第四周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

证明隐式 Euler 格式是一阶收敛的

证明: 考虑系统 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t,u)$, f 关于 u 是 L-lipshitz 连续, 且 $||u^{''}||_{C[0,T]} \leq M$ 联立以下二式

$$\begin{cases} u(t_{n+1}) & = u(t_n) + \Delta t f(t_{n+1}, u(t_{n+1})) + R_{n+1} \\ u_{n+1} & = u_n + \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1}) \end{cases}$$

记 $e_{n+1} = u(t_{n+1}) - u_{n+1}$，则有以下

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq |e_n| + L\Delta t|e_{n+1}| + |R_{n+1}| \\ &\leq |e_n| + L\Delta t|e_{n+1}| + \frac{M\Delta t^2}{2} \end{aligned}$$

那么

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{1-L\Delta t}|e_n| + \frac{1}{1-L\Delta t}\frac{M\Delta t^2}{2}$$

再考虑如下，当 Δt 足够小时有 $L\Delta t \leq \frac{1}{2}$ 时

$$\frac{1}{1-L\Delta t} = \frac{1-(L\Delta t)^2+(L\Delta t)^2}{1-L\Delta t} \leq 1 + L\Delta t + \frac{(L\Delta t)^2}{1-L\Delta t} \leq 1 + 3L\Delta t$$

也有 $\frac{1}{1-L\Delta t}\leq 2$，从而

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq (1+3L\Delta t)|e_n| + M\Delta t^2 \\
&\leq (1+3L\Delta t)^{n+1}|e_0| + M(\sum_{k=0}^{n+1}(1+3L\Delta t)^k)\Delta t^2
\end{aligned}
$$

考虑 $(1+3L\Delta t)^{n+1}\leq e^{3LT}$，其中 T 是有限数，且

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &\leq e^{3LT}|e_0| + M(n+1)e^{3LT}\Delta t^2 \\
&\leq e^{3LT}|e_0| + M\frac{(n+1)\Delta t}{\Delta t}e^{3LT}\Delta t^2 \\
&\leq e^{3LT}|e_0| + MTe^{3LT}\Delta t
\end{aligned}
$$

再由 $|e_0|=0$，就可知隐式 Euler 格式是一阶收敛的。

第二问

用显式、隐式、改进、修正 Euler 格式计算 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=au$，并用图说明其收敛性（其中 $a=-2$，$u_0=1$，$T=1$，Δt 任取）

解： 设不同格式的迭代初值 $u_0=1$
利用 MATLAB 分别建立显式、隐式、改进、修正 Euler 格式的子程序，并分别利用子程序绘制在步长 $\Delta t=0.08$ 下近似解的图像，各近似解以及它们与精确解 $u(t)=e^{-2t}$ 的绝对误差如下所示：

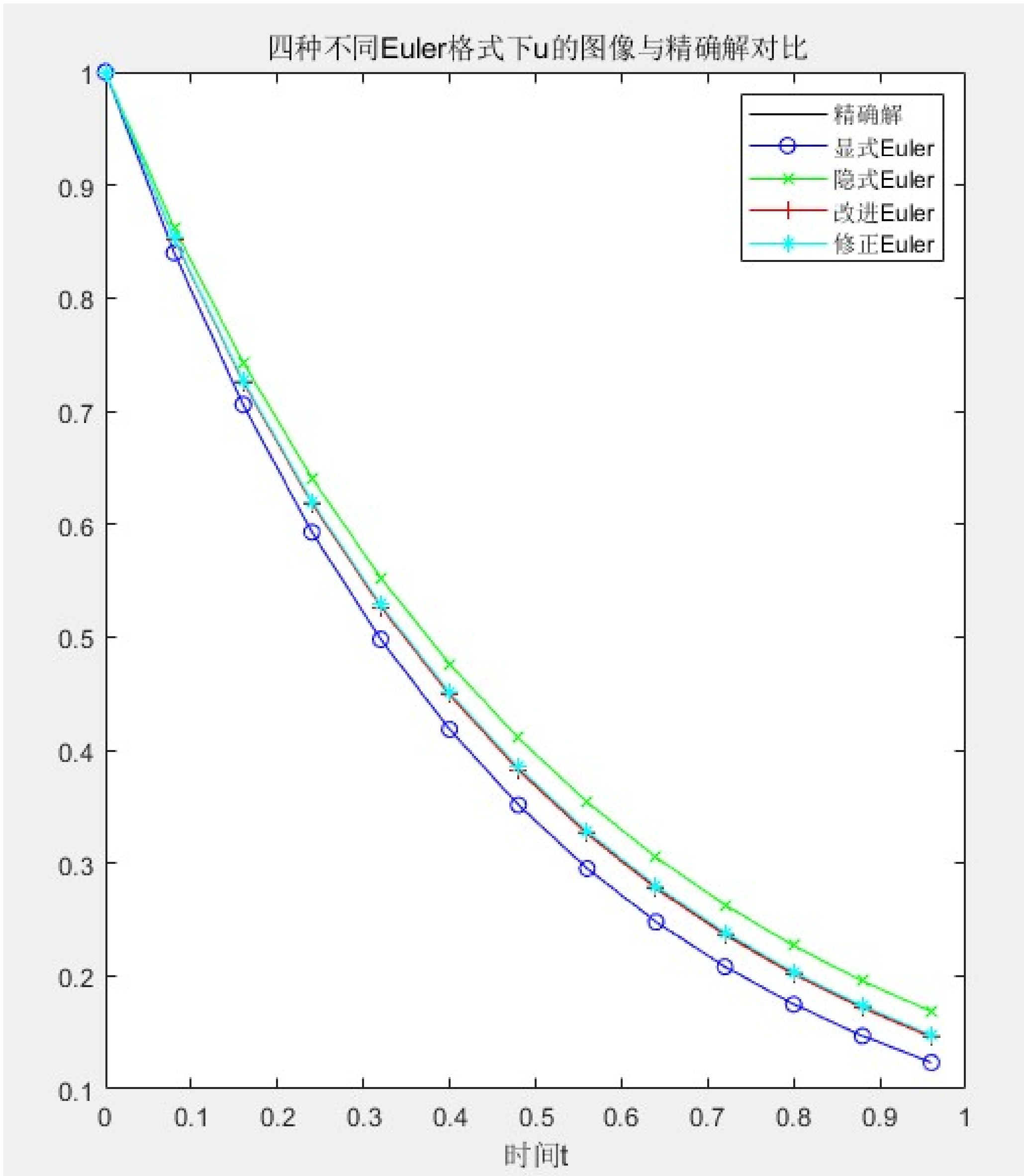

图 1: 步长为 0.08；横坐标对应了时间 t；纵坐标对应不同近似解以及精确解的函数值

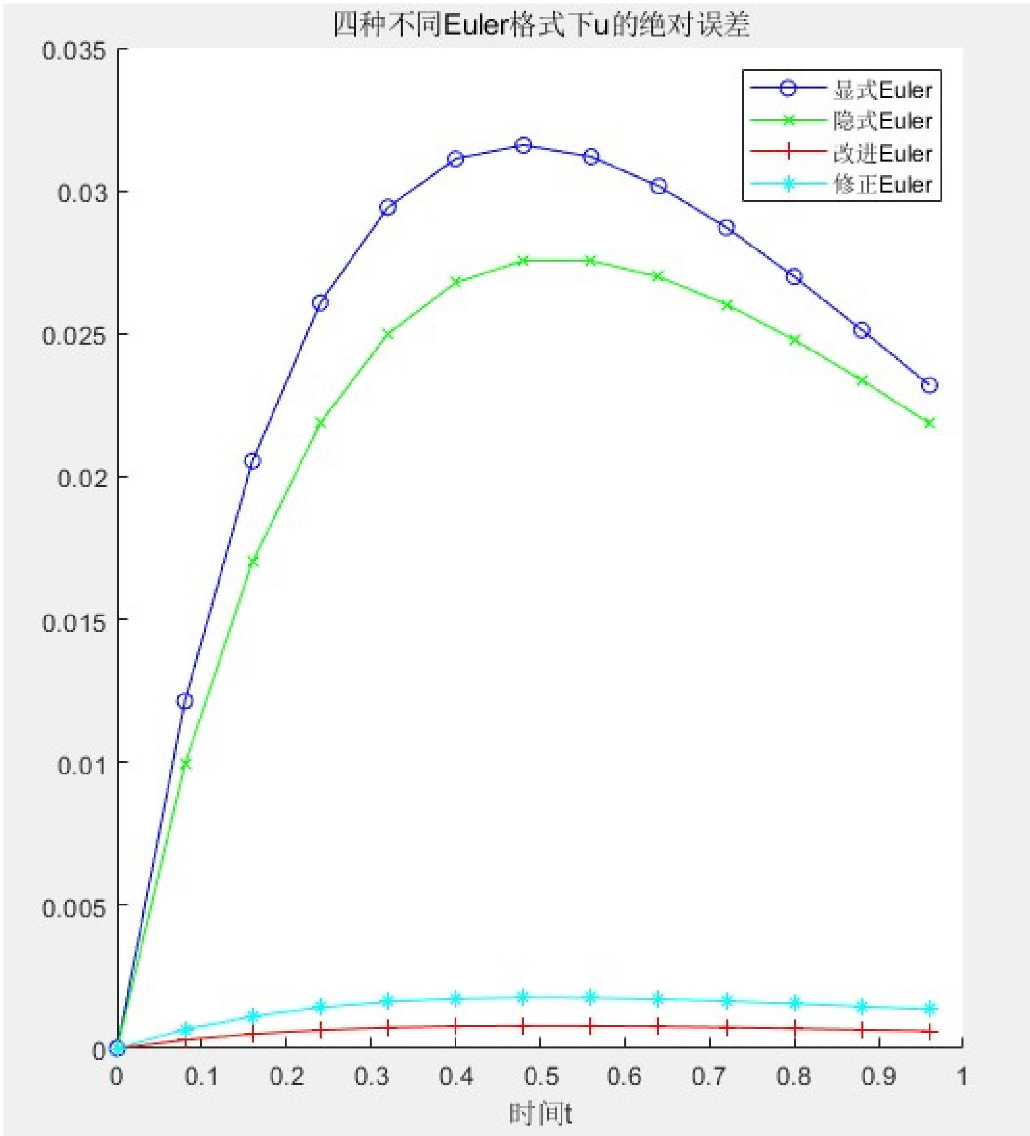

图 2: 步长为 0.08；横坐标对应了时间 t；纵坐标对应不同近似解与精确解的绝对误差

从上图可以看出，当步长 $\Delta t = 0.08$ 时，显式 Euler 与隐式 Euler 格式的精度式较差的，它们的最大误差分别达到了 3.16×10^{-2} 以及 2.75×10^{-2}；而改进与修正 Euler 格式的精度相当且收敛精度较好，它们的绝对误差控

制在 1.8×10^{-3} 以内。

第三问

给出修正和改进 Euler 格式的稳定性分析和绝对稳定区间

解： 绝对问题区间考虑测试问题 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=au$
对于改进的 Euler 格式：$u_{n+1}=u_n+\Delta t f_{n+\frac{1}{2}}$，其中 $f_{n+\frac{1}{2}}=\frac{f_n+f_{n+1}}{2}$
首先考虑其扰动：设现有扰动 $\widetilde{u_{n+1}}=\widetilde{u_n}+\frac{\Delta t(f(t_n,\widetilde{u_n})+f(t_{n+1},\widetilde{u_{n+1}}))}{2}$，那么由 $u_{n+1}=u_n+\frac{a\Delta t}{2}(u_n+u_{n+1})$，可知 $u_{n+1}=(1+\frac{a\Delta t}{1-\frac{a\Delta t}{2}})u_n$，也有

$$\begin{aligned}\widetilde{e_{n+1}}&=u_{n+1}-\widetilde{u_{n+1}}\\&=(1+\frac{a\Delta t}{1-\frac{a\Delta t}{2}})^{n+1}\widetilde{e_0}=(\frac{1+\frac{a\Delta t}{2}}{1-\frac{a\Delta t}{2}})^{n+1}\widetilde{e_0}\end{aligned}$$

考虑改进的 Euler 格式的绝对稳定区域：由上讨论可知，只需要

$$|(1+\frac{a\Delta t}{1-\frac{a\Delta t}{2}})|\leq 1$$

令 $z=a\Delta t$，就有改进的 Euler 格式的绝对稳定区域 $\{|\frac{2+z}{2-z}|\leq 1\}$
而对于一般的系统 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=f(t,u)$，且 f 关于 u 是 L-lipschitz 连续，经计算可知有如下

$$|\widetilde{e_{n+1}}|\leq(\frac{1+\frac{L\Delta t}{2}}{1-\frac{L\Delta t}{2}})^{n+1}|\widetilde{e_0}|$$

不妨就令 $L=|a|$：当 Δt 足够小时，有 $\frac{|a|\Delta t}{1-\frac{|a|\Delta t}{2}}\leq 2|a|\Delta t$，且 $(1+2|a|\Delta t)^{n+1}=(1+2|a|\Delta t)^{(n+1)\frac{1}{2|a|\Delta t}2|a|\Delta t}\leq e^{2|a|\Delta t(n+1)}$，从而

$$|\widetilde{e_{n+1}}|\leq e^{2|a|T}|\widetilde{e_0}|$$

其中 T 有限，从而可知改进的 Euler 格式是稳定的

对于修正的 Euler 格式：$u_{n+1}=u_n+\Delta t f_{n+\frac{1}{2}}$，其中 $f_{n+\frac{1}{2}}=f(t_{n+\frac{1}{2}},u_n+\frac{\Delta t}{2}f_n)$
可知测试问题中，$u_{n+1}=u_n+a\Delta t(u_n+\frac{\Delta t}{2}f_n)$，进一步可知

$$\begin{aligned}\widetilde{e_{n+1}}&=\widetilde{e_n}+a\Delta t[(u_n-\widetilde{u_n})+\frac{\Delta t}{2}(f_n-\widetilde{f_n})]\\&=(1+a\Delta t+\frac{(a\Delta t)^2}{2})\widetilde{e_n}\end{aligned}$$

令 $z=a\Delta t$，可知修正的 Euler 格式的绝对稳定区域 $\{|1+z+\frac{z^2}{2}|\le 1\}$
一般地，可知当 f 是关于 u 为 $|a|$-lipschitz 连续时

$$\begin{aligned}|\widetilde{e_{n+1}}|&\le|\widetilde{e_n}|+|a|\Delta t|\widetilde{e_n}|+\frac{|a|\Delta t^2}{2}|f_n-\widetilde{f_n}|\\&\le(1+|a|\Delta t+\frac{(|a\Delta t|^2)}{2})^{n+1}|\widetilde{e_0}|\end{aligned}$$

当 Δt 足够小时，$\frac{(|a\Delta t|^2)}{2}\le|a|\Delta t$，从而有 $|\widetilde{e_{n+1}}|\le(1+2|a|\Delta t)^{n+1}|\widetilde{e_0}|$，那么由上面的讨论可得 $|\widetilde{e_{n+1}}|\le e^{2|a|T}|\widetilde{e_0}|$，知修正的 Euler 格式是稳定的

第四问

用 Taylor 级数法，$q=1,2,3$，计算：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u-u^2$$

画图说明精度

解：$u(t)=\frac{1}{(\frac{1}{u_0}-1)e^{-t}+1}$，其中 $u_0\ge 0$，以及 $\phi(t,u(t);\Delta t)=\sum_{j=1}^{q}\frac{\Delta t^{j-1}}{j!}\frac{\mathrm{d}^{j-1}f(t,u(t))}{\mathrm{d}t^{j-1}}$
当 $q=1$ 时，$u_{n+1}=u_n+\Delta t\phi(t_n,u_n;\Delta t)=u_n+\Delta t f(t_n,u_n)=u_n+\Delta t u_n-\Delta t u_n^2$
当 $q=2$ 时，$u_{n+1}=u_n+\Delta t f(t_n,u_n)+\frac{\Delta t^2}{2}[f_t'(t_n,u_n)+f_u'(t_n,u_n)f(t_n,u_n)]$
$=u_n+\Delta t u_n-\Delta t u_n^2+\frac{\Delta^2}{2}[(1-2u_n)(u_n-u_n^2)]$
当 $q=3$ 时，$u_{n+1}=u_n+\Delta t u_n-\Delta t u_n^2+\frac{\Delta^2}{2}[(1-2u_n)(u_n-u_n^2)]+\frac{\Delta t^3}{6}[-2(u_n-u_n^2)^2+(1-2u_n)^2(u_n-u_n^2)]$

事实上，$q=2,3$ 时也可以看作是显式 Euler 格式，将 $\phi(t_n,u_n;\Delta t)$ 代入第二问中的子程序即可得出对应的近似解。
当 $u_0=0.5,t_0=0,T=1,\Delta t=0.08$ 的图像如下图所示：

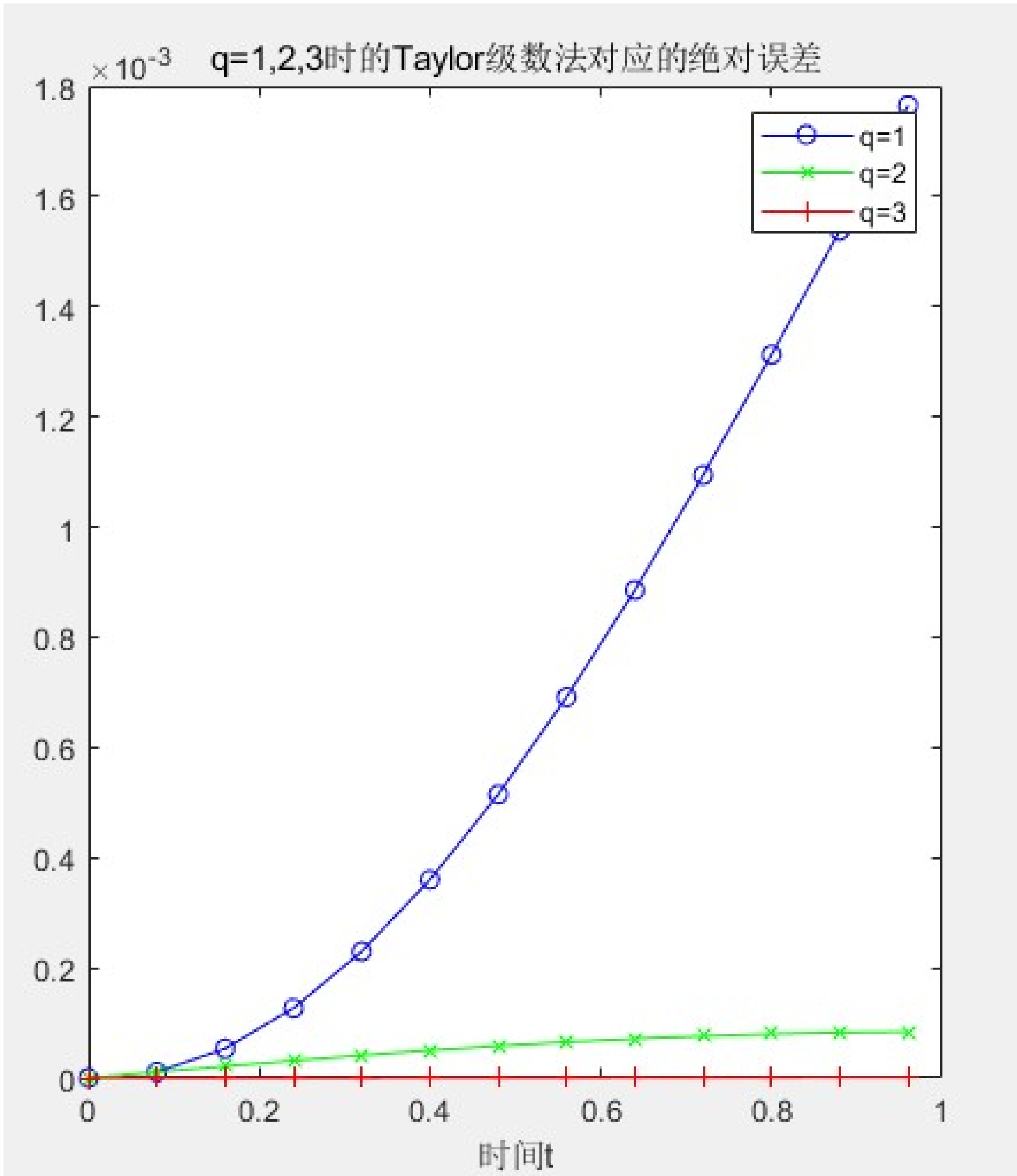

图 3: 初值为 0.5；步长为 0.08；横坐标对应了时间 t；纵坐标对应不同近似解与精确解的绝对误差

当 $u_0 = 0.5, t_0 = 0, T = 1, \Delta t = 0.08$ 时，$q = 1$ 的收敛精度控制在 1.8×10^{-3}

以内；$q=2,3$ 的收敛精度均控制在 8.4×10^{-5} 以内。可知此情形下，$q=2,3$ 的收敛精度要优越得多。

当 $u_0=1.5, t_0=0, T=1, \Delta t=0.08$ 时的图像如下：

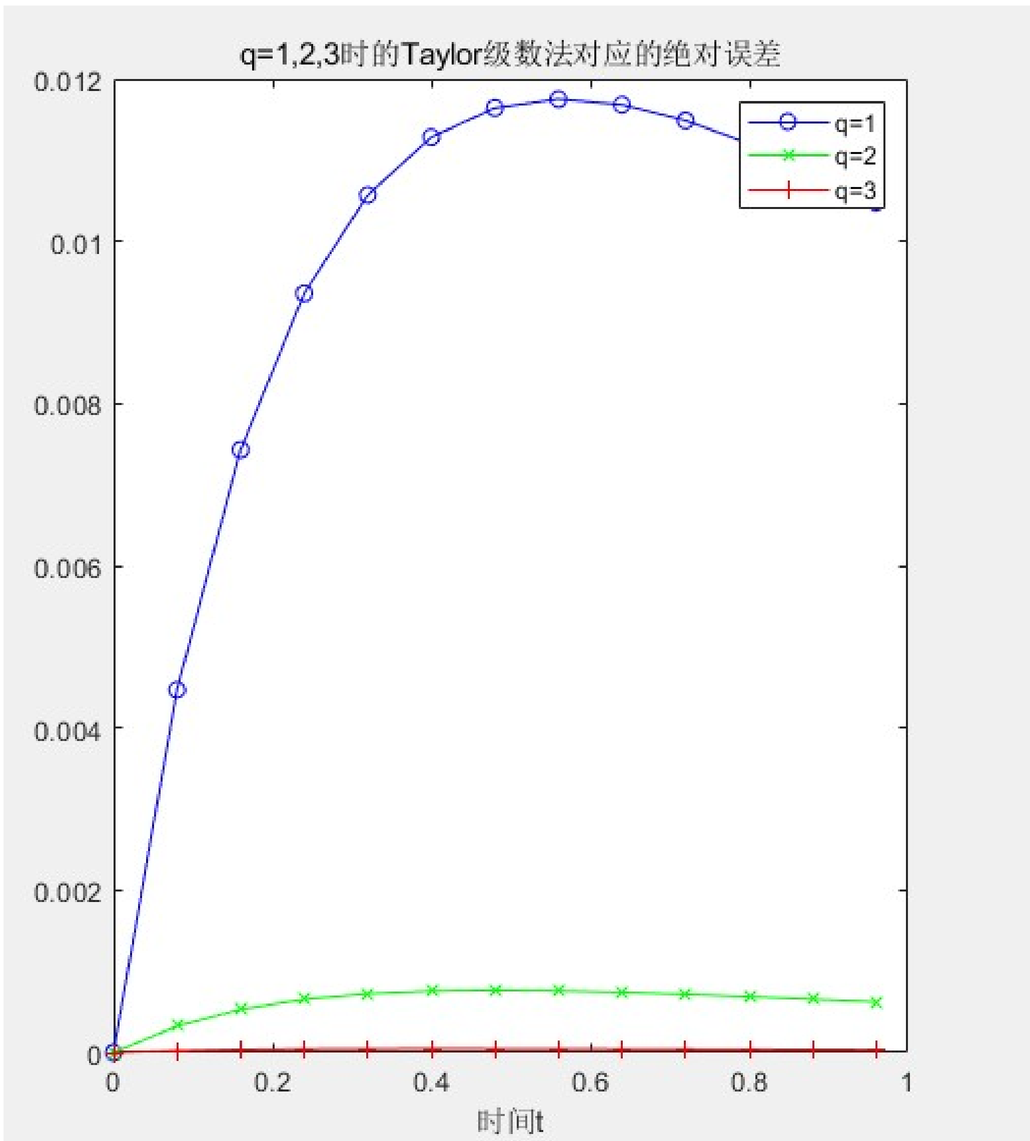

图 4: 初值为 1.5；步长为 0.08；横坐标对应了时间 t；纵坐标对应不同近似解与精确解的绝对误差

当 $u_0 = 1.5, t_0 = 0, T = 1, \Delta t = 0.08$ 时，$q = 1$ 的收敛精度控制在 1.2×10^{-3} 以内；$q = 2, 3$ 的收敛精度均控制在 7.7×10^{-4} 以内。

总之，随着 q 越来越高，Taylor 级数法的精度会越来越高。