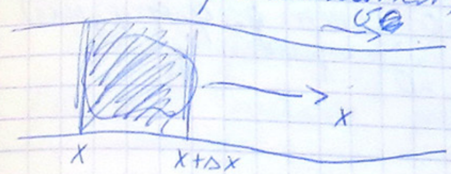
WTF

Задача. (о-задача) 09.02.13

Есть нефтяное пятно, через нек. время оно растекл. до установл. размеров.

Вопрос: как оно изменится далее? (через день, куда уйдет и как растянется)



$C(t,x)$ - концентрация загр. в-ва

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_x^{x+\Delta x} C(t,y)\,dy}_{\int_x^{x+\Delta x} C_t(t,y)\,dy} = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

$x_2 = x+\Delta x$; q — поток загр. в-ва

Считаем, что $C(t,x)$ - дост. гладкая.

Делим на $\Delta x \to 0$:

$$\int_x^{x+\Delta x} C_t(t,y)\,dy \to C_t(t,x)$$

$$\text{п.ч.} \to q_x$$

Т.о.:

$$C_t + q_x = 0.$$

Решаем:

1) Конвекция : $q = cv$

2) Диффузия : $q = -D\,c_x$ - закон Фика

c_x — градиент ~~интеграции~~ концентрации.

ms.kgo@mail.ru

М. Δ обы. модель: $q = cv - Dc_x$

$$c_t - (cv - Dc_x)_x = 0$$

$$c_t - (cv)_x = (Dc_x)_x$$

Частные случаи:

1) $c_t - (cv)_x = 0$ (нет диффузии) ← трансп. ур-е

1.1) $c_t - vc_x = 0$

2) $c_t = (Dc_x)_x$

2.1) $c_t = Dc_{xx}$

1 - лин. ур-е: $\mathcal{L}c = 0$

$$\mathcal{L}(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = \lambda_1 \mathcal{L}c_1 + \lambda_2 \mathcal{L}c_2$$

Решим явным образом 1.1):

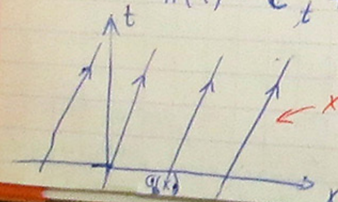
← const, завис. от типа в-в

$$\begin{cases} c_t + vc_x = 0 \\ c(0,x) = g_0(x) \end{cases}$$ - з. Коши

Забудем нашу з. Δ кривые $x(t)$, удовл. усл-ю $x'(t) = v$

Δ $c(x(t), t) := h(t)$

$$h'(t) = c_t + c_x x' = c_t + vc_x = 0$$



← характеристич. линии (вдоль них реш-е const)

Характеристика опред-ся след. образом:

$$c(t,x) = g_0(x_0) = g_0(x - vt)$$

т.е. д-ли Th: где (x,t) $x = x_0 + vt$

(Th)

Если v - const, $D = 0$, $g_0 \in C^1(\mathbb{R})$ то

$$c(t,x) = g_0(x_0) = g_0(x - vt)$$

(имеем такое реш-е)

Пусть теперь в нашей задаче появл. ещё встречный поток:

$$\int_x^{x+\Delta x} c_t(t,y)\,dy = q(t,x) - q(t,x+\Delta x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t,y)\,dy$$

- неоднородное трансп. ур-е

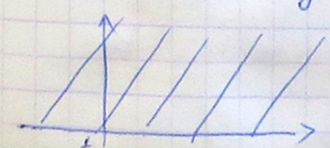
Кратк. форма:

$$c_t + q_x = f(t,x)$$

Решаем:

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(t,x) \\ c(0,x) = g_0(x) \end{cases}$$

- с помощью характеристик:



$$h(t) = c(x(t), t)$$

$$h'(t) = c_t + c_x \cdot x' = c_t + vc_x = f(t,x) \pm f(t, x_0+vt)$$

Т.е. нам нужно реш. ОДУ:

$$\begin{cases} h'(t) = f(t, x_0 + vt) \\ h(0) = g_0(x_0) \end{cases}$$

$$h(t) = g_0(x_0) + \int_0^t f(s, x_0 + vs)\,ds$$

$$\overset{\parallel}{c(t, x(t))}$$

– нам дана $(\cdot)$ (x, t)

(1) $c(t,x) = g_0(x - vt) + \int_0^t f(s, x + v(s-t))\,ds$

Получ. Th:

Th

$g_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, $f_x \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

Тогда $\exists!$ реш-е, получаемое с пом-ю характеристик, по ф-ле (1)

/* покажем, что нам реально нужно усл-е $f_x \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$: дифф-м:

$$c_t(t,x) = -g_0'(x - vt)v + f(t,x) - v\int_0^t f_x(s, x + v(s-t))\,ds.$$

Задача. (С-задача)

Решаем задачу о транспортном потоке (плотности).

Улица одномерная, без притоков и оттоков, односторонняя, обгонов нет.

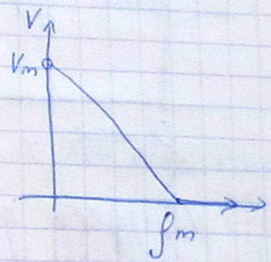
$\rho(t,x)$ – плотность.

$v = v(\rho)$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_t$, $\frac{dv}{d\rho} < 0$

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0$$

$$v(\rho) = v_m\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$$



Решаем:

$$\rho_t + v_m\left(\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\right)_x = 0$$

$$\begin{cases} \rho_t + v_m\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_m}\right)\rho_x = 0 \\ \rho(0, x) = g_0(x) \end{cases}$$

$x(t)$ – характеристика

$$\dot{x}(t) = v_m\left(1 - \frac{2\rho(x(t), t)}{\rho_m}\right)$$

$$\rho(t, x(t)) = \underset{\underset{g_0(x_0)}{\parallel}}{\rho(0, x(0))}, \quad x(0) = x_0$$

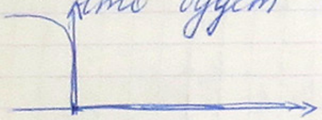
Получили хар. линии:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V_m \left(1 - \dfrac{2\rho_0(x_0)}{\rho_m}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (2)$$

- это не прямые, а интегральные кривые! В связи с этим, имеем 2 неприятности. (прох. неск. через точку, или ни одной)

1 частн. случай („задача о вкл. зел. света")

Машины перед светофором (красный). Мгновенно перекл. на зелёный. Что будет через нек. время?



Светофор

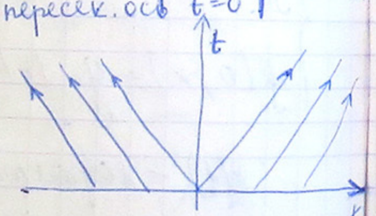
$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_m, & x \le 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

1* здесь функция не гладкая, но мы её приближённо счит. гладкой ступенькой *)

Подставляем $\rho_0(x)$ в (2), в кот. характеристика пересек. ось $t=0$.

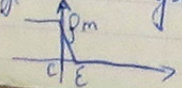
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = V_m \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -V_m \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \le 0$$



Печаль с характ. посередине. Исправим!

Сделаем нашу „ступеньку" линейной функцию - дифф-й, введя $\rho_\varepsilon \to \rho_0$:



$$\rho_\varepsilon = \begin{cases} \rho_m, & x \le 0 \\ \rho_m\left(1 - \dfrac{x}{\varepsilon}\right), & 0 < x < \varepsilon \\ 0, & x \ge \varepsilon \end{cases}$$

Подставляем в (2) ρ_ε:

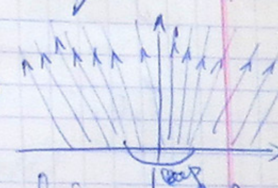
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -V_m \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \le 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -V_m\left(1 - \dfrac{2x_0}{\varepsilon}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in (0, \varepsilon)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = V_m \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \ge \varepsilon$$

- получили 3 типа характеристик:

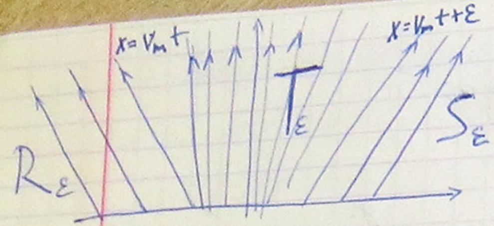
$$\begin{cases} x = x_0 - V_m t, & x_0 \le 0 \\ x = x_0 - V_m\left(1 - \dfrac{2x_0}{\varepsilon}\right), & x_0 \in (0, \varepsilon) \\ x = x_0 + V_m t, & x_0 \ge \varepsilon \end{cases}$$



Всё ок!

Теперь запишем в явном виде решен. ε-задачи:

$\rho^\varepsilon(t, x) = \rho_\varepsilon(x_0)$, где x_0 - такая !(.), эта хар-ка, начин-ся в $(x_0, 0)$, прох. ч/з (x, t)



- разделим на 3 зоны.

$(x,t)\in R$:

$$\rho^\varepsilon(t,x)=g_\varepsilon=\rho_m$$

$(x,t)\in S$:

$$\rho^\varepsilon(t,x)=g_\varepsilon=0$$

$(x,t)\in T$:

$$x(t)=x_0-V_m\left(1-\frac{2x_0}{\varepsilon}\right)t$$

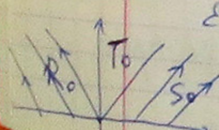
$$x_0=\frac{x+V_m t}{\varepsilon+2V_m t}\varepsilon$$

$$\rho^\varepsilon(t,x)=g_\varepsilon(x_0)=\rho_m\left(1-\frac{x_0}{\varepsilon}\right)=\rho_m\left(1-\frac{x+V_m t}{\varepsilon+2V_m t}\right)$$

Т.о.:

$$\rho^\varepsilon(x,t)=\begin{cases}\rho_m, & (x,t)\in R\\ \rho_m\left(1-\dfrac{x+V_m t}{\varepsilon+2V_m t}\right) & (x,t)\in T_\varepsilon\\ 0 & (x,t)\in S_\varepsilon\end{cases}$$

$\varepsilon\to 0$ => получим $\rho(x,t)$:



$$\rho(t,x)=\begin{cases}\rho_m & x\le -V_m t\\ \rho_m\left(1-\dfrac{x+V_m t}{2V_m t}\right) & -V_m t\le x\le V_m t\\ 0 & x\ge V_m t\end{cases}$$

Волна разрежения - так называется наше реш-е. Если мы проведём прямую $t=const$, то при увелич. const наши линии будут всё больше расх-ся.

Наше реш-е явл. реш-м в каких-то отд. областях, но формально - это не решение, слишком плохие нач. данные.

Задача (формирование пробок)

В момент $x=0$ все машины встали

$$\begin{cases}\rho(0,x)=g_0(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}\rho_m \text{ (так зададим)}, & x\le 0\\ \rho_m & x>0\end{cases}\\ \rho_t+V_m\left(1-\dfrac{2\rho}{\rho_m}\right)\rho_x=0\end{cases}$$

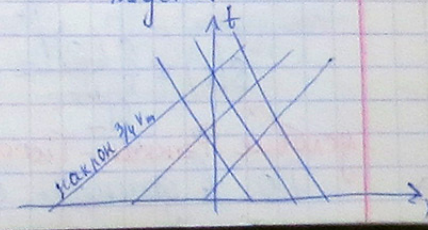
Строим характеристики $x(t)$.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=V_m\left(1-\dfrac{2\rho(x(t))}{\rho_m}\right)\\ x(0)=x_0\end{cases}$$

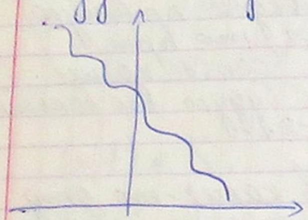
$\rho(t,x(t))=g_0(x_0)$

подставим

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{4}V_m, & x(0)=x_0<0\\ \dfrac{dx}{dt}=-V_m, & x(0)=x_0>0\end{cases}$$



У нас получилась сетка. Наше реш-е будет ступенчатым:



$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2}\rho(t,y)\,dy = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{x_1}^{s(t)}\rho(t,y)\,dy + \int_{s(t)}^{x_2}\rho(t,y)\,dy\right) = q(t,x_1) - q(t,x_2)$$

Дифференцируем:

знач-е слева

$$\int_{x_1}^{s(t)}\rho_t(t,y)\,dy + \rho^-(t,s(t))\,\dot s(t) - \rho^+(t,s(t))\,\dot s(t) + \int_{s(t)}^{x_2}\rho_t(t,y)\,dy =$$

$$= \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\rho_t(t,y)\,dy}_{\to 0} + \rho^-(t,s(t))\,\dot s(t) - \rho^+(t,s(t))\,\dot s(t) = q(\rho(t,x_1)) + q(\rho(t,x_2))$$

при $x_1 \uparrow s(t)$, $x_2 \downarrow s(t)$

Т.о.:

$$\dot s(t)\left(\rho^-(t,s(t)) - \rho^+(t,s(t))\right) = q(\rho^-(t,s(t))) - q(\rho^+(t,s(t)))$$

$$\dot s(t) = \frac{q(\rho)\big|_-^+}{\rho\big|_-^+} = \frac{q(\rho^+(t,s(t))) - q(\rho^-(t,s(t)))}{\rho^+(t,s(t)) - \rho^-(t,s(t))}$$

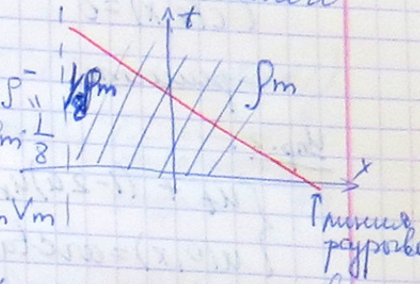
условие Рэнкин–Гюгонио

Т.о. в данном случае мы требуем, где есть разрывы ф-ции, соблюдение усл-я Рэнкин-Гюгонио, и у нас снова всё становится хорошо.

Определим линию разрыва с пом. нашего усл-я

$$q(\rho^+) = v_m\rho^+\left(1 - \frac{\rho^+}{\rho_m}\right) = 0$$

$$q(\rho^-) = v_m\rho^-\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho_m}\right) = \frac{7}{8}v_m\rho_m\frac{1}{8} = \frac{7}{64}\rho_m v_m$$



$$\Rightarrow \dot s(t) = -\frac{\frac{7}{64}\rho_m v_m}{\frac{7}{8}\rho_m} = -\frac{1}{8}v_m$$ — линия разрыва (ударная волна)

$$\rho(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_m, & x < -\frac{1}{8}v_m t \\ \rho_m, & x > -\frac{1}{8}v_m t \end{cases}$$

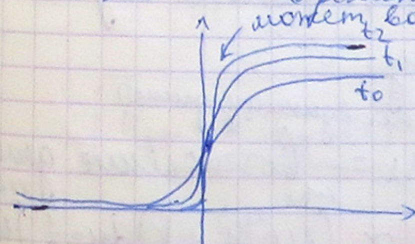
III частн. случай

$$g_0(x) = \mathrm{arctg}\,x$$

$$\begin{cases} x'(t) = v_m\left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{arctg}(x + \frac{\pi}{2})}{\rho_m}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

— самостоятельное упражнение (исслед. ф-ю)

в момент времени t_0:



может возникнуть ударная волна даже при ~~регуляр~~ гладк. усл-х!

Упр. 1.

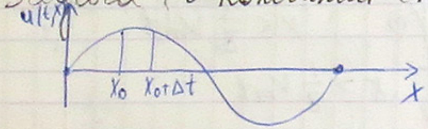
$$\begin{cases} c_t + v c_x = e^{-t}\sin t \\ c(0,x) = 0 \end{cases} \qquad v = const$$

— решить.

Упр. 2.

$$\begin{cases} u_t + (1-2u)u_x = 0 \\ u(0,x) = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$

Задача (о колебании струны)



— возд. на неё

/* Принцип наименьшего возд.:

$$A(u) = \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,dt \longrightarrow extr$$

T - кинетич., U - потенц. */

Напишем принцип в нашем случае:

$$T = \frac{1}{2}\int \underbrace{\rho_0}_{\text{плотность}} u_t^2(t,y)\,dy$$

в расчёте на единицу длины

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(t,y)}\,dy - \Delta x =$$ — вычисление длины

$$= \int_x^{x+\Delta x} \left(\sqrt{1+u_x^2} - 1\right) dy \approx \int_x^{x+\Delta x} \left(1 + \frac{u_x^2}{2} - 1\right) dy = \frac{1}{2}\int_x^{x+\Delta x} u_x^2\,dy$$

$$U = \frac{1}{2}\int_x^{x+\Delta x} u_x^2\,dy \cdot \underbrace{k_0}_{\text{жёсткость}}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho_0 u_t^2 - k_0 u_x^2)\,dx$$

Считаем, что $u \in C^2([t_1, t_2] \times [0, l])$

=> доп. вариации: $h \in C_0^2(\text{— " —})$ компактный носитель во внутр. квадрата

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(u + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

это же экстремаль, значит $=0$.

$$A(u+\varepsilon h) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \rho_0 (u_t + \varepsilon h_t)^2 - k_0 (u_x + \varepsilon h_x)^2)\,dt$$

— вариационная производная

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(u + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = 2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l (\rho_0 u_t h_t - k_0 u_x h_x) = 0$$

Интегрируем по частям:

$$2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \rho_0 (u_t h_t - k_0 u_x h_x) = 2\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \rho_0(-u_{tt}) + k_0 u_{xx}) h(t,y)\,dt\,dy = 0$$

$$-\rho_0 u_{tt} + k_0 u_{xx} = 0$$

$$u_{tt} - \underbrace{\frac{k_0}{\rho_0}}_{= v^2} u_{xx} = 0$$

$$\boxed{u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0}$$ — ~~волновое~~ трансп. ур-е, мы это увидим позже

$\square u = 0$ — даламбертиан.

2.03.13

Вспоминаем:

трансп. ур-е: $\begin{cases} u_t + v u_x = f(x,t) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$ (*)

$u(t,x)$ - неизв.
v - число (прост. вар-т)
$v \in \mathbb{R}$ - дано
$u_0(\cdot)$ - дано
$t \geq 0$.

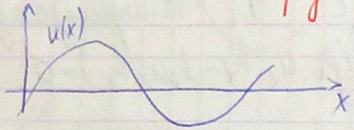
Th. Если $f \in C, f_x \in C$, $u_0 \in C^1$,

то ур-е (*) допуск. ! реш-е:

$$u(t,x) = u_0(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)\, ds$$

В частности, если $f = 0$, то $u = u_0(x - vt)$

Ур-е колебания струны (волн. ур-е)



$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$$

Считаем, что струна бесконечна: $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$

Нач. возмущение: $u(0,x) = g(x)$

-"- скорость: $u_t(0,x) = h(x)$ - з. Коши д/ волн. ур-я (**)

$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$

Определяем, какое хотим реш-е:

$u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

$\lim\limits_{t \to 0} u(t,x) = g(x)$, $\lim\limits_{t \to 0} u_t(t,x) = h(x)$

Решим задачу:

I метод.

Заметим, что наше ур-е $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ м. перепис. в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{(u_t + v u_x)}_{=:w} = 0$$

$$\begin{cases} w_t - v w_x = 0 \\ w(0,x) := \psi(x) \end{cases}$$

Тогда наша задача имеет ! реш-е по Th:

$w = \psi(x + vt)$

Заметим, что

$\begin{cases} u_t + v u_x = \psi(x + vt) \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$ - смотрим на (*).

$\Rightarrow$ Получ. задачу:

$$u(t,x) = \varphi(x - vt) + \int_0^t \psi(x - v(t-s) + vs)\, ds =$$

$$= \varphi(x - vt) + \int_0^t \psi(\underbrace{x - vt + 2vs}_{:=y})\, ds =$$

$$= \varphi(x - vt) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(y)\, dy \quad (*')$$

- нам нужно подобрать φ, ψ, исходя из нач. усл-й.

$u(0,x)=\varphi(x)=g(x) \Rightarrow g(x)=\varphi(x)$ (1')

$$u_t(0,x)=-x\varphi'(x-vt)+\frac{1}{2v}\left(v\psi(x+vt)+\psi(x-vt)v\right)\Big|_{t=0}=$$

$$=-v\varphi'(x)+\frac{1}{2v}\psi(x)=h(x)$$

$\overset{\varphi=g}{\Rightarrow}$

$-vg'(x)+\psi(x)=h(x)$

$\Rightarrow \psi(x)=h(x)+vg'(x)$ (2')

Подставляем (1'), (2') в (*'):

$$u(t,x)=\frac{g(x+vt)+g(x-vt)}{2}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}h(y)\,dy \quad (1)$$

— фр-ла Даламбера

— Получили (Th):

Если $g\in C^2(R)$, $h\in C^1(R)$,

то (**) имеет ! реш-е задачи фр-лой (1)

д-ка по использ-ю !-ти реш-я трансп. задачи с const коэфф. (предыд. Th)

/*

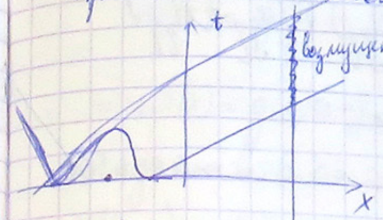
Физический смысл

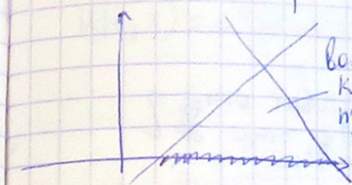
Муравей на струне, её дёрнули. Когда он почувств. возмущ.?

При $h=0$ он почувств. возмущения т. на боковой поверхн. конуса будущего;

Если $h\neq 0$, то всюду внутри конуса

При масштабном возмущ. (не в одной (.)):





?

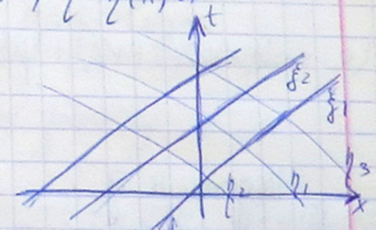
*/

II метод.

Ищем общ. реш-е ЛОУ: $u_{tt}-v^2u_{xx}=0$

Введем замену: $\xi=\xi(x,t)$, $\eta=\eta(x,t)$

$$\begin{cases}\xi=x+vt\\ \eta=x-vt\end{cases} \Rightarrow \quad t=t(\xi,\eta),\ x=x(\xi,\eta)$$



прямые, характеристики трансп. ур-я (вдоль них ~~бегут~~ бегут одна и вторая волны)

$U(\xi,\eta)=u(t(\xi,\eta),x(\xi,\eta))$

далее вместо большой пишем малую.

$u_t=u_\xi\xi_t+u_\eta\eta_t$, $\quad u_t=u_\xi v-u_\eta v$

$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$, $\quad u_x=u_\xi+u_\eta$

$$u_{tt} = u_{t\xi}\xi_t + u_{t\eta}\eta_t = v(u_{\xi\xi}v - u_{\xi\xi}v) - v(u_{\xi\eta}v - u_{\eta\eta}v)$$

$$u_{xx} = u_{x\xi}\xi_x + u_{x\eta}\eta_x = (u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

Подставим в $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$:

$-4v^2 u_{\xi\eta} = 0$. $\qquad v \neq 0 \Rightarrow$ считаем:

$u_{\xi\eta} = 0$

$\frac{\partial}{\partial\eta}(u_\xi) = 0$ – т.е. u_ξ не завис. от η

это не та φ, что была раньше

$\Rightarrow u_\xi := \varphi(\xi)$

$u := \omega(\xi)$ – первообразная $+ \underbrace{\psi(\eta)}_{\text{"const"}}$

Т.о. получили предст.:

$$u = \omega(\xi) + \psi(\eta) \qquad (1)$$

$u = \omega(x+vt) + \psi(x-vt)$ – искомое реш-е (∀ реш-е однор. ур-я представимо в таком виде)

Подст. н.у.:

$$\begin{cases} u(0,x) = \omega(x) + \psi(x) = g(x) \\ u_t(0,x) = v\omega'(x) - v\psi'(x) = h(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega(x) = g(x) - \psi(x)$

$$\frac{h(x)}{v} = g'(x) - \psi'(x) - \psi'(x) = g'(x) - 2\psi'(x)$$

$\psi'(x) = \frac{g'(x)}{2} - \frac{h(x)}{2v}$ – д.у. (ваш КО)

$\psi(x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{H(x)}{2v} + c$ ← первообр.

$\Rightarrow \omega(x) = g(x) - \frac{g(x)}{2} + \frac{H(x)}{2v} - c = \frac{g(x)}{2} + \frac{H(x)}{2v} - c$

– подст. в (1):

$$u(t,x) = \omega(x+vt) + \psi(x-vt) = \frac{g(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v}H(x+vt) - c + \frac{g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}H(x-vt) + c =$$

$$= \frac{g(x+vt) + g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\big(H(x+vt) - H(x-vt)\big) =$$

$$= \frac{g(x+vt) + g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} h(y)\,dy$$ – ф-ла Даламбера

О лин. д.у. частн. производн. II порядка (+классифик-я)

/* откуда мы взяли нашу замену */

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + g(x,y)u = f(x,y)$$

$u = u(x,y)$ – неизв., ост. коэфф. изв.

Как подобрать замену, чтобы упростить?

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Тогда $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

$u_{xx} = \dots$

$u_{xy} = \dots$

$u_{yy} = \dots$

- Подставим в исх. ур-е (опустим промежуточн. рез-ты)

* При этом наши требования к замене: дважды дифф-ф, в окрест. (·) (x_0, y_0) — лок. обратимост (т.е. Якобиан замены переменных $\neq 0$ в $\forall$ (·)) *

$J = \det\begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$ — в обл., в кот. работаем.

$$\underbrace{(a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)}_{A} u_{\xi\xi} + \underbrace{(a\xi_x\eta_x + b\xi_x\eta_y + b\xi_y\eta_x + c\xi_y\eta_y)}_{2B} u_{\xi\eta}$$

$$+ \underbrace{(a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)}_{C} u_{\eta\eta} + (\dots) = f$$

Потребуем подобр. ξ, η т.ч. $\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$

$av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$ — общ. вид A, C.

$a(\alpha^2 + 2\frac{b}{a}\alpha\beta + \frac{c}{a}\beta^2) =$ — кв. форма, м. предст. в виде:

$= a(\alpha - \Lambda^+\beta)(\alpha - \Lambda^-\beta)$, где $\Lambda^\pm$ — нек. числа.

Ищем $\Lambda^\pm$:

$a(\alpha^2 - (\Lambda^+ + \Lambda^-)\alpha\beta + \Lambda^+\Lambda^-\beta^2) =$

$= a(\alpha^2 + \frac{2b}{a}\alpha\beta + \frac{c}{a}\beta^2)$

$\Rightarrow \begin{cases} \Lambda^+ + \Lambda^- = -\frac{2b}{a} \\ \Lambda^+\Lambda^- = \frac{c}{a} \end{cases}$ Когда м. подобр. такие $\Lambda^\pm$? Когда дискримин. > 0.

$b^2 - ac > 0$ — т.е. $\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} < 0$, т.е. с.ч. этой м-цы — разных знаков (оба $\neq 0$) — это гиперболическое ур-е.

Т.о. в той части пр-ва, где наше ур-е гипербол. мы м. перепис. наше ур-е

$av_x^2 + 2bv_xv_y + cv_y^2 = 0$

в виде:

$a(v_x - \Lambda^+ v_y)(v_x - \Lambda^- v_y) = 0$

$v_x - \Lambda^+ v_y = 0$ (1)

$v_x - \Lambda^- v_y = 0$ (2)

Взяв в кач-ве ξ, η реш-я ур-й, получим:

$2Bu_{\xi\eta} + (\dots) = f$ — канонич. форма (гиперб. ур-я)

- если одно из с.ч. м-цы $= 0$, то $\det = 0$ (параболич. ур-е), дискр-т $= 0$, и мы не сможем получ. 2 разных Λ^+, Λ^-, и $\Lambda^+ = \Lambda^-$ — получим одно трансп. ур-е, можем его решить, получить замену д/ ξ или η, а в кач-ве второго (ξ или η) — взять $\forall$ ф-ю, т.ч. $J \neq 0$.

проверь, что не подходит к такому виду

канонич. форма гиперб. ур-я: $Au_{\xi\xi} + (\dots)$

- если $\det > 0 \Rightarrow$ с.ч. одного знака, $\neq 0$
получим ур-е с 2-мя компл. сопр. корнями — эллиптическое ур-е
и в кач-ве Λ^+, Λ^- берём веществ. и мним. части одного из двух компл. сопр. корней.

$A u_{\xi\xi} + C u_{\eta\eta} + (\dots) = f$ — канонич. вид эллиптич. ур-я.

Примеры.

1. $u_{tt} - V^2 u_{xx} = f(t,x)$ (не имеет канонич. вида)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -V^2 \end{pmatrix}$ — м-ца коэфф. $\neq 0 \Rightarrow$ будет гиперб. ур-е.

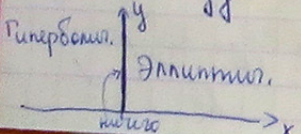
2. $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ — ур-е Пуассона (имеет канонич. вид)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — $\det > 0 \Rightarrow$ эллиптич. ур-е

3. $u_t - a^2 u_{xx} = f(t,x)$

$\begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — параболич. ур-е.

4. $x u_{xx} + u_{yy} = 0$.



— ур-е двух типов
ур-е переменного типа

Теперь от случая двух перем. перейдём ко мн-ву перем.:

$u = u(x_1, \dots, x_n)$

$x := (x_1, \dots, x_n)$

$u = u(x)$

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}}_{\text{гл. часть}} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) u_{x_j} + c(x) u = f$$

по ней классификация: a, b, c — коэфф.

гиперб., параболич., эллиптич. ур-я (в завис. от с.ч. — по аналогии).

Примеры (продолж-е)

1' $u_{tt} - V^2 \Delta u = f(t,x)$ — волновое ур-е (при $n=1$ Δ чуть ранее сегодня)

$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = \nabla \cdot \nabla u$

/* $\operatorname{grad} u = \nabla u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — вектор набла

$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (V_1, \dots, V_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}$

*/

— гиперболическое

2'. $u_t - a^2 \Delta u = f(t,x)$ — ур-е теплопроводн.

— параболическое

3'. $\Delta u = f(x)$

— эллиптическое (м-ца — диагон. единичн.)

Теперь хотим „упростить" ур-е д/многом. случая:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + (\dots) = f$$

$$\xi = \xi(x) \mid \sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, u_{\xi_i \xi_j} + (\dots) = f$$ — посчитать! должны уметь приводить к виду:

Получим:

$$\tilde{a}_{ij}(\xi) := \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_\beta}$$

— хотим убить все внедиаг. эл-ты.

$\frac{n(n-1)}{2}$ — ур-й, n неизвестных.

$\frac{n(n-1)}{2} > n \Leftrightarrow n > 3$ — т.е. при $n > 3$ — без шансов.

Т.о. в общ. случае мы не сможем сделать так же красиво, как для ур-я 2х перем.

Конец отступления про д.у. II пор. с частн. произв.

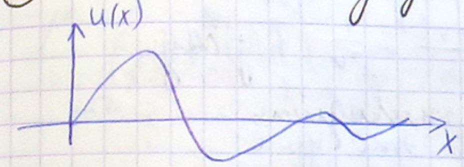
Вернёмся к волновому ур-ю, Δ в более общ. виде:

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 \Delta u = 0 & t>0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & V\text{-const},\ V \in \mathbb{R},\ V \neq 0 \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases}$$

/* реш-е д.б. дост. раз дифф. и т.д. по аналогии с двумерным случаем */

Будем идти по этапам.

⓪ Вспомогат. задача (задача о колебании полуогранич. струны)



$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = 0 & t>0,\ x \in \mathbb{R}^+ \\ u(t,0) = 0 & \text{— защемл-е в одной (·)} \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases}$$

Дополнит. предп-е: $h(0)=0$, $g(0)=0$

/* скорость и возмущение в нач. момент $=0$ */

Решение:

Продлим наши ф-ции на всю вещ. ось:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -\tilde{h}(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Будем рассуждать по аналогии с выводом фр-лы Даламбера.

$$\tilde{u}(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & x \geq 0 \\ -u(t,-x), & x < 0 \end{cases}$$

Считаем $\tilde{u}_{tt}$, $\tilde{u}_{xx}$. Когда посчитаем, получ.:

$$\tilde{u}_{tt} - V^2 \tilde{u}_{xx} = 0$$

Точно так же:

$$\begin{cases} \tilde{u}(0,x) = \tilde{g}(x) \\ \tilde{u}_t(0,x) = \tilde{h}(x) \end{cases}$$

– это та же задача (так получилось), но $x \in \mathbb{R}$ => м. примен. фр-му Даламбера.

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{\tilde{g}(x-vt) + \tilde{g}(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \tilde{h}(y)\,dy$$

Подставим $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ в это ур-е:

(***) проверить корректность

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{g(x-vt)+g(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} h(y)\,dy, & x \geq vt \geq 0 \\ \frac{-g(vt-x)+g(x+vt)}{2} + \frac{1}{2v}\int_{vt-x}^{vt+x} h(y)\,dy, & 0 \leq x \leq vt \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Нам нужно проверить непрерывность и диффер-ть! (сами)

Th

$$\left.\begin{matrix} g \in C^2, \ h \in C^2 \\ h(0) = g(0) = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \exists! \text{ реш-е } u = u(t,x), \text{ опред. (***)}$$

автомат. из конструкции $\exists$-ва

$\exists$-е ~~отро~~ провер-ся ручками

09.03.13

Смотрим на волновое ур-е (страницу назад) и в случае многомерного x:

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 \Delta u = 0 \\ u(0,x) = g(x) \\ u_t(0,x) = h(x) \end{cases} \qquad u = u(t,x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ n > 1.$$

Считаем, что $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$

Введём ф-ю $U(x,t,r) = \fint_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,d\sigma(y) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(t,y)\,d\sigma(y)$, $r \in \mathbb{R}^+$

по сфере

/* $\fint_\Omega f(x)\,dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\,dx$ */

/* Объём единичного n-мерного шарика:

$$|B_1(0)| =: \omega_n = \begin{cases} \pi & n=2 \\ 4/3\,\pi & n=3 \\ \ldots \end{cases}$$

$|\partial B_1(0)| = n\omega_n$

$|B_r(0)| = \omega_n r^n$ – счит. по фр-ле Кавальери: $|B_r(0)| = \int_0^r |\partial B_s(0)|\,ds$

$|\partial B_r(0)| = n\,\omega_n r^{n-1}$

– применим к нашему случаю. */

(1) $U = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(t, x+rz)\, r^{n-1}\, d\sigma(z)$

$\exists\, y = x + rz$, $z \in \partial B_1(0)$ $\quad y \in \partial B_r(x)$

(2) $G(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} g(x+rz)\, d\sigma(z)$

(3) $H(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} h(x+rz)\, d\sigma(z)$

x-fix. Теперь переменные - это t и r.

(1) $U \in C^2$

$$U_{tt} - c^2\Big(\overbrace{U_{rr} + \frac{(n-1)}{r}U_r}^{\text{радиальный лапласиан}}\Big) = 0$$

$(t,r) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$

Д-во: дифф-м ф-лу (1) ~~(3)~~.

$$U_r = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(t, \underbrace{x+rz}_{y})\cdot z\, d\sigma(z) \ominus \qquad z = \frac{y-x}{r}$$

/* Пояснение:

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B_1(0)} u(t, x_1+rz_1, x_2+rz_2)\, d\sigma(z_1,z_2) =$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{\Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}(\ldots)\, z_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\ldots)\, z_2\Big)}_{\nabla u(\ldots)\cdot \overbrace{(z_1, z_2)}^{z}} d\sigma(z_1, z_2).$$

*/

$\ominus \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial n}(t, x+rz)\, d\sigma(z) =$

по нормали $\qquad$ по Th Гаусса-Остр.

$$= \frac{1}{n\omega_n}\int_{B_1(0)} \Delta u(t, \underbrace{x+rz}_{y})\, dz = \frac{1}{n\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy \qquad z = \frac{y-x}{r}$$

Th Гаусса-Остроград.

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(t,y)\, d\sigma(y) =$$

нормали

$$= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int \Delta u(t,y)\, \cancel{d\sigma y}\, dy = \frac{r}{n}\fint_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy.$$

Упражнение: получить руками U_{rr}, тем самым док-в, что $U \in C^2$

Т.о. получаем:

$$U_r = \frac{r}{n}\fint_{B_r(x)} \Delta u(t,y)\, dy \overset{u_{tt} - v^2\Delta u = 0}{=} \frac{r}{n}\frac{1}{v^2}\fint_{B_r(x)} u_{tt}(t,y)\, dy$$

$$\Rightarrow r^{n-1}U_r = \frac{r^n}{n}\frac{1}{v^2}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)} u_{tt}\, dy =$$

переход к пол. коорд

$$= \frac{1}{v^2}\frac{1}{n\omega_n}\int_0^r \rho^{n-1}\, d\rho \int_{\partial B_1(0)} u_{tt}(t, x+\rho z)\, d\sigma(z)$$

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{v^2}\frac{1}{n\omega_n} r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} u_{tt}(t, x+rz)\, d\sigma(z) =$$

переходим обратно к y:

$$= \frac{1}{v^2}\frac{1}{n\omega_n}\int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\,d\sigma(y) =$$

$$\cancel{= \frac{r^n}{v^2}\frac{1}{n} r^{n-1}\int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\,dy}$$

$$= \frac{1}{v^2}\,\frac{1\cdot r^{n-1}}{\underbrace{n\omega_n r^{n-1}}_{|\partial B_r(x)|}}\int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\,d\sigma(y) = \frac{r^{n-1}}{v^2}\int\limits_{\partial B_r(x)} u_{tt}(t,y)\,d\sigma(y)$$

Т.о.

$$v^2(r^{n-1}U_r)_r = r^{n-1}U_{tt}$$

$$v^2((n-1)r^{n-2}U_r + r^{n-1}U_{rr}) = r^{n-1}U_{tt}$$

$$v^2\left(U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r\right) = U_{tt}$$ – ур-е Эйлера-Пуассона-Дарбу

Теперь решим з. Коши д/волн. ур-я при n=3

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 \\ u\big|_{t=0} = g \\ u_t\big|_{t=0} = h \end{cases} \qquad n=3$$

$$U(x,t,r):\ \begin{cases} U_{tt} - v^2\left(U_{rr} + \frac{\overset{2}{(n-1)}}{r}U_r\right) = 0 \\ U\big|_{t=0} = G \\ U_t\big|_{t=0} = H \end{cases}$$

x - fix. Перем.: t, r

$$\tilde U(t,r) := r\cdot U(t,r)$$

$$\tilde G(t,r) := r\cdot G(t,r)$$

$$\tilde H(t,r) := r\cdot H(t,r)$$

$$\tilde U_{rr} = (rU)_{rr} = (U + rU_r)_r = U_r + U_r + rU_{rr} =$$

$$= 2U_r + rU_{rr} = r\underbrace{\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right)}_{\text{рад лапласиан}} \overset{(!)}{=} r\left(\frac{U_{tt}}{v^2}\right) = \frac{\tilde U_{tt}}{v^2}$$

Т.о. получаем:

$$\begin{cases} \tilde U_{tt} - v^2\tilde U_{rr} = 0 \\ \tilde U\big|_{t=0} = \tilde G \\ \tilde U_t\big|_{t=0} = \tilde H \\ \tilde U\big|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

– это же задача о колебании полуогр. струны! (см. конец прошлой лекции)

Запишем в явн. виде:

$$\tilde U(t,r) = \begin{cases} \dfrac{\tilde G(r+vt) - \tilde G(vt-r)}{2} + \dfrac{1}{2v}\displaystyle\int_{r-vt}^{r+vt}\tilde H(y)\,dy & 0 \le r \le vt \\ \dots & 0 \le vt \le r \end{cases}$$

$$U(x,t,r) = \begin{cases} \dfrac{\tilde G(r+vt) - \tilde G(vt-r)}{2r} + \dfrac{1}{2vr}\displaystyle\int_{r-vt}^{r+vt}\tilde H(y)\,dy \dots \\ \dots \end{cases}$$

При t-fix, $\tau \to 0$ нам не интересен случай $0 \le vt \le \tau$, там 0.

при этом:

$$U(x,t,\tau) = \fint_{\partial B_\tau(x)} u(t,y)\,d\sigma(y)$$

$$\lim_{\tau \to 0^+} U(x,t,\tau) = u(t,x).$$

Подставим далее $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ ($0 \le vt \le \tau$ - не Δ)

$$U(x,t,\tau) = \frac{\tau G(\tau+vt) - \tau G(vt-\tau)}{2\tau} + \frac{1}{2v\tau}\int_{vt-\tau}^{vt+\tau} \rho H(\rho)\,d\rho \qquad 0 \le \tau \le vt$$

Упражнение: устремляем $\tau \to 0$ (дифф-м)

$$u(t,x) = t\fint_{\partial B(x,vt)} h(y)\,d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,vt)} g(y)\,d\sigma(y)\right)$$

радиус

WTF?! /* Производную можно было не писать, наверное... */

$$\frac{\tilde{U}(x,t,\tau)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(\tilde{G}(\tau+vt) - \tilde{G}(vt-\tau)\right) + \frac{1}{2v\tau}\int_{vt-\tau}^{vt+\tau} \tilde{H}(\rho)\,d\rho \to$$

$$\xrightarrow[\tau\to 0]{} \tilde{G}'(vt) + \frac{1}{v}\tilde{H}(vt) = vtG'(vt) + G(vt) + \frac{1}{v}vtH(vt)$$

$$= tH(vt) + vtG'(vt) + G(vt)$$

/* $\tilde{G}'(\tau) = \tau G'(\tau) + G(\tau)$ */

$$u(t,x) = t\fint_{\partial B_{vt}(x)} h(y)\,d\sigma(y) + \fint_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y) + t\frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y)$$

Подставим интегралы по fix мн-вам

$$\frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi v^2 t^2}\int_{\partial B_1(0)} g(x+vt\cdot z)\,d\sigma(z)\cdot 4\pi v^2 t^2 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\fint_{\partial B_1(0)} g(x+vtz)\,d\sigma(z)$$

$$v\fint_{\partial B_1(0)} \nabla g(\underbrace{x+vtz}_{y})\, z\,d\sigma(z) = v\fint_{\partial B_{vt}(x)} \nabla g(y)\,\frac{y-x}{vt}\,d\sigma(y)$$

подставив это, упростим $u(t,x)$:

$$u(t,x) = \fint_{\partial B_{vt}(x)} \left(th(y) + g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)\right)d\sigma(y) \qquad (*)$$

- эта ф-ла явл. реш-м задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 & \text{в } \mathbb{R}^3\times(0,+\infty) \\ u|_{t=0} = g & (**) \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

Теперь м. сформулир. Th.:

(Th) $h \in C(\mathbb{R}^3)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$

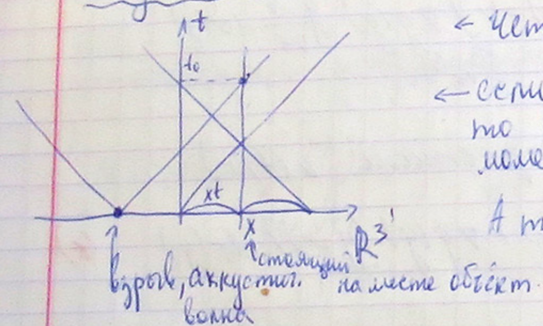
Тогда (*) даёт ! реш-е (**).

/* единственность д-ся по определению (тривиально) */

Ф-лу (*) м. перепис. в виде ф-лы Кирхгофа:

$$u(t,x) = t \int_{\partial B_{vt}(x)} h(y)\,d\sigma(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_{\partial B_{vt}(x)} g(y)\,d\sigma(y)\right)$$

Физ. смысл:

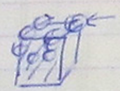


← четырёхмерн. пр-во

← если взрыв локализован, то взрыв услышим в момент t_0, и всё

А так - пока через (.) взрыва будет прох. боковая пов. конуса (передний и задний фронт)

/* см. принцип Гюйгенса */



волны будут идти до тех пор, пока последняя из самой центр. (.)-ки не разойдётся

Волновая задача при n=2

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \Delta u = 0 & \text{в } \mathbb{R}^2 \times (0,+\infty) \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

Вводим фиктивную переменную: (проводим аналогию с n=3)

$u = u(t,x) = u(t,x_1,x_2)$ ← считаем fix

$\bar{u}(t,x_1,x_2,x_3) = u(t,x_1,x_2)$

$\bar{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$

$\bar{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^2 = \{x_3 = 0\}$. — теперь мы в $\mathbb{R}^3$

Наша задача:

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - v^2 \nabla \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{g} \\ \bar{u}_t|_{t=0} = \bar{h} \end{cases}$$

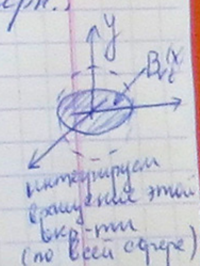
— эту 3-мерн. з. Коши мы решать умеем.

$$\bar{u} = t \int_{\partial \bar{B}_{vt}(x)} \bar{h}(y)\,dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_{\partial \bar{B}_{vt}(x)} \bar{g}(y)\,d\sigma(y)\right)$$

← чёрточки означают, что мы в $\mathbb{R}^3$, и инт-м там же.

Хотим выписать интеграл, как двумерн.:

$$\int_{\partial B_{vt}(x)} \bar{g}(y)\,d\sigma(y) = \frac{2}{4\pi v^2 t^2} \int_{B_{vt}(x)} g(z)\sqrt{1+|\nabla\gamma|^2}\,dz =$$



где $\gamma^2 + |x-z|^2 = v^2 t^2$

$$\gamma = \sqrt{v^2 t^2 - |x-z|^2}$$

Считаем градиент (по пространств. перем.)

$$= \frac{1}{2\pi v^2 t^2} \int_{B_{vt}(x)} g(y) \frac{vt}{\sqrt{v^2t^2-|x-y|^2}}\, dy$$

Значит,

$$\bar{u} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{vt^2}{2} \int_{B_{vt}(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{v^2t^2-|x-y|^2}}\, dy + \frac{vt^2}{2} \int_{B_{vt}(x)} \frac{h(y)\, dy}{\sqrt{v^2t^2-|x-y|^2}}$$

$\| \; u(t,x)$

И преобр-ть заменой $y = x + vtz$, и получить интеграл по $B_1(0)$.

Получим красивую ф-лу без $\frac{\partial}{\partial t}$:

$$u(t,x) = \frac{v}{2} \int_{B_{vt}(x)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t \nabla g (x-y)}{\sqrt{v^2t^2-|x-y|^2}}$$

ур-е Пуассона.

Th

$g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $h \in C(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow u(t,x) \ldots$

* качественно в физ. смысле?

n-нечет. $\Rightarrow$ есть передний и задний фронт;

h-чётн. $\Rightarrow$ есть т. передний, бесконечно затух. колебания. *)

Ур-е вынужденных колебаний.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \Delta u = f(t,x) \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

неоднородное волн. ур-е.

Трюк: вместо этой з. Δ 2 подобные:

I. $\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = f \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$

II. $\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$ ур-е одн., нач. усл-я — неоднор.

Утв.

Пусть u_1 — реш-е з. I, u_2 — з. II. Тогда $u_1 + u_2$ — реш-е исходной задачи.

Д-во: по принципу суперпоз. (получим g, h, f, короче ту же задачу при сложении)

З. II решать умеем, д/всех размерностей x.

Как быть с I?

I'

Введём парам-р $s \geq 0$: $u = u^s(t,x)$ — это не степень, а парам-р

Тогда наша з.: $\begin{cases} u_{tt} - v^2\Delta u = 0 \\ u|_{t=s} = 0 \\ u_t|_{t=s} = f(s,x) \end{cases}$ — решаем такую з. д/ fix s (однородн. ур-е, неодн. нач. усл.)

интеграл Дюамеля

Утв 2 $\tilde{u}(t,x) := \int_0^t u^s(t,x)\,ds$ — реш-е з. I

Упражнение: выписать итоговое реш-е д/исх. задачи (которую мы разбили на две), притом разное д/≠ случаев (1-, 2-, 3-мерн.) (соединить Утв. 1 и 2)

Д-во:

$\tilde{u}|_{t=0} = 0$

$\tilde{u}_t = \underbrace{u^t(t,x)}_{0 \text{ по усл.}} + \int_0^t \frac{\partial u^s}{\partial t}(t,x)\,ds = \int_0^t \frac{\partial u^s}{\partial t}(t,x)\,ds$ "0 — усл-е удов."

$\tilde{u}_{tt} = u^t_t(t,x) + \int_0^t u^s_{tt}(t,x)\,dS = f(x,t) + v^2 \int_0^t \Delta u^s$

$-$

$v^2 \Delta \tilde{u} = v^2 \int_0^t \Delta u^s\,ds$

$\tilde{u}_{tt} - v^2 \Delta \tilde{u} = f(x,t)$ — ур-е удовлетв.

Th

$h \in C$, $g \in C^1$, $f \in C$ ....

Note: Мы научились решать з. волнового ур-я д/всего пр-ва. Если наша область, например, пластина, то это не всё пр-во и наши ф-лы не помогают.

Пример: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - огр.

$$\begin{cases} u_{tt} - v^2 \Delta u = 0 & \text{— в } \Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{— если } x \in \partial\Omega \ (\text{т.е. } u|_{\partial\Omega} = 0) \\ u|_{t=0} = g \\ u_t|_{t=0} = h \end{cases}$$

- эта задача с краевыми усл-ми, и наши ф-лы не подх.

Утв., которое надо уметь д-ть самост.:

Если Ω - шарик, то реш-е !

① Т.е. нужно д-ть Утв. для $\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

(нужно интегрировать...)

$u u_{tt} - v^2 \Delta u = 0$ по Ω.

$\int_\Omega u u_{tt}\,dx - v^2 \int_\Omega u \cdot \Delta u\,dx = 0$

по частям

~~$\frac{1}{2}\int (u_t^2)_t$~~

Общий принцип: чтобы д-ть ! реш-я д/неодн. сист., дост. д-ть, что одн. система имеет т. нулевое реш.:

$\mathcal{L} u = w$

$\left.\begin{matrix} \mathcal{L} u_1 = 0 \\ \mathcal{L} u_2 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \mathcal{L} u_1 - \mathcal{L} u_2 = \mathcal{L}(u_1 + u_2) = 0 \\ \mathcal{L} u = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow u_1 = u_2.$

Домн. на u_t, интегр. по Ω:

$$\int_\Omega u_t u_{tt}\,dx - v^2\int_\Omega u_t \Delta u\,dx = 0$$

$$\int u_t u_{tt}\,dx + v^2\int \nabla u_t\cdot\nabla u\,dx =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2} u_t^2\,dx + v^2 \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx =$$

/* $\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 = \frac{d}{dt}\nabla u\cdot\nabla u = 2\nabla u\cdot\nabla u_t$ */

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2\,dx + \frac{v^2}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)=0$$

т.е. в скобках const.

По усл. при $t=0$ $u_t=0$ => ост. только 2-е слаг.

Оно $=0$ при $\forall v$.

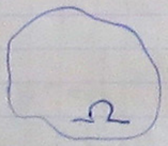
В общем, получаем, что Σ двух ≥ 0 слаг. $=0$
=> оба $=0$ => под интегралами const,
это м.б. только когда $u=0$.

Обоснуем, что мог инт. по частям:

$u\in C^2(\cancel{[0,1]}\ \Omega\times \ldots$ — проверить!)

16.03.13

Распространение тепла в пр-ве.



Область, на границах нагрев.

Обозначим темпер. в пр-ве: $u(t,x)$, $x\in R^n$

Какому закону подчин. $u(t,x)$?

B шарик внутри нашей области.

Введём $q=q(t,x)$ — заданная плотность источников теплоты ($q<0$ => охлажд.)

Получено/отдано всего теплоты: $\int_B q\,dx$

Из окружающей среды получ./отдано: $-\int_{\partial B}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma$

сколько отдаём вовне

нормаль (внешняя)

/* считаем, что q нагревает, и шар отдает вовне, поэтому + и − соотв. */

Итого: $\int_B q\,dx - \int_{\partial B}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_B c\rho\,\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}\,dx$

теплоёмк. плотность

$\Delta t\to 0$: (в единицу времени)

$$\int_B q\,dx - \int_{\partial B}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \int_B c\rho\,\frac{du}{dt}\,dx$$

Перепишем в терминах инт. по объёму:

$$\int_B q\,dx - \int_B \operatorname{div} F\,dx = \int_B c\rho\,\frac{du}{dt}\,dx.$$

Получаем ур-е теплопроводн.:

$c\rho\,\frac{du}{dt} = -\operatorname{div}\vec{F} + q$, где F наход. по закону Фурье: $F=-\lambda\nabla u$

коэфф. теплопроводн.

$$\boxed{c\rho\,\frac{du}{dt} = \operatorname{div}\lambda\nabla u + q}$$

/* $\operatorname{div}\nabla u = \nabla\cdot\nabla u = \nabla^2 u = \Delta u$ */

Частн. случай: если $\lambda = const$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta u + q$$

если ещё и $q = 0$: $\frac{\partial u}{\partial t} = \overbrace{\frac{\lambda}{c\rho}}^{a^2} \Delta u$ $\left(\frac{K}{c} = \frac{м^2}{c} \frac{K}{м^2} \right)$ кельвин

Физ. комм.: м.б. так, что в одном напр-нии тепло идёт хорошо, в др-нет. ~~Тогда~~ Т.е. λ – это м-ца. В таком случае мы не можем преобр. наше ур-е, и должны Δ т. в общем виде (см. рамочку)

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ - & - & - \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

Вспомним что наше ур-е мы уже встречали, это было трансп. ур-е:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad \Big| \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \Delta u$$

Вернёмся к ур-ю в общ. виде

(*) $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \lambda \nabla u + q$ $\quad - x \in \Omega, \; t > 0.$

Нас интересует, что будет на $\partial\Omega$.

Вариантов:

1) Считаем, что на границе поддерж. const температура

(1) усл-я Дирихле: $u(t,x) = v(x)$ $\quad x \in \partial\Omega$

(2) 2) Область изолирована: тепло не приходит и не уход. (нет теплового потока); $\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = w(x)$

обычно $w(x) = 0$. Усл-я Неймана →

Поставим задачу Коши: $u(0,x) = \varphi(x)$ – н.у. (3)

~~$u_t(0,x) = \psi(x)$~~

(*), (1), (3) – нач.краев. задача (смешанная) д/ур-я теплопров. с краевым усл-м Дирихле

(*), (2), (3) – ——— " ——— с краев. усл-м Неймана

Будем решать нашу з. в области $\Omega \times (0, +\infty)$ (цилиндр)

Ф-я явл. решением, если она имеет все необх. производные внутри цилиндра, и они непрер. вплоть до границы цилиндра, сама ф-я должна быть также непрер. до границы цилиндра, и при подстановке в нач. и краев. усл-я должно получ. тождество.

Докажем сначала единственность (абстрактно), затем введем ф-лы д/конкр. реш-в.

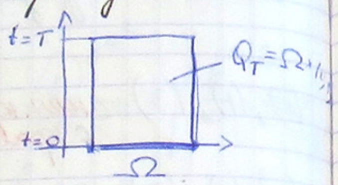
$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u & \text{в } \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n - \text{огр., откр.} \; | \; q = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = v & - \text{первая краев. задача.} \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

Положим $a := 1$.

Упр.: как найти реш-е ~~если~~ при $a \neq 1$, если оно известно при $a = 1$ (т.е. как отмасшт. время).

Th (принцип max д/ур-я теплопроводн.)

$u_t = \Delta u$ в $\underbrace{\Omega \times (0,T)}_{Q(T)}$, $T>0$



Все производн. $\exists$ и непрер. в $\forall x \in \overline{Q}$

Тогда ф-я не м. достиг. max. ни внутри цилиндра, ни на верхн. крышке (достиг. max в основании или бок. стенках)

м.б. const реш-е!

Сл (принцип min) /* „только" мог не д-ть */
Если „только", то это сильный принцип max

- min м. достиг. ~~max~~ на основании или бок. стенках (при тех же усл-х)

Д-во: применить Th к $-u$,

Д-во Th:

$\triangle$ ф-ю $V_\varepsilon(t,x) := u(t,x) + \varepsilon|x|^2$ ← свкл. норма.

$\mathcal{L}u := u_t - \Delta u$

$\mathcal{L}V_\varepsilon = \underbrace{\mathcal{L}u}_{0} + \varepsilon \mathcal{L}|x|^2 = -\varepsilon\Delta|x|^2 \ominus$

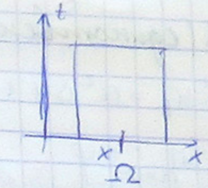
/* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ */

$\ominus -\varepsilon 2n$
↑кол-во переменных в вект. x

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \mathcal{L}V_\varepsilon < 0 \quad V_\varepsilon \in C(\overline{Q}_T)$

$\triangle$ 2 случая (верх и внутри)



1. x^*, t^* $\quad V_\varepsilon(t^*, x^*)$ - max
где $(x^*, t^*) \in Q_T$

2. (x^*, t^*), $x^* \in \Omega$, $t^* = T$

- хотим показ., что таких быть не может.

1. $\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t}(t^*, x^*) = 0$

имеет в этой (·) max. $\Rightarrow \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_1^2}(t^*, x^*) \leq 0$

$\Delta V_\varepsilon(t^*, x^*) \leq 0.$

$\mathcal{L}V_\varepsilon = V_{\varepsilon_t} - \Delta V_\varepsilon \geq 0 \quad$ но $\mathcal{L}V_\varepsilon < 0$?!

2. $\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t}(t^*, x^*) \geq 0$

$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x_1^2}(t^*, x^*) \leq 0. \quad \Delta V_\varepsilon(t^*, x^*) \leq 0$

$\mathcal{L}V_\varepsilon = V_{\varepsilon_t} - \Delta V_\varepsilon \geq 0$?!

Т.о. такого быть не может, осталось изучить параболическую границу цилиндра: объединение основания и боков. стенок.

$u(t,x) \leq V_\varepsilon(t,x) \leq \max_{Q_T} V_\varepsilon = \max_{S_T} V_\varepsilon = \max_{S_T}(u + \varepsilon|x|^2) \leq$
$\leq \max_{S_T} u + \varepsilon R^2$

$u(t,x) \leq \max_{S_T} u + \cancel{\varepsilon R^2} \quad \varepsilon \to 0 \quad \forall (t,x) \in \overline{Q}_T$ ч.т.д.

max/min на границе

Th (единственности)

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + q \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = \nu \end{cases}$$

Реш-е данной задачи !.

Д-во.

$\exists$ имеется 2 реш-я u_1, u_2.

$\Delta u := u_1 - u_2$

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u|_{t=0} = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

max/min u достиг. на параболич. границе цилиндра, где, по предполог. Th, а нулев.

$\Rightarrow u = 0$

В данной Th существенна ограниченн$\underline{\Omega}$ость

Докажем теперь д/ Ω - всего пр-ва:

$\Omega = \mathbb{R}^n$

- в формулир-ке задач исчезает краев. усл-е

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + q & \text{в } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u|_{t=0} = \varphi \end{cases}$$

- для такой задачи Th единственности не верна.

Th единств. будет верна при доп. условии:

$\forall T \quad |u(t,x)| \le C(T)$

$\forall t \in [0, T]$ (*)

Здесь тоже нужно замечание про $\exists$-е и гладкость производных. (**)

Th - в данном классе единств. $\exists$-т.

Th

$u_t = a^2 \Delta u$ в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, и вып. (*), (**)

Тогда $\underset{Q_T}{\sup}\, u = \underset{t=0}{\sup}\, u$

$\quad\quad\quad\quad\quad {}^{\shortparallel}M \quad\quad \underline{M}$

Сл

$\underset{Q_T}{\inf}\, u = \underset{t=0}{\inf}\, u$

/* замкнутость писать не обяз, см. матанчик */

Д-во Th

Априори знаем, что $M \ge \underline{M}$.

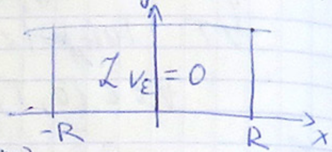
$\Delta\ V_\varepsilon(t,x) = u(t,x) - \varepsilon(2nt + |x|^2)$

$$\mathcal{L} v_\varepsilon = \underbrace{\mathcal{L} u}_{0} - \varepsilon \mathcal{L}(2nt + |x|^2) =$$

$$= -\varepsilon(2n - \Delta |x|^2) = -\varepsilon(2n - 2n) = 0.$$

Будем в цилиндре: $Q_{R,T} = B_R(0) \times (0,T)$

Знаем, что $\mathcal{L} v_\varepsilon = 0$ всюду в цил., в т.ч. и в $Q_{R,T}$ => max где-то на парабол. границе.



$v_\varepsilon(0,x) = u(0,x) - \varepsilon |x|^2 \le$
$\le u(0,x) \le M$

$v_\varepsilon(t,x)\big|_{|x|=R} = u(t,x)\big|_{|x|=R} - \varepsilon R^2 \le$
$\le M - \varepsilon R^2 \le \underline{M}$! здесь мы использ. (*)

Утверждаем, что д/ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R$ пороговое $\bar{R}$ т.ч. вып-ся

Очевидно, если $\forall R \ge \bar{R}(\varepsilon)$: $\varepsilon \to 0$, $\bar{R} \to +\infty$

Ограничение ~~ев~~ $\le \bar{M}$ на границе влечёт огр-е на всём цилин.:

$v_\varepsilon(t,x) \le \underline{M}$ $\quad \forall t \in [0,T]$
$\quad |x| \le R, \quad R \ge \bar{R}(\varepsilon)$

$v_\varepsilon = u - \varepsilon(2nt + |x|^2) \le \underline{M}$

$u \le \underline{M} + \varepsilon(2nt + |x|^2)$

fix (t,x), $\varepsilon \to 0$. => $\varepsilon(2nt + |x|^2) \to 0$

т.е. $u(t,x) \le \underline{M}$ $\forall (t,x) \in$ неогр. цил. ∎

Д-во Th(1):

u_1, u_2: реш-я.

$\Delta u := u_1 - u_2$

$\mathcal{L} u = \mathcal{L} u_1 - \mathcal{L} u_2 = 0$

В силу принципа $\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}$ ⇒ $\begin{matrix}\mathcal{L} u \le 0\\ \mathcal{L} u \ge 0\end{matrix}$

$\mathcal{L} u = 0$

∎

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, огр., откр.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = q \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$$

Хотим понять, что будет с $u(t,x)$ - уже известным реш., при $t \to +\infty$.

Пусть $q = 0$.

Интуитивно: $u(t,x) \to \bar{u}(x)$

Будет сх-ся к реш-ю з. Дирихле:

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} = 0 \text{ в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$$

Докажем это.

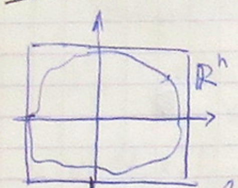
Случай 1. $\psi = 0$.

Th В указанных условиях $u(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$|u(t,x)| \le A e^{-bt} \quad A, b > 0.$$

(экспоненциально убыв)

Д-во:



$0 \in \Omega$

Считаем, что $\Omega \subset [-a,a]^n$

Введём вспомогат. ф-ю

$$V(t,x) := A e^{-bt} \cos cx_1 \cos cx_2 \dots \cos cx_n$$

$$\mathcal{L}V = V_t - \Delta V = (-b + nc^2) V = 0$$

Подберём b т.ч. $b = nc^2$ (?! 0_0)

Выбираем c т.ч. $\cos cx > 0 \;\; \forall x \in [-a, a]$

Осталось выбрать A:

$$A \cos cx_1 \cos cx_2 \dots \cos cx_n \ge \varphi(x) \quad \forall x \in \Omega$$

/* выбираем A дост. большим, чтобы это вып. */

$\overline{w}(t,x) = u(t,x) + v(t,x)$ – реш-е ур-я теплопров.

$w(t,x) = u(t,x) + v(t,x)$

•) $\mathcal{L}\overline{w} = \underset{0}{\mathcal{L}u} - \underset{0}{\mathcal{L}v} = 0$

опер-р теплопроводн.

На параболич. границе наша ф-я ≥ 0

$\Rightarrow$ в силу принципа max/min ф-я и внутри ≥ 0;

$$-u + v \ge 0$$

$$u \le v$$

•) $\mathcal{L}\underline{W} = 0$

Аналогично, $u + v \ge 0$

$u \ge -v$

Т.о. $|u| \le v \le A e^{-bt}$ (cos оценили единицей) ■

Общий случай. $\psi \ne 0$

Th $\exists!\, u_0 : \quad \Delta u_0 = 0$ в Ω, $\quad u_0|_{\partial\Omega} = \psi$

$u \in C^2$, её производная непр. всюду вплоть до границы Ω.

Тогда $u(t,x)$: $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi \\ u|_{\partial\Omega} = \psi \end{cases}$ и будет верна оценка:

$$\begin{cases} |u(t,x) - u_0(x)| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ |u(t,x) - u_0(x)| \le A e^{-bt} \end{cases}$$

Д-во:

$\exists\ \tilde{u} := u - u_0$

$\mathcal{L}\tilde{u} = \underset{=0}{\mathcal{L}u} - \mathcal{L}u_0 = -\Delta u_0 = 0$

$\tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$

$\tilde{u}\big|_{t=0} = \varphi - u_0$

$|\tilde{u}| \le Ae^{-bt}$

$|u - u_0| \le Ae^{-bt}$

Упр: • д-ть, что !-ть здесь лишняя.

• д-ть, что имеет место непрер-ть всюду и на $\partial\Omega$.

Теперь выведем какую-нибудь явн. формулу.

$u_t - \Delta u = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$

Преобр-е Фурье по простр. перем.: $\frac{\partial}{\partial x} u \longmapsto ix\hat{u}$

Но мы будем др. способом:

хотим решение $u(t,x) = \lambda^{\alpha} u(\lambda t, \lambda^{\beta} x) \quad \forall \lambda > 0$

• Возьмём $\lambda = \frac{1}{t} \Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{t^{\alpha}} u\left(1, \frac{x}{t^{\beta}}\right)$

$u(1,x) =: v(x)$

$u(t,x) = \frac{1}{t^{\alpha}} v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)$

$\mathcal{L}u = 0;$

$\left(\frac{1}{t^{\alpha}} v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\right)_t - \frac{1}{t^{\alpha}} \Delta\left(v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)\right) = 0$

Вычисляем градиент:

$-\alpha t^{-(\alpha+1)} v\Big(\underset{=y}{\frac{x}{t^{\beta}}}\Big) - \beta \frac{1}{t^{\alpha}} \nabla v\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) \cdot x\, t^{-(\beta+1)} - \frac{1}{t^{\alpha}} \cdot \frac{1}{t^{2\beta}} (\Delta v)\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right) = 0$

Домн. на (-1), упрощаем:

$\alpha t^{-\alpha-1} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} \nabla v(y) \cdot y + t^{(-\alpha-2\beta)} \Delta v(y) = 0$

• Возьмём $\beta = \frac{1}{2}$, всё красиво сократится.

Получим:

$\alpha v(y) + \frac{1}{2} \nabla v(y) \cdot y + \Delta v(y) = 0.$

• Берём радиальное реш-е: $v(x) = v(|x|)$

$\Rightarrow \nabla v(y) = \frac{\partial v}{\partial r}$, где $r = |x|$ – радиальная коорд.

$\Delta v(y) = v''_r + \frac{(n-1)}{r} v'_r$ – далее не пишем, что производн. по r, она тут всё равно одна.

$\Rightarrow \alpha v + \frac{1}{2} v' r + v'' + \frac{(n-1)}{r} v' = 0$

$\alpha := \frac{n}{2}$

$r^{n-1} \frac{n}{2} v + \frac{1}{2} r^n v' + r^{n-1} v'' + r^{n-2}(n-1) v' = 0$

$\frac{1}{2} \underbrace{(n r^{n-1} v + r^n v')}_{= (r^n v)'} + (r^{n-1} v')' = 0$

Всё это м. перепис. в виде:

$$\left(\frac{1}{2} r^n v + r^{n-1} v'\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} r^n v + r^{n-1} v' = c$$

Нам нужно физ. реш-е, так, что хотим, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} v = 0 \qquad \lim_{r\to\infty} v' = 0$$

$$\Rightarrow c = 0.$$

$$\frac{1}{2} r^n v + r^{n-1} v' = 0$$

$$\frac{1}{2} r v + v' = 0$$

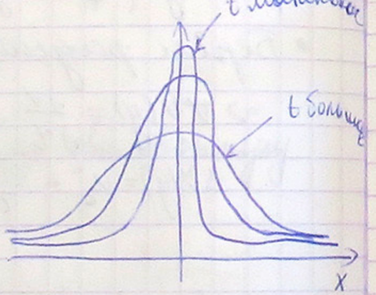
$$v = be^{-r/2} \qquad y = \frac{x}{t^\beta} = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

$$v(x) = be^{-|y|^2/2}$$

$$v(y) = be^{-|y|^2/4}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{t^{n/2}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$u(t,x) = \frac{b}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$



Посчитаем, когда $\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\,dx = \frac{b}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4t}\,dx = \frac{b}{t^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{4t}}\,dx_1\right) \dots \left(\int e^{-\frac{x_n^2}{4t}}\,dx_n\right) =$$

$$= \frac{b}{t^{n/2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/4t}\,dx\right)^n = \frac{b}{t^{n/2}} \left(2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)^n = \frac{b}{t^{n/2}} 2^n t^{n/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right)^n$$

23.03.13

Решаем задачу:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u|_{t=0} = g \end{cases} \qquad u = u(t,x) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \qquad g = g(x)$$

/* $a := 1$, но для экзамена надо знать, что делать д/ $a \neq 1$ */

– з. Коши д/ур-я теплопроводн.

На прошл. лекции получили:

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

-я подобрана т.ч. $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x)\,dx = 1 \quad \forall t > 0$.

$$\Phi(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(t,\cdot) \in C^\infty$$

Th

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)\, g(y)\,dy$$

$g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ // непрер. и огр-на

Тогда: 1) $u_t = \Delta u \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$

$(u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,+\infty))$

2) $\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Д-во:

В области $\mathbb{R}^n [a, +\infty)$, $a>0$ наша ф-я бескон. дифф-ма.

1) $u_t - \Delta u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\Phi_t(t, x-y) - \Delta_x \Phi(t, x-y))}_{\to 0} g(y)\, dy$

т.о. $\Phi_t - \Delta\Phi = 0$ - ч.т.д.

2) $|u(t,x) - g(x)| = |\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) g(y)\, dy - g(x)| =$

$= |\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) g(y)\, dy - \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)}_{1} g(x)\, dy| \le$

$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y) |g(y) - g(x)|\, dy$.

Разобьём интеграл на 2: внутри и снаружи шарика:

(*) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,x-y)|g(y)-g(x)|\,dy = \int\limits_{B_\delta(x)} \Phi(t,x-y) \underbrace{|g(y)-g(x)|}_{\le \frac{\varepsilon}{2}}\, dy + \int\limits_{B^c_\delta(x)} \ldots$ вовне

/* выбир. $\varepsilon > 0$ т.ч. δ в $B_\delta(x)$: $|g(y) - g(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}$

$\le \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{B^c_\delta(x)} \Phi(t,x-y)|g(y)-g(x)|\,dy \le$

$\le \frac{\varepsilon}{2} + \underset{\text{const.}}{C} \cdot \frac{1}{t^{n/2}} \int\limits_{B^c_\delta(x)} e^{-|x-y|^2/4t} =$

$|y-x| \ge \delta$ (мы вне шарика)

$= \frac{\varepsilon}{2} + C \frac{1}{t^{n/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \rho^{n-1} e^{-\rho^2/4t}\, d\rho =$ перешли к поляр. коорд.

$= \frac{\varepsilon}{2} + C \int\limits_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} \tau^{n-1} e^{-\tau^2}\, d\tau$ $\quad \tau := \frac{\rho}{2\sqrt{t}}$

это уже измен. const (другая)

по частям

$\int\limits_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} \tau^{n-1} e^{-\tau^2}\, d\tau = -\frac{1}{2} \int\limits_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} \tau^{n-2}\, d e^{-\tau^2} =$

$= -\frac{1}{2} e^{-\tau^2} \tau^{n-2} \Big|_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} + \frac{n-2}{2} \int\limits_{\delta/2\sqrt{t}}^{+\infty} \tau^{n-3} e^{-\tau^2}\, d\tau$

$\left(-\frac{1}{2} e^{-\delta^2/4t} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{t}}\right)^{n-2}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ - получим оценку, можем поколдовать над интегралом с ε, и порадоваться

ч.т.д.

3.

Note: (более сильн. утв-е Th)

$\lim\limits_{\substack{t \to 0^+ \\ z \to x}} u(t,z) = g(x)$ $\quad$ // было при $z = x$. Здесь сх-ть не просто поточечн., а на компакте

Д-во: начиная со (*), исправляем:

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, z-y)|g(y)-g(x)|\,dy = \int\limits_{B_\delta(x)} \Phi(t,z-y) \overbrace{|g(y) - g(x)|}^{\le \frac{\varepsilon}{2}}\,dy +$

$+ \int\limits_{B^c_\delta(x)} \text{———} \text{"} \text{———} \le$

Д/первого интеграла оценку получ. аналогично, д/втор.

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \int_{B^c_\delta(x)} \Phi(t, z-y)\,|g(y)-g(x)|\,dy \le$$

$|y-x|\ge\delta$, $z\to x$ $\Rightarrow$ если $|z-y| \ge |y-x| - |z-x|$ (нер-во тр-ка)

$\Rightarrow |z-y|\ge \frac{\delta}{2}$

Если $z\in B_{\delta/2}(x)$, то $|z-y|\ge\frac{|y-x|}{2}$

$|y-x|\ge\delta$, $|z-x|\le\frac{\delta}{2}\le\frac{|y-x|}{2} \Rightarrow |z-y|\ge|y-x|-|z-x| \ge \frac{|y-x|}{2}$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{1}{t^{n/2}}\int_{B^c_\delta(x)} e^{-|y-x|^2/16t}\,dy = \frac{\varepsilon}{2}+C\frac{1}{t^{n/2}}\int_\delta^{+\infty}\rho^{n-1}e^{-\rho^2/16t}\,d\rho$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}+C\int_{\delta/4\sqrt{t}}^{+\infty} r^{n-1}e^{-r^2}\,dr.$$

...

ч.т.д.

Получили ф-лу д/реш-я конкретной з. д/ур-я теплопроводности.

Исследуем её:

$$u(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(t,x-y)g(y)\,dy$$

Как только $t>0$, получим гладк. реш-е.

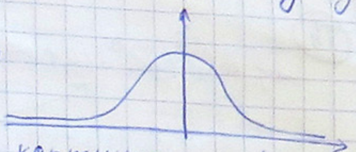
т.е. 1-е св-во ур-я теплопроводн.: мгнов. сглаживание

2-е св-во: бесконечн. скорость распр-я тепла (как только $t>0$, всё ok, интегрируем везде)

- это отличие от волновых ур-й, где регулярность реш-я была той же, что у н.д.

Что будет при $t\to\infty$?

Будет $\to 0$, т.к. e^t победит $\frac{1}{t}$.



картинка при $t>0$, но $t\to\infty$

- т.е. нам будет уже не важен нач. профиль температуры (н.д.)

Теперь решаем з.:

$$\begin{cases} u_t - \Delta t = f(t,x) \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$$

1. решаем з. $\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = g \end{cases}$ - умеем, получим u_1

2. $\begin{cases} u_t - \Delta u = f \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$ - сейчас научимся, получ. u_2.

Th Реш-м з. (**) будет $u=u_1+u_2$

Д-во - подстановкой, сами.

Решаем ②:

$$u_2(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(t-s, x-y) f(s,y)$$ — интеграл Дюамеля

Th Пусть $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n \times [0,+\infty))$ — дважды непрер. дифф-ма по x, один по t, и имеет комп. носитель в ...

Тогда u_2 явл. реш-м ②, удовлетв. нулевому нач. усл-ю (т.е. усл-ю $\lim_{t\to 0^+} u(t,x) = 0$)

Д-во:

$u := u_2$

Пусть $s' = t-s$, $y' = x-y$ (обозн-я, не производные)

$$\Rightarrow u(t,x) = \int_0^t ds' \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s',y') f(t-s', x-y')\, dy'$$

— далее штрихи не пишем, ибо лень.

$$u_t(t,x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy}_{\text{дифф-м } f \text{ по } t\text{, подст. } t \text{ вместо } s} + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f_t(t-s, x-y)$$

$$\Delta u(t,x) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) \Delta f(t-s,x-y)\, dy$$

т.к. $f_t(t-s,\cdot) = -f_s(t-s,\cdot)$

$$u_t - \Delta u = \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s - \Delta f)(t-s,x-y) + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0, \dots$$

~~сделаем обратн. замену перем.~~ инт. по частям

$$= \int_0^\varepsilon ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s - \Delta_y f)(t-s,x-y) +$$

$$+ \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s(t-s,x-y) - \Delta_y f(t-s,x-y)) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy =$$

инт. по частям 2-е слаг., получим гранич. член и интеграл

$$-\iint \Phi(s,y) \cdot (\Delta_y f) = -\iint \Delta_y \Phi(s,y) f(\dots)$$

$$\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s(t-s,x-y)) = \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi_s(s,y) f(t-s,x-y) + - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(s,y) f(t-s,x-y)\, dy \Big|_\varepsilon^t$$

$$= \int_0^\varepsilon ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s - \Delta_y f)(t-s,x-y) +$$

$$+ \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, (\Phi_s(s,y) - \Delta_y \Phi(s,y)) f(t-s,x-y) + \text{гр. члены}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy =$$

Ранее перекинули производные t, теперь по y:

$$-\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} d\,\Phi(s,y)(\Delta_y f(t-s,x-y)) = -\underbrace{\int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy}_{\iint} \Delta_y \Phi(s,y) f(t-s,x-y)$$

— гр. члена нет, т.к. комп. носитель

$$= \int_0^\varepsilon ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \Phi(s,y)(-f_s - \Delta_y f)(t-s,x-y) +$$

$$+ \int_\varepsilon^t ds \int_{\mathbb{R}^n} dy\, \underbrace{\cancel{(\Phi_s(s,y) - \Delta_y \Phi(s,y))}}_{=0} f(t-s,x-y) +$$

$$+ \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy} - \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t,y) f(0,x-y)\, dy} + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon,y) f(t-\varepsilon,x-y)\, dy$$

– это верно $\forall \varepsilon$. Устремим $\varepsilon \to 0$.

Тогда $(-f_s - \Delta_y f)(t-s, x-y) = const$, вынесем, (в первом слаг.) сузим, получим, что 1-е слаг. $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Осталось слагаемое $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\varepsilon, y) f(t-\varepsilon, x-y)\,dy$.

– этот $\lim_{\varepsilon \to 0}$ мы уже считали, когда вместо f было $g(x-y)$, но t нас сейчас не волнует, получим $\longrightarrow f(t,x)$

Теперь остались гранич. усл-я (д-ть, что они $=0$)

Я не понимат =(

Эллиптич. ур-е:

$-\Delta u = f$, $u = u(x)$ ← ур-е Пуассона $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

Возм. интерпрет: u – стац. темпер. поле, f – плотность источников тепла

Интересно реш-е ур-я, удовл. усл-м на границе области:

$u(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$ – условие Дирихле (I краев. усл-е)

ч. случай $f = 0$ – ур-е Лапласа!

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = q(x)$, $x \in \Omega$ II краев. усл-е (усл-е Неймана) – задача Неймана (с таким усл-м)

$q = 0$ => тепл. поток не притек., и не уходит (хорошо изолир.)

$\vec{E}(x)$ – напряжённость поля (куда направлена сила, прилож. к единичному заряду)

$\vec{E}(x) = -\nabla u(x)$ ~~ур-е~~ Максвелла

Из ур-я Максвелла следует: $\operatorname{div} \vec{E} = f$

$-\operatorname{div} \nabla u = -\Delta u = f$ – получили ур-е д/потенциала (потенциал удовл. ур-ю Пуассона.

Система зарядов задаётся плотностью; заземлена <=> на границе $=0$ 3.

$q = 0$ => граница из диэлектрика, напряжённость поля $= 0$.

$\exists\ \Omega$ – единичный шар, в центре единичный заряд. Что тогда будет f?

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ +\infty, & \text{иначе} \end{cases}$$

До сих пор говорили о классич. реш-х (действ. в $\forall (\cdot)$). Здесь, очевидно, о классич. решении не может быть речи – частный случай точечных зарядов всё ломает.

Def

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$. ~~[illegible]~~ пр-во основных ф-ций – это $C_0^\infty(\Omega)$ (имеет комп. носитель и бесконечн. дифф.)

$u_k \in C_0^\infty(\Omega)$ – осн. ф-ции ~~[illegible]~~

Будем говорить, что посл-ть осн. ф-ций

Сх-ся к осн. ф-ции u ; $u_k \longrightarrow u \in C_0^\infty(\Omega)$,
если:

1) $u_k \longrightarrow u \in C_0^\infty(\Omega)$

2) $\operatorname{supp} u_k \subset K \subset\subset \Omega$
носитель

2) $u_k \rightrightarrows u$, $u_k^{(n)} \rightrightarrows u$ $\forall n$.

/* $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega ;\ u(x) \neq 0\}}$

Примеры

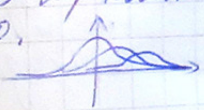
1.  $\Omega = \mathbb{R}$

Всё сх-ся, лежат в одном компакте.

2. Берём те же ф-ции, но $\forall$ последующая сдвиг. вправо на 1.

- Сами они сх-ся к 0 равномерно, но нет сх-ти в смысле основных ф-ций, т.к. их носители не живут в одном комп.

Д/$\forall$ компакта найдётся ф-я, носитель кот. будет лежать вне его.



Def: Обобщ. ф-я $\varphi \in (C_0^\infty(\Omega))'$ – это лин. непрер. ф-л на $C_0^\infty(\Omega)$

Примеры. // считаем, что $\Omega = \mathbb{R}$ (вещ. ось)

1. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ – локально интегрир-ма

$u \in L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty)$, если u измерима и $\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(K), \forall K \Subset \Omega\}$, больше чем $L^p(\Omega)$ *)

$\varphi_u \in (C_0^\infty(\Omega))'$

$\varphi_u(v) := \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad v \in C_0^\infty(\Omega)$

$\varphi_u(v_k) := \int_K u(x)v_k(x)\,dx \longrightarrow \varphi_u(x) \quad v_k \to v$

Далее м. перейти к lim под знаком инт., и всё ок.

Здесь мы написали слишком подробно. Обычно пишут вместо φ_u – сразу u.

2°. $\varphi(v) := v(0)$, $\Omega = \mathbb{R}$

обычно его пишут $\delta_0(v) = v(0)$

$\delta_x(v) = v(x)$ – мера Дирака

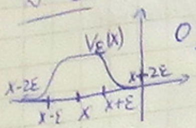
3°. μ – кон. борелевская мера на $\Omega = \mathbb{R}$

$\varphi_\mu(v) := \int_\Omega v(x)\,d\mu(x)$

Утв

$\delta_0(v)$ – пример ф-ции, котор. не порожд. никакой loc интегрир. ф-ей: $\nexists u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $\delta_0(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\,dx$

Д-во: от противного.] $\exists\, u(x)$, $x \neq 0$.



$0 = S_0(V_\varepsilon) = \int_{x-2\varepsilon}^{x+2\varepsilon} u(x) V_\varepsilon(x)\,dx \xrightarrow[\text{на разделении}]{\text{при}} u(x)$

т.к. в 0 она 0

$\Rightarrow u(x) = 0$ почти всюду $\Rightarrow \int_R u(x) v(x)\,dx = 0$,

не это ?! потому что м. ~~примени~~ привести контрпример.

Получаем конкретное реш-е ур-я теплопров:

$P_{(t,x)} = u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ /* если бы удачнее взяли y */

↑ фундаментальное реш-е ур-я теплопров.

$\Phi(t,x) \xrightarrow[t \to 0]{} \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$

29.03.13.

30.03.13

Обобщ. реш-е.

$\Delta u = f$

Потенциал системы из 1 заряда: $u = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|x|}$

$\Delta u = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$ — потенциал только в заряде

— так должно быть, но это совсем не непрер. Кроме того, это почти 0. — нам не нравится такое понятие реш-я.

Поэтому развиваем понятие обобщ. реш-я:

I. Осн. ф-ции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (лин пр-во)

$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$u : \Omega \to \mathbb{R}$ $\underset{\text{носитель}}{\operatorname{supp} u} := \overline{\{x \subset \Omega : u(x) \neq 0\}}$

$\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ //компактен в Ω

Пример:

— не комп. в $\Omega = [-1, 1]$, т.к. на границах 0, т.е. $1 - x^2$ — не осн. ф-я.

— осн.

$u_k \in D(\Omega)$, $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u \in D(\Omega)$

1) $\operatorname{supp} u_k \subset K \subset\subset \Omega$

2) $u_k \rightrightarrows u$, $D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$

/* мультиинд. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$|\alpha| = \sum_i^n \alpha_i$ $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$

Пример: $(1, 0, 1)$ — мультиинд. в $\mathbb{R}^3$

$D^{(1,0,1)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$

II Пр-во обобщ. ф-ций.

$v \in D'(\Omega)$ — лин. непрер. ф-л на пр-ве осн. ф-й.

1) лин-ть: $v(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 v(u_1) + \lambda_2 v(u_2)$

2) $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u$

$v(u_k) \longrightarrow v(u)$

Примеры

1) $v \in L^1_{loc}(\Omega) \rightsquigarrow \varphi_v(u) = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx$

$v(u) = \int_\Omega u(x) v(x)\, dx$

//идёт отожд-е с точн. до $L^1_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$.

2) $\mu \in M(\Omega)$: $\rightsquigarrow \varphi_\mu(u) = \int_\Omega u(x)\, d\mu(x)$

Проверим непрер-ть:

$u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u$ u_k все живут на ком-те K:

$\varphi_\mu(u_k) = \int_K \underset{\Downarrow\, u(x)}{u_k(x)}\, d\mu(x) = \int_K u(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega u(x)\, d\mu(x) = \varphi_\mu(u)$

③ $\delta(u) := u'(0)$ $\quad u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (\Omega = \mathbb{R}^n)$

(лин. непрер. ф-л., частн. сл. 2)

Утв: $\nexists\, u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n): \delta = \varphi_u$

Д-во: от противного

$\exists\, v \in L^1_{loc}: \delta = \varphi_v$

$$u(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) v(x)\, dx \quad \forall u \in D(\mathbb{R}^n)$$

Пусть ω – произв. шар, не сод. начала коорд (0)

Тогда д/$\forall u \in D(\omega) \subset D(\mathbb{R}^n)$:

$u(0) = 0$, т.к. носит. в ω

С др. стороны:

$$u(0) = \int_\omega u(x) v(x)\, dx \quad \forall u \in D(\omega)$$

По ОЛВИ: $v(x) = 0$ п.в. на ω

$\Rightarrow v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \varphi_v = 0$.

С др. стороны, $\delta \neq 0$, д/д-ва этого дост. Δ ф-ю u, кот. в окрест. 0 даёт 1.

④ $\delta'(0) := -u'(0)$ $\quad \Omega = \mathbb{R}$

Упр.: д-ть, что это осн. ф-я.

Упр Д-ть, что не порожд. никак. лок. инт-й ф-ей. (L^1_{loc})

III $D'(\Omega)$ $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - откр.

- лин. пр-во (× число, +)

Def: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультинд., $v \in D'(\Omega)$

Определим $(D^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|} v(D^\alpha u)$

- д/$\forall u \in D(\Omega)$ ($\forall$ осн. ф-ции)

- производная (обобщённая)

Примеры.

① $v \in C^\infty(\Omega)$ - очевидно, L^1_{loc}

/* Далее вместо $\varphi_v(u)$ пишем $v(u)$ */

Тогда $(D^\alpha v)(u) = (-1)^{|\alpha|} v(D^\alpha u) =$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (D^\alpha u)(x)\, v(x)\, dx \ominus$$

- инт. по частям. (на границе Ω $u \equiv 0 \Rightarrow = u^{(n)} \equiv 0 \Rightarrow$ гранич. члены сокр-ся)

выносим (-1) α раз

$$\ominus \underbrace{(-1)^{2|\alpha|}}_{=1} \int_\Omega u(x) \underbrace{(D^\alpha v)(x)}\, dx$$

производная, выч-я в #(1)

Т.е. обобщ. ф-ция отожд. с производной (классич-я)

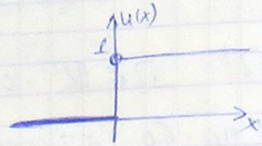
обобщ. производн.

Утв. Т.о. действие этого лин. опер-ра (обобщ. произв.) сводится к обычн. произв. для дифф-х ф-ций

②

$\Omega = R$

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$



(она не непр)

Дифф-м: в $\forall (\cdot)$ этого делать нельзя. Считаем по def:

$$v \in D(\mathbb{R}), \quad u'(x) = -u(v') = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} v'(x)\,dx = -v(x)\Big|_0^{+\infty} = v(0)$$

// $v(+\infty) = 0$, т.к. осн. ф-я

т.о. $\boxed{u'(x) = \delta(v)}$

! Обобщ. дифф-е не имеет ничего общего с классич.

③

$$\delta'(u) = -\delta(u') = -u'(0) \qquad \forall u \in D(\mathbb{R})$$

// то же самое, как если бы дифф. 2 раза ②

/* $\forall$ обобщ. ф-ю мы м. дифф. в обобщ. смысле сколько угодно раз. */

/* Надо было д-ть, что т.к. $u_k \xrightarrow{D(\Omega)} u$

$$(D^\alpha v)(u_k) = (-1)^{|\alpha|} v(D^\alpha u_k) \qquad D^\alpha u_k \xrightarrow{D'(\Omega)} D^\alpha u$$

т.е. обобщ. произв. - обобщ. ф-я! */

Решаем задачу $\Delta u = f$, где $f \in D(\Omega)$ в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Найти: $u \in D'(\Omega)$

Иначе говоря: $\forall v \in D(\Omega)$ $= f(v)$

$$\Delta u(v) = u_{x_1x_1}(v) + u_{x_2x_2}(v) + \ldots + u_{x_nx_n}(v) =$$

$$= u(v_{x_1x_1}) + \ldots + u(v_{x_nx_n}) = u(v_{x_1x_1} + \ldots + v_{x_nx_n}) = u(\Delta v)$$

Т.о. $\Delta u(v) = \underbrace{u(\Delta v) = f(v)}$

Обобщ. реш-е — реш-е, явл. обобщ, т.е. , т.к. v - осн. ф-я.

Утв. Если u — кл. реш-е ур-я Пуассона, то u явл. обобщ. реш-м.

Д-во

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_\Omega f(x) v(x)\,dx$$

$$\| $$

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x)\,dx$$

$\|$ $f(x)$ - класс. реш-е.

Обратно - аналог. ■

Пример (Ур-е Лапласа)

$\Omega = \mathbb{R}^n \qquad n > 2$

$\Delta u = \delta$ Справа обобщ. ф-я => нельзя говор. о классич. решении.

$u(\Delta v) = \delta(v) = v(0)$ — это нужно реш.

/* ищем потенциал нек. сист. зарядов, где пот. — обобщ. ф-я */

/* интерпрет. в контексте зарядов (един.):

$$\delta(e) = \begin{cases} 0, & e \neq 0 \\ 1, & e = 0 \end{cases}$$

*/

— ищем кулоновский потенциал

// в случае $\mathbb{R}^3$ знаем, должно быть $u(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$

в $\mathbb{R}^n$: $u(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$ — ищем в таком виде

Напоминание: $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega v \Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

(1-я ф-ла Грина)

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx = -\int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx + \int u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

нормаль.

вычтем одно из др.:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial u}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

(2-я ф-ла Грина)

$$u(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$$

$(\Delta u)(v) = \delta(v) = v(0)$

$$u(\Delta v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta v(x) dx \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x) \Delta v(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B_\varepsilon^c(0)} u(x) \Delta v(x) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{B_\varepsilon^c(0)} v(x) \Delta u(x) dx + \int_{B_\varepsilon^c(0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \right) =$$

Δu вне ~~шарика~~ гран. даёт 0. (ур-е Лапласа)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B_\varepsilon^c(0)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) =$$

Переходим в рад. сист. коорд.:

$$\int_{\partial B_\varepsilon^c(0)} u \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial v}{\partial r} d\sigma$$

т.к. $u(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$

$$\left| \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial v}{\partial r} d\sigma \right| \le \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\partial B_\varepsilon} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| d\sigma \le \frac{c}{\varepsilon^{n-2}} \|\nabla v\| \underbrace{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}_{\text{площадь пов-ти}} =$$

$$= C(u,v)\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} -v \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma =$$

$u = \frac{c}{r^{n-2}} \qquad u'_r = \frac{-c}{r^{n-3}}(n-2)$

$= \cancel{\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n\omega^n c(n-2)\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} \int v\,d\sigma} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{c(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \int v\,d\sigma =$

// домн. и поделим на $n\omega^n\varepsilon^{n-1}$ – площ. пов-ти

$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n\omega^n c(n-2)\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} \int v\,d\sigma = n\omega_n c(n-2)\,v(0)$

$\Rightarrow n\omega_n c(n-2) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{n\omega_n(n-2)}$

Утв

$n>2$

$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$; $\Phi(x)$ – фунд. реш-е ур-я Лапласа д/ $n>2$

Тогда $\Delta u = \delta$ (обобщ. ф-я)

В частности, если $n=3$, то $u(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$

– кулоновский потенциал един. заряда.

Д-во – выше.

Note:

$\boxed{\Delta u = \delta} \overset{\text{по def обобщ. ф-ции}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta v = v(0)}$ $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

! // д-ли не для $\forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, а даже для $C^2(\mathbb{R}^n)$ с компакт. носит.

Упр (уметь на зачёте!)

$n=2$, получ. $U(x) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ – фунд. р. ур-я Л. д/ $n=2$

Хотим решать более общ. ур-е $\Delta u = \delta(x-x_0)$

// $\Delta u = f(x)$, $f(x)$ – плотн. зар. // заряд в т. x_0

$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}$

Если $\Delta u = \sum \delta(x-x_i)$, исп. принцип суперпоз:

$u(x) = \sum \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-x_i|^{n-2}}$

Общая: $\Delta u = f \Rightarrow u = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} f(y)\,dy = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,dy}_{\text{свёртка}}$

Утв

$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,dy \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = f \\ u \in C^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$ // в классич. смысле

Д-во:

$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\,dy$ // перекинули, введя замену $z = x-y$

$D^\alpha u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) (D^\alpha f)(x-y)\,dy$ $|\alpha| \le 2$

т.о. $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

Ост. д-ть, что $\Delta u = f$. Дост. д-ть в обобщ. смысле, а дальше из $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ обобщ. произв. совп. с классич.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta v(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\,dy = \int dy \int \Phi(y) \Delta v(x) f(x)\,dx$$

подставили $\varphi(x)$

Далее действуем так же, как в случае, когда д-ли, что $\Delta u = \delta$:

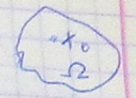
$$\Delta\Phi = \delta \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta v(x)\,dx = \delta(0) \quad (1)$$

Нам нужно д-ть, что $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Delta v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x)\,dx \quad (1')$

(1) и (1') - одинаковый счёт: нужно вырез. шарик с ц. в y, смотреть его границу, перех. к $\lim$, когда шар стяг. в (.) y

Упр

Получим ещё одну полезную ф-лу.



$x_0 \in \Omega$

Подставим во 2-ю ф-лу Грина $\tau = \Phi(x-x_0)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega\setminus\overline{B}(x_0)} \left(u\Delta\Phi(x-x_0) - \Phi(x-x_0)\Delta u\right)dx =$$

$\Delta\Phi = 0$: 0, т.к. $\Delta\Phi = 0$ п.в. кроме x_0

вырезали особенность в (.) x_0

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Phi(x-x_0)}{\partial n} - \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} \text{—}\ u\ \text{—}\ d\sigma =$$

?

1

= [во втором интеграле мы уже считали, что одно слаг. уйдёт в 0]

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial\Phi(x-x_0)}{\partial n} - \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + u(x_0) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(x_0)}} \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma + u(x_0)$$

$$-\lim \int_{\Omega\setminus\overline{B_\varepsilon(x_0)}} \Phi(x-x_0)\Delta u(x)\,dx = \int\left(u\frac{\partial\Phi(x-x_0)}{\partial n} - \Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma + u(x_0)$$

$$u(x_0) = -\int_{\Omega} \Phi(x-x_0)\Delta u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(\Phi(x-x_0)\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x-x_0)\right)d\sigma$$

← 3 ф-ла Грина

($y := x_0$, $u(x)$)

/* пояснение $\Delta\Phi = 0$:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

~~в $\mathbb{R}^3$ $u(x)$~~

*/

Гармонич. ф-ции.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\Delta u = 0$ – ф-ции, удовл. такому ур-ю, назыв. гармоническими.

/* далее по умолчанию будем говорить о производн. в классич. смысле */

Мы знаем гарм. ф-ции:

- в $\mathbb{R}^2$ – линейные; x^2-y^2; xy
- $\mathbb{R}^3$: xyz, x^2-y^2; $\frac{1}{|x|}$ – не гарм!

$u(x) = \underbrace{\frac{1}{4\pi|x|}}_{const}$ – гармонич. во всём $\mathbb{R}^3$, кроме 0. (т.е. не гармонич. даже в обобщ. смысле)

Утв.1

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$, $\Delta u = 0$ $\Rightarrow$

//см. 1-ю ф-лу Грина

$\Rightarrow 0 = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ //хотим стац. поле?

Утв.2

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar\Omega)$, $\Delta u = f$ $\Rightarrow$

$\underbrace{\int\limits_{\Omega} f\,dx}_{\text{столько}} = \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma}_{\text{столько}}$

столько вошло/ушло из обл – столько пришло/ушло ч/з границу] физ. смысл, темп. баланс

Утв.3

$u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$

$x \in \Omega$, ε т.ч. $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$

Тогда:

$u(x) = ⨍\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(\xi)\, d\sigma(\xi)$ $\forall n \geq 1$

//$\forall$ н м. посчитать зн-е в $\forall$ как средн. по пов-ти шарика

Д-во: $n \geq 2$. //$n=1$ - очевидно.

Применяем 3-ю ф-лу Грина, в кач-ве Ω берём шарик, в кач-ве x - ц. этого шарика:

$$u(x) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int\limits_{\partial B_n} \left(\frac{1}{|z-x|^{n-2}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|z-x|^{n-2}} \right) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \Big(\underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \overbrace{\frac{\partial u}{\partial n}(z)}^{\leq C} d\sigma(z)}_{I_1 = 0} - \underbrace{\int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{(n-2)}{|z-x|^{n-1}} u(z)\, d\sigma(z)}_{I_2} \Big) =$$

как интеграл гарм. ф-ции.

~~$|I_1| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|(z)\, d\sigma(z) \leq \frac{C}{\varepsilon^{n-2}} n\omega_n \varepsilon^{n-1} \to 0$~~

~~(непрер. ф-я огр. на комп.)~~

~~$|I_2| = \frac{n(n-2)\omega_n}{\varepsilon^{n-1}} \varepsilon^{n-1} \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\, d\sigma(z)$~~

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1 \cdot n(n-2)\omega_n}{n(n-2)\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z) = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z)$$

// это простейш. вариант Th о среднем д/гарм. ф-ций.

Дома:

$\Delta u \geq 0$ — что это значит в классич. смысле:

– в $\mathbb{R}^1$?

– в $\mathbb{R}^2$? Как изменится наша Th о средн.?

Продолжение д-ва

06.04.13 На предыд. лекции (Утв. перед нумерованными Утв.) было:

$\Delta u = f$ в $\mathbb{R}^n$

$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$u(x) = (\Phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\,dy$

- если к такому добавляем $\forall$ гарм. ф-ю, она тоже будет реш-м: !-ти нет

из прошл. лекции:

$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y)$ $\qquad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

хотели д-ть, что $(\Delta u)(\varphi) = f(\varphi)$ // в обобщ. смысле

т.е. хотим д-ть:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y)\,dy \underset{д\text{-ть}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z)\,dz$$

|| – Th Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \Delta f(x-y)\,dx =$$

инт. по частям:

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi(x) \cdot f(\underbrace{x-y}_{z:=})\,dx =$$

снова примен. Th Фубини (всё равно, в каком пор. интегрировать)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta\varphi(z+y)\,dy \right) dz =$$

Уже д-но (когда выводили обобщ. реш-е): $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta w(y)\,dy = w(0)$

// процедура с вырезанием шарика... $\boxed{\Delta\Phi = \delta}$

нужно знать коллоквиум.

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \varphi(z)\,dz$$

$\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\Delta u = 0$ // в классич. смысле.

Только что д-ли, что если ф-я гармонич. (т.е. $\Delta u = 0$), то

$u(x) = \int_{\partial B_\varepsilon} u(z)\,d\sigma(z)$ $\qquad \overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$

// Th о среднем

Сл

$u(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz$

Д-во

Перейдём к пол. коорд.: эл-т на пов-ти шарика

$$\int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz = \int_0^\varepsilon \rho^{n-1}\,d\rho \int_{\partial B_1(x)} u(\rho, \nu)\,d\sigma(\nu) =$$

//домножаем на ρ

$$= \int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(s)\,d\sigma(s) = \int_0^\varepsilon d\rho\, u(x)\, S_{n-1}(\partial B_\rho(x)) = u(x)\,|B_\varepsilon(x)|$$

площадь в смысле n-1 -мерности, не двумерн.!

u (Утв), и (Сл) – теоремы о среднем д/гарм. ф-ции!

Th (обратная Th о среднем)

$u \in C(\Omega)$ и вып. усл-е $\forall x \in \Omega$, $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset \Omega$:

$$u(x) = ⨍_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz$$

Тогда (1) $u(x) = ⨍ u(z)\,d\sigma(z) \overset{(2)}{\Rightarrow} \Delta u = 0$

//ф-я гармонич. в классич. смысле (т.е. $u \in C^2(\Omega)$)

/* Note:

на самом деле, в рез-те $u \in C^\infty$, и она вещ.-аналит.

*/

Д-во:

Аналогично предыд. д-ву (в обр. сторону):

$$u(x)\,|B_\varepsilon(x)| = \int_{B_\varepsilon(x)} u(z)\,dz = \int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(s)\,d\sigma(s)$$

с др. стороны, $u(x)\,|B_\varepsilon(x)| = u(x)\cdot \omega_n \varepsilon^n$ $\quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon(x))$

$\omega_n := |B_1(0)|$

Дифф. с обеих сторон:

$$u(x)\cdot \underbrace{n\omega_n \varepsilon^{(n-1)}}_{S_{n-1}(\partial B_\varepsilon(x))} = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(s)\,d\sigma(s)$$

//получили т.т.д. д(1) – среднее интеграла по границе шарика.

(2): предположим, что $u \in C^2(\Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(z)\,d\sigma(z)\right) = \left[\text{замена: } \begin{array}{l} z = x + \varepsilon y \\ d\sigma(z) = \varepsilon^{n-1} d\sigma(y) \end{array}\right] =$$

взяли т.о. среднее. $\quad z \in \partial B_\varepsilon(x) \Rightarrow y \in \partial B_1(0)$

$$= \frac{1}{n\omega_n} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon y)\,\varepsilon^{n-1}\,d\sigma(y) = \frac{1}{n\omega_n} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y) =$$

$$= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\varepsilon y)\cdot y\,d\sigma(y) = \left[\frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x+\varepsilon y)\,d\sigma(y)\right] =$$

подставляем обратно замену:

$$= \frac{1}{n\omega_n} \varepsilon^{n-1} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla u(z)\cdot \frac{z-x}{\varepsilon}\,d\sigma(z) = ⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z) =$$

по ф-ле Грина

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial u}{\partial n}(z)\,d\sigma(z) = \int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(z)\,dz$$

$\frac{d}{d\varepsilon}$ от будет 0. Д-м, что $\int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(z)\,dz = 0$ $\quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0(x))$

$\Rightarrow$ м. разделить, и перейти к lim:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(z)\,dz = [\Delta u(x)] = 0$$

— ч.т.д.

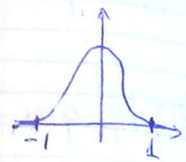
Теперь разбираемся с предп-м $u \in C^2(\Omega)$.

Технология (общ. случай):

$u \in C(\Omega)$

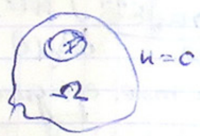
нужно выбрать $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

берём дост. гладкую $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:



$\varphi(x) := \psi(|x|)$

$\forall \varepsilon>0: \ \varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$



$u * \varphi_\varepsilon =: u_\varepsilon$

$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy$ // полагаем, что $u=0$ вне Ω, и тогда u_ε везде опред., пишем интеграл по $\mathbb{R}^n$.

— сделав такой фокус, мы м. продифф. $u_\varepsilon(x)$ по x сколько угодно раз, т.к. внутри от x у нас завис. только φ_ε, а она $\in C^\infty$.

т.е. $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x)$ // д/ всех x каких-то =)

Применяем этот трюк к нашему случаю:

$u \in C(\Omega)$ $\quad \Omega' \subset\subset \Omega$

$u_\varepsilon \in C(\overline{\Omega'})$ $\quad \overline{\Omega'}$ — компакт в откр. области

$u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega'}$

$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right)$

$$(u*\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\varphi_\varepsilon(x-y)\,d\sigma(y) = [y = x+\rho\nu] =$$

$$= \int_0^\varepsilon d\rho \int_{\partial B_1(0)} u\left(\frac{y-x}{\rho}\right) d\sigma(y) = \int_0^\varepsilon d\rho\, \rho^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho\nu)\,d\sigma(\nu) =$$

$\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$

переходим обратно от замены // увидели, что ψ завис. исключит. от радиуса

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)d\rho \underbrace{\left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\,d\sigma(y)\right)}_{u(x)\cdot n\omega_n\rho^{n-1}} =$$

и. теперь применить д-ю Th

$$= u(x)\int_0^\varepsilon n\omega_n\rho^{n-1}\frac{1}{\varepsilon^n}\psi\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)d\rho$$

тогда наш интеграл:

$\frac{\rho}{\varepsilon} =: \tau \qquad \int_0 n\omega_n \frac{\varepsilon^{n-1}\varepsilon}{\varepsilon^n}\tau^{n-1}\psi(\tau)\,d\tau$

Т.о. слева $(u*\varphi_\varepsilon)(x) = u_\varepsilon(x)$, а справа — $u(x)$

/* т.к. посчитали, что наш инт. от ε не завис. Выберем ψ т.ч. он обратится в 1, и получим $u_\varepsilon(x) = u(x)$ */

Вывод:

$\forall$ ф-я, гармонич. в Ω, явл. бесконеч. дифф.:

— если гармонич., то удовл. Th о среднем (внутри области), а $\Rightarrow$ явл. $C^\infty(\Omega)$ ∎

Сл (принцип max д/гарм. ф-ций, сильный)

$\exists\, \Delta u = 0$ в ~~связной~~ обл. Ω
(гармонич.)

Тогда если u достиг. max в какой-то (.) Ω, то она const.

Д-во.

$\exists$ u достиг. max в Ω. Разобьём Ω на 2 мн-ва, где u достиг. max, и остальное.

Обозначим max значение M.

Δ 2 мн-ва: $\{x \in \Omega \mid u(x) = M\}$ и $\{x \in \Omega \mid u(x) < M\}$

очевидно, их $\sqcup = \Omega$
дизъюнктное объед.

Очевидно, 1-е мн-во замкн., 2-е откр.

1-е мн-во — ещё и замкнуто: Δ $B_\varepsilon(x_0)$ внутри него. $\Rightarrow B_\varepsilon(x_0) \in$ первому мн-ву, иначе
~~max~~ $\fint_{B_\varepsilon(x_0)} < M$

$\Rightarrow$ замкн. и откр., при этом $\neq \varnothing \Rightarrow$ const.

Note: без связности не верно. ■

Сл (слаб. принцип max)

~~$\Delta u = 0$ в классич.~~

$$u(x) \le \sup_{z \in \partial\Omega} u(z)$$

Переформулир.: $\Delta u = 0$ в классич. смысле,

$u \in C(\overline{\Omega})$, Ω - огр.

Тогда $u(x) \le \max\limits_{z \in \partial\Omega} u(z)$ // рав-во ~~до~~ в нек. (.) влечёт const везде в её связной компоненте.

$\ge \min\limits_{z \in \partial\Omega} u(z)$

Сл (единств-ть реш-я) для внутр. задачи Дирихле

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

— если реш-е ~~то~~ есть, то оно ! (о $\exists$ ничего не говорим)

Д-во:

$\Delta u_1 = f$, $u_1\big|_{\partial\Omega} = g$ $\quad$ $\Delta u_2 = f$, $u_2\big|_{\partial\Omega} = g$

$u := u_1 - u_2$

$\Delta u = 0$

$u\big|_{\partial\Omega} = 0$ // max достиг. на границе, а она 0.

$\Downarrow$

$u = 0$ ■

Note:

Д/задачи Неймана !-ть не ~~д-ся~~ сохр-ся, т.к. при доб-нии к u + const — это тоже будет реш. (все усл-я вып.)

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

■

Построение реш-я д/задачи Дирихле на примере ур-я Пуассона.

// это не д-т ∃я, но даёт схему д/нахожд.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

// классич. треб. к реш-ю: C^2, с вплоть до границы!

Решение.

Ф-я Грина д/внутр. задачи Дирихле д/ур-я Пуассона

Строим ф-ю $G(x,y) = \underbrace{\Phi(x,y)}_{\text{фунд. реш-е}} + v_y(x)$

$v_y(x)$ подбирается след. образом:

используем 3-ю ф-лу Грина:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(x)\Phi(x-y) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x-y) \cdot u(x) \right) d\sigma(x) - \int_{\Omega} \Delta u(x) \Phi(x-y)\, dx$$

$V := V_y(x)$ налагаем такое усл-е $\boxed{\Delta V \equiv 0}$

применим II ф-лу Грина к „u", „v"

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x) - \int_{\Omega} v \Delta u\, dx$$

сложили

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, G(x,y)\, d\sigma(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\, u(x)\, d\sigma(x) - \int_{\Omega} \Delta u(x)\, G(x,y)\, dx$$

$\shortparallel$ 0

налагаем ещё одно усл-е на v:

$$\boxed{G(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} = 0} \text{ — тогда}$$

т.о. $u(y) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x,y)\, u(x)\, d\sigma(x) - \int_{\Omega} \Delta u(x)\, G(x,y)\, dx$

производная по иксам!

Подст. к.у.:

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x,y)\, g(x)\, d\sigma(x) - \int_{\Omega} f(x)\, G(x,y)\, dx$$

// кроме того, v д.б. т.ч. ∃ $\frac{\partial G}{\partial n}$, и все интегралы имеют смысл.

Получилось подобрать v => имеем реш-е вида

Поясним, что такое ф-я Грина д/....

$$\begin{cases} \Delta V_y(x) = 0 & \text{в } \Omega \\ V_y|_{x\in\partial\Omega} = -\Phi(x-y) \end{cases}$$

$\Delta_x G = \Delta_x \Phi(x-y) = \delta_y(x)$ — единичный заряд.

$G|_{x\in\partial\Omega} = 0$

Т.е. G — потенциал единичн. заряда в (·) y, а потенциал на границе 0 (заземлена)

V_y: потенциал, наведённый на границе единичным зарядом в (·) y, т.е. это суммарный потенциал нейтрализ. зарядов, дающих в итоге на границе 0.

Св-ва ф-ции Грина // если G вообще ∃

1. $G>0$, $G=0$ на границе => внутри $G>0$ тоже.

т.е. $\left.\begin{matrix} G|_{\partial B_\varepsilon(y)} > 0 \ (\varepsilon \ll 1) \\ G|_{\partial\Omega} = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow G>0$ (т.к. при $x\to y$: $G\to+\infty$)

2. $G(x,y) = G(y,x)$

$u(x) = G(x,z) =: v(x)$

Д-во: обозначим => нужно д-ть, что $u(z) = v(y)$

u, v – гармонич. всюду кроме полюсов y, z.

$$\int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} + \int_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (*)$$

фр-ла Грина

(**) $\Delta v = 0$ в U => $v(y) = \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}$

(***) $\Delta u = 0$ в V => $u(z) = \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}$

} фр-лы Грина

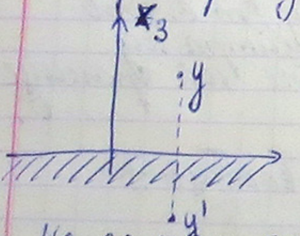
Подст. (**), (***) в (*), получ. $-v(y) + u(z) = 0$

■

Нахождение ф-ции Грина

1. Метод отражения.

1.1 на примере з. Дирихле д/полупр-ва.



$\Omega = \{z > 0\}$.

// жульничество: мы говорили о ф-ции Грина д/огранич. мн-в, а тут неогр.

На самом деле, д/неогр. её тоже м. строить, но нам лень подводить доп. теорию.

У нас появился единичн. заряд в (·) y „+1"

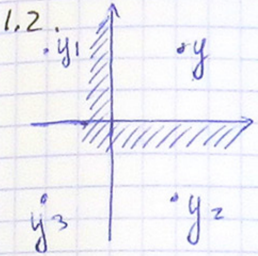
Отразим его, получим в (·) y' заряд „-1"

Нам нужно найти потенциал системы из двух зарядов, один из кот. фиктивн., и подобран т.о., что на границе 0.

$G(x,y) = \Phi(x-y) - \Phi(x-y')$ – очевидно!

// сумма потенциалов наших двух зарядов.

1.2.



двумерный случай.

Сумма потенциалов этих 4х зарядов и даст ф-ю Грина.

1.3.

Правильное отобр-е в данном случае – инверсия (произвед-е расст. до центра = (радиус)^2)

Чтобы д-ть это, нужно показ., что получ. два инт.? дадут ~~0~~ на границе, затем сумма их потенциалов и даст ф-ю Грина.

А дальше надо будет д-ть, что это действит. ф-я Грина, диффер-я, док-я рав-во Лаплас., где надо, и т.д.