БУЛЕВА АЛГЕБРА

Глава 1. Введение

Современные компьютеры спроектированы с использованием подходов и обозначений из области математики, называемой **алгеброй**. Алгебраисты уже более сотни лет изучают математические системы именуемые **булевыми алгебрами**. Нет ничего более простого и естественного для человеческого понимания, чем законы булевой алгебры, так как они появились при изучение того, как мы мыслим, какие пути мышления верные, что является доказательством, и других схожих вещей. Булева алгебра названа так в честь английского математика Джорджа Буля, который в 1854 году опубликовал классическую книгу "An Investigation of the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.", в которой Буль намеревался дать математический анализ логики.

Булева алгебра была впервые придумана для решения задач, которые возникли в процессе разработки релейных коммутационных схем в 1938 году Клодом Шенноном. В своей статье "A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits" он представил способ представления любых схем, составленных из переключателей и реле, в виде набора математических выражений. Вычисления данных выражений были основаны на булевой алгебре.

1.1. Мотивация

Рассмотрим задачу сложения двух бинарных чисел A и B. Результат сложения будем представлять в виде двух битов: S – бит суммы и C – бит переноса. Есть всего 4 возможных комбинации двух бинарных входов, запишем полученные результаты:

A	B	C	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Если задуматься, то можно обнаружить следующие связи:

- Бит C равен 1 только в случае, когда оба бита A и B равны 1, иначе он равен 0.
- Бит S равен 1, если один из битов A и B равен 1, не не сразу оба.

Эффективное представление, упрощение и манипуляции над подобными логическими выражениями являются главным объектом изучения в булевой алгебре.

Глава 2. Определение и основные тождества

2.1. Определение

Сформулируем теперь математическое определение булевой алгебры:

Определение 2.1. *Булевой алгеброй называется непустое множество A с двумя бинарными операциями $\wedge$ (аналог конъюнкции), $\vee$ (аналог дизъюнкции), одной унарной операцией $\neg$ (аналог отрицания) и двумя выделенными элементами: 0 (или Ложь) и 1 (или Истина) такими, что для любых a, b, c из множества A верны следующие аксиомы:*

ассоциативность:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \qquad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

коммутативность:

$$a \vee b = b \vee a \qquad a \wedge b = b \wedge a$$

законы поглощения:

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

дистрибутивность:

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \qquad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

комплементность:

$$a \vee \neg a = 1 \qquad a \wedge \neg a = 0$$

2.2. Основные тождества

Из аксиом видно, что наименьшим элементом является 0, наибольшим является 1, а дополнение $\neg a$ любого элемента a однозначно определено. Для всех a и b из A верны также следующие равенства:

законы де Моргана:

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \qquad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

Блейка-Порецкого:

$$a \vee (\neg a \wedge b) = a \vee b \qquad a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge b$$

идемпотентность:

$$a \vee a = a \qquad a \wedge a = a$$

инволютивность:

$$\neg\neg a = a$$

свойства констант:

$$a \vee 0 = a \qquad a \wedge 1 = a$$

$$a \vee 1 = 1 \qquad a \wedge 0 = 0$$

$$\neg 0 = 1 \qquad \neg 1 = 0$$

склеивание:

$$(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) = b \qquad (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) = b$$

Глава 3. Нормальная форма

Формула в булевой логике может быть записана в дизъюнктивной и в конъюнктивной нормальной форме.

Определение 3.1. *Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции конъюнкций литералов.*

Определение 3.2. *Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) в булевой логике — нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции дизъюнкций литералов.*

Любая булева формула может быть приведена к ДНФ и к КНФ, следуя простым алгоритмам:

Алгоритм построения ДНФ / КНФ

1. Избавиться от всех логических операций, содержащихся в формуле, заменив их основными: конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием.
2. Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям.
3. Избавиться от знаков двойного отрицания.
4. Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Для каждой булевой формулы существует бесконечное множество соответствующих ей ДНФ и КНФ. Введём определение уникальной формы:

Определение 3.3. *Совершенная ДНФ (КНФ) – это такая ДНФ (КНФ), которая удовлетворяет трем условиям:*

- *в ней нет одинаковых элементарных конъюнкций (дизъюнкций).*
- *в каждой конъюнкции (дизъюнкции) нет одинаковых пропозициональных переменных.*
- *каждая элементарная конъюнкция (дизъюнкция) содержит каждый*

литерал из входящих в данную ДНФ (КНФ) литералов.

Рассмотрим пример получения СДНФ:

$$
\begin{aligned}
X \vee \neg Y \wedge \neg Z &= X \wedge (Y \vee \neg Y) \wedge (Z \vee \neg Z) \vee (X \vee \neg X) \wedge \neg Y \wedge \neg Z \\
&= (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee \\
&\vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \\
&= (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee \\
&\vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z),
\end{aligned} \tag{1}
$$