с линейными ограничениями:

$$\sum_{j\in N}(u[j]+v[j]) \to \inf$$

$$Au - Av = b$$

$$u, v \ge \mathbb{O}; \quad b \neq \mathbb{O}, \quad \text{ограничения совместны}$$

Положим $y = (u, v)$, $\quad c = c[N] = (1, \ldots, 1)$, $\quad B = (A \ \ -A)$.
В этих обозначениях задача запишется так:

$$\langle c, y\rangle \to \inf$$

$$By = b, \quad b \neq \mathbb{O}, \quad \text{ограничения совместны}$$

$$x \ge \mathbb{O}[2N]$$

("$2N$": объединяем 2 дизъюнктных экземпляра множества N.)
Запишем двойственную задачу:

$$\langle b, u\rangle \to \sup$$

$$u[M]\times B[M,2N] \le c[2N] \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u[M]\times A[M,N] \le c[N] \\ -u[M]\times A[M,N] \le c[N] \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall j\in N \quad \begin{cases} u[M]\times A[M,j] \le 1 \\ u[M]\times A[M,j] \ge -1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \max_{j\in N}|u[M]\times A[M,j]| \le 1$$

Итак, данные нам в условии задачи двойственны; поскольку (1) имеет решение (имеет, ибо $\inf\langle c, y\rangle > -\infty$ и ограничения совместны, т.е. множество планов непусто), то и (2) имеет решение и их экстремальные значения совпадают.

Что и требовалось доказать.

1.21

$$A = A[M,N]$$

Доказать:

$$\max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,j] \le \min_{j\in N}\max_{i\in M} A[i,j]$$

Привести пример, когда неравенства выполняются как строгие.

Решение (доказательство).

$$\forall k\in N \quad \max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,j] \le \max_{i\in M} A[i,k] \ \Rightarrow \ \max_{i\in M}\min_{j\in N} A[i,j] \le \min_{k\in N}\max_{i\in M} A[i,k],$$

что и требовалось доказать.
Пример строгого выполнения неравенства:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.22* $A = A[N,N]$ – неособая, $B = xy^T$, x, y – ненулевые векторы.
Доказать:
$$(A-B)^{-1} = A^{-1} + (1-\alpha)^{-1}A^{-1}BA^{-1},$$
если
$$\alpha = \langle y, A^{-1}x\rangle \neq 1.$$

Доказательство.
Достаточно проверить, что
$$\big(A-B\big)\big(A^{-1} + (1-\alpha)^{-1}A^{-1}BA^{-1}\big) = E \tag{1}$$
$$\big(A^{-1} + (1-\alpha)^{-1}A^{-1}BA^{-1}\big)\big(A-B\big) = E \tag{2}$$
$$(1) \iff E + (1-\alpha)^{-1}BA^{-1} - BA^{-1} - (1-\alpha)^{-1}BA^{-1}BA^{-1} = E \iff [\alpha \neq 1]$$
$$\iff BA^{-1} = (1-\alpha)BA^{-1} + BA^{-1}BA^{-1} \iff$$
[так как A^{-1} обратима]
$$\iff \alpha B = BA^{-1}B$$
Аналогично (2) $\iff$
$$\iff \alpha B = BA^{-1}B \tag{3}$$
$$\alpha = \langle y, A^{-1}x\rangle = \sum_{k\in N} y[k]\Big(\sum_{l\in N} A^{-1}[k,l]x[l]\Big) = \sum_{k,l\in N} A^{-1}[k,l]x[l]y[k]$$
Проверим равенство (3) покомпонентно:
$$(\alpha B)[i,j] = \Big(\sum_{k,l\in N} A^{-1}[k,l]x[l]y[k]\Big)x[i]y[j] \tag{4}$$
$$(BA^{-1}B)[i,j] = \sum_{k\in N}\sum_{l\in N} B[i,k]A^{-1}[k,l]B[l,j] = \Big(\sum_{k,l\in N} A^{-1}[k,l]x[l]y[k]\Big)x[i]y[j] \tag{5}$$
$$(4) = (5)$$

Что и требовалось доказать.

1.23 Решить симплекс-методом:

$$x_1 - 8x_2 - 5x_3 \to \inf$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:3$$

Решение.

it = 0	-7	$-7/2$	$9/2$	$\Delta_0[3] = -\frac{7}{2} \cdot 4 + \frac{9}{2} \cdot 2 = -5 < 0$
1	1	$1/2$	$1/2$	
2	1	$1/2$	$-1/2$	

Ответ: оптимальный базисный план – $(1, 1, 0)$; $f_* = -7$.

1.24* Решить симплекс-методом:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \inf$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$-2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -6$$

$$x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 12$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:5$$

Решение.
Воспользуемся методом искусственного базиса.
Вспомогательная задача:

$$x_6 + x_7 + x_8 \to \inf$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$$

$$-2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 - x_7 = -6$$

$$x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 + x_8 = 12$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in 1:8$$

it = 0	22	1	−1	1	$\Delta_0[5] = 2$	
6	4	1	0	0	0	$s_0 = 7$
7	6	0	−1	0	1	$t_0 = 6$
8	12	0	0	1	1	

it = 1	10	1	1	1	$\Delta_1[3] = 6$	
6	4	1	0	0	2	$s_1 = 8$
5	*6*	*0*	*−1*	*0*	2	$t_1 = 3/2$
8	6	0	1	1	4	

it = 2	1	1	−1/2	−1/2	$\Delta_2[1] = 1/2$	
6	1	1	−1/2	−1/2	1/2	$s_2 = 6$
5	3	0	−3/2	−1/2	−1/2	$t_2 = 2$
3	*3/2*	*0*	*1/4*	*1/4*	1/4	

(*) it = 3	7	5/2	−5/2	−3/2	$\Delta_3[2] = 8$	
1	2	*2*	*−1*	*−1*	5	$s_3 = 1$
5	4	1	−2	−1	6	$t_3 = 2/5$
3	1	−1/2	1/2	1/2	−2	

(*) означает, что мы перешли к исходной задаче

it = 4	19/5	−7/10	−9/10	1/10	$\Delta_4[1] = -8/5$, $\Delta_4[4] = -9/5$
2	2/5	2/5	−1/5	−1/5	
5	8/5	−7/5	−4/5	1/5	
3	9/5	3/10	1/10	1/10	

Ответ: $x_* = (0, \frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 0, \frac{8}{5}), \quad f_* = \frac{19}{5}.$

2 Нелинейные экстремальные задачи

2.1 Найти градиент функции

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2,$$

где $A = A[M, N]$ – произвольная матрица.

Решение.

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}\langle Ax - b, Ax - b\rangle = \frac{1}{2}\langle Ax, Ax\rangle - \langle Ax, b\rangle + \langle b, b\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\langle A^T Ax, x\rangle + \langle -A^T b, x\rangle + \langle b, b\rangle$$

$$(A^T A)^T = A^T A \;\Rightarrow\; f'(x) = A^T Ax - A^T b$$

Ответ: $f'(x) = A^T(Ax - b)$.

2.2* Пусть Q – квадратичная функция и $B = B[N, M]$ – произвольная матрица.
Найти градиент функции $F(y) = Q(x_0 + By)$.

Решение.

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha$$

$$F(y) = Q(x_0 + By) = \frac{1}{2}\langle D(x_0 + By), x_0 + By\rangle + \langle c, x_0 + By\rangle + \alpha$$

$$F(y + h) = \frac{1}{2}\langle D(x_0 + By + Bh), x_0 + By + Bh\rangle + \langle c, x_0 + By + Bh\rangle + \alpha =$$

$$= F(y) + \frac{1}{2}\langle DBh, x_0 + By + Bh\rangle + \frac{1}{2}\langle D(x_0 + By), Bh\rangle + \langle c, Bh\rangle =$$

$$= F(y) + \frac{1}{2}\langle DBh, x_0 + By\rangle + \frac{1}{2}\langle D(x_0 + By), Bh\rangle + \frac{1}{2}\langle DBh, Bh\rangle + \langle c, Bh\rangle =$$

$$= F(y) + \frac{1}{2}\langle x_0 + By, DBh\rangle + \frac{1}{2}\langle D(x_0 + By), Bh\rangle + \langle c, Bh\rangle + \frac{1}{2}\langle DBh, Bh\rangle =$$

$$= F(y) + \frac{1}{2}\langle B^T D^T(x_0 + By), h\rangle + \frac{1}{2}\langle B^T D(x_0 + By), h\rangle + \langle B^T c, h\rangle + \frac{1}{2}\langle DBh, Bh\rangle =$$

$$\overset{D=D^T}{=} F(y) + \langle B^T D(x_0 + By) + B^T c, h\rangle + \frac{1}{2}\langle DBh, Bh\rangle$$

$$|\langle DBh, Bh\rangle| = |\langle B^T DBh, h\rangle| \le \frac{\|B^T DBh\| \times \|h\|}{\|h\|} = \|B^T DBh\| \quad \xrightarrow[h\to 0]{} \quad 0$$

Ответ: $F'(y) = B^T\big(D(x_0 + By) + c\big)$.

2.3 Пусть D – симметричная неотрицательно определенная матрица.
Докажите: $\langle Dx_0, x_0\rangle = 0 \;\;\Rightarrow\;\; Dx_0 = \mathbb{O}$.

Доказательство.
Так как $\langle Dx, x\rangle \geq 0$, то x_0 – решение следующей экстремальной задачи:

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Dx_0, x_0\rangle \to \inf$$

$$Ax = b, \quad A = \mathbb{O},\ b = \mathbb{O}$$

D симметрична и неотрицательно определена $\Rightarrow f(x)$ выпукла; $f(x)$ дифференцируема.
По теореме Лагранжа $\exists u_0:\ f'(x_0) = u_0 A \;\Rightarrow\; 0 = f'(x_0) = Dx_0$.

Что и требовалось доказать.

2.4* Докажите, что квадратичная функция $Q(x)$, ограниченная снизу на $\mathbb{R}^N$, является выпуклой на $\mathbb{R}^N$.

Доказательство.

$$Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle + \alpha$$

$Q(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^N \iff D$ неотрицательно определена, т.е. $\forall h \in \mathbb{R}^N\ \ \langle Dh, h\rangle \geq 0$.
Достаточно доказать, что Q неотрицательно определена.
Пусть не так: $\exists h : \langle Dh, h\rangle < 0$.
Рассмотрим $Q(nh),\ n \in \mathbb{N}$.

$$Q(nh) = \frac{1}{2}\langle Dnh, nh\rangle + \langle c, nh\rangle + \alpha = n\left(\frac{1}{2}n\langle Dh, h\rangle + \langle c, h\rangle\right) + \alpha \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad -\infty$$

что противоречит условию ограниченности Q снизу на $\mathbb{R}^N$. Значит, Q выпукла.

Что и требовалось доказать.

2.5* Докажите, что дифференцируемая на выпуклом открытом множестве Ω_0 функция f выпукла на Ω_0 $\iff$

$$\iff \quad \langle f'(x_1) - f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle \geq 0 \ \ \forall x_0, x_1 \in \Omega_0 \tag{1}$$

Доказательство.
По критерию выпуклости дифференцируемой функции достаточно показать эквивалентность данного неравенства следующему:

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle \ \ \forall x_0, x_1 \in \Omega_0 \tag{2}$$

Пусть выполнено (2). Тогда, сложив неравенства

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle$$

и

$$f(x_0) - f(x_1) \geq \langle f'(x_1), x_0 - x_1 \rangle,$$

получим (1).
Пусть выполнено (1). Положим $h = x_1 - x_0$.
По теореме о среднем

$$f(x_1) - f(x_0) = \langle f'(x_0 + \theta h), h \rangle =$$

$$= \frac{1}{\theta} \langle f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0), \theta h \rangle + \langle f'(x_0), h \rangle, \ \ \theta \in (0, 1) \tag{3}$$

Первое слагаемое неотрицательно в силу (1); таким образом, из (3) получаем (2).

Что и требовалось доказать.

2.6* Найти все собственные числа матрицы ортогонального проектирования.

Решение.
Напомним, что если $A[M, N]$ – матрица с линейно независимыми строками, то матрица ортогонального проектирования вычисляется как $P = E - A^T(AA^T)^{-1}A$.
$PA^T = \mathbb{O} = 0 \cdot A^T \Rightarrow$ строки матрицы A суть собственные векторы P, им соответствует собственное число $\lambda_0 = 0$.
Приведем матрицу P к жордановой форме:

$$P = C^{-1}JC, \quad C \text{ – ортогональная матрица,}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_0 & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s \end{pmatrix},$$

поскольку P симметрична и неотрицательно определена.
$s = |N| - |M|, \quad \lambda_0 = 0$ – в количестве $|M|$ штук (поскольку ранг P равен $|N| - |M|$),
$\lambda_i,\ i \in 0 : s$ – собственные числа $P, \quad \lambda_i \neq 0,\ i \in 1 : s$.
Кроме того, $P = PP = (C^{-1}JC)(C^{-1}JC) = C^{-1}J^2C \Rightarrow J = J^2 \Rightarrow \lambda_i^2 = \lambda_i,\ i \in 1 : s \Rightarrow \lambda_i = 1,\ i \in 1 : s$
Ответ: $\lambda_0 = 0$ – собственное число кратности $|M|$, $\lambda_1 = 1$ – кратности $|N| - |M|$.

2.7 Укажите матрицу ортогонального проектирования на подпространство

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Решение.

$$A = (1, 1, -1, 1)$$

$$P = E - A^T(AA^T)^{-1}A = E - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \langle (1, 1, -1, 1), (1, 1, -1, 1) \rangle^{-1} (1, 1, -1, 1) =$$

$$= E - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, -1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

2.8 Найти проекцию точки $c = (0, -1, -\frac{1}{4}, 0, 0, -\frac{1}{4})$ на стандартный симплекс.

Решение.
a_j – это $-c_j$, упорядоченные по возрастанию.

k	1	2	3	4	5	6
a_k	0	0	0	1/4	1/4	1

$$\varphi_1 = 0;\ \ \varphi_{k+1} = \varphi_k + k(a_{k+1} - a_k)$$

$$\varphi_2 = 0 + 1 \cdot 0 = 0;\ \ \varphi_3 = 0 + 2 \cdot 0 = 0;\ \ \varphi_4 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\varphi_5 = \frac{3}{4} + 4 \cdot 0 = \frac{3}{4};\ \ \varphi_6 = \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\varphi_5 < 1 \leq \varphi_6$$

$$\lambda^* = a_5 + \frac{1 - \varphi_5}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$x_j^* = (\lambda^* + c_j)_+$$

Ответ: $x^* = (\frac{3}{10}, 0, \frac{1}{20}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{20}) = (0,3;\ 0;\ 0,05;\ 0,3;\ 0,3;\ 0,05)$.

2.9* Решить экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \to \inf$$

$$Ax = b$$

где $A = A[M, N]$ – матрица с линейно независимыми строками.

Решение.
Рассмотрим план x_*.
По критерию оптимальности для выпуклой функции ($\frac{1}{2}\|x\|^2$ выпукла, т.к. E положительно определена)
x_* – оптимальный план $\iff\ \ \exists u_* :\ \ x_* = u_* A$

$$x_* = A^T u_* \ \Rightarrow\ b = Ax_* = AA^T u_*$$

Как было показано на лекции
[v_0 – решение $AA^T v = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \langle AA^T v_0, v_0 \rangle = 0\ \Rightarrow\ \langle A^T v_0, A^T v_0 \rangle = \|A^T v_0\|^2 = 0\ \Rightarrow\ A^T v_0 = 0;$$

линейная комбинация столбцов A^T (строк A) дает $0 \Rightarrow v_0 = 0 \Rightarrow AA^T$ обратима] ,
AA^T невырожденна. Следовательно,

$$u_* = (AA^T)^{-1} b\ \Rightarrow x_* = A^T (AA^T)^{-1} b$$

Ответ: $x_* = A^T (AA^T)^{-1} b$ – оптимальный план.

2.10 Решить экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x-c\|^2 \to \inf$$
$$x \geq \mathbb{O}$$

Решение.

$$x = x[N], \quad c = c[N]$$
$$\frac{1}{2}\|x-c\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j \in N}\big(x[j]-c[j]\big)^2$$

Минимизируем каждое слагаемое в отдельности.
Ответ: $x[j] = max\{c[j], 0\} = (c[j])_+, \;\; j \in N$.

2.11* Решить экстремальную задачу

$$\frac{1}{2}\|x-c\|^2 \to \inf$$
$$|x[j]| \leq 1, \;\; j \in 1:n$$

Решение.

$$x = x[N], \; c = c[N]; \quad \|x[N]-c[N]\|^2 = \sum_{j \in N}(x[j]-c[j])^2$$

Задача распадается на n независимых задач вида

$$(x[j]-c[j])^2 \to \inf, \quad j \in N, \quad |x[j]| \leq 1,$$

каждая из которых равносильна (в смысле равенства множеств оптимальных планов) такой задаче:

$$|x[j]-c[j]| \to \inf, \quad j \in N, \quad |x[j]| \leq 1$$

Нетрудно понять, что ее решение таково:

$$x[j] = c[j] \text{ при } |c[j]| \leq 1$$
$$x[j] = 1 \text{ при } c[j] > 1$$
$$x[j] = -1 \text{ при } c[j] < -1$$

Ответ: оптимальный план $x_*[j] = \begin{cases} c[j] \text{ при } |c[j]| \leq 1 \\ 1 \text{ при } c[j] > 1 \\ -1 \text{ при } c[j] < -1 \end{cases}$.

2.12 Докажите, что проекция точки c на любое замкнутое выпуклое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ существует и единственна.

2.13* Пусть P – матрица ортогонального проектирования.
Доказать: $\|Pc\| \le \|c\|$ и равенство достигается $\iff Ac = \mathbb{O}$.

Доказательство.

$$\langle Pc - c, Pc - c\rangle \ge 0 \Rightarrow \|Pc\|^2 - 2\langle Pc, c\rangle + \|c\|^2 \ge 0$$

$$P = PP,\ P = P^T \Rightarrow \langle Pc, c\rangle = \langle PPc, c\rangle = \langle Pc, Pc\rangle = \|Pc\|^2$$

$$\|Pc\|^2 - 2\langle Pc, c\rangle + \|c\|^2 = \|Pc\|^2 - 2\|Pc\|^2 + \|c\|^2 = \|c\|^2 - \|Pc\|^2 \ge 0 \Rightarrow \|c\| \ge \|Pc\|$$

Пусть $Ac = \mathbb{O}$. Тогда

$$Pc = \big(E - A^T(AA^T)^{-1}A\big)c = Ec - \mathbb{O} = c \Rightarrow \|Pc\| = \|c\|$$

Пусть $\|Pc\| = \|c\|$. Тогда

$$\|Pc - c\|^2 = \|c\|^2 - \|Pc\|^2 = 0 \Rightarrow Pc = c$$

$$Ac = A(Pc) = A\big(c - A^T(AA^T)^{-1}Ac\big) = Ac - AA^T(AA^T)^{-1}Ac = Ac - Ac = \mathbb{O}$$

Что и требовалось доказать.

2.14 Пусть D – симметричная положительно определенная матрица
($\langle Dx, x\rangle > 0\ \ \forall x \ne \mathbb{O}$). Доказать:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N}\Big(\frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle\Big) = -\frac{1}{2}\langle D^{-1}c, c\rangle.$$

Доказательство.
Обозначим $Q(x) = \frac{1}{2}\langle Dx, x\rangle + \langle c, x\rangle$; взяв $x_* = -D^{-1}c$, получим

$$Q(x_*) = \frac{1}{2}\langle c, D^{-1}c\rangle - \langle c, D^{-1}c\rangle = -\frac{1}{2}\langle D^{-1}c, c\rangle$$

$$Q(x_* + y) = \frac{1}{2}\langle D(y - D^{-1}c), y - D^{-1}c\rangle + \langle c, y - D^{-1}c\rangle =$$

$$= Q(x_*) + \underbrace{\frac{1}{2}\langle Dy, y\rangle}_{>0} - \frac{1}{2}\langle c, y\rangle - \frac{1}{2}\langle y, c\rangle + \langle c, y\rangle > Q(x_*)\ \ \forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbb{O}\}$$

Что и требовалось доказать.

2.15* Решить экстремальную задачу

$$F(x,v) := \frac{1}{2}\|x\|^2 + v \to \inf$$
$$\langle a, x\rangle \le v$$

Решение.
Пусть (x,v) – план.

$$F(x,v) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + v \ge \frac{1}{2}\|x\|^2 + \langle a, x\rangle = \frac{1}{2}\langle x+a, x+a\rangle - \frac{1}{2}\|a\|^2 \ge -\frac{1}{2}\|a\|^2$$

Равенство достигается при $x + a = \mathbb{O},\ \ v = \langle a, x\rangle$.
Ответ: $x_* = -a,\ \ v_* = -\|a\|^2$ – оптимальный план.

2.16*

$$f(x) \to \inf$$
$$\Omega : \begin{cases} a_i(x) \ge 0, \ \ i \in M \\ x \in V \end{cases}$$

$V \subset \mathbb{R}^N$ – открытое выпуклое множество, $f,\ a_i \in C^1(V)$, f выпукла на V, a_i вогнуты на V (т.е. $-a_i$ выпуклы на V).
Доказать, что если в точке $x_* \in \Omega$ выполнены условия Куна-Таккера,
а именно $\exists u_* = u_*[M]$:

$$f'(x_*) = \sum_{i\in M} u_*[i] a_i'(x_*)$$
$$u_*[i]a_i(x_*) = 0, \ \ u_*[i] \ge 0, \ \ i \in M,$$

то x_* – глобальное решение задачи.

Доказательство.
f дифференцируема и выпукла на V. Значит, по критерию выпуклости дифференцируемой функции

$$f(x_1) - f(x_*) \ge \langle f'(x_*), x_1 - x_*\rangle = \langle \sum_{i\in M} u_*[i] a_i'(x_*), x_1 - x_*\rangle = \sum_{i\in M} u_*[i]\langle a_i'(x_*), x_1 - x_*\rangle$$

$-a_i$ выпуклы и дифференцируемы на $V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ -a_i(x_1) + a_i(x_*) \ge \langle -a_i(x_*), x_1 - x_*\rangle \iff a_i(x_1) - a_i(x_*) \le \langle a_i(x_*), x_1 - x_*\rangle, \ \ i \in M$$

$$f(x_1) - f(x_*) \ge \sum_{i\in M} \underbrace{u_*[i]}_{\ge 0}\langle a_i(x_*), x_1 - x_*\rangle \ge \sum_{i\in M} u_*[i]\big(a_i(x_1) - a_i(x_*)\big) =$$

$$= \sum_{i\in M} \underbrace{u_*[i]}_{\ge 0}\ \underbrace{a_i(x_1)}_{\ge 0, x_1\in\Omega} - \underbrace{\sum_{i\in M} u_*[i] a_i(x_*)}_{=0} \ge 0$$

Значит, x_* – глобальное решение задачи.

Что и требовалось доказать.

2.17* $V \subset \mathbb{R}^N$ – открытое выпуклое множество, $f \in C^2(V)$. Докажите, что f выпукла на $V \iff \langle f''(x)h, h\rangle \geq 0 \ \ \forall h \in \mathbb{R}^N \ \ \forall x \in V$.

Доказательство.

$\Longrightarrow$: От противного. Пусть $\exists x_0 \in V, \ h_0 \in \mathbb{R}^N : \langle f''(x_0)h_0, h_0\rangle < 0$.
Возьмем $x_1 \in V$.

$$f(x_1) = f(x_0) + \langle f'(x_0), x_1 - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(x_0)(x_1 - x_0), x_1 - x_0\rangle + o(\|x_1 - x_0\|^2)$$

V открыто $\Longrightarrow \ \exists r > 0 : \ B_r(x_0) = \{x \mid \ \|x - x_0\| < r\} \subset V$

$$h_0 \neq \mathbb{O}; \quad x(t) := x_0 + th_0, \ |t| < \frac{r}{\|h_0\|}$$

$$f(x(t)) - f(x_0) - \langle f'(x_0), th_0\rangle = \frac{1}{2}\langle f''(x_0)th_0, th_0\rangle + o(\|th_0\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}t^2\left(\langle f''(x_0)h_0, h_0\rangle + o(\|h_0\|^2)\right) \tag{1}$$

$\langle f''(x_0)h_0, h_0\rangle < 0 \Rightarrow$ правая часть (1) < 0 при достаточно малых t.
Пусть она отрицательна при $t = t_*$; тогда $x_* := x(t_*) = x_0 + t_*h_0 \in V$ и

$$f(x_*) - f(x_0) < \langle f'(x_0), x_* - x_0\rangle.$$

А в этом случае по критерию выпуклости дифференцируемой функции f не выпукла на V.

$\Longleftarrow$:

Что и требовалось доказать.

2.18

$$H(x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

Докажите, что $H(x_1, x_2)$ вогнута при $x_1, x_2 > 0$.

Доказательство.

$$H'(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}, \ \frac{2x_1^2}{(x_1 + x_2)^2} \right)$$

$$H''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4x_2^2}{(x_1+x_2)^3} & \frac{4x_1 x_2}{(x_1+x_2)^3} \\ \frac{4x_1 x_2}{(x_1+x_2)^3} & -\frac{4x_1^2}{(x_1+x_2)^3} \end{pmatrix}$$

$$h = (h_1, h_2); \quad \langle H''h, h \rangle = h_1 \frac{4(x_1 x_2 h_2 - x_2^2 h_1)}{(x_1 + x_2)^3} + h_2 \frac{4(x_1 x_2 h_1 - x_1^2 h_2)}{(x_1 + x_2)^3} =$$

$$= -\frac{4(x_2 h_1 + x_1 h_2)^2}{(x_1 + x_2)^3} \leq 0 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

Значит, H вогнута (см. 2.17).

Что и требовалось доказать.

2.19* $F \in C^2(U)$, $\Omega \subset U$ – выпуклый компакт, $U \subset \mathbb{R}^N$ – открытое множество
Доказать, что F на Ω можно представить в виде разности выпуклых функций.

2.20* Решить экстремальную задачу:

$$f(x) := (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \to \inf$$

$$-x_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \geq 0$$

Решение.
(x_1, x_2) – план $\Rightarrow$ $x_2^2 \geq 2x_1$

$$f(x) = x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 \geq x_1^2 - 2x_1 + 1 + 2x_1 = x_1^2 + 1 \geq 1$$

Равенства достигаются: $x_2^2 = 2x_1, \ x_1^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$.
Ответ: $x_* = (0, 0)$ – единственное решение.

3 Вариационные задачи

3.1*

$$Q(x) = \int_0^1 \{(x')^2 + x^2\} dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \ \ x(1) = 1, \ \ x \in C^1[0,1]$$

Решение.

$$p(t) = q(t) \equiv 1, \ \ p, q \geq 0, \ \ f(t) \equiv 0$$

$$-(px')' + qx = f; \quad x'' = x$$

Решаем дифференциальное уравнение: составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$.

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$x(1) = 1 \Rightarrow C_1(e - \frac{1}{e}) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{e}{e^2 - 1} \Rightarrow C_2 = -\frac{e}{e^2 - 1}$$

$$x_* = \frac{e}{e^2 - 1}(e^t - e^{-t}) = \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sh} t$$

Ответ: $x_* = \frac{2e}{e^2-1} \operatorname{sh} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 1}$.

3.2

$$Q(x) = \int_1^2 \frac{(x')^2}{t^3} dt \to \inf$$

$$x(1) = 1, \ \ x(2) = 0, \ \ x \in C^1[1,2]$$

Решение.

$$p(t) = \frac{1}{t^3}, \ \ q(t) \equiv 0, \ \ p, q \geq 0 \ (t \in [1,2]), \ \ f(t) \equiv 0$$

$$-(px')' + qx = f; \quad \left(\frac{x'}{t^3}\right)' = 0 \ \Rightarrow \ \frac{x''}{t^3} - 3\frac{x'}{t^4} = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ tx'' - 3x' = 0$$

Обозначим $y(t) = x'(t)$.

$$ty' = 3y \ \Rightarrow y(t) = C_0 t^3$$

$$x(t) = C_1 t^4 + C_2$$

$$x(1) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

$$x(2) = 0 \Rightarrow C_2 = -16C_1 \Rightarrow -15C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{15} \Rightarrow C_2 = \frac{16}{15}$$

$$x_* = -\frac{1}{15} t^4 + \frac{16}{15}$$

Ответ: $x_* = -\frac{1}{15} t^4 + \frac{16}{15}$.

3.3

$$Q(x) := \int_0^1 [x(t)]^2 dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \;\; x(1) = 1, \;\; x \in C^1[0,1]$$

Докажите, что задача не имеет решения. Найдите $\inf Q(x)$.

Решение (доказательство).
Из непрерывности плана $x(t)$ и условия $x(1) = 1$ следует, что $\int_0^1 [x(t)]^2 > 0 \;\Rightarrow\; \inf Q(x) \geq 0$.
Очевидно, что функция $x(t) = t^n$ является планом для любого натурального n.

$$\int_0^1 t^{2n} dt = \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \;\Rightarrow\; \inf Q(x) = 0;$$

$Q(x) > 0 \;\Rightarrow\;$ задача не имеет решения.
Ответ: $\inf Q(x) = 0$.

3.4*

$$Q(x) := \int_{-1}^1 t^2 [x'(t)]^2 dt \to \inf$$

$$x(-1) = -1, \;\; x(1) = 1, \;\; x \in C^1[0,1]$$

Докажите, что задача не имеет решения. Найдите $\inf Q(x)$.

3.5*

$$J(x) := \int_a^b [\alpha(t)\, x'(t) + \beta(t)\, x(t)]\, dt \to \inf$$

$$x(a) = A, \;\; x(b) = B, \;\; x \in C^1[a,b]$$

Докажите, что либо задача не имеет решения, либо все ее планы оптимальны. Сформулируйте соответствующие условия в терминах функций α и β.

Решение (доказательство).
По условию $\alpha,\ \beta \in C[a,b]$ (разве это не очевидно?).

$$J(x + \lambda h) = J(x) + \lambda J(h)$$

(a)
$$J \equiv 0 \quad \forall h \in C_0^1[a,b] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \in C^1[a,b],\ \alpha' = \beta \text{ на } [a,b]:$$

$\Rightarrow$ – по основной лемме вариационного исчисления,
$\Leftarrow$ – поскольку
$$\int_a^b [\alpha(t)\, h'(t) + \alpha'(t)\, h(t)]\, dt = \big(\alpha(t)h(t)\big)\Big|_a^b = 0.$$
В этом случае все планы оптимальны.

(b) Иначе: $J(x + \lambda h)$ есть линейная функция от λ,
значит, устремляя λ к $(\pm)\infty$, получим $\inf J(x) = -\infty$.
Условия на α и β в этом случае: либо $\alpha \notin C^1[a,b]$, либо $\alpha\,'(t) \neq \beta(t)$ при некотором $t \in [a,b]$.

3.6 (Лемма Лагранжа)

$$\alpha \in C[a,b]$$

$$\int_a^b \alpha(t)\, h(t)\, dt = 0 \;\; \forall h \in C_0^1[a,b]$$

Докажите, что $\alpha(t) \equiv 0$.

Доказательство.
Основная лемма вариационного исчисления гласит:

$$u, v \in C[a,b], \quad \int_a^b \{uh' + vh\}\, dt = 0 \;\; \forall h \in C_0^1[a,b] \;\Rightarrow\; u \in C_1[a,b], \;\; u'(t) = v(t) \;\forall t \in [a,b]$$

В нашем случае $u \equiv 0, \;\; v = \alpha$.
$0' = \alpha \;\Rightarrow\; \alpha \equiv 0$

Что и требовалось доказать.

3.7 Как изменится заключение основной леммы вариационного исчисления, если соотношение

$$\int_a^b (uh' + vh)\,dt = 0$$

выполняется для $h \in C^1[a,b],\ h(a) = 0$?

Решение.

$$\forall h \in C^1[a,b] \quad h(a) = 0 \quad \Rightarrow$$

Утверждение основной теоремы также выполняется:

$$\forall h \text{ в } C_0^1[a,b] \quad \Rightarrow$$

$$u \in C^1[a,b],\ u'(t) = v(t) \text{ на } [a,b]$$

Рассмотрим :

$$g(t) = \int_0^t v(\tau)\ d\tau \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{g'(t)=v(t)}$$

$$\int_a^b vh\ dt = \int_a^b g'h\ dt = \int_a^b h\ dg = hg|_a^b - \int_a^b gh'\ dt = h(b)g(b) - \int_a^b gh'\ dt$$

$\int_a^b (uh' + vh)\ dt = \underbrace{\int_a^b (uh' - gh')\ dt}_{=\int_a^b (u-g)h'\ dt} + h(a)g(b) \quad \Rightarrow$

$\int_a^b (uh' + vh) = (u(b) - g(b))h(b) + h(b)g(b) = \underbrace{h(b)g(b)}_{\forall h \in C^1[a,b]\ h(a)=0} - \underbrace{(u-g)h|_a^b}_{=(u(b)-g(b))h(b)} - \underbrace{\int_a^b h(u-g)'\ dt}_{=\int_a^b h(\underbrace{u'}_{=v} - \underbrace{g'}_{=v})\ dt = 0}$ Из приведенных выше рассуждений делаем вывод: $\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ u(b) = 0 \text{ или } h(b) = 0 \end{cases}$

Ответ:

$$\int_a^b (uh' + vh)\,dt = 0 \quad h(a) = 0$$

$$\forall h \text{ в } C^1[a,b] \quad \Rightarrow$$

$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ u(b) = 0 \text{ или } h(b) = 0 \end{cases}$

3.8* $u \in C[a,b]$ и

$$\int_a^b uh''dt = 0 \ \ \forall h \in C_0^2[a,b]$$

$$(h(a) = h(b) = 0,\ \ h'(a) = h'(b) = 0)$$

Докажите, что $u(t) = c_0 t + c_1$.

Доказательство.

$$u_1(t) = \int_a^t u(\tau)\,d\tau;\ \ u_2(t) = \int_a^t u_1(\tau)\,d\tau$$

Найдем $p_3(t) = \frac{c_0}{6}t^3 + \frac{c_1}{2}t^2 + c_2 t + c_3$:
$p_3(a) = u_2(a),\ p_3(b) = u_2(b),\ p_3'(a) = u_1(a),\ p_3'(b) = u_1(b)$.
(Эрмитова интерполяция.)

$$h(t) := u_2(t) - p_3(t);\ \ h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$$

$h \in C_0^2[a,b]$, более того, $h'(t) = u_1(t) - \frac{c_0}{2}t^2 - c_1 t - c_2,\ h''(t) = u(t) - c_0 t - c_1$

$$\int_a^b \Big[u(t) - c_1 - c_0 t\Big]^2 dt = \int_a^b \Big[u(t) - c_1 - c_0 t\Big] h''(t)\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_a^b u(t) h''(t)\, dt}_{=0} - \underbrace{\int_a^b c_1 h''(t)\, dt}_{=0,\, h'(a)=h'(b)=0} - \int_a^b c_0 t h''(t)\, dt =$$

$$= -c_0 t h'(t)\Big|_a^b + \underbrace{\int_a^b c_0 h'(t)\, dt}_{=0,\ h(a)=h(b)=0} = 0 \ \Rightarrow\ u(t) = c_1 + c_0 t$$

Что и требовалось доказать.

3.9* $u \in C[a,b]$ и

$$\int_a^b uh'' dt = 0 \;\; \forall h \in C^2[a,b] : \; h(a) = h(b) = 0.$$

Докажите, что $u(t) \equiv 0$.

Доказательство.

$$u_1(t) = \int_a^t u(\tau)\, d\tau; \;\; u_2(t) = \int_a^t u_1(\tau)\, d\tau$$

Найдем $p_1(t) = c_0 t + c_1 : \;\; p_1(a) = u_2(a), \; p_1(b) = u_2(b)$ (проведем прямую).

$$h(t) := u_2(t) - p_1(t); \;\; h(a) = h(b) = 0$$

$h \in C^2[a,b]$, более того, $h'(t) = u_1(t) - c_0, \;\; h''(t) = u(t)$

$$\int_a^b uh'' dt = \int_a^b u^2\, dt = 0 \; \Rightarrow \; u \equiv 0$$

Что и требовалось доказать.

3.10* Пусть выполнено условие Якоби и $h_0(b) = 0$, а также

$$B\, p\,(b)\, h_0'(b) - A\, p\,(a) - \int_a^b f h_0\, dt \neq 0.$$

Докажите, что $\inf Q(x) = -\infty$.

Доказательство.
Из условия Якоби и $h_0(b) = 0$ следует $h_0 \in C_0^1[a,b], \;\; D(h_0) = 0$.
Пусть x – план. Имеем

$$Q(x + \alpha h_0) = Q(x) + 2\alpha l(x, h_0) + \alpha^2 D(h_0) = Q(x) + 2\alpha l(x, h_0)$$

$$l(x, h_0) = \int_a^b \Big[p x' h_0' + (qx - f) h_0 \Big]\, dt =$$

$$= -\int_a^b f h_0\, dt + \int_a^b q x h_0\, dt + \big(x p h_0' \big)\Big|_a^b - \int_a^b x (p h_0')'\, dt =$$

$$= -\int_a^b f h_0\, dt + \int_a^b q x h_0\, dt + B\, p(b)\, h_0'(b) - A\, p(a) - \int_a^b x q h_0\, dt =$$

$$= B\, p(b)\, h_0'(b) - A\, p(a) - \int_a^b f h_0\, dt \neq 0.$$

[$(p h_0')' = q h_0$, поскольку h_0 – решение уравнения Якоби.]
Получили $l(x, h_0) \neq 0$; значит, устремив α к $-\infty$ или к $+\infty$ в зависимости от знака $l(x, h_0)$, мы увидим, что $\inf Q(x) = -\infty$.

Что и требовалось доказать.

3.11* Решить квадратичную вариационную задачу (пример Гильберта):

$$Q(x) = \int_0^1 \left[t^2[x'(t)]^2 + 12x^2\right] dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \;\; x(1) = 1, \;\; x \in C^1[0,1]$$

Решение.
$p = t^2, \;\; q = 12, \;\; f \equiv 0$; если x – план, то

$$x - \text{оптимальный план} \iff px' \in C^1[a,b] \text{ и } (px')' = qx.$$

$$t^2x'' + 2tx' - 12x = 0$$

Решаем дифференциальное уравнение, на время забыв, что нам нужны лишь планы.
Ищем решение в виде $x = t^\lambda$.

$$\text{Характеристическое уравнение} : \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 12 = 0; \;\lambda = -4 \text{ или } \lambda = 3$$

$$x = c_1t^{-4} + c_2t^3$$

Чтобы x был планом, необходимо $c_1 = 0$.
$x(0) = 0, \; x(1) = 1 \;\Rightarrow\; c_2 = 1$.
$x = t^3$ – оптимальный план; других оптимальных планов нет, т.к. в случае их наличия они были бы решениями дифференциального уравнения.
Ответ: $x = t^3$.

3.12 Решить квадратичную вариационную задачу

$$\int_0^1 \left[2txx' + x^2\right] dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \;\; x(1) = 1, \;\; x \in C^1[0,1]$$

3.13*

$$Q(x) = \int_0^{\pi} \{(x')^2 - x^2\}\, dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \;\; x(\pi) = 1, \;\; x \in C^1[0, \pi]$$

Докажите, что $\inf Q(x) = -\infty$.

Доказательство.
Возьмем $x(t) = \frac{1}{\pi}(t + \alpha \, \sin t), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi} \{(x')^2 - x^2\}\, dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \{(1 + \alpha \, \cos t)^2 - (t + \alpha \, \sin t)^2\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} (1 - t^2)\, dt + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)\, dt + \frac{2\alpha}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\cos t - t \, \sin t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} (1 - t^2)\, dt + \frac{\alpha^2}{\pi^2} (\sin 2t)\big|_0^{\pi} + \frac{2\alpha}{\pi^2} \Big[\int_0^{\pi} \cos t\, dt + (t \, \cos t)\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos t\, dt \Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} (t - \frac{t^3}{3})\big|_0^{\pi} - \frac{2\alpha}{\pi} = \frac{3 - \pi^2 - 6\alpha}{3\pi}$$

Устремляя α к $+\infty$, получим $Q(x) \to -\infty$.

Что и требовалось доказать.

3.14 Решить квадратичную вариационную задачу

$$\int_0^{\pi/2} \{(x')^2 - x^2 + 4x \, \cos t\}\, dt \to \inf$$

$$x(0) = x(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad x \in C^1[0, \pi/2]$$

Решение.

$$p \equiv 1, \;\; q \equiv -1, \;\; f = -2 \, \cos t$$

$$-h'' - h = 0; \quad h(t) = c_1 \, \cos t + c_2 \, \sin t$$

$$h_0(0) = 0, \; h_0'(0) = 1; \quad h_0(t) = \sin t; \qquad h_0(t) > 0 \text{ на } (0, \pi/2]$$

$$-x'' - x = -2 \, \cos t$$

Частное решение ищется в виде $x(t) = t(a \, \cos t + b \, \sin t)$,
тогда $x''(t) = 2b \cos t - 2a \sin t - t(a \, \cos t - b \, \sin t); \quad a = 0, \, b = 1.$
Общее решение: $x(t) = t \, \sin t + c_1 t \, \cos t + c_2 t \, \sin t$.

$$x_*(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0; \quad x_*(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; c_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Ответ: $x_*(t) = (t - \frac{\pi}{2}) \, \sin t$.

3.15 Решить квадратичную вариационную задачу

$$\int_{-1}^{2} \{(x')^2 + t^2 x'\}\, dt \to \inf$$

$$x(-1) = 1, \quad x(2) = 4, \quad x \in C^1[-1,2]$$

Решение.

$$\int_{-1}^{2} \{(x')^2 + t^2 x'\}\, dt = \int_{-1}^{2} (x')^2\, dt + (t^2 x)\big|_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 2tx\, dt = \int_{-1}^{2} \{(x')^2 - 2tx\}\, dt + 15$$

$$p \equiv 1, \ \ q \equiv 0, \ \ f = t$$

$$-h'' = 0; \quad h(t) = c_1\, t + c_2$$

$$h_0(0) = 0, \ h_0'(0) = 1; \quad h_0(t) = t + 1; \qquad h_0(t) > 0 \text{ на } (-1, 2]$$

$$-x'' = t; \quad x = -\frac{1}{6}t^3 + c_1 t + c_2$$

$$x_*(-1) = 1, \quad x_*(2) = 4; \qquad -\frac{1}{6} - c_1 + c_2 = 1, \quad -\frac{4}{3} + 2c_1 + c_2 = 4$$

$$x_*(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{25}{18}t + \frac{46}{18}$$

Это единственное решение (поскольку $h_0(2) > 0$).
Ответ: $x_*(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{25}{18}t + \frac{46}{18}$.

3.16* Исследовать зависимость решения от параметра ε:

$$Q(x) = \int_0^1 \left[\varepsilon (x')^2 - x^2\right] dt \to \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad x \in C^1[0,1], \quad \varepsilon > 0$$

Решение.

$$p \equiv \varepsilon, \;\; q \equiv -1, \;\; f \equiv 0$$

$$-\varepsilon\, h'' - h = 0; \quad h(t) = c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$h_0(0) = 0, \; h_0'(0) = 1; \quad c_1 = 0, \; c_2 = \sqrt{\varepsilon}; \quad h_0(t) = \sqrt{\varepsilon} \sin \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\text{Если } \exists \xi \in (0,1): \quad h_0(\xi) = 0, \text{ то } \inf Q(x) = -\infty.$$

$$sin \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} = 0 \iff t = \pi\, k \sqrt{\varepsilon}, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Если хоть в какой-то точке ξ из $(0,1)$ $h_0(\xi) = 0$, то непременно

$$\pi \sqrt{\varepsilon} \in (0,1) \qquad \iff \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi^2}$$

(a)

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\pi^2}: \qquad \inf Q(x) = -\infty$$

(b)

$$\varepsilon > \frac{1}{\pi^2}: \qquad -\varepsilon\, x'' - x = 0; \quad x(t) = c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$x_*(0) = 0, \; x_*(1) = 1; \quad c_1 = 0, \;\; c_2 \sin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 1, \; c_2 = \frac{1}{\sin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

$$(\sin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0, \;\; 0 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \pi)$$

$h_0(1) > 0 \;\Rightarrow\; x_*(t) = \sin \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \Big/ \sin \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ – единственное решение

(c)

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi^2}: \qquad \frac{x''}{\pi^2} = -x, \;\; x(t) = c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t$$

$$x_*(0) = 0, \; x_*(1) = 1; \quad c_1 = 0, \;\; c_2 \sin \pi = 1; \;\; \text{решения нет}$$

(В действительности $\inf Q(x) = -\infty$,
что можно получить, взяв $x(t) = t + \alpha \sin \pi t, \quad \alpha \to +\infty$.)

3.17*

$$\int_{-1}^{1} x^2 \,(1-x')^2 \,dt \to \inf$$

$$x(-1)=0, \quad x(1)=1, \quad x \in C^1[-1,1]$$

Доказать, что задача не имеет решения; найти inf.

Решение (доказательство).
Построим план $x_n: \ J(x_n) \to 0$; поскольку $J(x) \geq 0$, этим мы докажем, что $\inf J(x) = 0$.

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ \frac{1}{4n}(nt+1)^2, \quad t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ t, \quad t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

$$x_n'(t) = \frac{1}{2}(nt+1), \quad t \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$x_n\left(-\frac{1}{n}\right) = 0,\ x_n'\left(-\frac{1}{n}\right) = 0; \quad x_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},\ x_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Итак, $x_n \in C^1[-1,1]$. Заметим также, что $1 - \frac{1}{2}(nt+1) = \frac{1}{2}(1-nt)$.

$$J(x_n) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{16n^2}(nt+1)^4 \frac{(1-nt)^2}{4}\,dt = \frac{1}{64n^3}\int_{-1}^{1}(1+u)^4(1-u)^2\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Пусть x_* – план, $J(x_*) = 0$; тогда $x_*^2(t)\,[1 - x_*'(t)]^2 = 0$ на $[-1,1]$.

$$1 = x_*(1) - x_*(-1) = x_*'(\xi)(1-(-1)) \Rightarrow x_*'(\xi) = \frac{1}{2} \quad [\exists \xi \in (-1,1)]$$

В окрестности ξ $\ x_*'(t) \in (0,1) \Rightarrow x_*(t) \equiv 0$ в этой окрестности $\Rightarrow$
$\Rightarrow x_*'(\xi) = 0$. Противоречие. Значит, задача не имеет решения.

3.18

$$J(x)=\int_{-1}^{1}(x')^2\,(1-x^2)\,dt\to\inf$$

$$x(0)=x(1)=0,\quad x\in C^1[0,1]$$

Доказать, что кривая $x_0(t)\equiv 0$ является точкой локального минимума, однако $\inf J(x)=-\infty$.

Доказательство.

$$J(x_0)=0$$

При $\|h\|_1\le\frac{1}{2}\quad 1-h^2>0\ \Rightarrow\ J(x_0+h)\ge J(x_0)$; именно это и требуется от точки локального минимума.

$$\text{Рассмотрим } x_n(t)=n\,\sin\pi t;\quad x_n(0)=x_n(1)=0,\ x_n\in C^1[0,1];$$

$$J(x_n)=\int_0^1 n^2\pi^2\cos^2\pi t\,(1-n^2\sin^2\pi t)\,dt=c_1n^2-c_2n^4,$$

$$c_1=\int_0^1\pi^2\cos^2\pi t\,dt,\quad c_2=\int_0^1\pi^2\cos^2\pi t\sin^2\pi t\,dt>0$$

$$J(x_n)\quad\xrightarrow[n\to+\infty]{}\quad-\infty\ \Rightarrow\ \inf J(x)=-\infty$$

Что и требовалось доказать.

3.19 Доказать:

$$d^2\,J(x_0,h)\ge 0\quad\forall h\in C_0^1[a,b]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p(t)=F''_{x'x'}(t,x_0(t),x_0'(t))\ge 0 \text{ на } [a,b] \text{ (условие Лежандра)}$$

3.20*

$$\int_0^1 (x')^2\, x^2\, dt \to \inf$$

$$x(0) = 1, \quad x(1) = \sqrt{2}, \quad x \in C^1[0,1]$$

Решение.

$$F(x, x') = (x')^2 x^2;$$

$$F'_{x'} = 2x^2 x',\ F''_{x'x'} = 2x^2 > 0 \quad (U:\ x > 0,\, x' > 0)$$

Уравнение Эйлера: $F - x' F'_{x'} = \mathrm{const}$

$$x^2 (x')^2 - x' 2x^2 x' = \mathrm{const}; \quad -x^2(x')^2 = \mathrm{const}$$

$$x' = \frac{c}{x}, \quad x\,dx = c\,dt, \quad x = \sqrt{c_1 t + c_2}$$

$$x_0(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1; \quad x_0(1) = \sqrt{2} \Rightarrow c_1 = 1$$

$$x_0(t) = \sqrt{t+1} \text{ – стационарная кривая}$$

Усиленное условие Лежандра на x_0 выполнено.

$x = \sqrt{c_1 t + c_2}$ — общее решение уравнения Эйлера

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_2 = 1; \quad x'(0) = \alpha \Rightarrow \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 \cdot 0 + 1}} = \alpha \Rightarrow c_1 = 2\alpha$$

$$x(t, \alpha) = \sqrt{2\alpha t + 1}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}$$

$$h_0(t) = x'_\alpha(t, \alpha_0) = \left(\frac{t}{\sqrt{2\alpha t + 1}}\right)\Bigg|_{\alpha = \frac{1}{2}} = \frac{t}{\sqrt{t+1}}$$

$h_0(t) > 0$ на $(0,1]$ — усиленное условие Якоби выполнено
Следовательно, x_0 — точка строгого локального минимума.

3.21*

$$\int_0^1 [(x')^2 + 2p\cos x]\, dt \to \inf$$

$$x(0) = x(1) = 0, \quad x \in C^1[0,1]$$

$$p > 0 \text{ – параметр}$$

Найти $\sup p$: кривая $x_0(t) \equiv 0$ является точкой строгого локального минимума. (Задача Эйлера)

Решение.
Если $x_0(t) \equiv 0$ — точка локального минимума, то $d^2J(x_0, h) \geq 0 \quad \forall h \in C_0^1[0,1]$.

$$d^2J(x_0, h) = \int_0^1 \left[F''_{xx}h^2 + 2F''_{xx'}hh' + F''_{x'x'}(h')^2\right]\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left[(-2p\cos 0)h^2 + 2(h')^2\right]\, dt = \int_0^1 \left[-2ph^2 + 2(h')^2\right]\, dt$$

Получили квадратичную вариационную задачу:

$$Q(y) = \int_0^1 \left[2(y')^2 - 2py^2\right]\, dt \to \inf$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y \in C^1[0,1] \quad \left(y \in C_0^1[0,1]\right)$$

Если $\inf Q(y) < 0$, то $\exists h \in C_0^1[0,1]: \; d^2J(x_0, h) < 0$;
в этом случае не является точкой локального минимума (и тем более строгого локального минимума).

$$(2g')' = -2pg; \quad g'' + pg = 0; \quad g_0(0) = 0, \; g_0'(0) = 1$$

$$g(t) = c_1 \cos\sqrt{p}\, t + c_2 \sin\sqrt{p}\, t$$

$$g_0(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \quad g_0'(0) = 1 \Rightarrow c_2\sqrt{p}\cos(\sqrt{p}\cdot 0) = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$g_0(t) = \frac{\sin\sqrt{p}\, t}{\sqrt{p}}$$

При $p > \pi^2, \; \xi = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \in (0,1) \quad g_0(\xi) = 0$; значит,
при $p > \pi^2 \quad \inf Q(y) = -\infty$.
Получили $\sup p \leq \pi^2$.

С другой стороны, x_0 является точкой строгого локального минимума при выполнении следующих условий:

1. x_0 – стационарная кривая:
   удовлетворяет краевым условиям $\forall p > 0$ — очевидно,
   удовлетворяет уравнению Эйлера: $F'_x - \frac{d}{dt}F'_{x'}$ на x_0 обращается в ноль на $[0,1]$;
   $-2p\sin x_0 - \frac{d}{dt}(2x'_0) = -2p\sin 0 - \frac{d}{dt}(2\cdot 0) = 0$ — выполнено $\forall p > 0$.
2. $F''_{x'x'}$ на $[0,1]$: $F''_{x'x'} = 2 > 0$ на $[0,1]$ $\quad \forall p > 0$.
3. Усиленное условие Якоби:

$$(2h')' = -2p\cos x_0\, h; \quad h'' + ph = 0$$

$$h_0(0) = 0,\ h_0,\ h'_0(0) = 1; \quad h_0(t) = \frac{\sin\sqrt{p}\,t}{\sqrt{p}}$$

   $h_0(t) > 0$ на $[0,1]$ $\iff$ $0 < p < \pi^2$

Итак, если $0 < p < \pi^2$, то x_0 — точка строгого локального минимума.
Получили $\sup p \geq \pi^2$.

Из необходимых условий локального минимума вытекает, что $\sup p \leq \pi^2$;
из достаточных условий строгого локального минимума — что $\sup p \geq \pi^2$.
Значит, $\sup p = \pi^2$.
Ответ: π^2.

3.22

$$J(x) = \int_0^b \frac{dt}{x'} \to \inf$$

$$x(0) = 0, \quad x(b) = B, \quad x \in C^1[0, b], \quad b,\, B > 0$$

Найти точку строгого локального минимума.

Решение.

$$F''_{x'x'} = \frac{2}{(x')^3} > 0, \qquad U:\ x > 0,\ x' > 0$$

$$\text{Уравнение Эйлера: } F - x'\, F'_{x'} \equiv \text{const};$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{x'}{(x')^2} = \frac{2}{\lambda},\ \lambda > 0$$

$$x(t) = \lambda t + c; \quad x_0(0) = 0 \Rightarrow c = 0; \quad x_0(b) = B \Rightarrow \lambda = \frac{B}{b}$$

$$x_0(t) = \frac{B}{b} t \text{ – стационарная кривая}$$

$$\alpha_0 = x_0'(0) = \frac{B}{b}$$

$x(t) = \lambda t + c$ – общее решение уравнения Эйлера

$$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0; \quad x'(0) = \alpha \Rightarrow \lambda = \alpha$$

$$h_0(t) = x'_\alpha(t, \alpha)\,\Big|_{\alpha=\alpha_0} = t \text{ – главное решение уравнения Якоби}$$

$h_0(t) > 0$ на $(0, b] \ \Rightarrow\ x_0(t) = \frac{B}{b} t$ – точка строгого локального минимума

Ответ: $x_0(t) = \frac{B}{b} t$ – точка строгого локального минимума.