

# 第九周作业报告

佐藤拓未 20300186002

## 第一问

对方程 (3.1.3), 如果边界条件改为  $u(0) = 0, \frac{du}{dx}(1) + u(1) = 0$ , 求其精确解: 并用三点差分格式离散求解, 同时分析差分格式的精度.

**解:** 不妨固定  $a = 1$ , 对下列方程进行离散化

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + b\frac{du}{dx} + cu = 1, & x \in (0, 1) \\ u(0) = \frac{du}{dx}(1) + u(1) = 0 \end{cases}$$

可以采用虚拟点法, 考虑如下近似

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{2h}(u(x_{N+1}) - u(x_{N-1})) = -u_N \\ \frac{-u_{N+1} + 2u_N - u_{N-1}}{h^2} + b \cdot \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} + c \cdot u_N = 1 \end{cases}$$

整理可得  $(c - b + \frac{2}{h^2} + \frac{2}{h})u_N - \frac{2}{h^2}u_{N-1} = 1$ , 且只需要修改矩阵最后一行即可.

当  $b = c = 0$  时: 可以知道方程 (3.1.3) 的解形如  $u(x) = -\frac{x^2}{2} + dx + e$ , 并带入边值条件可知真解为  $u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{4}$ . 在数值上令  $N = 10$  可观测到数值解与精确解非常贴近, 如图 1 所示.

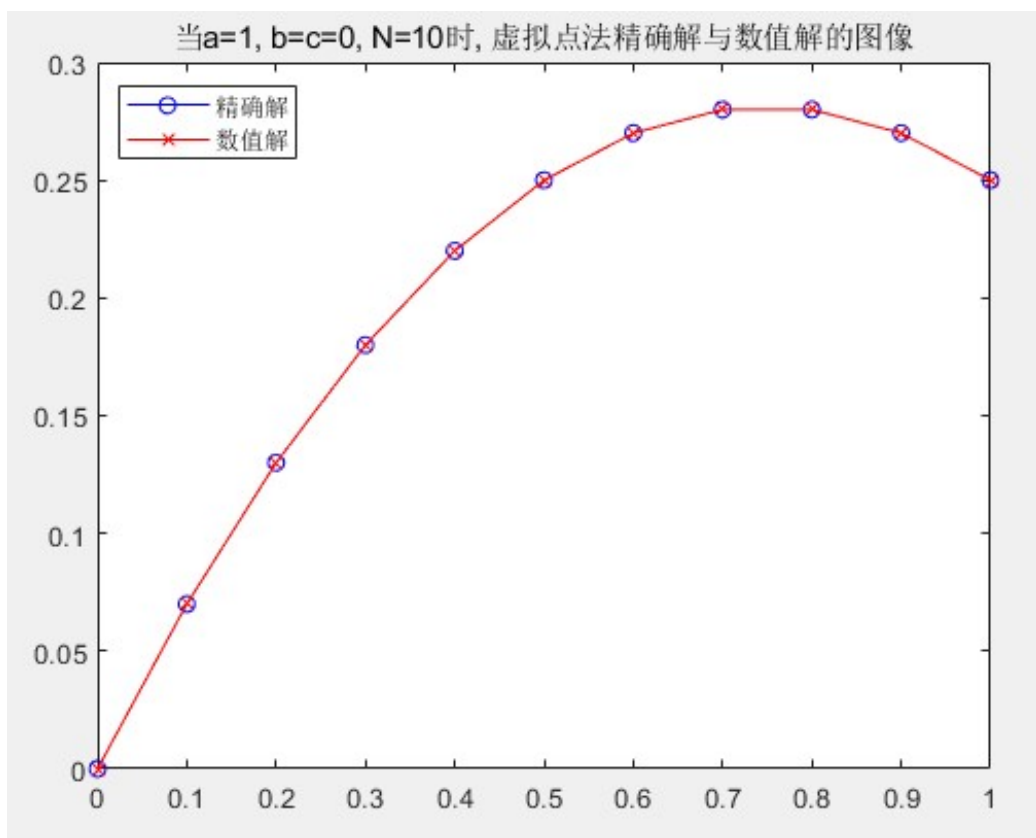


图 1: 当  $a = 1, b = c = 0, N = 10$  时, 虚拟点法精确解与数值解的图像

进一步讨论, 可令  $h = 2^{-n}$  来观察其收敛阶, 可以看到此时虚拟点法并不会进一步降低精度, 如图 2 所示. 造成这样的原因可能是虚拟点法在前面几步就达到了机器精度.

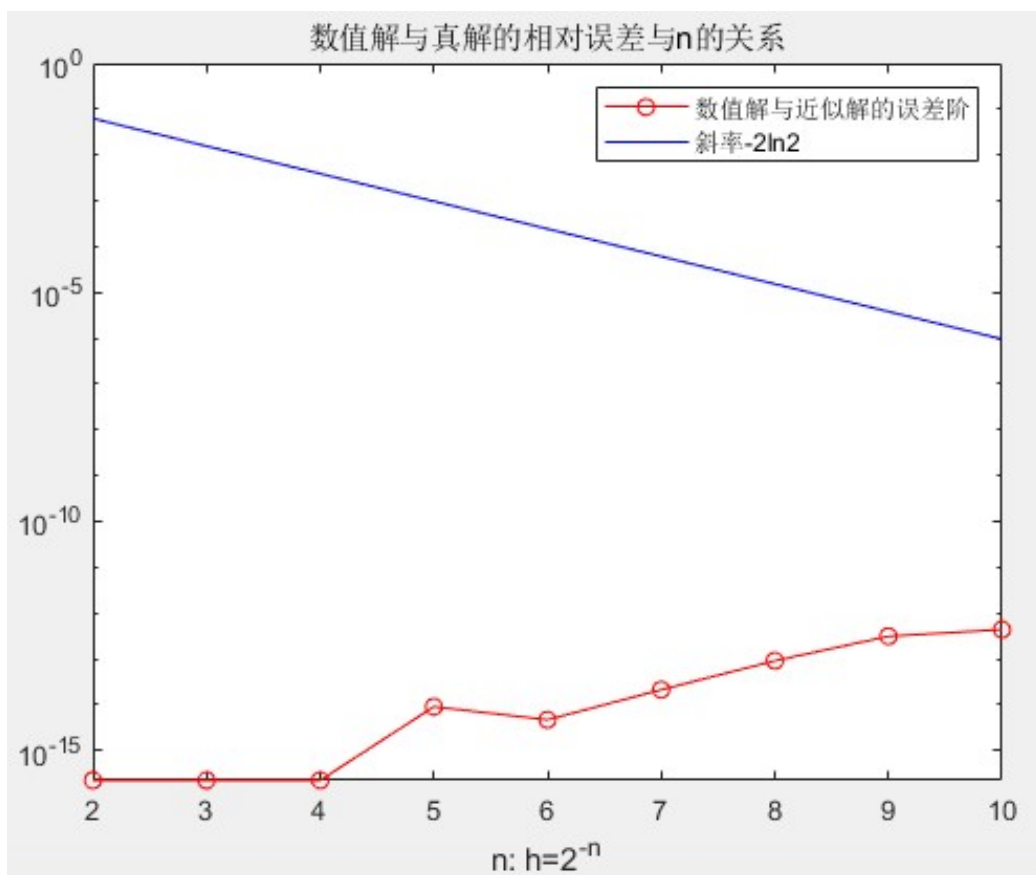


图 2: 当  $a = 1, b = c = 0$  时, 虚拟点法收敛阶

当  $b, c$  不为 0 时: 可以知道真解为

$$u(x) = \frac{1 - e^{\lambda_1(1 + \lambda_1)}}{c(e^{\lambda_1(1 + \lambda_1)} - e^{\lambda_2(1 + \lambda_2)})} e^{\lambda_2 x} - \frac{1 - e^{\lambda_2(1 + \lambda_2)}}{c(e^{\lambda_1(1 + \lambda_1)} - e^{\lambda_2(1 + \lambda_2)})} e^{\lambda_1 x} + \frac{1}{c}$$

其中  $\lambda_{1,2} = -\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$ , 不妨带入  $b = -5, c = 3$ , 其收敛阶如图 3 所示. 从图中可以看出, 数值解与真解的相对误差是二阶收敛的.

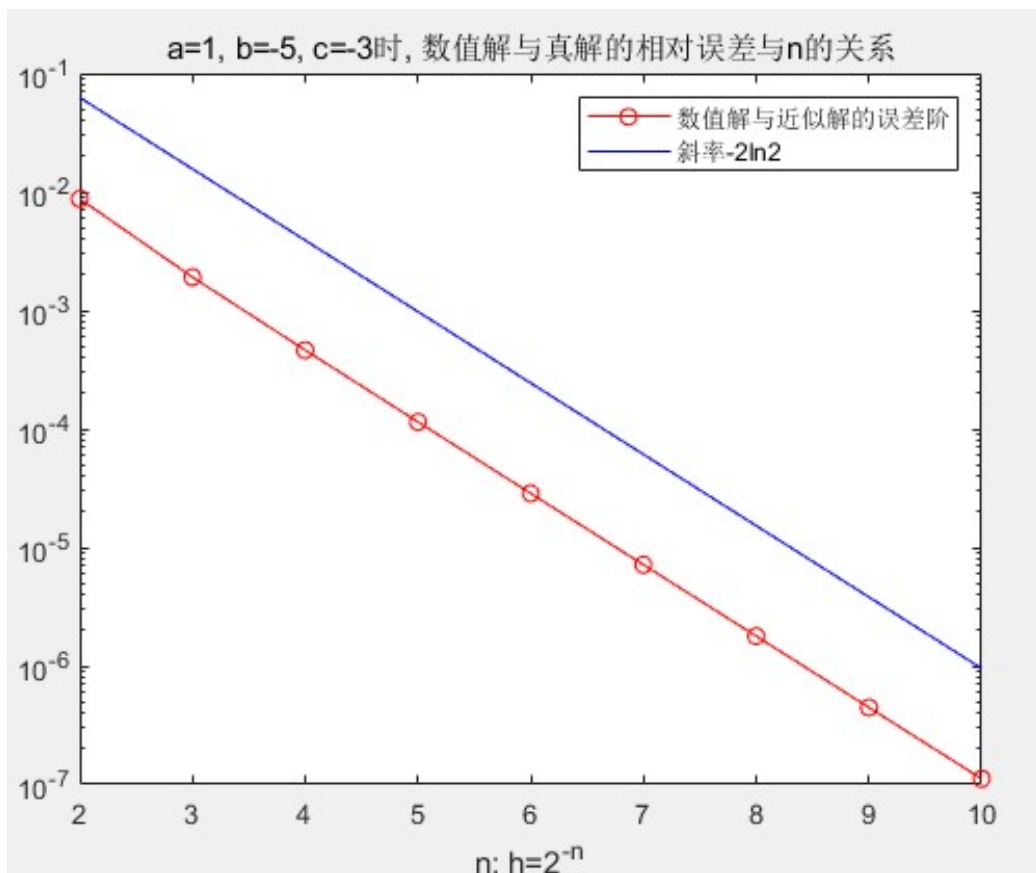


图 3: 当  $a = 1, b = -5, c = -3$  时, 虚拟点法收敛阶

综上所述, 当方程的情形非常简单时 (例如,  $b = c = 0$ ), 虚拟点法求数值解的收敛速度是非常快的, 从而在前几步就达到了机器精度; 当  $b, c$  不为 0 时, 在前几步的精度并不能像前者一样直接达到机器精度, 但是随着步长  $h$  的减小, 数值解的相对误差呈现了二阶收敛.

## 第二问

假设  $u(x)$  在区间  $x \in (0, 1)$  满足:

$$\frac{d}{dx}(a(x) \frac{du}{dx}) = 1,$$

且在端点  $u(0) = u(1) = 0$ , 这里  $a(x)$  为分片常数:

$$a(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \frac{1}{2}), \\ 2, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

如果  $u(x)$  函数值和  $a(x) \frac{du}{dx}$  在点  $x = \frac{1}{2}$  连续, 则证明

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{12}x, & x \in (0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{24}x - \frac{1}{24}, & x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

并用三点差分格式来求解这个问题: 考虑  $h = 2^{-n}$  和  $h = 3^{-n}$  的情况. 说明差分格式误差和网格的关系.

**解:** 分段求解这个问题, 首先由于  $a(x)$  是分段常数, 从而有以下

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + bx + c, & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{x^2}{4} + dx + e, & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

其中  $b, c, d, e$  均为常数, 代入  $u(0) = u(1) = 0$  可得

$$\begin{cases} c = 0 \\ e = -(\frac{1}{4} + d) \end{cases}$$

再代入  $u(\frac{1}{2}^-) = u(\frac{1}{2}^+)$  以及  $\frac{du}{dx}|_{x=\frac{1}{2}^-} = 2\frac{du}{dx}|_{x=\frac{1}{2}^+}$ , 则有

$$\begin{cases} \frac{5}{16} + \frac{b}{2} = -\frac{d}{2} \\ b = 2d \end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases} b = -\frac{5}{12} \\ c = 0 \\ d = -\frac{5}{24} \\ e = -\frac{1}{24} \end{cases}$$

由此可得出真解具有题干中的分段形式, 且其图像如下所示, 可以发现真解在  $x = \frac{1}{2}$  时不具有连续导数.

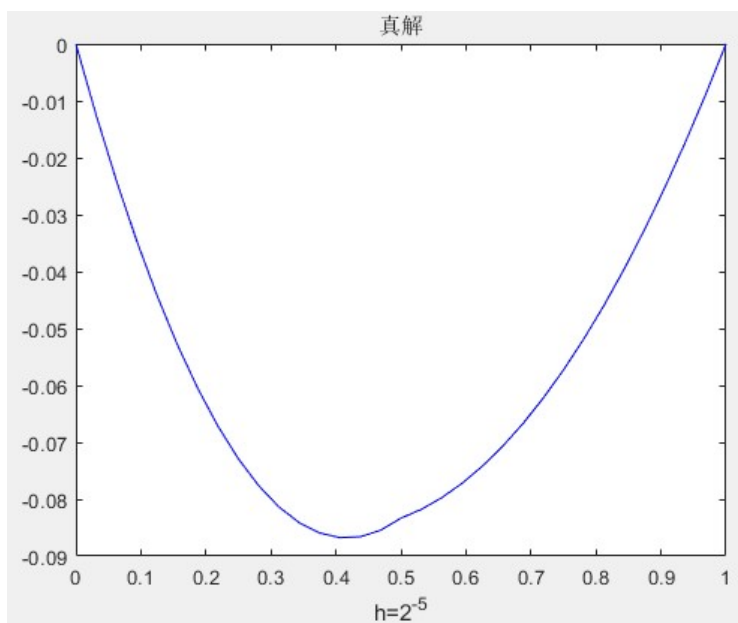


图 4: 第二问真解图像

再考虑用三点差分格式求解原问题, 由于  $a(x)$  是分段常数, 从而要修改三

点差分格式所对应的矩阵, 新的矩阵  $A'$  为

$$A' = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & -2 & 4 & -2 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & -2 & 4 & -2 \\ & & & & & & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

当  $h = 3^{-n}$  时: 我们考虑不同步长  $h = 3^{-n}$  下, 绝对误差的最大值与  $n$  的关系, 见图 5. 可以发现绝对误差的最大值实际上是慢慢增大, 且绝对误差的最大值在  $x_i = \frac{1}{2}$  附近取到的, 见图 6(以  $h = 3^{-8}$  为例).

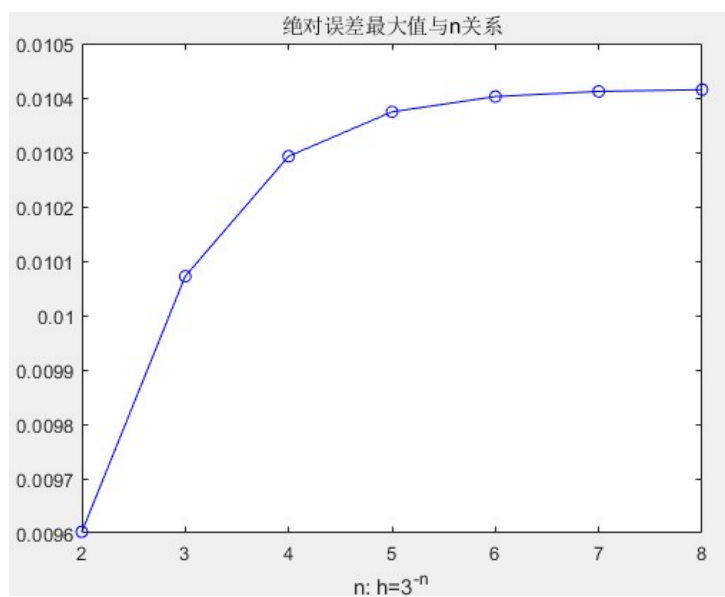


图 5: 当  $h = 3^{-n}$  时, 绝对误差与  $n$  的关系

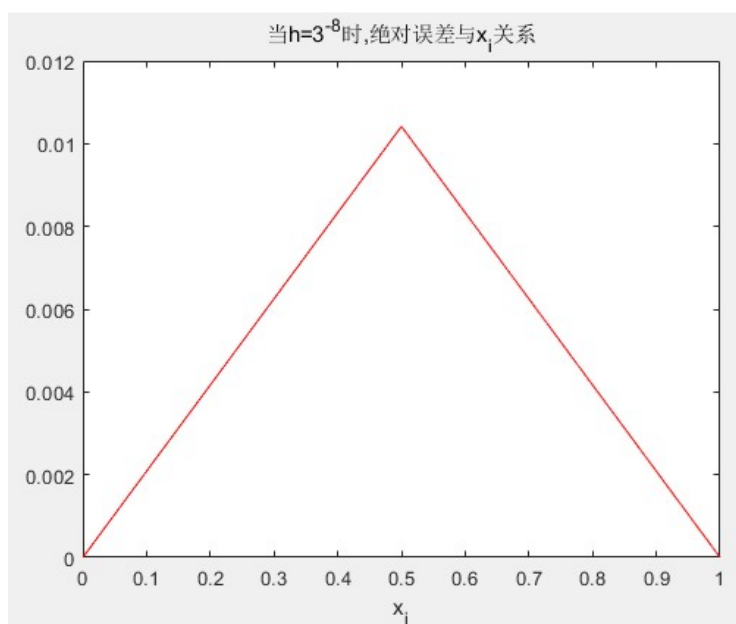


图 6: 当  $h = 3^{-8}$  时, 近似解与真解在每点上的绝对误差

当  $h = 2^{-n}$  时: 用以上方法考虑绝对误差的最大值与  $n$  的关系, 见图 7 与 8.



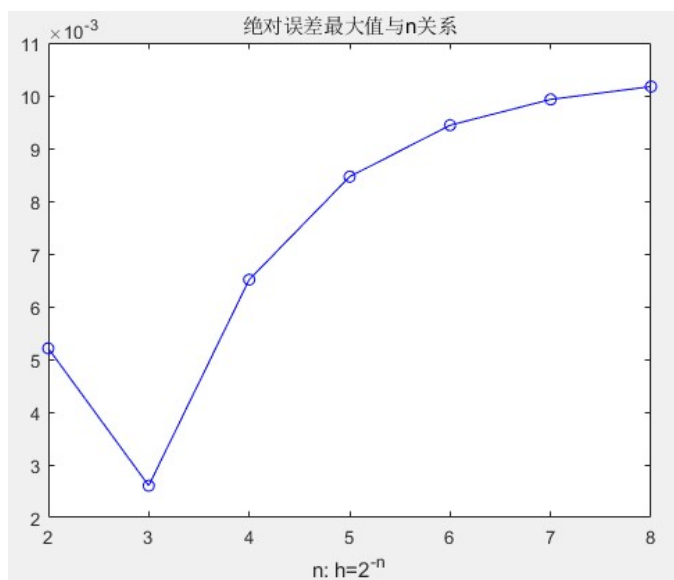


图 7: 当  $h = 2^{-n}$  时, 绝对误差与  $n$  的关系

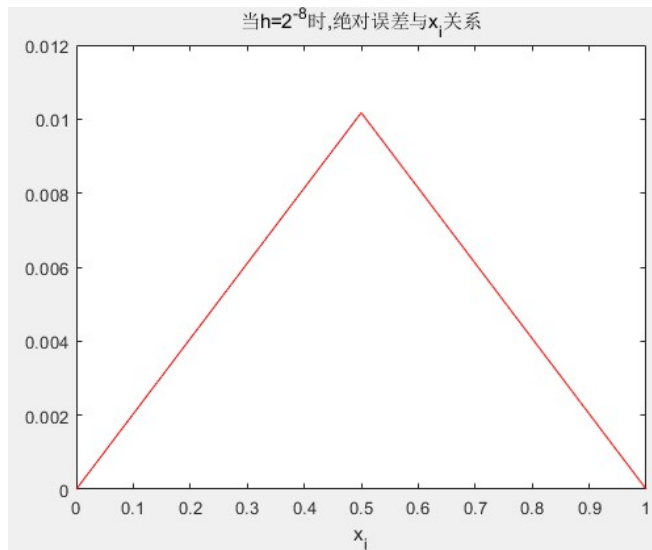


图 8: 当  $h = 2^{-8}$  时, 近似解与真解在每点上的绝对误差

造成以上原因有以下两方面: 1) 矩阵  $A'$  从中间行开始乘以常数, 且由于  $A'$

并不是分块对称阵, 从而不能用分块求逆来求解数值解  $\vec{u}$ ; 2) 当  $h = 2^{-n}$  或  $3^{-n}$  会随着  $n$  的增大而趋于 0, 从而容易在数值上产生误差, 从而进一步导致数值解与真解的误差增大.

### 第三问

证明不等式 (3.1.54), 并用它来证明当  $c(x) = 0$  时, 下述方程三点差分格式的收敛性:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

且三点差分格式函数值和导数值都是两阶收敛的.

**证明:** 考虑  $-\delta_x^2 u_i = \frac{-e_{i+1} + 2e_i - e_{i-1}}{h^2} = f_i$ , 其中  $h = \frac{1}{N}$ ,  $f_i = f(x_i)$ . 同时, 由截断误差定义可知

$$\begin{aligned} R_i &= -\delta_x^2 u(x_i) - f_i \\ &= \frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2} + u''(x_i) \\ &= -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(x_i) + O(h^4) \end{aligned}$$

考虑  $e_i = u(x_i) - u_i$ , 则  $-\delta_x^2 e_i = R_i$ , 且  $e_0 = e_N = 0$ . 记  $\delta_x^+ e_i = \frac{e_{i+1} - e_i}{h}$ , 并考虑以下内积

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{N-1} e_i \cdot \delta_x^2 e_i &= -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} e_i (\delta_x^+ e_i - \delta_x^+ e_{i-1}) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} (\delta_x^+ e_i)^2 \end{aligned}$$

再由 Hölder 不等式, 就有

$$\|\delta_x^+ \vec{e}\|_{l^2}^2 = -\sum_{i=1}^{N-1} e_i \cdot \delta_x^2 e_i = \sum_{i=1}^{N-1} R_i \cdot e_i \leq \|\vec{R}\|_{l^2} \cdot \|\vec{e}\|_{l^2}$$

另一方面, 由  $e_i = (e_i - e_{i-1}) + \cdots + (e_1 - e_0) = h \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \delta_x^+ e_j$ , 可得  $\|\vec{e}\|_{l^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\delta_x^2 \vec{e}\|_{l^2}^2$ , 从而最终有不等式 (3.1.54):  $\|\vec{e}\|_{l^2} \leq \|\vec{R}\|_{l^2}$ . 故此时三点差分格式是收敛的, 且由于

$$\begin{aligned}\|\vec{R}\|_{l^2} &= O(h^{\frac{3}{2}}) \\ \|\vec{e}\|_{l^2} &= O(h^{\frac{3}{2}}) \\ \frac{\|\vec{e}\|_{l^2}}{\|\vec{u}\|_{l^2}} &= O(h^2)\end{aligned}$$

可知三点差分格式函数值是二阶收敛的. 再由式  $\|\delta_x^+ \vec{e}\|_{l^2}^2 \leq \|\vec{R}\|_{l^2} \cdot \|\vec{e}\|_{l^2}$ , 从而也有导函数值的二阶收敛性:  $\frac{\|\delta_x^+ \vec{e}\|_{l^2}}{\|\vec{u}'\|_{l^2}} = O(h^2)$ , 得证.

**注记:** 上述证明过程中用到了  $\|\vec{u}\|_{l^2}, \|\vec{u}'\|_{l^2} = O(h^{-\frac{1}{2}})$ , 这是因为由数值积分复化梯形公式

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(x)^2 dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (u(x_i)^2 + u(x_{i+1})^2) + O(h^2) \\ &= h \|\vec{u}\|_{l^2}^2 + O(h^2)\end{aligned}$$

而等式左边定积分为常数, 从而就有  $\|\vec{u}\|_{l^2} = O(h^{-\frac{1}{2}})$ ,  $u'$  的  $l^2$  范数同理.

#### 第四问

证明当  $a(x) \geq \alpha > 0$  不是常数时, 对应问题:

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{du}{dx} \right) = f,$$

三点差分格式的极值原理仍然成立, 并给出三点差分格式的最大模误差估计.

**证明:** 先给出三点差分格式

$$\begin{aligned} -\delta_x^2(\alpha_i u_i) &\triangleq \alpha_i \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} - \frac{a_{i+1} - \alpha_{i-1}}{2h} \cdot \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \\ &= \frac{-(\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1})u_{i+1} + 8\alpha_i u_i - (-\alpha_{i+1} + 4\alpha_i + \alpha_{i-1})u_{i-1}}{4h^2} \end{aligned}$$

如果当  $\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 0$ , 那么  $\alpha_{i+1} \leq 4\alpha_i - \alpha_{i-1}$ , 从而也有  $-\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 0$ , 即三点差分格式中  $u_{i+1}$  与  $u_{i-1}$  前系数是同号的.

此时设  $f_i \geq 0$ , 且  $u_0 = u_N = 0$ , 并且  $u_i (1 \leq i \leq N)$ , 且不妨  $\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1} \geq 0$ , 那么有以下

$$\begin{aligned} (\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1})u_{i+1} &= -4h^2 f_i + 8\alpha_i u_i - (-\alpha_{i+1} + 4\alpha_i + \alpha_{i-1})u_{i-1} \\ &\leq 8\alpha_i u_i - (-\alpha_{i+1} + 4\alpha_i + \alpha_{i-1})u_{i-1} \\ &\leq 8\alpha_i u_i - (-\alpha_{i+1} + 4\alpha_i + \alpha_{i-1})u_i \\ &= (\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1})u_i \end{aligned}$$

再由  $\alpha_{i+1} + 4\alpha_i - \alpha_{i-1}$  也大于等于 0, 可推出  $u_{i+1} \leq u_i$ , 从而  $u_{i+1}$  只能为最小值, 同理  $u_{i-1}$  也为最小值, 证毕.

考虑最大模的误差估计: 记  $e_i = u(x_i) - u_i$ , 且  $e_0 = e_N = 0$ , 由于三点差分格式由两部分线性组成: 1) 标准三点差分格式 (2 阶); 2) 两个中心差商乘积 (从而也是 2 阶), 故三点差分格式的局部截断误差  $R_i = O(h^2)$ , 考虑  $-\delta_x^2 e_i = R_i$ , 并且对  $u(x)$  有四阶导数有界控制 (记为  $M_4$ ), 以及对  $\alpha(x)$  有三阶导数有界控制 (记为  $M_3$ ) 时, 由

$$\begin{cases} -\delta_x^2 e_i = R_i \\ e_0 = e_N = 0 \end{cases}$$

最终由比较原理可得:  $\|\vec{e}_i\|_{l^\infty} \leq CM_3 M_4 h^2$ .