第十周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

在区域 $\Omega = [0,1]^2$ 用五点差分格式求解如下问题

$$-\Delta u + u = f,$$

且 $u|_{\partial\Omega} = 1$. 设 A 为对应 $-\Delta$ 算子的离散矩阵, 说明:
(1) 观察矩阵 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$ 性质:
(2) 格式是否二阶收敛?
(3) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量.

证明:
(1): 为了方便讨论, 我们令 $h_x = h_y = \frac{1}{N}$, 而注意到 $u|_{\partial\Omega} = 1$, 因此需要对 f 离散化向量 $\overrightarrow{f_{i,j}}$ 做一定的修正, 其中

$\overrightarrow{f_{i,j}} = (u_{1,1}, u_{2,1}, \cdots, u_{N-1,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, \cdots, u_{N-1,2}, \cdots, u_{1,N-1}, \cdots, u_{N-1,N-1})^T$

首先由五点差分格式: $-\Delta_h u_{i,j} = \frac{1}{h^2}(-u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j}) = f_{i,j}$, 可以知道当 $i, j = 2, 3, \cdots, N-2$ 时, 不需要对 $f_{i,j}$ 作出修改. 而当 $i = 1, N-1$ 或 $j = 1, N-1$ 时, 由于格式涉及到了边界值, 从而需要对 $f_{i,j}$ 做出修正:

$$\widetilde{f_{i,j}} = \begin{cases} f_{i,j} + \frac{2}{h^2}, & i = j = 1, N-1 \\ f_{i,j} + \frac{1}{h^2}, & i = 1, N-1 \quad j = 2 \\ f_{i,j} + \frac{1}{h^2}, & j = 1, N-1 \quad i = 2 \end{cases}$$

因此 u 的边值并未影响五点差分格式矩阵 $\boldsymbol{A}$.
此时

$$A=\begin{pmatrix} \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & & & -\frac{1}{h^2} & & & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & & & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \ddots & & \\ & & -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & & & -\frac{1}{h^2} & \\ & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2} & & & & & & \ddots \\ -\frac{1}{h^2} & & & & & & \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & & \\ & -\frac{1}{h^2} & & & & & -\frac{1}{h^2} & \frac{4}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ & & \ddots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}_{(N-1)^2\times(N-1)^2}$$

而易知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 又是严格对角占优矩阵, 从而可知矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 是非异的.

(2) 首先考虑其局部截断误差 $R_{i,j} = -\Delta_h u(x_i,y_j) + u(x_i,y_j) - f(x_i,y_j)$, 可知由二维 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} R_{i,j} =& -\frac{1}{h^2}\cdot[h^2(\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2}+(\frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2})+\frac{h^4}{12}(\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial y^4})+O(h^6)] \\ &+u(x_i,y_j)-(-\Delta u(x_i,y_j)+u(x_i,y_j)) \\ =& -\frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(x_i,y_j)}{\partial y^4})+O(h^4) \end{aligned}$$

再考虑 $e_{i,j}=u(x_i,y_j)-u_{i,j}$, 则由 $-\Delta_h u(x_i,y_j)+u(x_i,y_j)=R_{i,j}+f(x_i,y_j)$, 并且总是有 $f(x_i,y_j)=f_{i,j}$. 同时, 在边界上有 $e_{i,j}|_{\partial\Omega_h}=0$.
最后考虑如下离散化边值问题

$$\begin{cases} -\Delta_h e_{i,j}+e_{i,j}=R_{i,j} \\ e_{i,j}|_{\partial\Omega_h}=0 \end{cases}$$

利用比较原理: 令 $v_{i,j}=e_{i,j}-|R_{i,j}|_{\Omega_h}$, 其中 $|R_{i,j}|_{\Omega_h}$ 是 $R_{i,j}$ 在 Ω 离散化区

域 Ω_h 上的绝对值最大值, 其满足

$$\begin{cases} -\Delta_h v_{i,j} + v_{i,j} \leq 0 \\ v_{i,j}|_{\partial\Omega_h} \leq 0 \end{cases}$$

由极值原理可得 $e_{i,j} \leq |R_{i,j}|_{\Omega_h}$.
同理, 令 $w_{i,j} = -e_{i,j} - |R_{i,j}|_{\Omega_h}$, 可得 $-|R_{i,j}|_{\Omega_h} \leq e_{i,j}$, 从而综上所述可得 $|e_{i,j}| \leq |R_{i,j}|_{\Omega_h}$, 所以全局的误差 $|e_{i,j}| = O(h^2), \forall i,j = 1,\cdots,N-1$.
最后记 $\overrightarrow{R} = (R_{i,j})^T$ 为一个列向量, $||\overrightarrow{R}||_{l^2} = (\sum_{i,j=1}^{N-1}(R_{i,j})^2)^{\frac{1}{2}} \leq (N^2 O(h^4))^{\frac{1}{2}} = O(h)$, 故 $h \cdot ||\overrightarrow{R}||_{l^2} = O(h^2)$.

(3): 为了考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量, 将其写成 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_y} \otimes \boldsymbol{I_x} + \boldsymbol{I_y} \otimes \boldsymbol{A_x}$, 并且由于各自 $\boldsymbol{A_x}, \boldsymbol{A_y}$ 为对称矩阵, 从而可以对角化, 记 $\boldsymbol{A_x} = \boldsymbol{Q_x \Lambda_x Q_x^T}$,$\boldsymbol{A_y} = \boldsymbol{Q_y \Lambda_y Q_y^T}$, 最终可得

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Q_y} \otimes \boldsymbol{Q_x})(\boldsymbol{\Lambda_y} \otimes \boldsymbol{I_x} + \boldsymbol{I_y} \otimes \boldsymbol{\Lambda_x})(\boldsymbol{Q_y} \otimes \boldsymbol{Q_x})^T$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就形如 $\lambda_{j,k} = \frac{4}{h^2}(\sin^2(\frac{j\pi h}{2}) + \sin^2(\frac{k\pi h}{2})), \forall i,j = 1,\cdots,N-1$, 即两个三点差分格式矩阵所对应的特征值相加. 由上式也能看出 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量就是 $\boldsymbol{Q_y} \otimes \boldsymbol{Q_x}$ 的各列, 即各分量 $\overrightarrow{u_{j,k}}^{(m,l)} = \sqrt{\frac{2}{N}}\sin(j\pi x_m) \cdot \sqrt{\frac{2}{N}}\sin(k\pi y_l) = \frac{2}{N}sin(\frac{j\pi m}{N})sin(\frac{k\pi l}{N})$, 此分量代表的是对应于特征值 $\lambda_{j,k}$ 的特征向量第 $m(N-1)+l$ 分量.