第三周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

对于 Hermite 型插值多项式，要求节点函数值和一阶导数值，则有 $N = 2n-1$，证明其插值误差满足：

$$f(x) - H_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\zeta)}{(N+1)!}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$$

证明： 已知 $H_N^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$，其中 $0 \le j \le 1$，$1 \le i \le n$
记 $r(x) = f(x) - H_N(x)$，$w_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i)^2$，若 $x^{'} \neq x_j$，则记 $g(t) = r(t) - \frac{r(x^{'})}{w_n(x^{'})}w_n(t)$。
那么

$$g(x_i) = 0; g(x^{'}) = 0$$

$$g^{'}(x_i) = 0$$

从而由罗尔定理：$\exists\{y_i\}_{i=1}^{n} \quad s.t. \quad g'(y_i) = 0$，此时有 $2n$ 个互异节点上有 $g^{'}$ 为 0，则再由 $2n-1$ 次罗尔定理可得

$$g^{2n}(\zeta) = 0$$

由 $H_N(x)$ 是 $2n-1$ 次多项式，$w_n(x)$ 是 $2n$ 次多项式，故有

$$0 = f^{2n}(\zeta) - (2n)!\frac{r(x^{'})}{w_n(x^{'})}$$

从而

$$\begin{aligned} r(x^{'}) &= \frac{f^{2n}(\zeta)}{(2n)!}w_n(x^{'}) \\ &= \frac{f^{(N+1)}(\zeta)}{(N+1)!}\prod_{i=1}^{n}(x^{'}-x_i)^2 \end{aligned}$$

第二问

比较不同复化公式的误差行为，并考虑当 $f(x)=|x-\frac{1}{3}|$ 时，在积分区间 $[0,1]$ 用各种复化公式求积的精度

解： 利用 MATLAB 计算不同的复化积分公式，在不同个数的等距节点下，与 $\int_0^1|x-\frac{1}{3}|dx=\frac{5}{18}$ 的误差 $\beta=|I-\int_0^1|x-\frac{1}{3}|dx|$
考虑区间 $[0,1]$ 上的分段个数 $n=1,2,\dots,20$，并利用复化中点、梯形、Simpson 以及 $\frac{3}{8}$ 规则 Simpson 求积公式。
总体来说，复化 Simpson 求积公式关于 n 的收敛速度是最快，事实上，在 $[0,1]$ 上的 Simpson 公式已经是精确值了；其次是复化 $\frac{3}{8}$ 法则 Simpson 公式，其在 $n=6$ 时的精度已经被控制在 1×10^{-3} 以内；而复化中点公式与复化梯形公式的精度相当，前者与后者的精度分别在 $n=11$ 与 $n=13$ 时控制在 1×10^{-3} 以内。
由于 $|x-\frac{1}{3}|$ 在 $[0,1]$ 上并不是全点可导：其在 $x=\frac{1}{3}$ 处只存在左右导数，故导致复化梯形公式虽然 $n=3$ 时的精度控制在 0.001 以内，但后续随着分段数 n 变大，其积分值产生了浮动，即虽然 $|x-\frac{1}{3}|$ 是分段 1 次的，但原本具有 1 次代数精度的梯形求积公式不精确成立。
具体的图像如下：

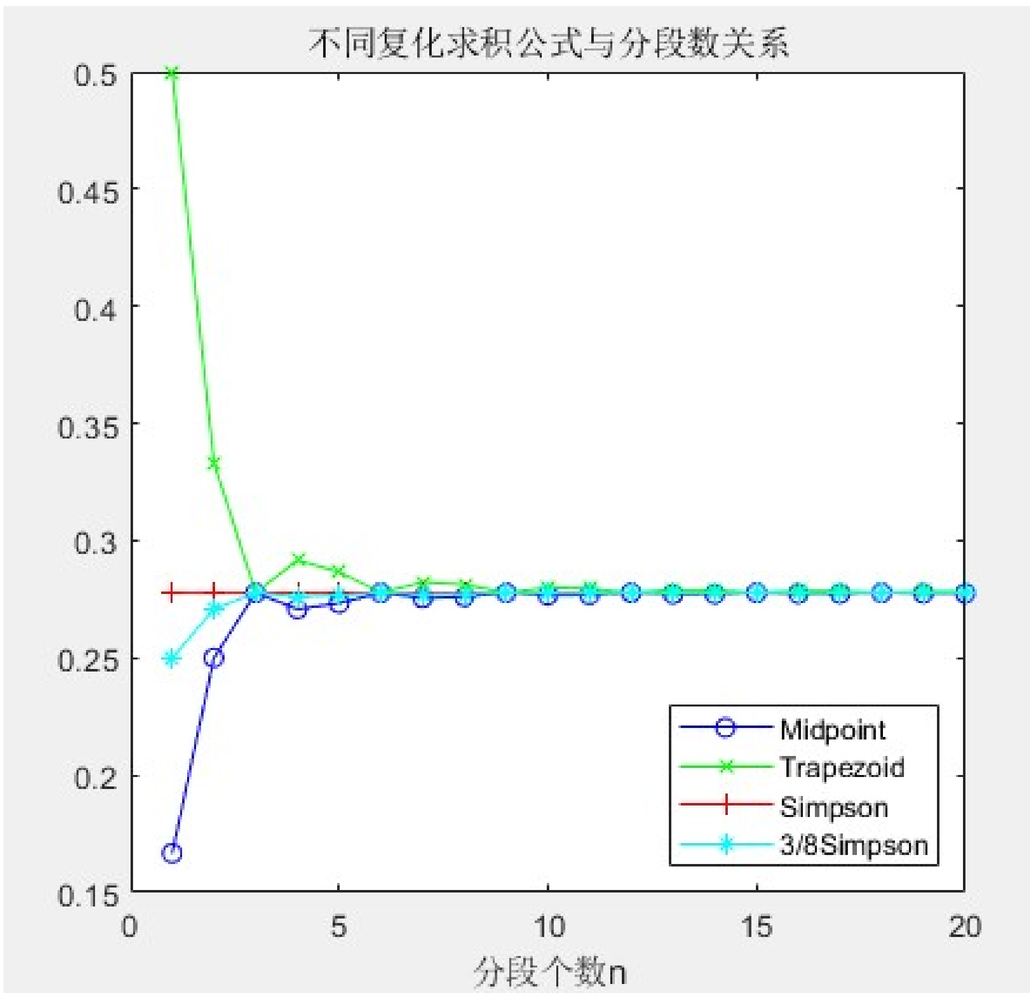

图 1: 横坐标对应了复化求积的分段个数；纵坐标对应了积分公式的积分值

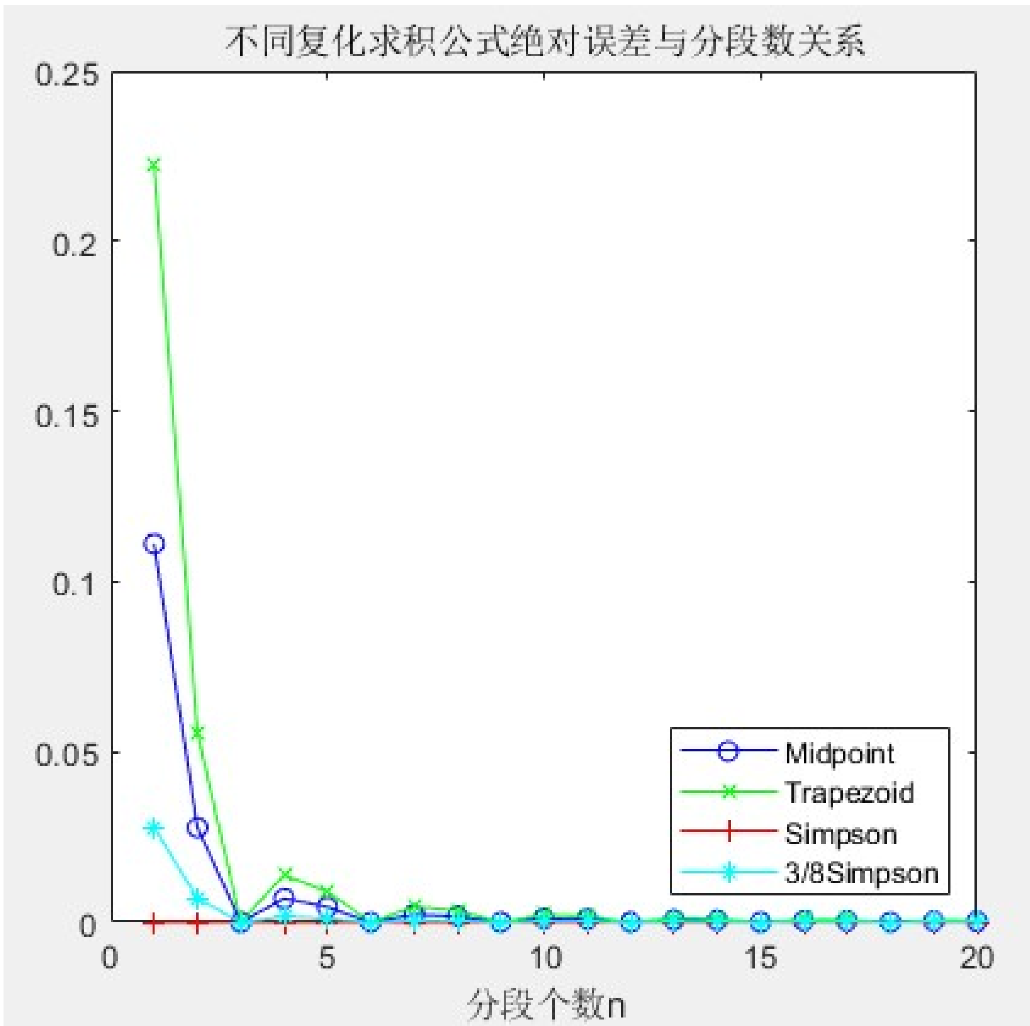

图 2: 横坐标对应了复化求积的分段个数；纵坐标对应了积分公式与精确值的绝对误差