

# 第六周作业报告

佐藤拓未 20300186002

## 第一问

用 Newton 表示重新写出 Adams 格式.

**解:** 不妨只考虑多步 Adams-Moulton 格式, 首先对  $t_{n+1-k}, \dots, t_n, t_{n+1}$  共  $k+1$  个节点作关于  $f_{n+1-k}, \dots, f_n, f_{n+1}$  的 Newton 途径  $k$  次插值多项式

$$P_k(t) = f_{n+1-k} + f[t_{n+1-k}, t_{n+2-k}](t - t_{n+1-k}) + \dots + f[t_{n+1-k}, \dots, t_n, t_{n+1}](t - t_{n+1-k}) \dots (t - t_n)$$

那么可以导出线性多步格式

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_k(t) dt \\ &= \Delta t f_{n+1-k} + f[t_{n+1-k}, t_{n+2-k}] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1-k}) dt + \dots \\ &\quad + f[t_{n+1-k}, \dots, t_n, t_{n+1}] \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1-k}) \dots (t - t_n) dt \end{aligned}$$

考虑差分  $\Delta^0 f_n = f_n$ ,  $\Delta^{j+1} f_n = \Delta^j f_{n+1} - \Delta^j f_n$  以及  $\Delta^s f_n = s! \Delta t^s f[x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+s}]$ , 那么多步格式可以简记为

$$u_{n+1} - u_n = \Delta t \sum_{s=0}^k \frac{\Delta^s f_{n+1-k}}{s! \Delta t^{s+1}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_s(t) dt$$

其中  $\phi_s(t)$  是  $s$  次多项式

$$\phi_s(t) = \begin{cases} (t - t_{n+1-k}) \cdots (t - t_{n+s-k}) & s = 2, 3, \dots, k \\ 1 & s = 0 \end{cases}$$

更进一步, 作变换  $t = t_n + \tau \Delta t$ , 那么

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi_s(t) dt = \Delta t^{s+1} \int_0^1 \prod_{i=1}^s (\tau + k - i) d\tau$$

从而多步格式为

$$u_{n+1} - u_n = \Delta t [f_{n+1-k} + \sum_{s=1}^k \frac{\Delta^s f_{n+1-k}}{s!} \int_0^1 \prod_{i=1}^s (\tau + k - i) d\tau]$$

类似地, 若考虑  $\nabla^0 f_n = f_n, \nabla^{j+1} f_n = \nabla^j f_n - \nabla^j f_{n-1}$ , 则多步格式也可以写为

$$u_{n+1} - u_n = \Delta t [f_{n+1} + \sum_{s=1}^k \frac{\nabla^s f_{n+1}}{s!} \int_0^1 \prod_{i=1}^s (\tau + i - 2) d\tau]$$

## 第二问

在用 Adams 格式和 Gear 格式时, 需要给定初始  $k$  步值, 请对标准测试问题, 用四阶的 Adams 格式和四阶的 Gear 格式, 观察不同的初始选取对精度的影响: 1) 用精确的初始值; 2) 用显式 Euler 格式计算初始的  $k-1$  个值; 3) 用二至四阶 Runge-Kutta 格式计算初始的  $k-1$  个值.

**解:** 欲从两个角度分析精度: 1) 不同的初值对相同的格式收敛精度影响; 2) 当初值相同时, 不同迭代格式对收敛精度的影响.

对于标准测试问题  $\frac{du}{dt} = au$ , 取  $a = -2, u_0 = 1, t_0 = 0, T = 1, \Delta t = 2^{-i}, N = [\frac{T}{\Delta t}]$ , 并令  $i$  变动以观察收敛阶.

由于 A-M 四阶方法是三步格式, 因此只需要 3 个初值, 但是需要多求解一

个非线性方程; 由于 A-B 与 GEAR 四阶方法都是四步格式, 因此它们需要 4 个初值, 但不需要求解非线性方程.

### 1) 不同的初值对相同的格式收敛精度影响:

首先, 如果初值是精确的:  $\forall i = 1, 2, \dots, \Delta t = 2^{-i}$  确定, 我们可以考虑不同格式的末项相对误差.  $u_N$  为给定格式的末项, 则有末项与精确解的相对误差

$$|\epsilon_N| = \frac{|u(T) - u_N|}{|u(T)|}$$

若格式是  $p$  阶格式, 还有

$$|\epsilon_N| = O(\Delta t^p) \triangleq C \Delta t^p$$

$$\ln |\epsilon_N| = \ln C + p \ln \Delta t = \ln C - ip \ln 2$$

从而末项相对误差的对数值与  $i$  是线性关系.

若初值是不精确的: 还需要考虑初值带来的影响, 从而即便格式相同, 但当初值有扰动时, 它们的收敛精度也会不一样.

事实上, A-M 和 A-B 格式满足根条件: 即它们的第一特征多项式  $\lambda - 1$  的根落在单位圆盘, 从而可知它们具有稳定性; 另外, 两个四阶格式都是相容的, 从而具有以下收敛性估计:

$$|\epsilon_N| \leq C_1 \|\epsilon_{k-1}\| + C_2 \Delta t^p$$

从而由上面的估计, 可知初值的误差也会改变收敛精度.

当考虑的是 A-M 四阶格式时, 收敛精度最差的是显式 Euler 初值下的收敛精度; 收敛精度最好的是精确初值与 Kutta 四阶初值下的收敛精度, 具体见图 1.

当考虑的是 A-B 四阶格式时, 收敛精度最差的还是显式 Euler 初值下的收敛精度; 而此时精确初值与 Kutta 三至四阶初值下的收敛精度是相当接近的, 具体见图 2.

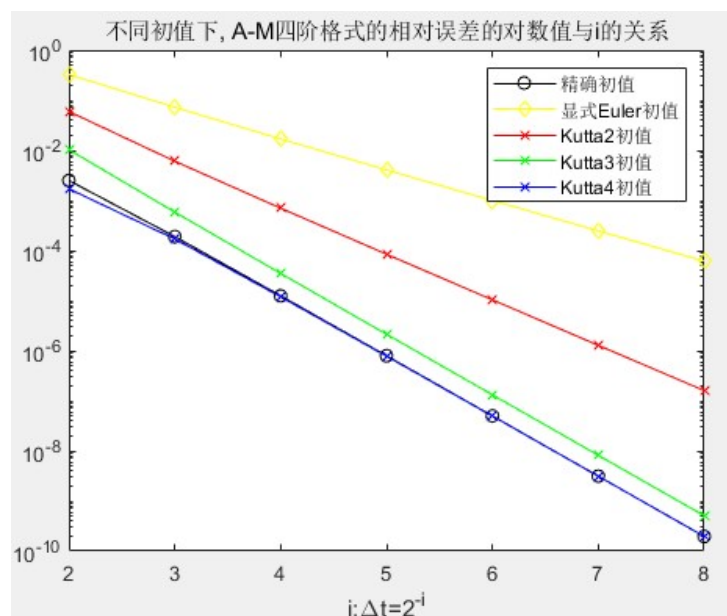


图 1: A-M 四阶格式在不同初值下的收敛阶

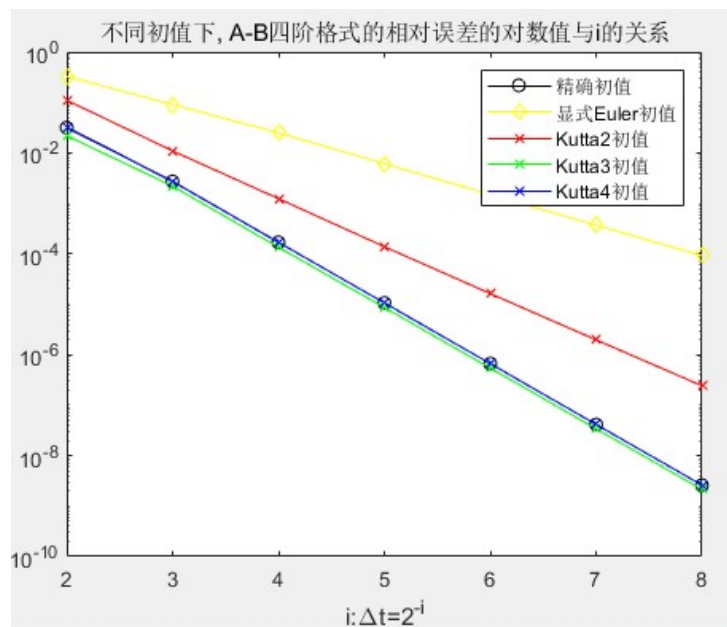


图 2: A-B 四阶格式在不同初值下的收敛阶

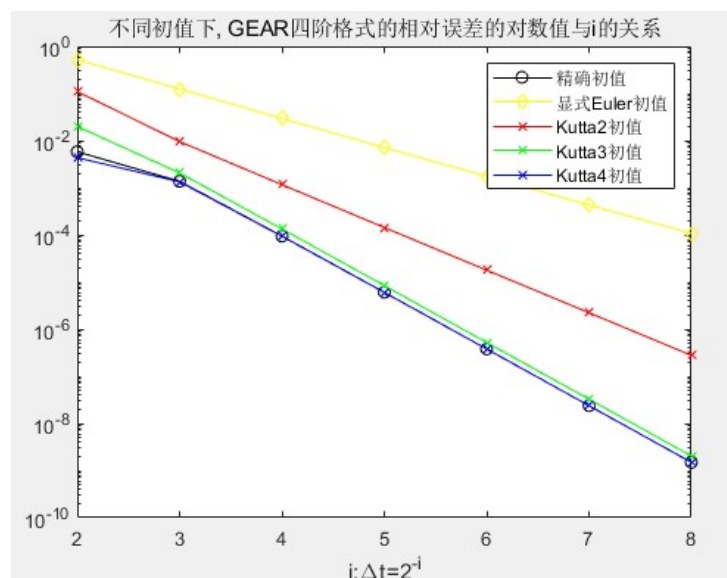


图 3: Gear 四阶格式在不同初值下的收敛阶

当格式为四阶 Gear 格式时, 不同初值下的收敛精度与 A-B 四阶格式类似, 具体见上图.

总的来说, 通过 Euler 显格式求得的初值与精确初值相差较多, 从而导致了在三个不同四阶格式中的精度表现并不好; 通过 Kutta 二阶方法求得的初值在精度上是不如精确初值与 Kutta 三至四阶方法求得的初值, 从而使得在 Kutta 二阶初值下, 三者的收敛精度不如后者; 而 Kutta 三至四阶初值相对来说比较靠近精确初值, 从而初值的扰动对收敛阶的影响是较小的.

## 2) 当初值相同时, 不同迭代格式对收敛精度的影响:

### 精确初值:

当初值是精确的, 三个不同四阶方法的收敛阶只取决于它们的相容性, 即三者的收敛阶均为四阶. 从图 4 中就可看出, 它们的斜率都是相同的.

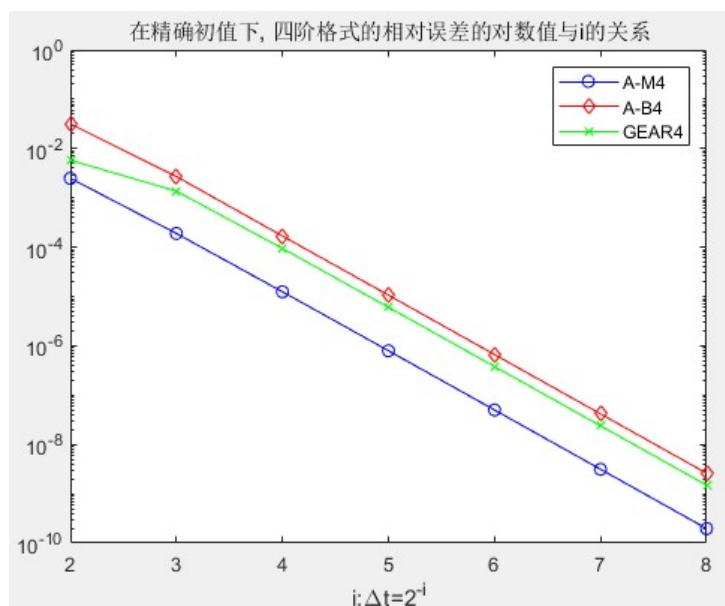


图 4: 精确初值

#### 显式 Euler 初值:

从图 5 中可以看出, 显式 Euler 初值下, 它们的收敛阶是相同的, 然而它们总体的收敛阶较差: 相较于精确初值下, 三种不同格式的相对误差在  $i = 8$  时被控制在  $10^{-8}$  以内, 但在显式 Euler 初值下, 只能被控制在  $1.07 \times 10^{-4}$  以内.

#### Kutta 初值:

由图 6、7、8 可知, 在 Kutta 初值下, 三个不同的四阶格式最终的末项相对误差会随着 Kutta 方法的阶数提高而降低, 这是因为当 Kutta 的  $p$  阶格式的精度会随着  $p$  增高而提升, 从而使近似初值与精确初值越来越靠近. 在数值上, Kutta 二阶初值下, 三者的精度最终在  $10^{-7}$  与  $10^{-6}$  之间; Kutta 三阶至四阶初值下, 最终精度均被控制在  $10^{-8}$ .

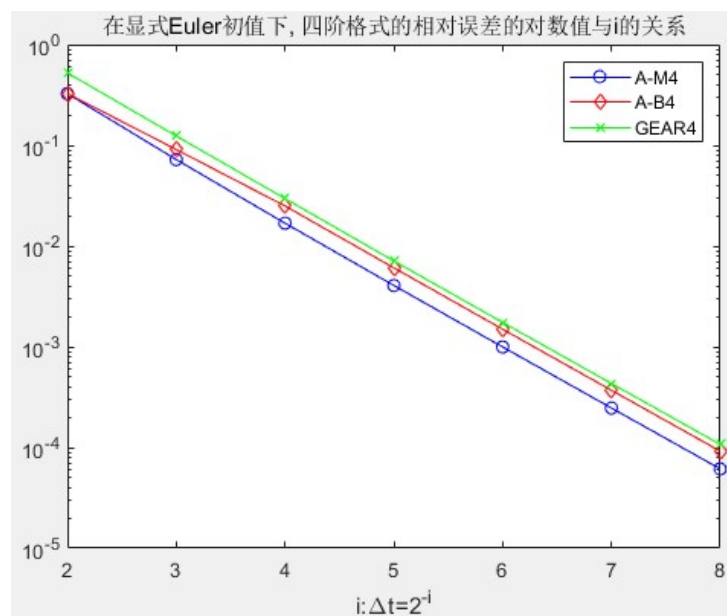


图 5: 显式 Euler 初值

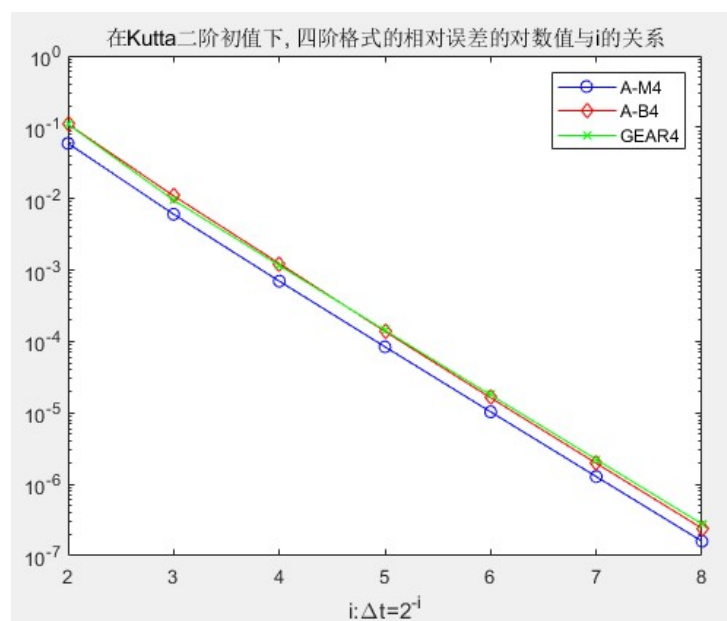


图 6: Kutta 二阶初值

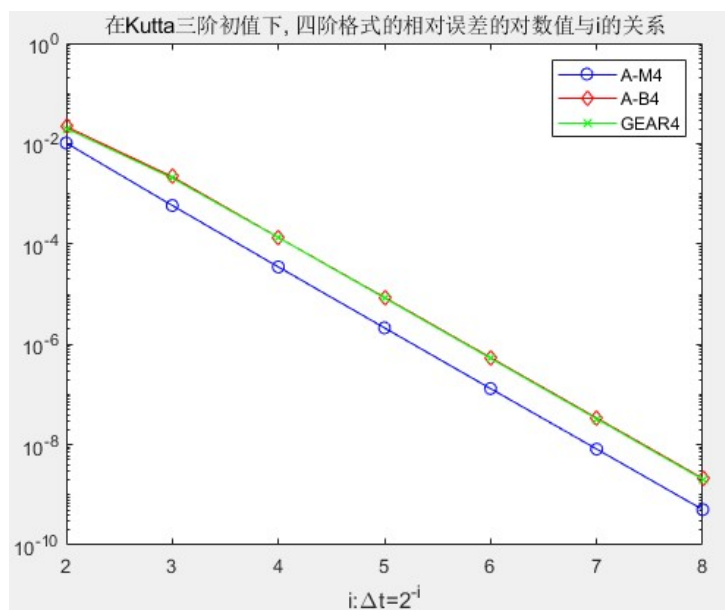


图 7: Kutta 三阶初值

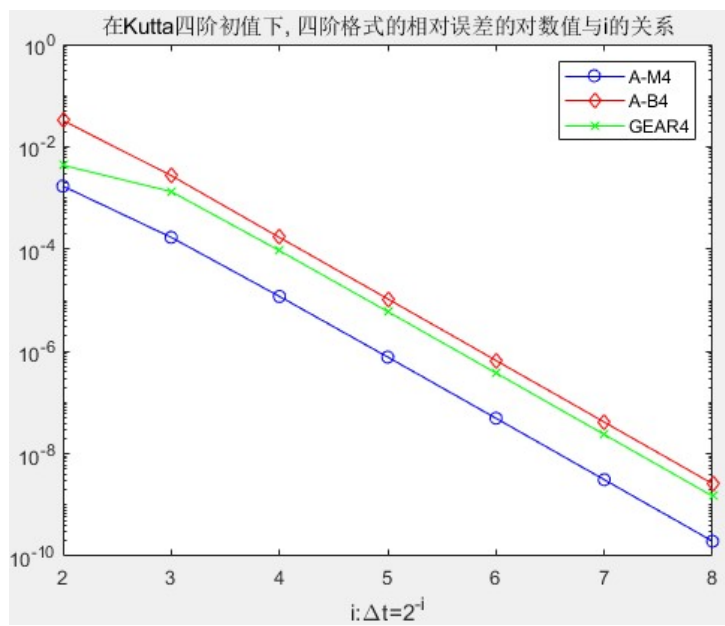


图 8: Kutta 四阶初值