第二周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

设迭代格式为 $x_{n+1} = G(x_n)$，并且有以下不等式

$$||G(x) - G(y)|| \leq \alpha||x - y|| \quad \alpha \in [0, 1)$$

从而有

$$||x_{n+2} - x_{n+1}|| \leq \alpha||x_{n+1} - x_n||$$

固定 n，并不妨设 $p > 0$，则

$$\begin{aligned}
||x_{n+p} - x_n|| &\leq ||x_{n+p} - x_{n+p-1}|| + ... + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \alpha^{n+p-1}||x_1 - x_0|| + ... + \alpha^n||x_1 - x_0|| \\
&= \frac{\alpha^n(1 - \alpha^p)}{1 - \alpha}||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$

从而有 $\{x_n\}$ 是基本列，从而 $\exists x^* \quad s.t. \lim\limits_{p\to\infty} x_p = x^*$，再由 $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p} = x^*$

$$\lim_{p\to\infty} ||x_{n+p} - x_n|| \leq \lim_{p\to\infty} \frac{\alpha^n(1 - \alpha^p)}{1 - \alpha}||x_1 - x_0||$$

再由 $a^p \to 0$

$$||x^* - x_n|| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}||x_1 - x_0||$$

第二问

设 $G(x) = e^{-x}$ 与 $F(x) = x - e^{-x}$，有不动点迭代格式 $x_{n+1} = G(x_n)$ 与牛顿迭代法格式 $x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$，记对应的迭代程序分别为 $\{x_n^G\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{x_n^N\}_{n=1}^{\infty}$，并利用 MATLAB 绘制并对比两迭代法：

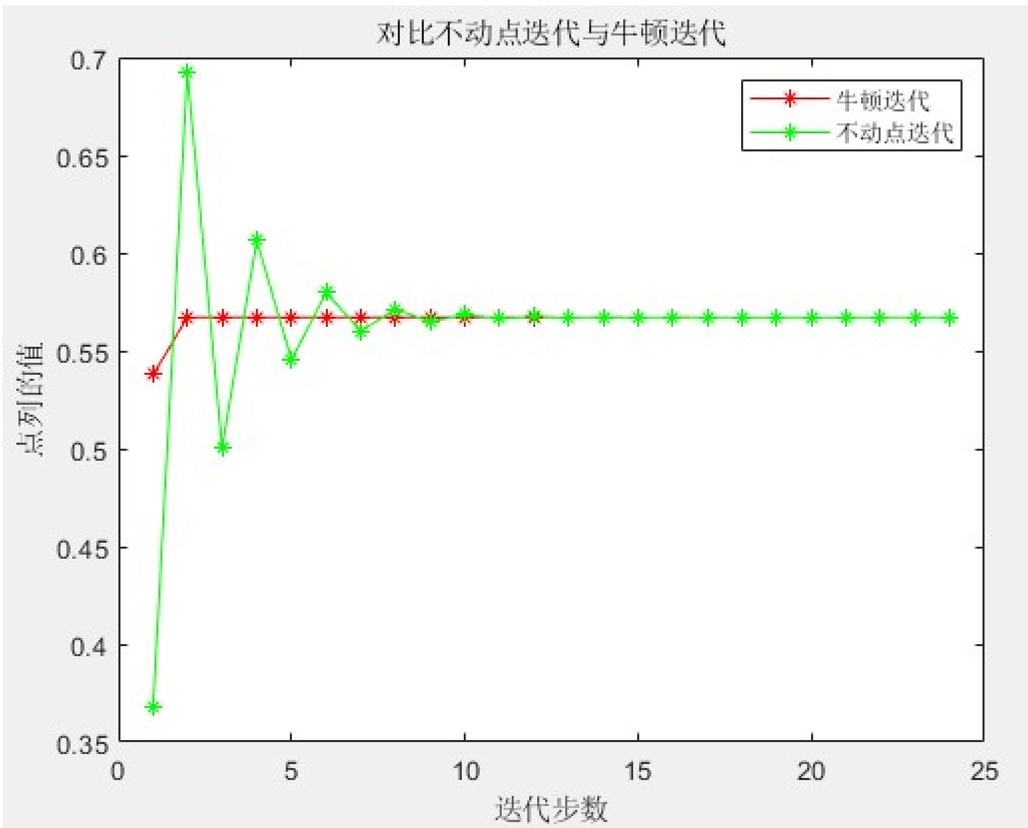

图 1: 红色点列对应了牛顿迭代，绿色点列对应了不动点迭代，初值为 1

可以发现牛顿迭代法的收敛速度更快，按照题目要求，给出误差：

$$|x_{24}^G - x^*| \approx 4.5769 \times 10^{-7}$$
$$|x_4^N - x^*| \approx 1.1102 \times 10^{-16}$$
$$|x_3^N - x^*| \approx 1.5630 \times 10^{-4}$$

当初值 $x_1^G = x_1^N = 1$ 时，不动点迭代的第 24 步迭代的精度介于牛顿迭代法的第 3 与第 4 步迭代的精度之间。
定性考虑：记 $\phi(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$，当不动点 x^* 仅是 $F(x)$ 的单根时，考虑在 x^* 的泰勒展开

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \phi^{'}(x^*)(x - x^*) + \frac{1}{2}\phi^{''}(\zeta)(x - x^*)^2$$

而 $\phi^{'}(x) = \frac{F(x)F^{''}(x)}{F^{'}(x)^2}$，从而 $\phi^{'}(x^*) = 0$，故有

$$\phi(x) - \phi(x^*) = \frac{1}{2}\phi^{''}(\zeta)(x - x^*)^2$$

上式意味着当不动点 x^* 为 $F(x)$ 的单根时，牛顿迭代法具有局部二阶收敛，从而相较于不动点迭代，其收敛速度更快。

第三问

设空间维数为 n，不妨先考虑 $||x||_{l_q} = 1$

$$1 = ||x||_{l_q}^q = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^q$$

从而可得

$$|x_i| \leq 1$$

由于 $1 \leq p \leq q$，可知 $|x_i|^q \leq |x_i|^p$, 故

$$1 = ||x||_{l_q} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = ||x||_{l_p}$$

$\forall y \in \mathbb{R}^n : \frac{y}{||y||_{l_q}}$ 的 $q-$ 范数是 1，代入上式可得

$$||y||_{l_q} \leq ||y||_{l_p}$$

另一方面，由 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^{p\cdot\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}} \cdot (\sum_{i=1}^{n}1^{\frac{q}{q-p}})^{\frac{q-p}{q}}$$

从而

$$||x||_{l_p} \leq ||x||_{l_q} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

综上所述

$$||x||_{l_q} \leq ||x||_{l_p} \leq ||x||_{l_q} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$