

第七周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

证明线性多步方法 $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{\Delta t}{4}(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)$ 是 A_0 -稳定的.

证明: 考虑 $\rho(\lambda) - z\sigma(\lambda) = 0$, 并约去等式两边因子 λ^n , 可知此线性多步方法的绝对稳定区域为

$$S = \{z : \lambda^2 - \lambda - \frac{z}{4}(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \text{ 满足根条件} \}$$

进一步整理可得

$$S = \{z : (4 - z)\lambda^2 - 2(2 + z)\lambda - z = 0 \text{ 满足根条件} \}$$

其中 $(4 - z)\lambda^2 - 2(2 + z)\lambda - z$ 是关于 λ 的二次复系数多项式, 由于考虑线性多步方法是否 A_0 -稳定, 问题转化为: 当 $z \in (-\infty, 0]$ 时, 二次多项式的两个根是否满足根条件.

经计算可得当 $z \in [-\frac{1}{2}, 0]$ 时, 二次多项式的根为实数

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + z \pm 2\sqrt{2z + 1}}{4 - z}$$

考虑 $\lambda_1 = \frac{2 + z + 2\sqrt{2z + 1}}{4 - z}$, 求导并整理可知

$$\frac{d\lambda_1}{dz} = \frac{2z + 6\sqrt{2z + 1} + 10}{(4 - z^2)\sqrt{2z + 1}} \geq 0, \quad z \in [-\frac{1}{2}, 0]$$

从而在区间 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上, λ_1 在 $z = 0$ 取极大, 在 $z = -\frac{1}{2}$ 取极小: $\lambda_1(0) = 1, \lambda_1(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$.

当 $z \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$, λ_1 为虚根, 则经计算可知其模函数为

$$|\lambda_1(z)| = \frac{\sqrt{z^2 - 4z}}{4 - z}$$

对其求导有

$$\frac{d|\lambda_1|}{dz} = \frac{-8 + 2z}{(4 - z^2)\sqrt{z^2 - 4z}} \leq 0, \quad z \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$$

那么可知 $|\lambda_1|$ 在区间 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 上, 在 $z \rightarrow -\infty$ 取极大: $|\lambda_1(-\infty)| = 1$.

再考虑 $\lambda_2 = \frac{2+z-2\sqrt{2z+1}}{4-z}$, 求导可知

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_2}{dz} &= \frac{-2z + 6\sqrt{2z+1} - 10}{(4 - z^2)\sqrt{2z+1}} \\ &\leq \frac{-4}{(4 - z^2)\sqrt{2z+1}} \leq 0, \quad z \in [-\frac{1}{2}, 0] \end{aligned}$$

可知在区间 $[-\frac{1}{2}, 0]$ 上, $\lambda_2(0) = 0$ 取极小, $\lambda_2(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ 取极大. 而当 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ 时, 由于 $|\lambda_2| = |\lambda_1|$, 故此时在 $z = -\infty$ 取模最大值: $|\lambda_2(-\infty)| = 1$.

最后, 发现 $\lambda_{1,2}$ 只在无穷远点 $z = -\infty$ 时的模同时为 1, 由于两个根的表达式不同, 故二次多项式不会在单位圆盘上取到重根. 综上所述, 当 $z \in (-\infty, 0]$ 时, 二次多项式 $(4 - z)\lambda^2 - 2(2 + z)\lambda - z$ 满足根条件, 因此负实轴包含在绝对稳定区域 S 当中, 从而线性多步方法是 A_0 -稳定的.

第二问

考虑如下方程:

$$\frac{du}{dt} = \lambda(-u + \cos(t))$$

取初值为 $u(0) = 0$ 或 1 .

- (1) 写出精确的 $u(t)$ 表达式:
- (2) 对 $\lambda = 1, 10, 100, 1000$, 分别用显式 Euler 格式和隐式 Euler 格式求解:
- (3) 比较用 Adams 方法和 Gear 方法计算 $\lambda = 1000$ 时的数值行为.

解:

(1): 可知 $u' + \lambda u = \lambda \cos(t)$, 则 $(e^{\lambda t} u(t))' = \lambda e^{\lambda t} \cos(t)$

求解可得

$$u(t) = C e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (\sin(t) + \lambda \cos(t))$$

其中 C 为常数.

若 $u(0) = 0$:

$$u(t) = -\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (\sin(t) + \lambda \cos(t))$$

若 $u(0) = 1$:

$$u(t) = \frac{1}{1 + \lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} (\sin(t) + \lambda \cos(t))$$

(2): 对于不同的 λ , 想要观察显式 Euler 与隐式 Euler 格式的末项收敛阶, 以此观察两格式的收敛性.

当初值 $u(0) = 0$ 时: 令 $u(0) = 0, t_0 = 0, T = 1, \Delta t = 2^{-i}, i = 2, 3, \dots$, 这样一来, p 阶方法末项的相对误差对数值与 i 应当是斜率为 $-p \ln 2$ 的线性关系.

当 $\lambda = 1$ 时, 从图 1 可以看出显式 Euler 与隐式 Euler 格式在数值上均为一阶方法. 特别的, 令此时的 $\Delta t = 0.02$, 此时两种 Euler 格式的精度是相当的, 具体图像见图 2.

当 $\lambda = 10$ 时, 收敛阶与 λ_1 的情形类似, 当 $i \geq 3$ 时, 两种 Euler 格式的末项收敛阶均为一阶的. 特别的, 令此时的 $\Delta t = 0.02$, 此时两种 Euler 格式的精

度也是相当的, 具体图像见图 4.

当 $\lambda = 100$ 时, 隐式 Euler 格式的末项相对误差仍保持着 1 阶收敛, 但显式 Euler 格式的收敛情形较差: 此时需要步长 $\Delta t \leq 2^{-6}$ 才能使得末项相对误差一阶收敛, 见图 5. 图 6 展示了当 $\Delta t = 0.02, \lambda = 100$ 的情形: 显式 Euler 格式的近似解一直在震荡, 这是因为 $\lambda = 100$ 时, 显式 Euler 格式为 $u_{n+1} - u_n = 2(-u_n + \cos(t_n))$, 进一步整理为 $u_{n+1} = -u_n + 2\cos(t_n)$, 这样的递推式容易引起震荡. 从这例子也可以看出, 由于显式 Euler 格式是完全取决于上一步的值, 从而当 f 中具有负号、周期函数等时, 迭代格式容易出现较大的误差.

当 $\lambda = 1000$ 时, 隐式 Euler 格式仍具有一阶收敛性, 但显式 Euler 在步长 $\Delta t = 2^{-2}$ 就已经产生了数值解上的爆破, 具体见图 7.

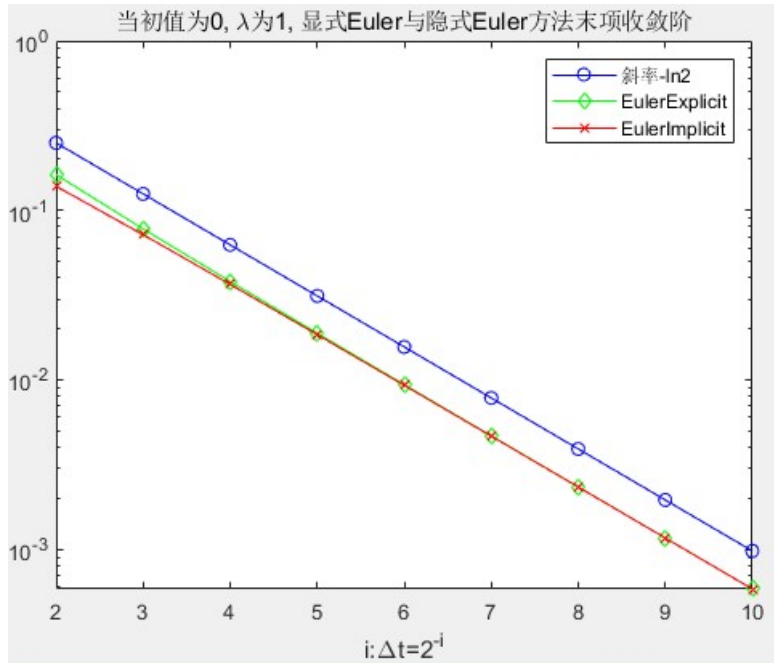


图 1: $u(0) = 0, \lambda = 1$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

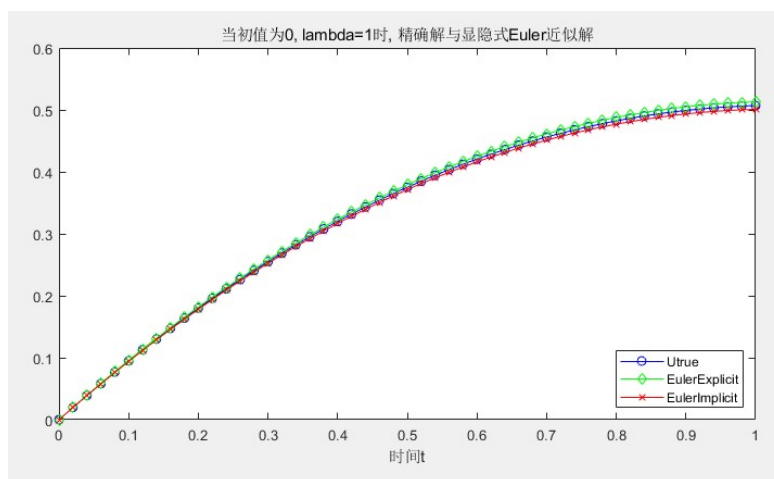


图 2: $u(0) = 0, \lambda = 1, \Delta t = 0.02$ 时, 精确解以及显隐式 Euler 的离散图像

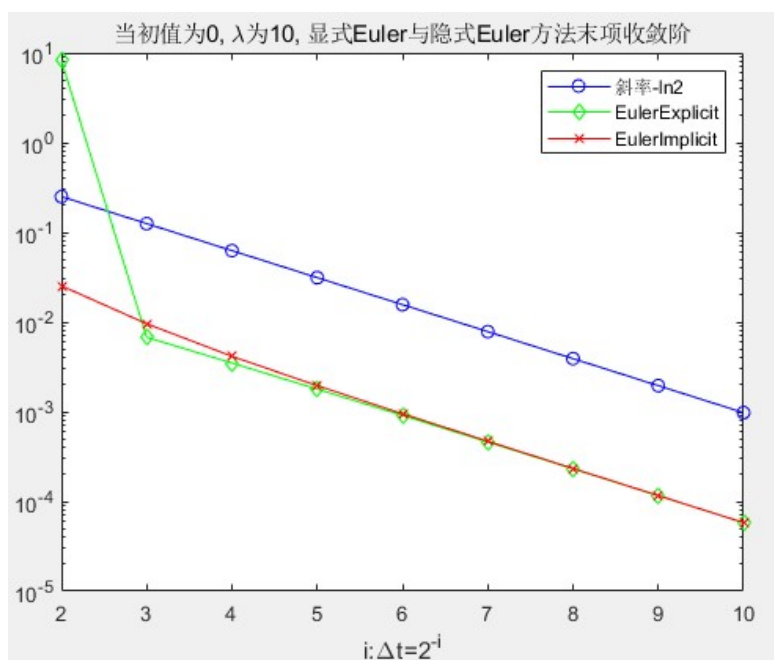


图 3: $u(0) = 0, \lambda = 10$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

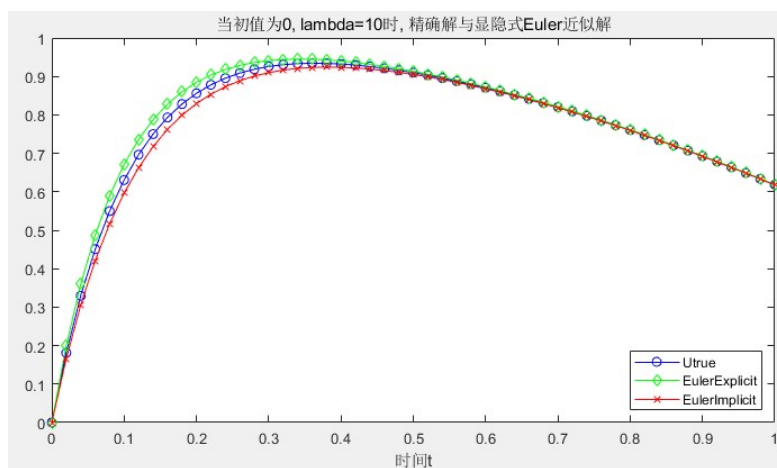


图 4: $u(0) = 0, \lambda = 10, \Delta t = 0.02$ 时, 精确解以及显隐式 Euler 的离散图像

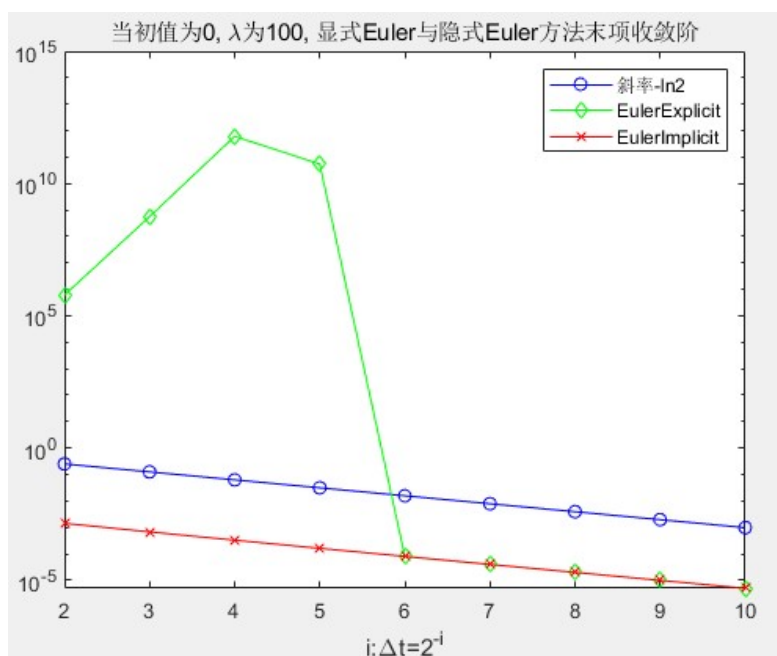


图 5: $u(0) = 0, \lambda = 100$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

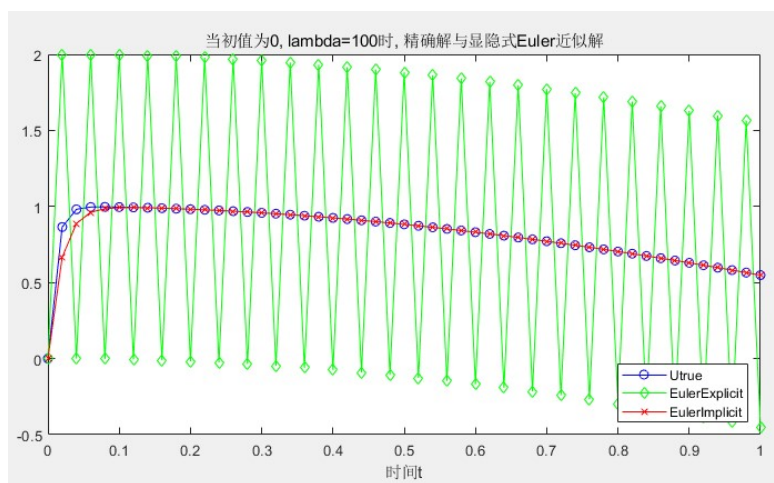


图 6: $u(0) = 0, \lambda = 100, \Delta t = 0.02$ 时, 精确解以及显隐式 Euler 的离散图像

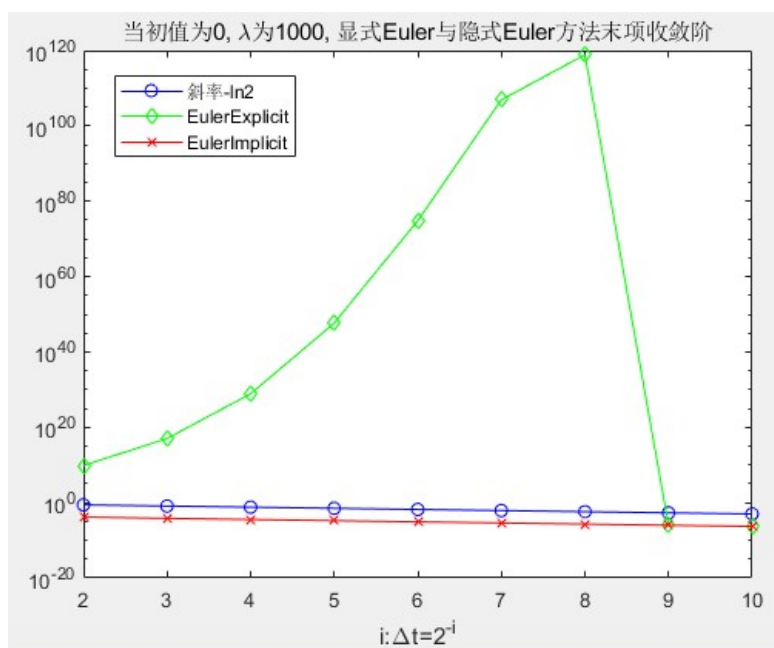


图 7: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

当初值 $u(0) = 1$ 时: 仍设 $\Delta t = 2^{-i}$, 并考虑末项相对误差与 i 的关系.

当 $\lambda = 1, 10$ 时, 两种 Euler 格式的末项相对误差均为一阶收敛的, 具体见图 8 与图 9.

当 $\lambda = 100$ 时, 隐式 Euler 仍具有良好的收敛性, 但显式 Euler 的末项相对误差即便在步长 $\Delta t \leq 2^{-6}$ 后具有一阶收敛性, 但在 Δt 较大时 (例如 2^{-5}), 通过显式 Euler 格式求解, 数值解将会爆破.

当 $\lambda = 1000$ 时, 隐式 Euler 格式具有良好的一阶收敛性, 但显格式与 $\lambda = 100$ 时的情形一致: Δt 足够小时具有收敛性, 但当 Δt 稍大时将会产生数值上爆破, 具体见图 12. 特别地, 令 $\Delta t = 0.02$, 会发现显格式在 $t_n \geq 0.8$ 时的绝对误差逐渐被放大.

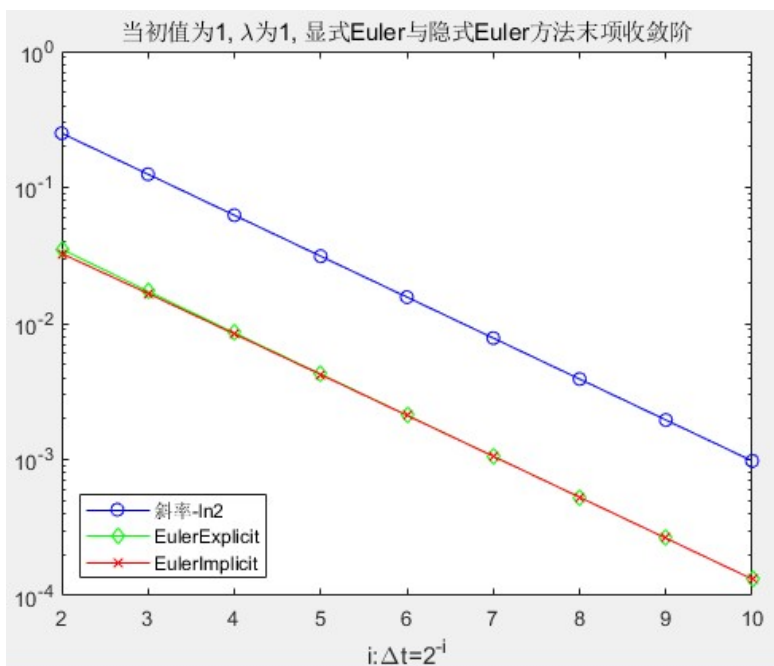


图 8: $u(0) = 1, \lambda = 1$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

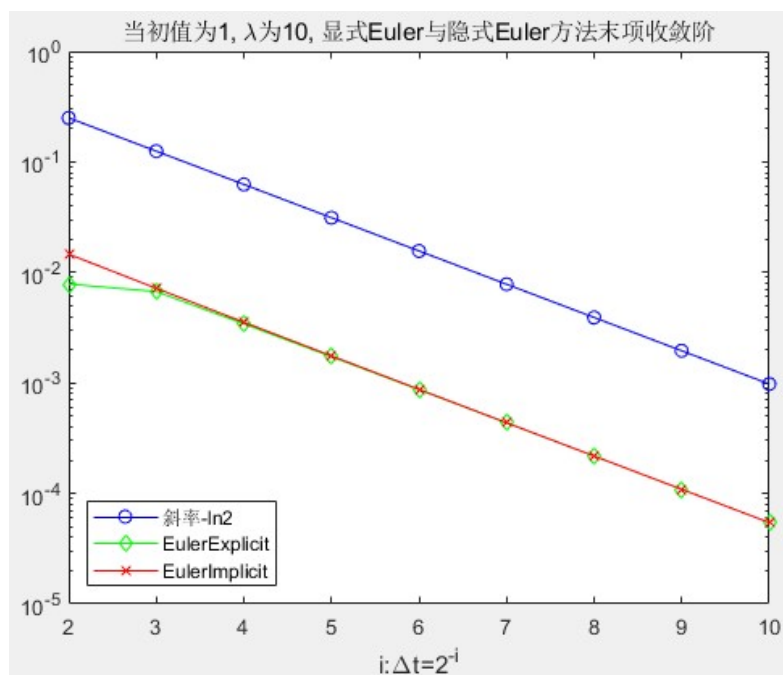


图 9: $u(0) = 1, \lambda = 10$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

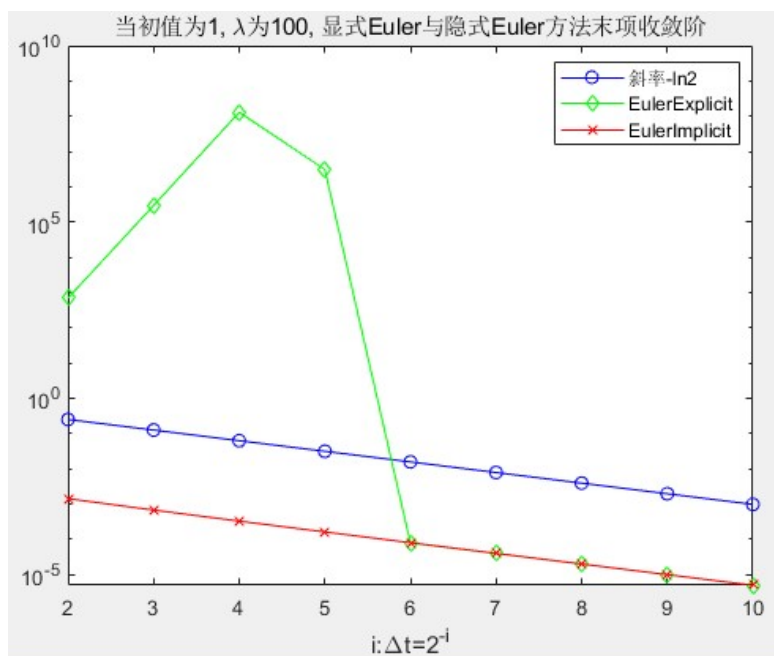


图 10: $u(0) = 1, \lambda = 100$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

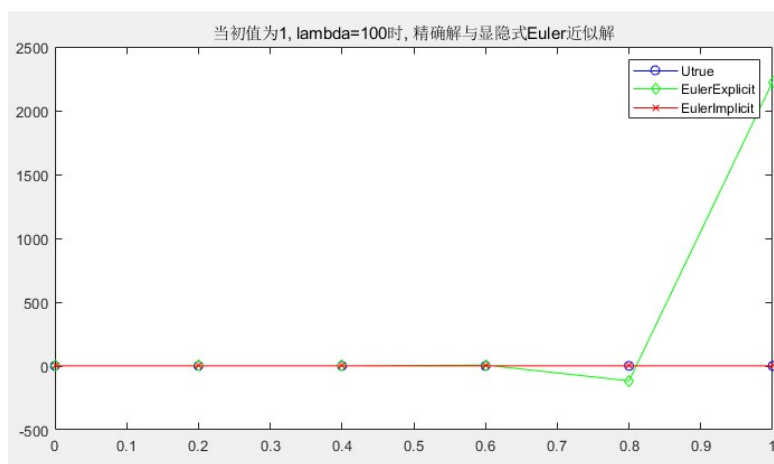


图 11: $u(0) = 1, \lambda = 100, \Delta t = 0.02$ 时, 精确解及显隐式 Euler 的离散图像

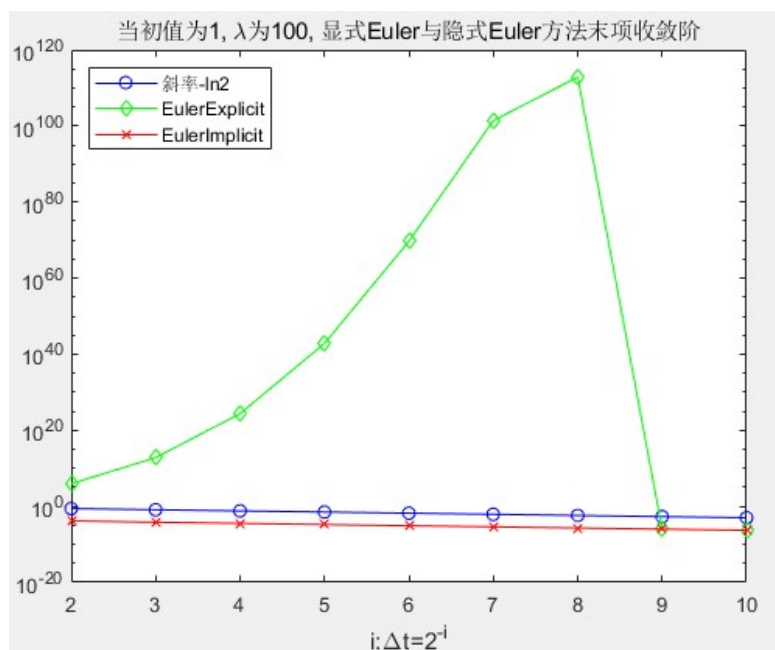


图 12: $u(0) = 1, \lambda = 1000$ 时, 显式 Euler 与隐式 Euler 格式的收敛阶

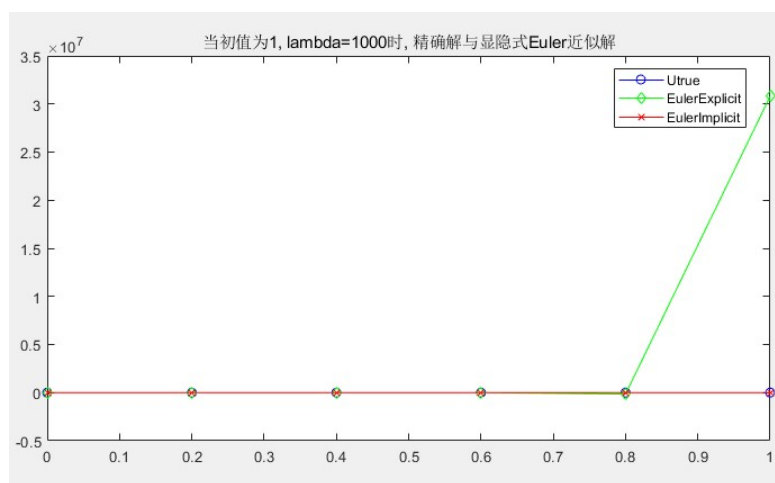


图 13: $u(0) = 1, \lambda = 1000, \Delta t = 0.02$ 时, 精确解及显隐式 Euler 的离散图像

(3): 先考虑四阶方法

当初值 $u(0) = 0$ 时: 此时 $\lambda = 1000$, 令 $\Delta t = 2^{-i}$, 以此考虑不同格式的收敛阶.

此时, Gear4 在数值上具有收敛性, 但不具有固定的四阶收敛性, 见图 14. 特别地, 令 $\Delta t = 2^{-6}$ 时, 精确解与 Gear 四阶格式的离散近似解图像见图 15. 然而, 如果格式为 A-B 或 A-M 四阶格式时, 从它们的收敛阶可以发现它们的末项相对误差在此时具有非常大的误差, 见图 16. 造成这样的原因是 Adams 格式需要取决于前面几步的近似值 f_n , 由于通过格式计算出来的 u_n 本就与精确值有一定的误差, 又由于 f 的表达式中含有乘积 λ , 故当步长 Δt 稍大时: $\lambda\Delta t \geq 1$, 误差会被放大.

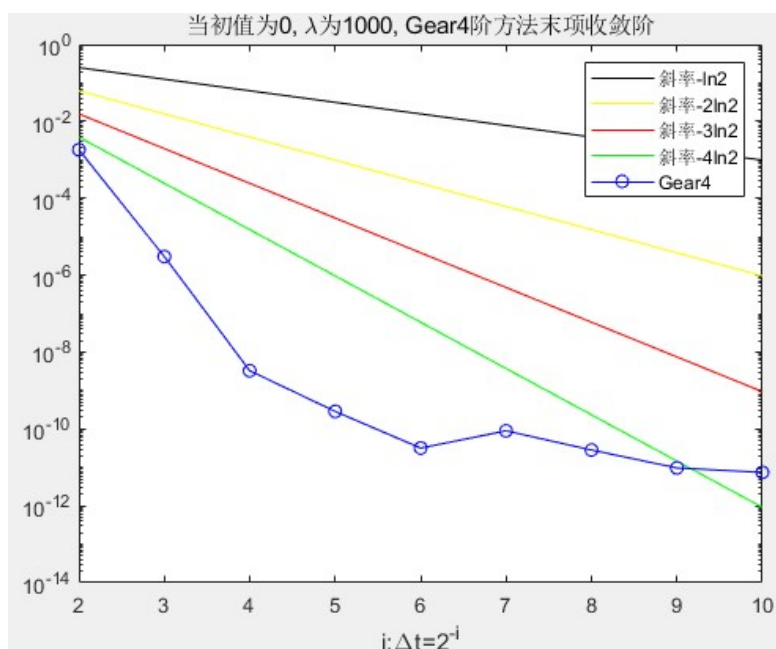


图 14: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, Gear 四阶格式的收敛阶

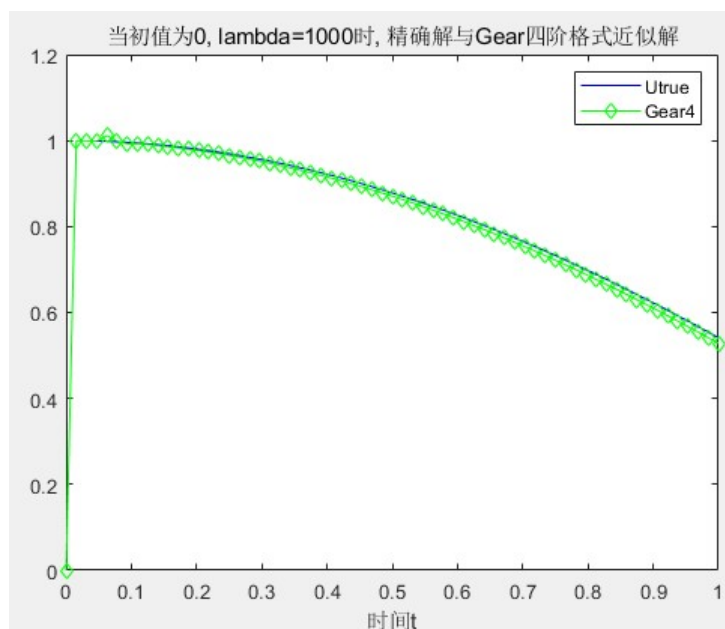


图 15: $u(0) = 0, \lambda = 1000, \Delta t = 2^{-6}$ 时, 精确解及 Gear4 的离散图像

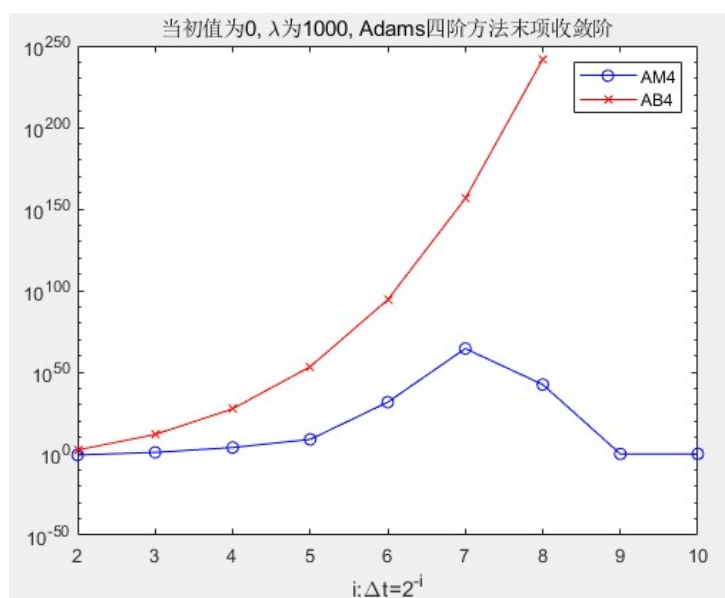


图 16: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, Adams 四阶格式的收敛阶

当初值 $u(0) = 1$ 时: 与 $u(0) = 0$ 的情形类似, Gear 四阶格式具有收敛性, 但是不是固定四阶收敛性, 见图 17.

若格式为 A-B 或 A-M 四阶格式时, 它们在数值上是不收敛的, 情况与 $u(0) = 0$ 的情形非常相似, 见图 18.

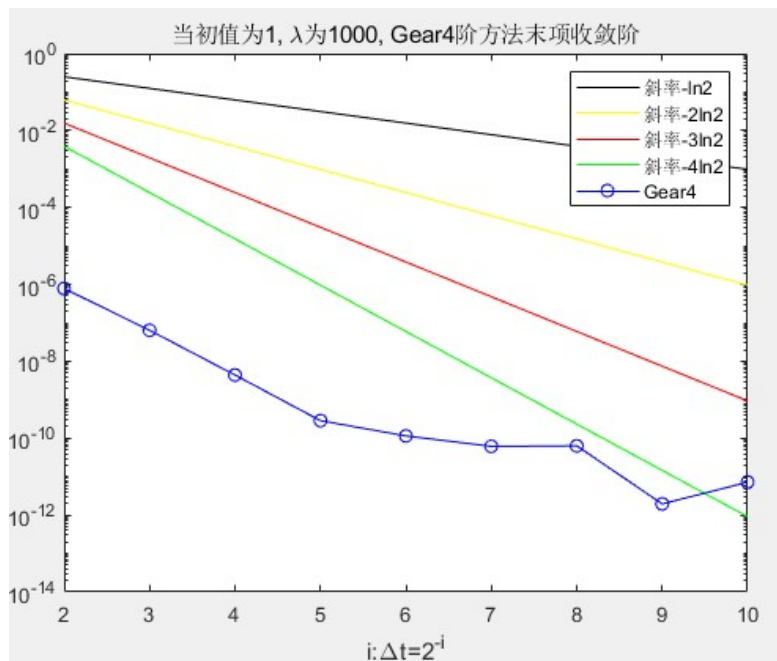


图 17: $u(0) = 1, \lambda = 1000$ 时, Gear 四阶格式的收敛阶

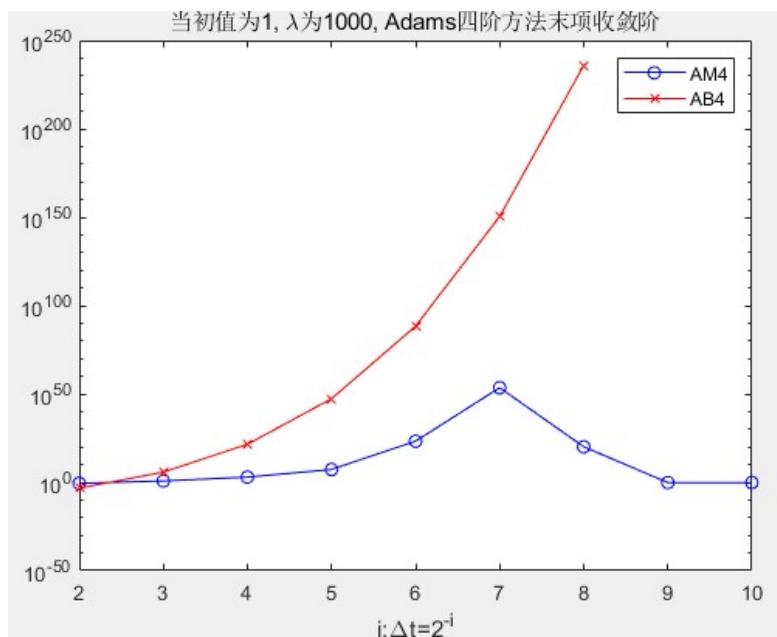


图 18: $u(0) = 1, \lambda = 1000$ 时, Adams 四阶格式的收敛阶

为了考虑不同阶的 A-M 与 A-B 格式是否会对收敛精度产生影响, 考虑对它们降阶.

(3)' : 图 19 中分别展示了当初值 $u(0) = 0$ 时的三阶 A-M 与 A-B 方法.

可以发现 A-B 与 A-M 三阶格式均在数值产生了爆破. 然而 Gear 三阶格式具有固定的三阶收敛性, 其精度要远优于 A-B 与 A-M 三阶方法, 具体见图 21.

我们希望进一步考虑更低一阶的三种格式是否具有稳定性.

(3)'' : 图 22 展示了 Gear 二阶方法的收敛阶, 可以发现 Gear 二阶格式保持着二阶收敛性; A-M 二阶方法退化为改进 Euler 格式, 此时不在数值上爆破, 其相对误差最终控制在 0.9 以内, 从而并不具有太好的收敛性, 见图 23; A-B 二阶方法仍然在数值上爆破.

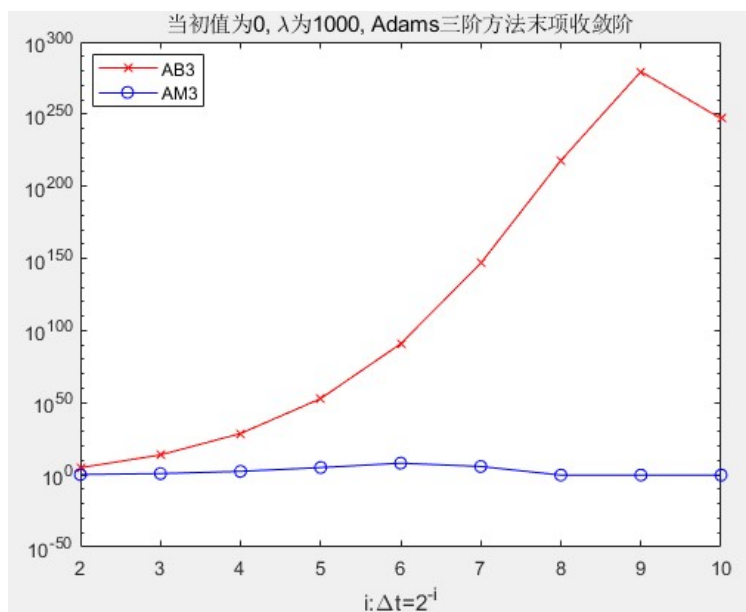


图 19: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, Adams 三阶格式的收敛阶

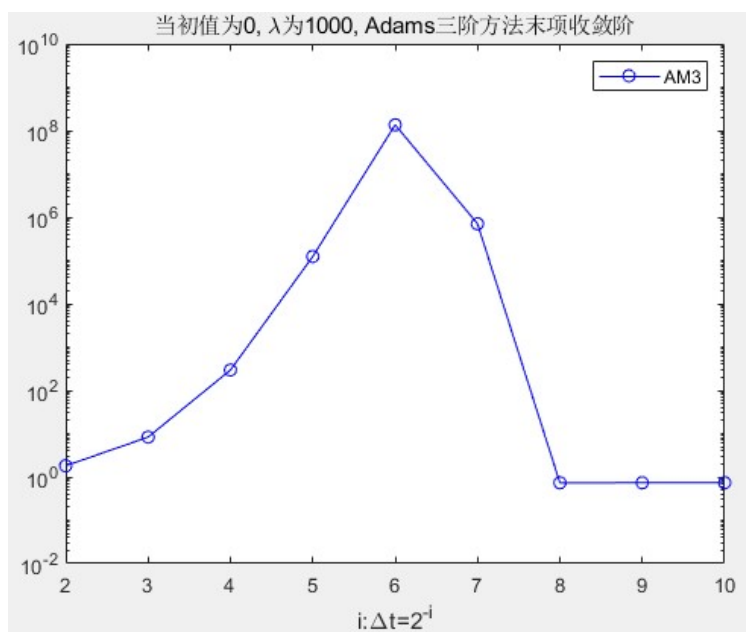


图 20: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, A-M 三阶格式的收敛阶

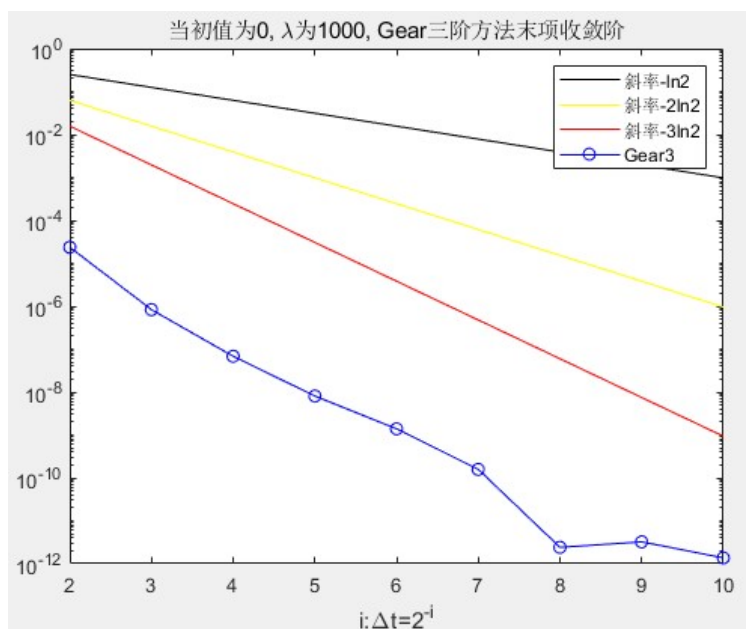


图 21: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, Gear 三阶格式的收敛阶

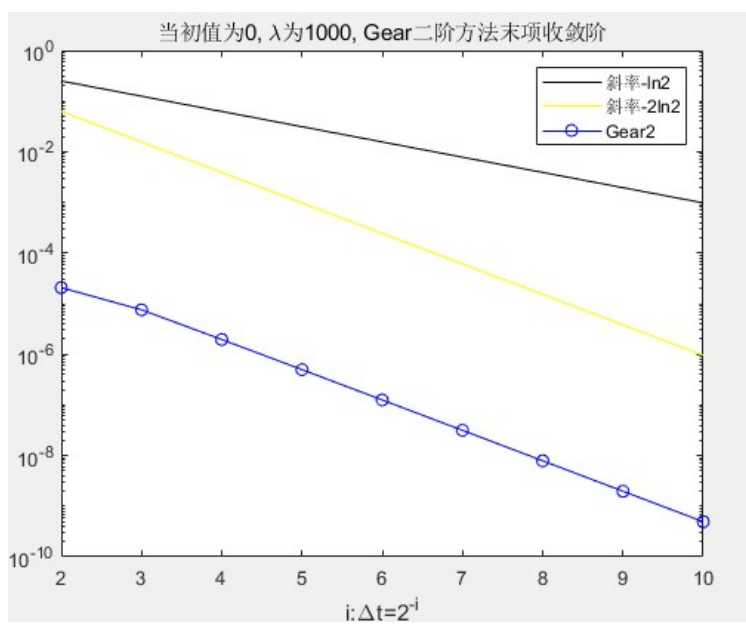


图 22: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, Gear 二阶格式的收敛阶

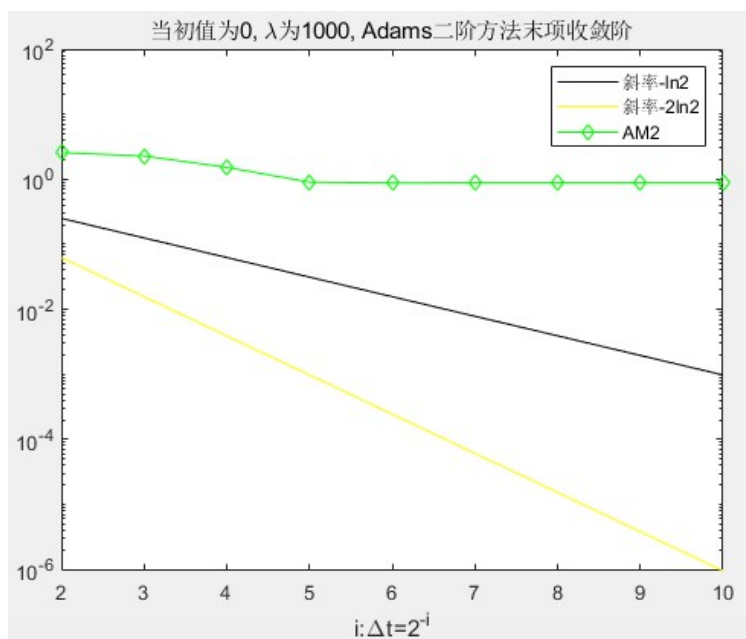


图 23: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, A-M 二阶格式的收敛阶

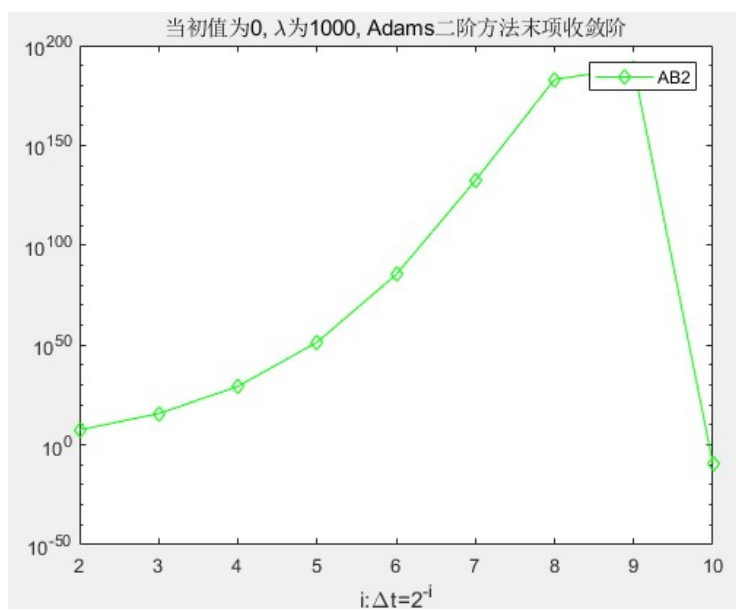


图 24: $u(0) = 0, \lambda = 1000$ 时, A-B 二阶格式的收敛阶

综合上面的讨论,可以知道 Gear 二至三阶格式具有相对应的收敛阶,而 Gear 四阶格式虽然不具有固定的四阶收敛阶,但其仍然具有收敛性,即 Gear 格式二至四阶格式在处理此问题具有较优越的收敛性;对于 A-B 与 A-M 二至四阶格式而言,它们的收敛性相较于 Gear 格式都非常差.

A-M 与 A-B 格式在解决此类题目并不具有较好的收敛性是因为: 1) 它们的绝对稳定区域随着方法阶数升高而减少; 2) 无论是 A-M 格式还是 A-B 格式,它们的格式中包含了若干 f_n 项,而由于 λ 的值较大,从而这些格式的误差会被进一步放大.

Gear 格式具有较好的收敛性是因为: 1) 它的绝对稳定区域随着阶数增高而增加; 2) Gear 格式中只有一项 f_{n+1} ,且由于 Gear 格式要求解一次非线性方程,从而在一定程度上保证了其收敛性.