第十三周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

实现 Dirichlet-Neumann 方法求解二维的 Poisson 方程, 并观察收敛速度与差分网格步长 h 的关系.

解: 考虑给定一个二维的 Poisson 方程,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega = (0,1)\times(0,1) \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

为了进一步考虑数值与真解在 D-N 方法下的误差, 可以给定特别的非齐次项 $f = -2[x_1(x_1-1) + x_2(x_2-1)]$, 可知其真解为 $u(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1-1)(x_2-1)$. 在进一步给定划分区域: $\Gamma = \{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \in (0,1)\}$, $\Omega_1 = \{x_1 \in (0,\frac{1}{2}), x_2 \in (0,1)\}$, $\Omega_2 = \{x_1 \in (\frac{1}{2},1), x_2 \in (0,1)\}$.

下面考虑 Dirichlet-Neumann 方法: 首先给定 u_2^0 在交界面 Γ 的初始猜想值 $u_2^0 = g^0$.

为了叙述方便, 统一定义括号外右下标 $(x_1)_i$ 代表着 x_1 轴的第 i 个分量, 即 $(x_1)_i = i\cdot h_{x_1}$; $(u_1^k)_{i,j}$ 对应于 $((x_1)_i,(x_2)_j)$.

Step 1: 在 Ω_1 上求解 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^k = f, &\qquad in \quad \Omega_1 \\ u_1^k = 0, &\qquad on \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u_1^k = g^{k-1}, &\qquad on \quad \Gamma \end{aligned}$$

因此在 Ω_1 上求解问题时, 只需要对 $(u_1^k)_{N-1,j}$ 所对应的列向量分量 $f_{N-1,j}$ 进行修改 (其中下标 $(N-1,j)$ 对应于 $((x_1)_{N-1},(x_2)_j)$), 即 $f_{N-1,j} \to f_{N-1,j} + \frac{1}{h_{x_1}^2} \cdot (g^{k-1})_{N,j}$.

另一方面, 为了求解在 $\Omega_1 = \{x_1 \in (0,\frac{1}{2}), x_2 \in (0,1)\}$ 上的五点差分线性方程组, 我们需要五点差分矩阵 A 是一个方阵, 从而我们可以得出 $h_{x_1} = \frac{h_{x_2}}{2}$.

Step 2: 在 Ω_2 上求解 Neumann 边值问题:

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^k = f, &\qquad in \quad \Omega_2 \\ u_2^k = 0, &\qquad on \quad \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ \frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial n_1}, &\qquad on \quad \Gamma \end{aligned}$$

其中注意到在交界面 Γ 上有 $\frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^k}{\partial n_1}$, 即关于 Γ 的法向方向导数. 又 $\Gamma = \{x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \in (0,1)\}$, 可知方向导数 $\frac{\partial u_2^k}{\partial n_2} = \frac{\partial u_2^k}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1^k}{\partial n_1} = \frac{\partial u_1^k}{\partial x_1}$, 再由数值上有

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1^k}{\partial x_1}(\frac{1}{2},(x_2)_j) &\approx \frac{(u_1^k)_{N-1,j} - (u_1^k)_{N,j}}{h_{x_1}}, \\ -\frac{\partial u_2^k}{\partial x_1}(\frac{1}{2},(x_2)_j) &\approx \frac{(u_2^k)_{N+1,j} - (u_2^k)_{N,j}}{h_{x_1}}, \\ (u_2^k)_{N,j} &= \frac{(u_2^k)_{N+1,j} + (u_2^k)_{N-1,j}}{2} \end{aligned}$$

上面两式中 $(u_1^k)_{N,j}, (u_2^k)_{N,j}$ 代表了在第 k 步迭代中, 分别在 Ω_1, Ω_2 上考虑在 Γ 上的值; $(u_1^k)_{N-1,j}$ 说明在数值上近似 Ω_1 的外法向量时用到了前一步的值; $(u_2^k)_{N+1,j}$ 说明在数值上近似 Ω_2 的外法向量时用到了后一步的值. 最终, 在 Ω_2 上求解五点差分格式的线性方程组, 我们需要同时修改矩阵 A 与列向量 f: $(A)_{(i-1)(N-1)+1,(i-1)(N-1)+1} \to (A)_{(i-1)(N-1)+1,(i-1)(N-1)+1} - \frac{1}{2h_x^2}$, 以及 $f_{(i-1)(N-1)+1,1} \to f_{(i-1)(N-1)+1,1} + \frac{1}{2h_x^2} \cdot (u_1^k)_{N-1,i}$.

Step 3: 更新 g^k:

$$g^k = \theta u_2^k|_\Gamma + (1-\theta) g^{k-1}$$

由于 DN 方法分别在 Ω_1 与 Ω_2 上求解五点差分格式, 从而最终得到的数值解内点 $(u)_{i,j}$ 对应于 $(2N-1) \times (N-1)$ 的网格.

下面考虑数值解与真解的误差与网格步长 $h_{x_1}=\frac{h_{x_2}}{2}$ 的关系

<u>当 $\theta=0.5$, 迭代步数 $k=5$ 时的收敛速度</u>: 考虑 $h_{x_2}=2^{-n}, h_{x_1}=\frac{h_{x_2}}{2}$, 下图为 $n=2,\cdots,6$ 时的每点误差.

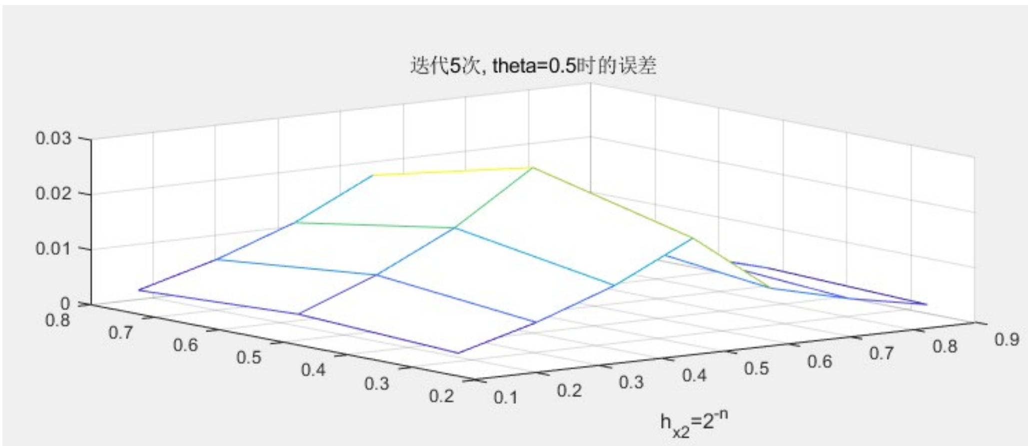

图 1: 当 $n=2$ 时的误差

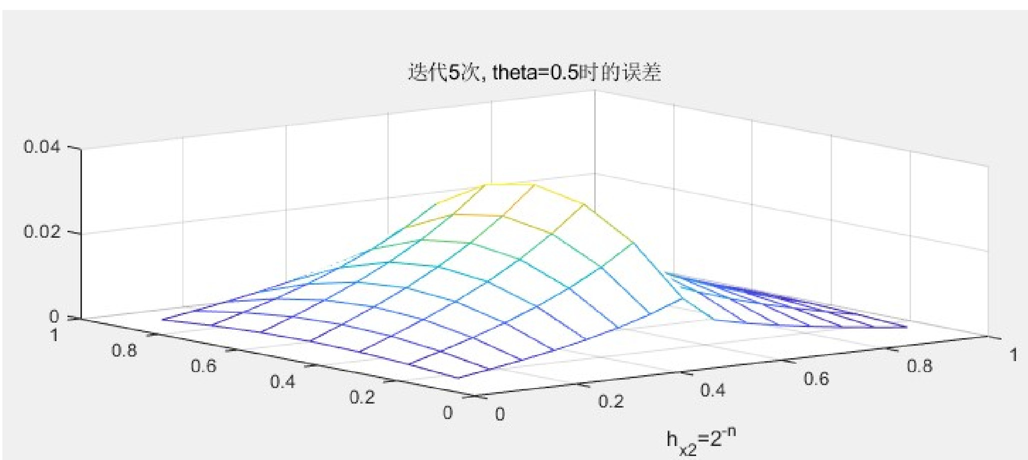

图 2: 当 $n=3$ 时的误差

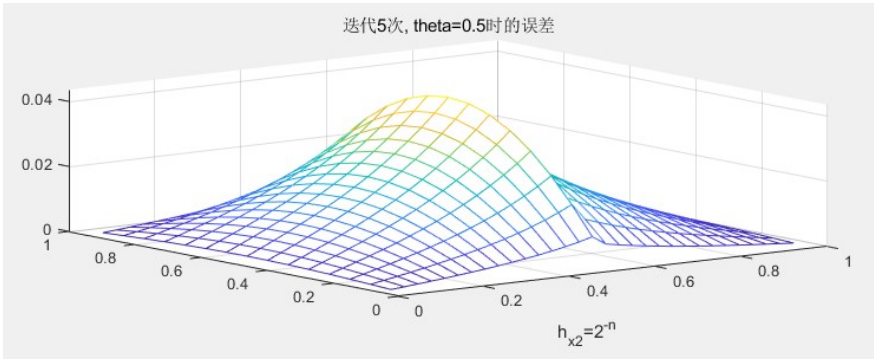

图 3: 当 $n=4$ 时的误差

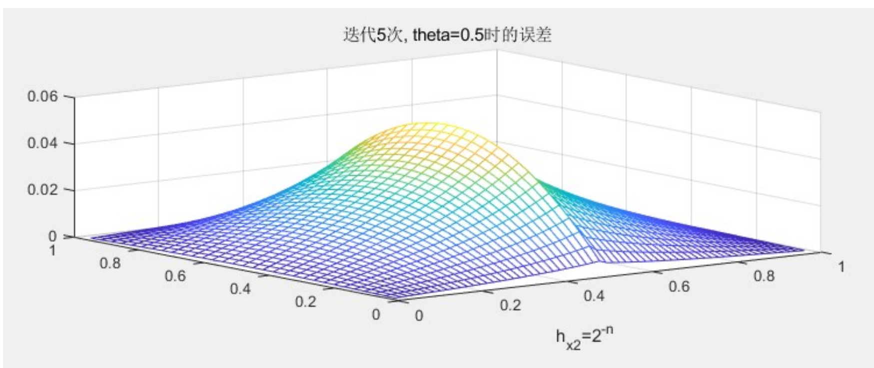

图 4: 当 $n=5$ 时的误差

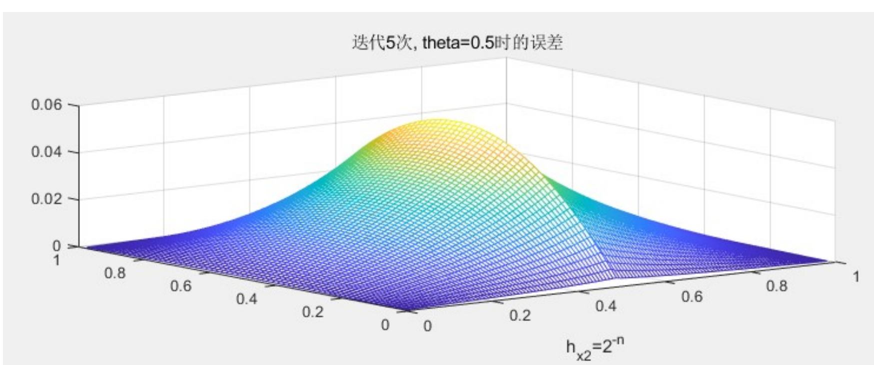

图 5: 当 $n=6$ 时的误差

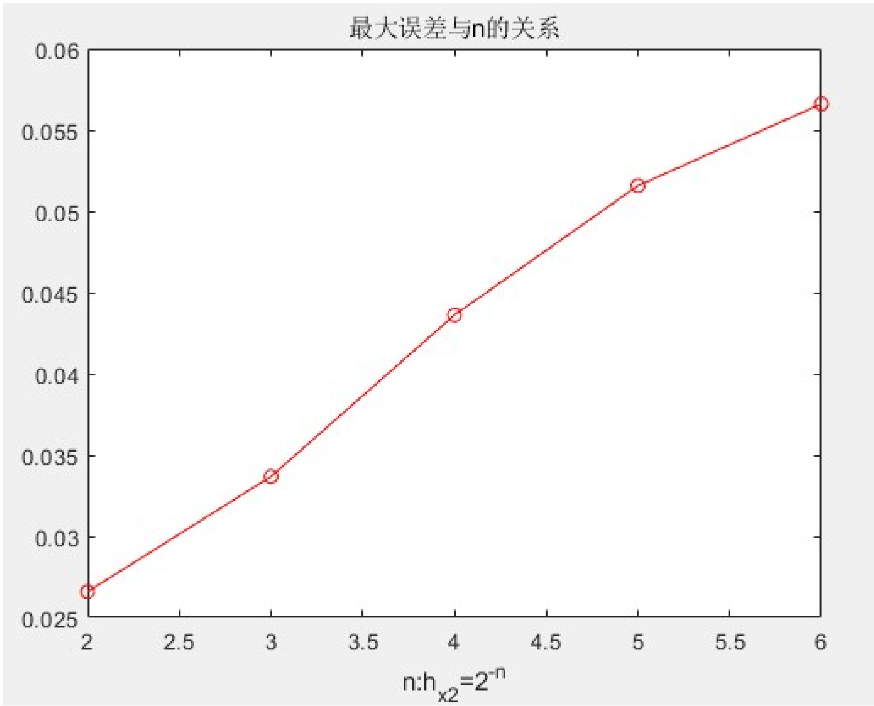

图 6: 最大误差与 n 的关系, 迭代 5 次

可以发现当 n 增大时, 更细的网格下的最大误差反而增大了, 误差增大的可能原因如下: 1) 在 Ω_2 上考虑 Neumann 边界条件时, 考虑的是分别用向后与向前差商近似两个外法向量, 从而引入了误差; 2) 迭代次数不够多.
而当迭代次数够大时, 可以发现随着 n 增大时, 最大误差是下降的, 且是一阶收敛的, 见图 7.
除上所述, 可以发现 $\forall n = 2, \cdots, 6$, 最大误差总是在 Γ 上取到, 这会令我们联想到取不同的权重 θ 是否会影响到误差?

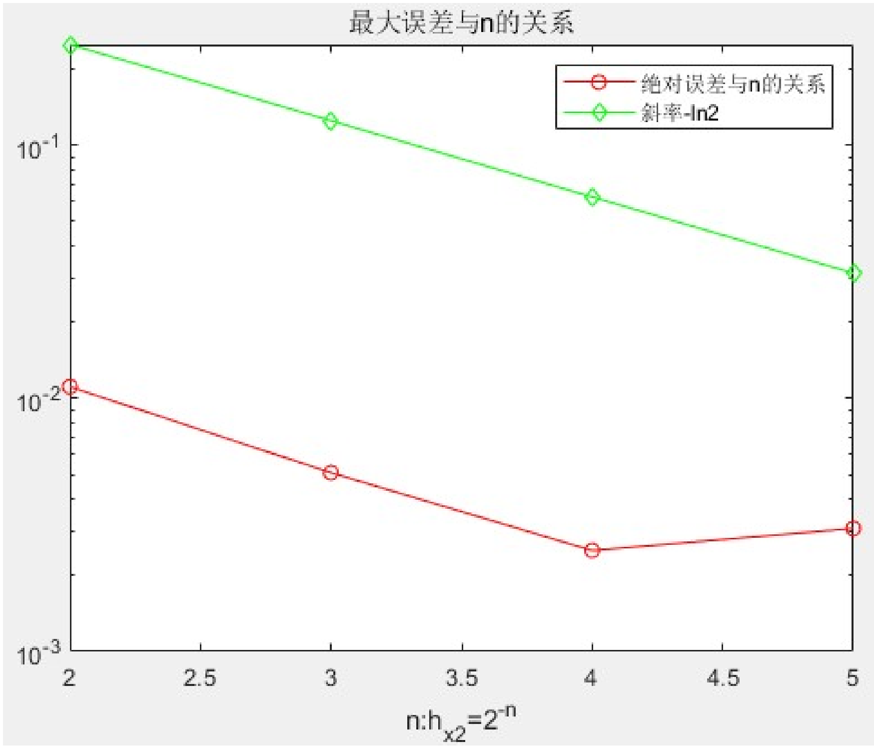

图 7: 最大误差与 n 的关系, 迭代 70 次

当 $\theta = 0.7, k = 5$ 时: 可以发现情形稍有改善, 但仍然在 Γ 上取到最大误差

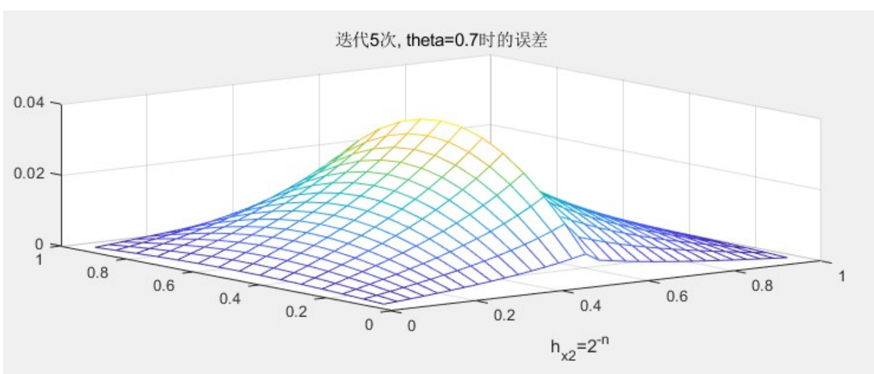

图 8: 当 $n = 6, k = 5$ 时的误差

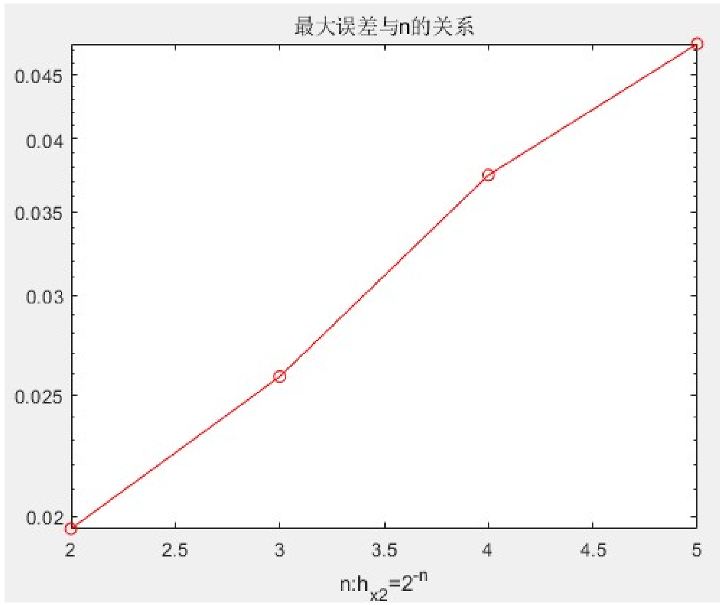

图 9: 最大误差与 n 的关系, 迭代 5 次,$\theta = 0.7$

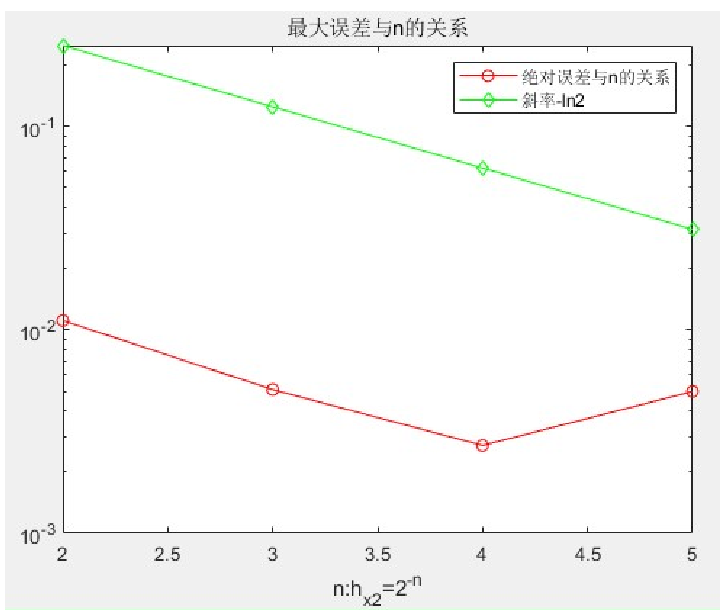

图 10: 最大误差与 n 的关系, 迭代 40 次,$\theta = 0.7$

当迭代次数 k 较小时, 随着 n 的增大, 网格精度反而升高变差了, 如图 9 所示. 而当迭代次数增加时, 当 n 增大时, 细网格的收敛速度会变得越来越显著, 呈现最大误差的一阶收敛性, 如图 10 所示.

在此题中, 我选择分别在 Ω_1 与 Ω_2 上求解 Dirichlet 与 Neumann 初边值问题, 从而使得横纵坐标网格的步长 h 并不一样. 从结果来看, 这种 DN 方法所求解得出的数值解在迭代次数较少时, 与真解的误差并不会随着 n 的增大而减小; 但是当迭代次数较大时, 随着 n 的增大, 越细的网格的收敛速度越发显著. 而这样的网格也具有以下缺点; 1) 并不能在迭代次数较少时获得较好的收敛速度 2) 在考虑 Ω_2 上的 Neumann 问题时, 考虑的两个外法向量均是由向前或者向后差商所逼近, 因此容易引起扰动, 从而导致在 Γ 处会取到较大的误差.