第八周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

对于一般的椭圆型方程, $Lu = -\nabla\cdot(A\nabla u)+(b\cdot\nabla)u+cu = f \in \Omega \subset R^d$, 类似书中引理 3.1.4 的条件: $c-\frac{1}{2}div(b) \geq c_0 > 0$, 证明相应的 Lax-Milgram 引理.

证明: 由 $(f,u) = (Lu,u)$, 可知

$$(f,u) = (-\nabla\cdot(A\nabla u),u) + ((b\cdot\nabla)u,u) + (cu,u)$$

先考虑 $(-\nabla\cdot(A\nabla u),u)$, 可知

$$\begin{aligned}(-\nabla\cdot(A\nabla u),u) &= \int_\Omega -\nabla\cdot(A\nabla u)u\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega -\nabla\cdot(uA\nabla u)\mathrm{d}x + \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于 $\int_\Omega \nabla\cdot(u(A\nabla u))\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(A\nabla u)\cdot\vec{n_x}\mathrm{d}S_x$, 以及 $u|_{\partial\Omega} = 0$, 从而 $\int_\Omega \nabla\cdot(u(A\nabla u))\mathrm{d}x = 0$.

为了对等式右边第二项进行下有界控制, 需要 A 的强制性: 即 A 满足 $(Au,u) \geq \alpha_0(u,u)$, 其中 $\alpha_0 > 0$. 那么, 此时就有

$$\begin{aligned}(-\nabla\cdot(A\nabla u),u) &= \int_\Omega -\nabla\cdot(A\nabla u)u\mathrm{d}x \\ &\geq \alpha_0\int_\Omega |\nabla u|^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

再考虑 $((b\cdot\nabla)u,u)$

$$2\int_{\Omega}u(b\cdot\nabla)u\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\nabla\cdot(u^2b)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u^2div(b)\mathrm{d}x$$

类似地, $\int_{\Omega}\nabla\cdot(u^2b)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u^2b\cdot\vec{n_x}\mathrm{d}S_x\overset{u|_{\partial\Omega}=0}{=}0$, 从而 $((b\cdot\nabla)u,u)=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}u^2div(b)\mathrm{d}x$. 那么有以下

$$\begin{aligned}(f,u)&\geq\alpha_0\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}(c-\frac{1}{2}div(b))u^2\mathrm{d}x\\&\geq\alpha_0\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_{\Omega}c_0u^2\mathrm{d}x\\&\geq\alpha||u||^2_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

其中 $\alpha=min\{\alpha_0,c_0\}$ 最终由 Hölder 不等式: $(f,u)\leq||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)}\leq||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{H^1(\Omega)}$, 可得

$$\alpha||u||_{H^1(\Omega)}\leq||f||_{L^2(\Omega)}$$

第二问

给出下列 Poisson 方程两点边值问题的 Green 函数

$$\begin{cases}-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f,\quad x\in(0,1)\\u(0)=u^{'}(1)=0\end{cases}$$

解: 设上述两点边值问题的 Green 函数 G 具有以下分段形式

$$G(x;x_0)=\begin{cases}G_1(x;x_0),\quad 0<x<x_0\\G_2(x;x_0),\quad x_0<x<1\end{cases}$$

首先考虑形式解满足 $(u,\Delta G)=-u(x_0)$, 由 Green 第二公式或分部积分公式可得

$$
\begin{aligned}
(u,\Delta G)-(\Delta u,G) &= \int_0^1 \nabla\cdot(u\nabla G)\mathrm{d}x-\int_0^1 \nabla\cdot(G\nabla u)\mathrm{d}x \\
-u(x_0)+(f,G) &= u(1)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(1;x_0)+u^{'}(0)G(0;x_0)
\end{aligned}
$$

若有 $G_1(0;x_0)=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}(1;x_0)=0$, 则

$$
\begin{aligned}
u(x_0) &= (f,G) \\
&= \int_0^{x_0} f(x)G_1(x;x_0)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1 f(x)G_2(x;x_0)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

上式两边对参变量 x_0 求导, 则

$$
\begin{aligned}
u^{'}(x_0) = f(x_0)G_1(x_0;x_0)+\int_0^{x_0} f(x)\frac{\partial G_1}{\partial x_0}(x;x_0)\mathrm{d}x \\
- f(x_0)G_2(x_0;x_0)+\int_{x_0}^1 f(x)\frac{\partial G_2}{\partial x_0}(x;x_0)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

此时又若 G_1,G_2 满足: $\frac{\partial G_1}{\partial x_0}(x_0;x_0)-\frac{\partial G_2}{\partial x_0}(x_0;x_0)=-1$, $G_1(x_0;x_0)=G_2(x_0;x_0)$ 以及 $\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_0^2}(x;x_0)=\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_0^2}(x;x_0)=0$, 那么

$$
\begin{aligned}
u^{''}(x_0) &= f(x_0)(\frac{\partial G_1}{\partial x_0}(x_0;x_0)-\frac{\partial G_2}{\partial x_0}(x_0;x_0)) \\
&\quad +\int_0^{x_0} f(x)\frac{\partial^2 G_1}{\partial x_0^2}(x;x_0)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1 f(x)\frac{\partial^2 G_2}{\partial x_0^2}(x;x_0)\mathrm{d}x \\
&= -f(x_0)
\end{aligned}
$$

此时定义 Green 函数 G 为以下

$$
G(x;x_0)\triangleq\begin{cases} x, & 0<x<x_0 \\ x_0, & x_0<x<1 \end{cases}
$$

则容易得知 G 满足上述所有要求, 此即 Poisson 方程混合边值问题的 Green 函数.

第三问

说明极值原理中的 $c(x)$ 为负时, 极值原理可能不成立. 考虑一维的 Helmholtz 方程, 找 u 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+k^2u=1,\quad u(0)=u(1)=0.$$

证明: 记 $Lu=-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-k^2u=-1<0$, 并且易知当 $k=2\pi$ 时, $u=\frac{1}{4\pi^2}(1-\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x))=\frac{1}{4\pi^2}(1-\sqrt{2}\cos(2\pi x-\frac{\pi}{4}))$ 是下列边值问题的一个特解

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+4\pi^2u=1,\quad x\in(0,1)\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

同时容易知道 $\max_{x\in[0,1]}u(x)=\frac{1}{4\pi^2}(1+\sqrt{2})>0,\min_{x\in[0,1]}u(x)=\frac{1}{4\pi^2}(1-\sqrt{2})<0$, 即最大值在区间内部取到, 但不在边界取到, 从而极值原理不成立.

第四问

设 $u(0)=u(1)=0$ 且满足 $-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x)$. 利用 Green 函数表达式 (3.1.19), 证明

$$u(x)=\int_0^1 G(x;x_0)f(x_0)\mathrm{d}x_0.$$

证明: 记 $u(x)=\int_0^1 G(x;y)f(y)\mathrm{d}y$, 要验证其满足以下 Poisson 方程边值问题

$$\begin{cases}-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=f(x),\quad x\in(0,1)\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

由 Green 函数定义

$$G(x;y) = \begin{cases} (1-y)x, & x \in (0,y) \\ y(1-x), & x \in (y,1) \end{cases}$$

可知

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_0^1 f(y)(1-y)\cdot 0 \cdot \mathrm{d}y = 0 \\ u(1) &= \int_0^1 f(y)y \cdot 0 \cdot \mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

而 $\forall x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 G(x;y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x f(y)y(1-x)\mathrm{d}y + \int_x^1 f(y)(1-y)x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

对上式两边关于 x 求导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= f(x)x(1-x) - \int_0^x f(y)y\mathrm{d}y \\ &\quad - f(x)(1-x)x + \int_x^1 f(y)(1-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_x^1 f(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f(y)y\mathrm{d}y \end{aligned}$$

从而 $-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = f(x)$.