



Centro Universitário FEI

PÓS GRADUAÇÃO – ENGENHARIA ELÉTRICA

MESTRADO – IAAA

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA

À AUTOMAÇÃO E ROBÓTICA

Programação Científica– PEL 216

Prof. Dr. Reinaldo Augusto da Costa Bianchi

DESCIDA DE GRADIENTE

“MÉTODOS NUMÉRICO”

FLÁVIO INFANTI

Matrícula: 118.310-2

AULA 04 – 09/08/2019

1 OBJETO

Dando continuidade ao aprendizado da disciplina de Programação Científica, com o objetivo de aprofundar-se nos estudos referentes à Programação Orientada a Objeto C++, iremos desenvolver o Algoritmo de Descida do Gradiente conforme apresentado durante aula realizada em 09/08/2019.

2 INTRODUÇÃO

A maioria das tarefas em Machine Learning é na verdade solucionar problemas relacionados aos Métodos Numéricos, os quais contamos com duas técnicas de otimização que são: o Método de Newton-Raphson para o cálculo das raízes de uma função e o Algoritmo de Descida do Gradiente para encontrar o valor mínimo de uma função, seguindo a direção do gradiente.

2.1 Algoritmo de Descida de Gradiente

A Descida do Gradiente é uma ferramenta padrão para otimizar funções complexas iterativamente dentro de um programa de computador. Para uma determinada função arbitrária, seu objetivo é encontrar seu mínimo que às vezes pode ser considerado um mínimo local ou global.

A derivada é um conceito de Cálculo e refere-se à inclinação da função em um determinado ponto. Precisamos conhecer a inclinação para que possamos conhecer a direção (sinal) para mover os valores dos coeficientes gerando desta forma a próxima iteração.

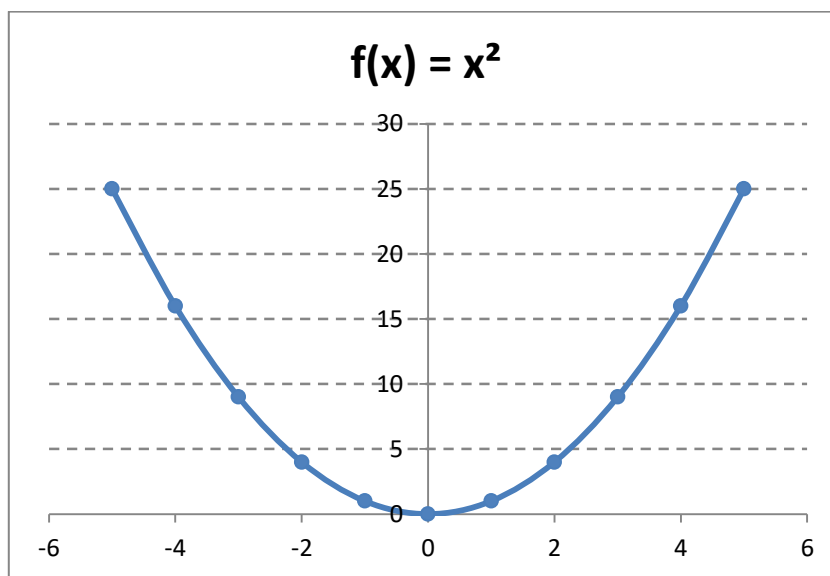
Verificando que a direção está em declive, podemos atualizar os valores dos coeficientes. Um parâmetro de taxa de aprendizagem (β) deve ser especificado e controla o quanto os coeficientes podem mudar em cada atualização.

Este processo se repetirá até que o erro seja zero ou próximo o suficiente de zero, indicando que chegamos no mínimo da função.

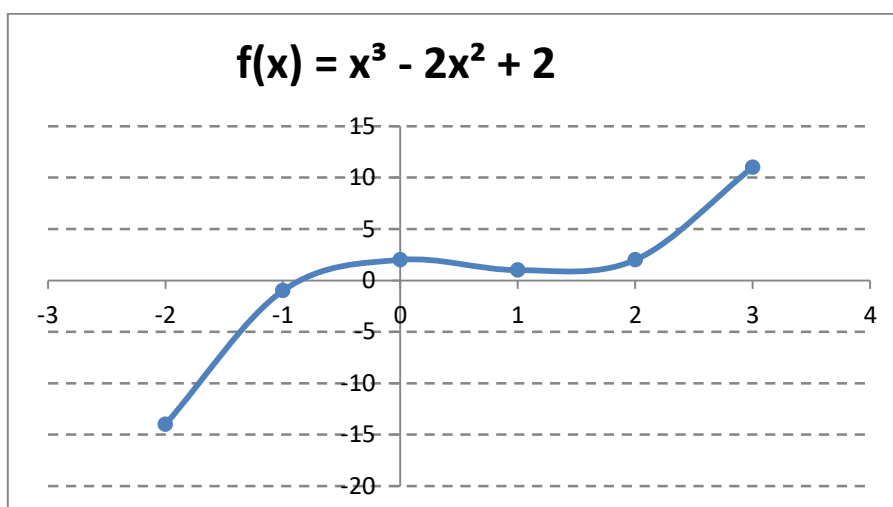
3 PROPOSTA DE IMPLEMENTAÇÃO.

Para implementação do algoritmo, partiu-se da lista de exercício fornecida em sala de aula com duas funções proposta para serem resolvidas e a ideia aplicada no desenvolvimento do programa foi gerar um “menu” onde pode ser escolhido a solução desejada, segue abaixo a descrição das duas funções:

- Opção 1 → $f(x) = x^2$



- Opção 2 → $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$



4 RESULTADOS

Segue abaixo, telas obtidas durante simulação realizada pelo programa desenvolvido:

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 1; $\beta = 1$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.000000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.000000 x_0 (novo) .: = 0.500000 Funcao: $f(x) = 1.000000^2 = 1.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.000000 = 2.000000$</p> <p>A solucao final eh: 0.500000</p> <p>Tempo de execucao : 13.612 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.500000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>A solucao final eh: 1.500000</p> <p>Tempo de execucao : 14.195 s</p>

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 1; $\beta = 0.5$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.500000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>A solucao final eh: 1.500000</p> <p>Tempo de execucao : 15.981 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.750000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>A solucao final eh: 1.750000</p> <p>Tempo de execucao : 12.084 s</p>

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 1; $\beta = 0.1$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.900000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>A solucao final eh: 1.900000</p> <p>Tempo de execucao : 11.510 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.950000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>A solucao final eh: 1.950000</p> <p>Tempo de execucao : 9.902 s</p>

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 0.001; $\beta = 1$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.000000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.000000 x_0 (novo) .: = 0.500000 Funcao: $f(x) = 1.000000^2 = 1.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.000000 = 2.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 0.500000 x_0 (novo) .: = 0.250000 Funcao: $f(x) = 0.500000^2 = 0.250000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.500000 = 1.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 4 x_0: = 0.250000 x_0 (novo) .: = 0.125000 Funcao: $f(x) = 0.250000^2 = 0.062500$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.250000 = 0.500000$</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>==> Numero de iteracao = 7 x_0: = 0.031250 x_0 (novo) .: = 0.015625 Funcao: $f(x) = 0.031250^2 = 0.000977$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.031250 = 0.062500$</p> <p>==> Numero de iteracao = 8 x_0: = 0.015625 x_0 (novo) .: = 0.007813 Funcao: $f(x) = 0.015625^2 = 0.000244$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.015625 = 0.031250$</p> <p>==> Numero de iteracao = 9 x_0: = 0.007813 x_0 (novo) .: = 0.003906 Funcao: $f(x) = 0.007813^2 = 0.000061$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.007813 = 0.015625$</p> <p>==> Numero de iteracao = 10 x_0: = 0.003906 x_0 (novo) .: = 0.001953 Funcao: $f(x) = 0.003906^2 = 0.000015$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.003906 = 0.007813$</p> <p>==> Numero de iteracao = 11 x_0: = 0.001953 x_0 (novo) .: = 0.000977 Funcao: $f(x) = 0.001953^2 = 0.000004$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.001953 = 0.003906$</p> <p>A solucao final eh: 0.000977</p> <p>Tempo de execucao : 15.328 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.500000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.500000 x_0 (novo) .: = 0.333333 Funcao: $f(x) = (1.500000^3) - (2 * 1.500000^2) + 2 = 0.875000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.500000^2 - (4 * 1.500000)) = 0.750000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 0.333333 x_0 (novo) .: = 2.148148 Funcao: $f(x) = (0.333333^3) - (2 * 0.333333^2) + 2 = 1.814815$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 0.333333^2 - (4 * 0.333333)) = -1.000000$</p> <p>A solucao final eh: 2.148148</p> <p>Tempo de execucao : 9.429 s</p>

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 0.001; $\beta = 0.5$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.500000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.500000 x_0 (novo) .: = 1.125000 Funcao: $f(x) = 1.500000^2 = 2.250000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.500000 = 3.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 1.125000 x_0 (novo) .: = 0.843750 Funcao: $f(x) = 1.125000^2 = 1.265625$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.125000 = 2.250000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 4 x_0: = 0.843750 x_0 (novo) .: = 0.632813 Funcao: $f(x) = 0.843750^2 = 0.711914$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.843750 = 1.687500$</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>==> Numero de iteracao = 20 x_0: = 0.008457 x_0 (novo) .: = 0.006342 Funcao: $f(x) = 0.008457^2 = 0.000072$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.008457 = 0.016913$</p> <p>==> Numero de iteracao = 21 x_0: = 0.006342 x_0 (novo) .: = 0.004757 Funcao: $f(x) = 0.006342^2 = 0.000040$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.006342 = 0.012685$</p> <p>==> Numero de iteracao = 22 x_0: = 0.004757 x_0 (novo) .: = 0.003568 Funcao: $f(x) = 0.004757^2 = 0.000023$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.004757 = 0.009514$</p> <p>==> Numero de iteracao = 23 x_0: = 0.003568 x_0 (novo) .: = 0.002676 Funcao: $f(x) = 0.003568^2 = 0.000013$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.003568 = 0.007135$</p> <p>A solucao final eh: 0.002676</p> <p>Tempo de execucao : 10.979 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.750000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.750000 x_0 (novo) .: = 1.467857 Funcao: $f(x) = (1.750000^3) - (2 * 1.750000^2) + 2 = 1.234375$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.750000^2 - (4 * 1.750000)) = 2.187500$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 1.467857 x_0 (novo) .: = 0.747513 Funcao: $f(x) = (1.467857^3) - (2 * 1.467857^2) + 2 = 0.853443$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.467857^2 - (4 * 1.467857)) = 0.592385$</p> <p>==> Numero de iteracao = 4 x_0: = 0.747513 x_0 (novo) .: = 1.242343 Funcao: $f(x) = (0.747513^3) - (2 * 0.747513^2) + 2 = 1.300141$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 0.747513^2 - (4 * 0.747513)) = -1.313725$</p> <p>A solucao final eh: 1.242343</p> <p>Tempo de execucao : 8.894 s</p>

Entrada de Dados: $x_0 = 2$; Erro = 0.001; $\beta = 0.1$	
$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$
<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.900000 Funcao: $f(x) = 2.000000^2 = 4.000000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 2.000000 = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.900000 x_0 (novo) .: = 1.805000 Funcao: $f(x) = 1.900000^2 = 3.610000$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.900000 = 3.800000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 1.805000 x_0 (novo) .: = 1.714750 Funcao: $f(x) = 1.805000^2 = 3.258025$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.805000 = 3.610000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 4 x_0: = 1.714750 x_0 (novo) .: = 1.629012 Funcao: $f(x) = 1.714750^2 = 2.940367$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 1.714750 = 3.429500$</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>==> Numero de iteracao = 87 x_0: = 0.024281 x_0 (novo) .: = 0.023067 Funcao: $f(x) = 0.024281^2 = 0.000590$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.024281 = 0.048561$</p> <p>==> Numero de iteracao = 88 x_0: = 0.023067 x_0 (novo) .: = 0.021913 Funcao: $f(x) = 0.023067^2 = 0.000532$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.023067 = 0.046133$</p> <p>==> Numero de iteracao = 89 x_0: = 0.021913 x_0 (novo) .: = 0.020818 Funcao: $f(x) = 0.021913^2 = 0.000480$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.021913 = 0.043827$</p> <p>==> Numero de iteracao = 90 x_0: = 0.020818 x_0 (novo) .: = 0.019777 Funcao: $f(x) = 0.020818^2 = 0.000433$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.020818 = 0.041635$</p> <p>==> Numero de iteracao = 91 x_0: = 0.019777 x_0 (novo) .: = 0.018788 Funcao: $f(x) = 0.019777^2 = 0.000391$ Derivada ...: $f'(x) = 2 * 0.019777 = 0.039553$</p> <p>A solucao final eh: 0.018788</p> <p>Tempo de execucao : 11.476 s</p>	<p>==> Numero de iteracao = 1 x_0: = 2.000000 x_0 (novo) .: = 1.950000 Funcao: $f(x) = (2.000000^3) - (2 * 2.000000^2) + 2 = 2.000000$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 2.000000^2 - (4 * 2.000000)) = 4.000000$</p> <p>==> Numero de iteracao = 2 x_0: = 1.950000 x_0 (novo) .: = 1.899830 Funcao: $f(x) = (1.950000^3) - (2 * 1.950000^2) + 2 = 1.809875$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.950000^2 - (4 * 1.950000)) = 3.607500$</p> <p>==> Numero de iteracao = 3 x_0: = 1.899830 x_0 (novo) .: = 1.849084 Funcao: $f(x) = (1.899830^3) - (2 * 1.899830^2) + 2 = 1.638452$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.899830^2 - (4 * 1.899830)) = 3.228744$</p> <p>==> Numero de iteracao = 4 x_0: = 1.849084 x_0 (novo) .: = 1.797214 Funcao: $f(x) = (1.849084^3) - (2 * 1.849084^2) + 2 = 1.484002$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.849084^2 - (4 * 1.849084)) = 2.861002$</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>.</p> <p>==> Numero de iteracao = 7 x_0: = 1.686553 x_0 (novo) .: = 1.624532 Funcao: $f(x) = (1.686553^3) - (2 * 1.686553^2) + 2 = 1.108412$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.686553^2 - (4 * 1.686553)) = 1.787170$</p> <p>==> Numero de iteracao = 8 x_0: = 1.624532 x_0 (novo) .: = 1.553428 Funcao: $f(x) = (1.624532^3) - (2 * 1.624532^2) + 2 = 1.009101$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.624532^2 - (4 * 1.624532)) = 1.419186$</p> <p>==> Numero de iteracao = 9 x_0: = 1.553428 x_0 (novo) .: = 1.463503 Funcao: $f(x) = (1.553428^3) - (2 * 1.553428^2) + 2 = 0.922360$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.553428^2 - (4 * 1.553428)) = 1.025704$</p> <p>==> Numero de iteracao = 10 x_0: = 1.463503 x_0 (novo) .: = 1.314617 Funcao: $f(x) = (1.463503^3) - (2 * 1.463503^2) + 2 = 0.850909$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.463503^2 - (4 * 1.463503)) = 0.571513$</p> <p>==> Numero de iteracao = 11 x_0: = 1.314617 x_0 (novo) .: = 2.419401 Funcao: $f(x) = (1.314617^3) - (2 * 1.314617^2) + 2 = 0.815509$ Derivada ...: $f'(x) = (3 * 1.314617^2 - (4 * 1.314617)) = -0.073816$</p> <p>A solucao final eh: 2.419401</p> <p>Tempo de execucao : 11.647 s</p>

5 CONCLUSÕES

Como principal conclusão podemos afirmar que:

- Otimização por Descida de Gradiente é um método iterativo;
- Não possui garantia de encontrar parâmetros ótimos;
- Esta técnica utiliza somente derivadas de 1ª ordem.
- Alterando β pode-se evitar mínimo local.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFIA

- DEITEL, H.M. ; DEITEL, P.J. - C++ How to program: Third edition, © 2001.
- ZIVIANI, N. Projeto de Algoritmos com Implementações em Java e C++. Thomson, 2007.
- CHAPRA, Steven C. Applied Numerical Methods,
- PRESS, W.H.; TEUKOLSKY, S.A. Numerical Recipes in C++. Second edition, 2002.

ANEXO – LISTAGEM DO PROGRAMA

```
//=== PEL216 - PROGRAMACAO CIENTIFICA
//=== Prof. Dr. Reinaldo Augusto da Costa Bianchi
//=== Aluno: Flavio Infanti nº 118.310-2
//=== AULA 04 - 09/08/2019
//===
//=== DESCIDA DE GRADIENTE

// Bibliotecas
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <locale.h>

// Executa o Módulo de |X|
float Abs( float x )
{
    x = ( x * x ) / -(x);
    return x;
}
```



```

int main()
{
    int opcao;

    printf("=====\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=                                DESCIDA DE GRADIENTE                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=                                ESCOLHA A OPCAO DESEJADA                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=    1- Funcao f(x) = x^2                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=    2- Funcao f(x) = x^3 - 2x^2 + 2                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=    0- Sair do Programa                                =\n");
    printf("=                                =\n");
    printf("=====\n\n");

    scanf("%i",&opcao);

    //ZERA VARIAVEIS
    float x0 = 0., xnovo = 0., Fxnovo = 0., beta=0,
    Fdxnovo = 0., E = 0.; // Fdx0 = derivada de Fx0
    int k = 0;

    switch(opcao)
    {
        // ESCOLHE O EXERCICIO A) F(X)= X^2, SENDO x0 = 2
        case 1:
            printf("\nDigite o valor para x0: " );
            scanf( "%f", &xnovo );
            printf( "Digite o Erro Esperado: " );
            scanf( "%f", &E );
            printf( "Digite a taxa de aprendizado (0<= beta <= 1): " );
            scanf( "%f", &beta );
            do{

                x0 = xnovo;
                Fxnovo = ( x0 * x0); //inserir sua função principal aqui
                Fdxnovo = 2. * ( x0 ) ; //inserir a derivada da função principal aqui

                xnovo = x0 - (( Fxnovo / Fdxnovo ) * beta);
                k += 1;
            } while (E > 0.);
    }
}

```

```

        printf( "\n==> Numero de iteracao = %d", k );
        printf( "\n  x0 .....: = %f", x0);
        printf( "\n  x0 (novo) .: = %f", xnovo );
        printf( "\n  Funcao ....: f(x) = %f ^ 2 = %f", x0, x0 * x0);
        printf( "\n  Derivada ...: f'(x) = 2 * %f = %f\n", x0, 2 * x0);

    } while( Abs( xnovo - x0 ) >= E || Abs( Fxnovo ) >= E );
    printf("\n\nA solucao final eh: %f\n", xnovo );
    break;

// ESCOLHE O EXERCICIO B) F(X)= X^3 -2* X^2 + 2, SENDO x0 = 2
case 2:
    printf( "Digite o valor para x0: " );
    scanf( "%f", &xnovo );
    printf( "Digite o Erro Esperado: " );
    scanf( "%f", &E );
    printf( "Digite a taxa de aprendizado (0<= beta <= 1): " );
    scanf( "%f", &beta );
    do{
        x0 = xnovo;
        Fxnovo = ( x0 * x0 * x0 ) - 2. * x0 * x0 + 2.; //inserir sua função principal aqui
        Fdxnovo = 3. * ( x0 * x0 ) - 4. * x0; //inserir a derivada da função principal aqui

        xnovo = x0 - (( Fxnovo / Fdxnovo ) * beta);
        k += 1;

        printf( "\n==> Numero de iteracao = %d", k );
        printf( "\n  x0 .....: = %f", x0);
        printf( "\n  x0 (novo) .: = %f", xnovo );
        printf( "\n  Funcao ....: f(x) = (%f ^3) - (2 * %f^2) + 2 = %f", x0,x0,(( x0 * x0 * x0 ) - 2. * x0 * x0 + 2));
        printf( "\n  Derivada ...: f'(x) = (3 * %f ^2 - (4 * %f) = %f\n", x0,x0, ((3*x0*x0)-(4*x0)));

    } while( Abs( xnovo - x0 ) >= E || Abs( Fxnovo ) >= E );
    printf("\n\nA solucao final eh: %f\n", xnovo );
    break;
}
system("pause");
return 0;
}

```