ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Глава 1. Линейное программирование

1.1. Введение

Линейное программирование начало получать большое внимание в 1940-х, когда люди были заинтересованы в минимизации стоимости различных систем при заданных различных ограничениях. Мы занимаемся ими сейчас, потому что мы можем решать их эффективно и очень большой класс задач может быть выражен в терминах ЛП. Линейное программирование оперирует переменными, линейными ограничения для этих переменных и линейной целевой функцией, которую необходимо максимизировать или минимизировать. Например:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 2 \\ \min 3x_1 + 2x_2 & \end{aligned} \tag{1}$$

Теперь рассмотрим пример задачи линейного программирования, называющейся "задача о диете". У нас есть n продуктов и m нутриентов, которые необходимы потреблять в достаточном количестве. Нам хочется потратить наименьшее возможное количество денег, питаясь с соблюдением этих требований. Пусть a_{ij} обозначает количество нутриента i в каждом продукте j; b_i – минимальное количество нутриента i, которое необходимо в здоровой диете; c_j – стоимость одной единицы продукта j; x_j – переменная, обозначающая количество продукта j, которое мы приобретём. Эти ограничения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij}x_j &\geq b_j \\ x_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

И целевая функция это минимизация общей стоимости:

$$\min \sum_j c_j x_j \tag{3}$$

Чтобы переписать задачу в матричной форме, обозначим A как матрицу размера $m \times n$, где $A_{ij} = a_{ij}$; B – матрица размера $m \times 1$, где $B_i = b_i$; x– столбец переменных размера $n \times 1$; c – столбец размера $n \times 1$, где $c_i = c_i$. Тогда мы можем записать ограничения как:

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0 \tag{4}$$

И целевую функцию как:

$$\min\ c^T x \tag{5}$$

В общем виде задачу ЛП можно записать в :

Определение 1.1. ***нормальной*** *форме*

$$\begin{aligned} \min\ c^T x \\ Ax \geq b \end{aligned} \tag{6}$$

Определение 1.2. *и в* ***канонической*** *форме:*

$$\begin{aligned} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1. *Нормальная и канонические формы эквивалентны*

Доказательство 1. *Для перехода из нормальной формы к канонической нам нужно сделать две вещи. Во-первых, мы можем ввести дополнительные переменные для каждого ограничения вида неравенство* $a_i x \geq b_i$*, чтобы получить ограничение вида равенство* $a_i x - s_i = b_i$*. Во-вторых, мы можем заменить каждую переменную* x_i *на* $x_i^+ - x_i^-$*, где* $x_i^+, x_i^- \geq 0$*. Очевидно, что полученная задача имеет те же решения, что и исходная.*

Для перехода из канонической формы к нормальной нам нужно заменить каждое ограничение вида равенство $a_i x = b_i$ *на два ограничения вида неравенство* $a_i x \geq b_i$ *и* $a_i x \leq b_i$*.*

Определение 1.3. *$x \in \mathbb{R}^n$ называется достижимым решением, если x удовлетворяет всем ограничениям. Допустимое решение x называется оптимальным, если оно минимизирует целевую функцию.*

1.2. Решение задачи ЛП

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме:

$$\min\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\} \tag{8}$$

Без ограничения общности сделаем два допущения. Во-первых, мы положим, что уравнение $Ax = b$ имеет решение, иначе исходная задача не имеет допустимых решений. Во-вторых, мы положим, что строки матрицы A линейно независимы, иначе некоторые ограничения избыточно, и мы можем от них избавиться.

Заметим, что при этих допущениях ранг матрицы A равен m – количество ограничений. Пусть $B \subseteq [n]$ – подмножество индексов, определим матрицу A_B как объединение B колонок из матрицы A. Аналогично мы определим x_B как колоночный вектор, состоящий из переменных $\{x_i | i \in B\}$. Предположим, что есть некоторое подмножество B из m индексов такое, что колонки матрицы A_B линейно независимы. Тогда матрица A_B имеет полный ранг, а значит является обратимой матрицей, значит уравнение:

$$A_B x_B = b \tag{9}$$

имеет единственное решение:

$$x_B = A_B^{-1} b \tag{10}$$

Мы можем увеличить вектор x_B до всех n переменных, положив $x_i = 0$ для всех индексов $i \notin B$ – этот вектор мы будем называть базисным решением. Заметим, что хотя базисное решение удовлетворяет ограничению $Ax = b$, оно может не удовлетворять ограничению на неотрицательность. Мы будем называть базисное решение достижимым, если $x_B \geq 0$.

Каждое множество индексов B, задающее линейно независимый набор колонок и мощностью m, даёт ровно одно базисное решение и не более одного достижимого базисного решения.

Теорема 2. *Для каждой задачи ЛП в канонической форме справедливо одно из следующего:*

1. *Задача ЛП неразрешима*
2. *Задача ЛП имеет неограниченный экстремум*
3. *Задача ЛП имеет достижимое базисное решение, которое является оптимальным*

Доказательство 2. *Предположим, что наша задача ЛП разрешима и имеет ограниченный экстремум. Дополнительно предположим, что у нас есть x^* – достижимое решение. Теперь мы покажем, что существует достижимое базисное решение x такое, что $c^T x \leq c^T x^*$. Таким образом мы получим, что для любого достижимого решения есть достижимое базисное решение с не большим значением целевой функции, из чего следует, что существует оптимальное достижимое базисное решение.*

Выберем достижимое решение $\tilde{x}$ среди всех таких, что $c^T x \leq c^T x^*$, и которое имеет наименьшее количество ненулевых координат. Пусть $P = \{i | \tilde{x_i} > 0\}$ – множество координат, которые положительны. Заметим, что $\sum_{j \in P} A_j \tilde{x_j} = \sum_j A_j \tilde{x_j} = b$.

Возможны два случая. В первом случае колонки, соответствующие индексам из P линейно зависимы. Так как A имеет полный ранг, если нужно, мы можем добавить больше колонок из $[n] \backslash P$ к P, чтобы получить множество B из m индексов такое, что колонки матрицы A_B также линейно независимы, тем самым A_B является обратимой матрицей. Рассмотрим

$$A_B x_B = b \tag{11}$$

Существует уникальное решение x_B для этого уравнения. Мы также знаем, что $\tilde{x_B}$ решение этого уравнения, значит оно должно быть уникальным решением. А раз $\tilde{x}$ достижимо, то оно является достижимым базисным решением соответствующим B.

Во втором случае предположим, что колонки матрицы A_P линейно зависимы. Значит существуют коэффициенты w_i не все одновременно равные нулю такие, что

$$\sum_{j \in P} w_j A_j = A_P w_P = 0 \tag{12}$$

Положив $w_j = 0$ для всех $j \notin P$ мы получим ненулевой вектор w такой, что $Aw = 0$. Таким образом, если мы рассмотрим вектор $y = \tilde{x} - \epsilon w$, то получим

$$Ay = A(\tilde{x} - \epsilon w) = b - \epsilon 0 = b \tag{13}$$

Более того, так как вектор w ненулевой только в координатах из P, и x положительный в этих координатах, то для маленьких значений ϵ мы имеем, что $y = \tilde{x} - \epsilon w \geq 0$. Получается, что y тоже достижимое решение при достаточно малых значениях эпсилон.

Предположим, что нам повезло, и $c^T w = 0$. Тогда $c^T y = c^T(\tilde{x} - \epsilon w) = c^T \tilde{x}$. Мы можем положить, что w имеет положительную координату, иначе можно заменить w на $-w$. Тогда при увеличении ϵ мы уменьшаем некоторые положительные координаты в y без изменения значения целевой функции. И в какой-то момент мы сделаем некоторые координаты нулевыми, вступая в противоречие с тем, что $\tilde{x}$ имеет наименьшее количество ненулевых координат среди всех x таких, что $c^T x \leq c^T x^*$.

Теперь предположим, что $c^T x > 0$ (в противном случае мы можем заменить w на $-w$). Снова, если существует одна положительная координата w_j мы можем повторить предыдущий аргумент и получить противоречие. Остаётся случай, и когда все координаты w отрицательные. Заметим, что тогда $y = \tilde{x} - \epsilon w$ неотрицательно, а значит достижимо для всех $\epsilon \geq 0$. Более того значение целевой функции $c^T y = c^T \tilde{x} - \epsilon(c^T w)$ стремится к $-\infty$ при $\epsilon \to \infty$. А это противоречит предположению, что задача ЛП имеет ограниченный экстремум.

Глава 2. Применения ЛП

2.1. Наилучшее разбиение двудольного графа

Джордж Данциг изучал задачу наилучшего разбиения двудольного графа во время службы в армии. У него была группа людей, которым он хотел такое же количество задач. Он знал, что конкретный человек, выполняющий конкретную задачу, будет приносить армии определенную пользу. Его цель была в том, чтобы дать каждому человеку задачу таким образом, чтобы максимизировать общую пользу. Более формально, у нас есть двудольный граф $G = (U \cup V, E)$ с некоторым весами на рёбрах $w_{u,v} \forall (u, v) \in E$.

Первым желанием будет ввести переменные x_{uv}, которые равны 1, если мы даём человеку u задачу v и 0 в противном случае:

$$\begin{aligned} \max \sum_{(u,v) \in E} & w_{uv} x_{uv} \\ 0 \le\ & x_{uv} \le 1 \\ & x_{uv} \in \mathbb{Z} \\ \forall v \in V \sum_{u:(u,v) \in E} & x_{uv} = 1 \\ \forall u \in U \sum_{v:(u,v) \in E} & x_{uv} = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

К сожалению нам мешает ограничение на целочисленность переменных. К счастью, мы можем воспользоваться релаксацией.

Релаксация

Опустив ограничения на целочисленность переменных, мы получаем задачу ЛП. Заметим, что:

- Новая задача ЛП всегда ограничена, так как ограничения задают n-мерный гиперкуб.
- Если полученная задача ЛП неразрешима, то исходная задача также неразрешима. Так как если множество допустимых решений задачи ЛП пусто, то оно не может содержать целочисленных решений.
- В общем случае оптимум исходной задачи $\le$ оптимума задачи ЛП.

Теорема 3. *Все экстремальные точки являются целочисленными.*

Теорема 4. *Если полученная задача ЛП разрешима, то разрешима и исходная задача, причём их оптимумы совпадают.*

Доказательство 3. *Пусть $\tilde{x}$ достижимое и нецелочисленное решение. Тогда существует нецелочисленное ребро. Рассмотрим одну из его вершин – она также должна иметь смежное нецелочисленное ребро в силу ограничений. Аналогично мы можем пойти вдоль этого другого ребра до противоположной вершины и найти ещё одно нецелочисленное ребро. Так как граф конечен и двудольный, то повторяя этот процесс мы в конце концов получим чётный цикл нецелочисленных рёбер C.*

Пусть $\epsilon = \min(\min_{(u,v)\in C} x_{uv}, \min_{(u,v)\in C} 1 - x_{uv}$. Другими словами ϵ это минимальное расстояние от одного из весов в этом цикле до целого числа. Пусть x^+ будет $\tilde{x}$ с добавленным ϵ к нечётным рёбрам и $-\epsilon$ к чётным. Пусть x^- будет $\tilde{x}$ с добавленным ϵ к чётным рёбрам и $-\epsilon$ к нечётным. Теперь мы имеем, что $\tilde{x} = \frac{1}{2}x^+ + \frac{1}{2}x^-$.

Повторим этот процесс, пока все значения не будут целочисленными. Заметим, что значение целевой функции в точке $\tilde{x}$ равно среднему между значениями целевой функции в точках x^+ и x^-. А так как значения целевой функции в этих точках не больше, чем в оптимуме, то они должны быть равны оптимуму.

Глава 3. Симплекс метод

Симплекс метод позволяет переходить от одного достижимого базисного решения к другому более лучшему, улучшая значение целевой функции на каждом шаге. На входе имеем $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b, c \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\max\, c^T x \\
Ax \leq b \\
x \geq 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

3.1. Алгоритм

Шаг 1

Введём дополнительные переменные $x_{n+1} \dots x_{n+m}$ для каждого неравенства, сделав их равенствами. Эти выражения будут нашей "расширенной" таблицей, по которой мы максимизируем условие. Мы предполагаем, что у нас уже есть допустимое базисное решение в том смысле, что мы предполагаем, что если все небазисные переменные будут равны 0, то базисные переменные будут неотрицательными.

Шаг 2

В выражении для максимизации выберем переменную с положительным коэффициентом. Она будет называться ведущей переменной. Если такой не существует, то мы просто обнуляем все базисные переменные.

Шаг 3

Найдём равенство, которое наиболее сильно ограничивает ведущую переменную (устанавливает самую нижнюю верхнюю грань для неё). Решим это равенство относительно ведущей переменной и подставим полученное значение во все другие равенства, включая целевую функцию. Если нет ограничения на ведущую переменную, то и нет ограничения для целевой функции.

Глава 4. Двойственная задача ЛП

Для задачи ЛП:

$$P = \max(c^T x | Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n) \tag{16}$$

существует двойственная ей задача ЛП:

$$D = \min(b^T y | A^T y \geq c, x \geq 0, y \in \mathbb{R}^m) \tag{17}$$

4.1. Двойственная теорема ЛП

Теорема 5. ***Слабая двойственная теорема ЛП.*** *Пусть* $P = \max(c^T x | Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n)$ *и* D *– её двойственная задача* $D = \min(b^T y | A^T y \geq c, x \geq 0, y \in \mathbb{R}^m)$. *Если* x *достижимое решение для* P *и* y *достижимое решение для* D, *то* $c^T x \leq b^T y$

Доказательство 4.

$$c^T x = x^T c \leq x^T (A^T y) = (Ax)^T y \leq b^T y \tag{18}$$

Из этого мы можем заключить, что если P неограничена, то D неразрешима. Аналогично, если D неограничена, то P неразрешима.

Теорема 6. ***Двойственная теорема ЛП.*** *Если* P *и* D *двойственная пара задач ЛП, то имеет место один из случаев:*

1. *Обе задачи неразрешимы.*
2. P *неограничена и* D *неразрешима.*
3. D *неограничена и* P *неразрешима.*
4. *Обе задачи разрешимы, и существуют оптимальные решения* x, y *для* P *и* D *такие, что* $c^T x = b^T y$.