第七周作业报告

佐藤拓未 20300186002

第一问

证明线性多步方法 $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{\Delta t}{4}(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)$ 是 A_0-稳定的.

证明: 考虑 $\rho(\lambda) - z\sigma(\lambda) = 0$, 并约去等式两边因子 λ^n, 可知此线性多步方法的绝对稳定区域为

$$S = \{z : \lambda^2 - \lambda - \frac{z}{4}(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0\text{满足根条件}\}$$

进一步整理可得

$$S = \{z : (4-z)\lambda^2 - 2(2+z)\lambda - z = 0\text{满足根条件}\}$$

其中 $(4-z)\lambda^2 - 2(2+z)\lambda - z$ 是关于 λ 的二次复系数多项式, 由于考虑线性多步方法是否 A_0-稳定, 问题转化为: 当 $z \in (-\infty, 0]$ 时, 二次多项式的两个根是否满足根条件.
经计算可得当 $z \in [-\frac{1}{2}, 0]$ 时, 二次多项式的根为实数

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + z \pm 2\sqrt{2z+1}}{4-z}$$

考虑 $\lambda_1 = \frac{2+z+2\sqrt{2z+1}}{4-z}$, 求导并整理可知

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}z} = \frac{2z + 6\sqrt{2z+1} + 10}{(4-z^2)\sqrt{2z+1}} \geq 0, \qquad z \in [-\frac{1}{2}, 0]$$

从而在区间 $[-\frac{1}{2},0]$ 上, λ_1 在 $z=0$ 取极大, 在 $z=-\frac{1}{2}$ 取极小: $\lambda_1(0)=1, \lambda_1(-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$.
当 $z\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$, λ_1 为虚根, 则经计算可知其模函数为

$$|\lambda_1(z)|=\frac{\sqrt{z^2-4z}}{4-z}$$

对其求导有

$$\frac{\mathrm{d}|\lambda_1|}{\mathrm{d}z}=\frac{-8+2z}{(4-z^2)\sqrt{z^2-4z}}\leq 0, \qquad z\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$$

那么可知 $|\lambda_1|$ 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 上, 在 $z\to-\infty$ 取极大: $|\lambda_1(-\infty)|=1$.
再考虑 $\lambda_2=\frac{2+z-2\sqrt{2z+1}}{4-z}$, 求导可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}z}&=\frac{-2z+6\sqrt{2z+1}-10}{(4-z^2)\sqrt{2z+1}}\\&\leq\frac{-4}{(4-z^2)\sqrt{2z+1}}\leq 0, \qquad z\in[-\frac{1}{2},0]\end{aligned}$$

可知在区间 $[-\frac{1}{2},0]$ 上, $\lambda_2(0)=0$ 取极小, $\lambda_2(-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$ 取极大. 而当 $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 时, 由于 $|\lambda_2|=|\lambda_1|$, 故此时在 $z=-\infty$ 取模最大值: $|\lambda_2(-\infty)|=1$.
最后, 发现 $\lambda_{1,2}$ 只在无穷远点 $z=-\infty$ 时的模为 1, 由于两个根的表达式不同, 故二次多项式不会在单位圆盘上取到重根. 综上所述, 当 $z\in(-\infty,0]$ 时, 二次多项式 $(4-z)\lambda^2-2(2+z)\lambda-z$ 满足根条件, 因此负实轴包含在绝对稳定区域 S 当中, 从而线性多步方法是 A_0-稳定的.

第二问

考虑如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\lambda(-u+\cos(t))$$

取初值为 $u(0)=0$ 或 1.

(1) 写出精确的 $u(t)$ 表达式:

(2) 对 $\lambda=1,10,100,1000$, 分别用显式 Euler 格式和隐式 Euler 格式求解:

(3) 比较用 Adams 方法和 Gear 方法计算 $\lambda=1000$ 时的数值行为.

解:

(1): 可知 $u^{'}+\lambda u=\lambda\cos(t)$, 则 $(e^{\lambda t}u(t))'=\lambda e^{\lambda t}\cos(t)$

求解可得

$$u(t)=Ce^{-\lambda t}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(\sin(t)+\lambda\cos(t))$$

其中 C 为待定常数, 代入 $u(0)=0$ 可得

$$u(t)=-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(\sin(t)+\lambda\cos(t))$$

若带入的是 $u(0)=1$, 则

$$u(t)=\frac{1}{1+\lambda^2}e^{-\lambda t}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2}(\sin(t)+\lambda\cos(t))$$