

Praca laboratoryjna №2

Modele matematyczne w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych i metody ich rozwiązania.

1. Podstawy teoretyczne.

Do badania złożonych procesów zachodzących w obiektach, które zmieniają się w czasie, stosuje się opisowe modele matematyczne w postaci równań różniczkowych (lub układów równań różniczkowych). Rozwiązania takich układów są funkcjami czasu, dzięki czemu mogą opisywać zmiany w czasie procesów zachodzących wewnątrz symulowanych obiektów.

Większość realnych modeli dynamicznych to bardzo złożone układy równań różniczkowych nieliniowych, z reguły nie dopuszczają one rozwiązań analitycznych. Ich rozwiązania można znaleźć tylko z wykorzystaniem metod numerycznych. Równocześnie ważną klasą modeli dynamicznych, za pomocą których można wyjaśnić dużą liczbę zjawisk przyrodniczych lub rozwiązać wiele problemów technicznych i które jednocześnie dopuszczają rozwiązanie analityczne, są liniowe modele dynamiczne.

Modele matematyczne w postaci równań liniowych różniczkowych w odniesieniu do układów mechanicznych i elektrycznych.

Model dynamiczny liniowy może reprezentować różnego typu procesy, nie tylko techniczne. Jego podstawy matematyczne zostały sformułowane przez Izaaka Newtona w postaci drugiej zasady dynamiki, zgodnie z którą, siła f działająca na ciało o masie punktowej m , powoduje jego przyspieszenie o wartości a :

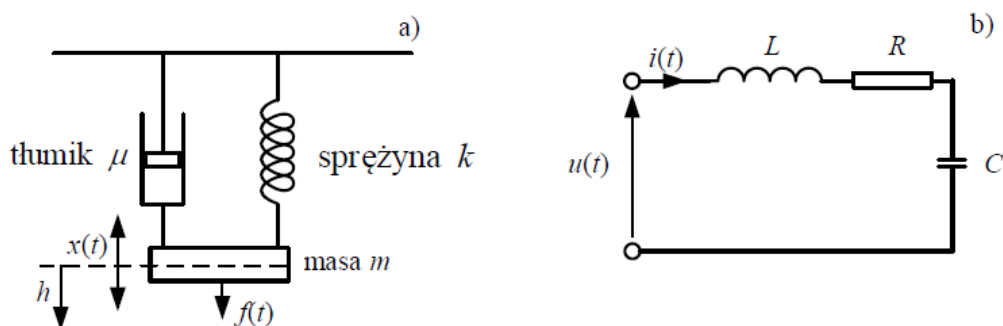
$$f = m \cdot a = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad (1.1)$$

co łączy się ze zmianą jego prędkości chwilowej $v(t)$ na drodze $x(t)$. Siła, przyspieszenie, prędkość oraz droga w (1.1) są wektorami, co jest ważne w przypadku wielowymiarowym (z wieloma współrzędnymi). Dalsze rozwinięcie tego odkrycia stało się podstawą tworzenia modeli dynamiki w formie równań różniczkowych i całkowych. Szybko było zauważono, że regułę (1.1), która odnosi się do **układu mechanicznego**, można także stosować do **innych układów fizycznych (elektrycznych, chemicznych, biologicznych)**, czy też **systemów z zupełnie innych dziedzin, jak socjologia lub ekonomia**. Przykłady takich układów (**mechanicznego i elektrycznego**) są pokazane na rys. 1. W odniesieniu do układu mechanicznego (rys. 1a), można sformułować następujące zależności:

$$f_{\mu} = \mu v(t) = \mu \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{- siła działająca na tłumik o współczynniku tłumienia } \mu,$$

$$f_m = m \frac{dv(t)}{dt} = mg \quad \text{- siła działająca na masę } m \text{ w związku z przyspieszeniem ziemskim } g,$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{k} \frac{df_k(t)}{dt} \quad \text{- prędkość przesuwania się końca sprężyny o stałej } k.$$



Rys. 1. Przykład układu mechanicznego (a) i elektrycznego (b)

W ostatnim przypadku, siła związana z ugięciem sprężyny jest proporcjonalna do wartości tego ugięcia: $f_k = k \cdot x(t)$. Zakłada się, że w początkowym stanie ustalonym $x = 0$, a masa jest podwieszona na wysokości h .

Na podstawie drugiej zasady dynamiki od razu otrzymamy liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$ma \equiv m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\mu \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) \quad (1.2)$$

lub

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0. \quad (1.2a)$$

Przy oscylacjach wymuszonych, w równanie ruchu (1.2a) wchodzi jeszcze zależna od czasu funkcja $f(t)$. Dlatego równanie ruchu ma postać

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad (1.2b)$$

W odniesieniu do elementów układu elektrycznego (rys. 1b) występują następujące zależności (modele):

$$u_R(t) = Ri(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} \quad \text{– spadek napięcia na oporniku,}$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{– spadek napięcia na cewce,}$$

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \text{– prąd przepływający przez kondensator,}$$

$Q(t)$ – ładunek elektryczny.

Na podstawie prawa Kirchhoffa $u_L + Ri + u_C = 0$, otrzymamy zatem następujący model matematyczny tego obwodu:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0. \quad (1.3)$$

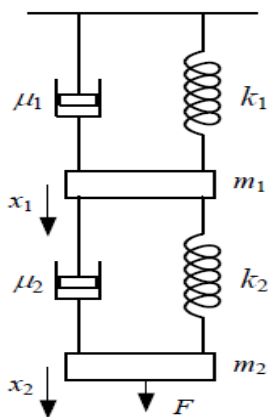
Widać, że w obu przypadkach mamy do czynienia z równaniami drugiego rzędu, które charakteryzują się możliwością wystąpienia drgań. Charakterystyczną cechą powyższych modeli jest powiązanie dynamiki analizowanego układu z działającą na niego siłą. W przypadku układu elektrycznego, siła jest reprezentowana przez napięcie elektryczne. Analiza układów z rys. 1 potwierdza znaną obserwację, że **często systemy o bardzo różnej naturze mogą być opisane za pomocą tych samych lub bardzo zbliżonych modeli matematycznych.**

Przykład z rys.1 pozwala sformułować zasady równoważności podstawowego układu mechanicznego o ruchu posuwistym z układem elektrycznym. Ekwiwalenty odpowiednich wielkości i zachodzących między nimi relacji są zebrane w Tabeli 1

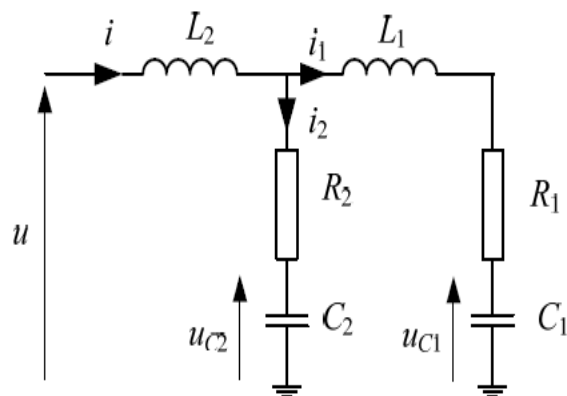
Tabela 1. Równoważność układu mechanicznego i układu elektrycznego

Układ mechaniczny	Układ elektryczny
siła f (N)	napięcie u (V)
prędkość v (m/s)	prąd i (A)
przesunięcie x (m)	ładunek elektryczny Q ($1C = 1V \cdot 1F$)
masa m (kg)	indukcyjność L (H)
współczynnik sprężystości k (N/m)	odwrotność pojemności $1/C$ (1/F)
współczynnik tłumienia μ (N·s/m)	rezystancja R (Ω)
Podstawowe relacje: masa: $f = m \frac{dv}{dt}$, $f = \frac{dp}{dt}$, $p = mv$ sprężyna: $v = \frac{1}{k} \frac{df}{dt}$, $v = \frac{dx}{dt}$, $f = kx$ tłumik: $f = \mu v$	Podstawowe relacje: cewka: $u = L \frac{di}{dt}$, $u = \frac{d\psi}{dt}$, $\psi = Li$ kondensator: $i = C \frac{du}{dt}$, $i = \frac{dQ}{dt}$, $u = \frac{1}{C} Q$ opornik: $u = Ri$

Symetria powyższych zależności i liniowości elementów pozwala tworzyć wzajemnie wymienne modele systemów elektrycznych i mechanicznych. **Główną właściwością systemów liniowych jest możliwość zastosowania zasady superpozycji : suma działań na system odpowiada sumie jego reakcji na te działania.** Prądy z każdego źródła lub elementy ruchu są niezależne, dlatego prądy lub charakterystyki ruchu są obliczane osobno dla każdego podukładu lub źródła. Wynikowe charakterystyki uzyskuje się przez zsumowanie charakterystyk częściowych.



Rys. 2. Analizowany układ mechaniczny



Rys. 3. Model elektryczny

Například, eśli w układzie znajdują się cztery elementy gromadzące energię (dwie sprężyny oraz dwie masy, wobec czego można założyć, że do opisanja jego dynamiki należy sformułować cztery równania stanu.

Występują tu cztery elementy gromadzące energię, dla których napiszemy następujące równania różniczkowe:

$$\begin{aligned} f_{m1} &= m_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad v_1 = \frac{dx_1}{dt} \text{ - (w odniesieniu do } m_1, \mu_1 \text{ oraz } k_1), \\ f_{m2} &= m_2 \frac{dv_{m2}}{dt}, \quad v_2 = \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} \text{ - (w odniesieniu do } m_2, \mu_2 \text{ oraz } k_2), \end{aligned}$$

gdzie: f_{m1}, f_{m2} – siły związane z ruchem mas m_1 oraz m_2 , v_1 – prędkość przemieszczania x_1 , v_2 – prędkość ruchu μ_2, k_2 , natomiast v_{m2} – prędkość związana z ruchem masy m_2 .

Ponadto:

$$\begin{aligned} f_{s1} &= k_1 x_1, \quad f_{s2} = k_2 (x_2 - x_1), \quad f_{s1} = f_{m2} + f_{b2} + f_{s2}, \\ f_{b1} &= \mu_1 v_1, \quad f_{b2} = \mu_2 v_2, \quad f_{b2} + f_{s2} = f_{m1} + f_{b1} + f_{s1}, \end{aligned}$$

gdzie: $f_{s1}, f_{s2}, f_{b1}, f_{b2}$ – siły działające na poszczególne elementy z rys.2; zakłada się, że elementy rozmieszczone równolegle do siebie, przesuwają się na tę samą odległość.

Prowadzi to do następującego układu równań:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = v_{m2}, \\ \frac{dv_{m2}}{dt} = -\frac{1}{m_2} k_2 (x_2 - x_1) - \frac{1}{m_2} \mu_2 (v_{m2} - v_1) + \frac{1}{m_2} f, \\ \frac{dx_1}{dt} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{\mu_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{\mu_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{\mu_1}{m_1} v_1 \end{cases} \quad (1.4a)$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy następujące równania stanu:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = v_{m2}, \\ \frac{dv_{m2}}{dt} = -\frac{k_2}{m_2} x_2 - \frac{\mu_2}{m_2} v_{m2} + \frac{k_2}{m_2} x_1 + \frac{\mu_2}{m_2} v_1 + \frac{1}{m_2} f, \\ \frac{dx_1}{dt} = v_1, \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{k_2}{m_1} x_2 + \frac{\mu_2}{m_1} v_2 - \frac{k_2}{m_1} x_1 - \frac{\mu_2}{m_1} v_1 - \frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{\mu_1}{m_1} v_1 \end{cases} \quad (1.4b)$$

co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}^T\vec{x} \quad (1.5)$$

Elektryczny ekwiwalent układu z rys. 2 jest pokazany na rys. 3. Uzasadnienie dla takiej postaci schematu można także uzyskać przez porównanie go z układami z rys. 1. Pojedynczemu układowi z rys. 1b odpowiada szeregowe połączenie elementów RLC na schemacie elektrycznym. W tym przypadku mamy dwa takie człony mechaniczne, którym na schemacie elektrycznym odpowiadają dwa obwody RLC, połączone, jak na rys. 3, gdyż mechanicznemu układowi **sprężyna – tłumik** odpowiada szeregowe **połączenie RC**.

Dla obwodu z rys. 3 można napisać następujące równania:

$$\begin{cases} u = L_2 \frac{di}{dt} + R_2 i_2 + u_{C2}, \\ R_2 i_2 + u_{C2} = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + u_{C1}, \\ i_2 = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}, \quad i_1 = C_1 \frac{du_{C1}}{dt}, \quad i = i_2 + i_1 \end{cases} \quad (1.6a)$$

W charakterze zmiennych stanu można przyjąć: u_{C2}, i, u_{C1}, i_1 . Po uporządkowaniu powyższych równań, otrzymamy:

$$\begin{cases} \frac{du_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i - \frac{1}{C_2} i_1, \\ \frac{di}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i + \frac{R_2}{L_2} i_1 - \frac{1}{L_2} u_{C2} - \frac{1}{L_2} u, \\ \frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} i_1, \\ \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_2}{L_1} i + \frac{R_1 + R_2}{L_1} i_1 - \frac{1}{L_1} u_{C2} - \frac{1}{L_1} u_{C1}, \end{cases} \quad (1.6b)$$

co też można zapisać w postaci macierzowej (1.5).

W ten sposób, dla analizy rozwiązań przedstawionych modeli matematycznych opartych na prawie Newtona konieczne jest rozwiązanie liniowego układu równań różniczkowych. Na podstawie syntezy przedstawionych prostych układów rozpatrzonych powyżej można tworzyć bardzo komplikacyjne układy automatycznego sterowania. Przedstawiony liniowy model stacjonarny jest tworzony na podstawie równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Taki model opisuje układ liniowy, którego parametry nie zależą od czasu.

Liniowy model niestacjonarny opisuje układ liniowy, w którym parametry (lub przynajmniej jeden parametr) są funkcją czasu. Taki model można przedstawić za pomocą liniowego równania różniczkowego o współczynnikach zależnych od czasu.

2. Analiza rozwiązywania równania liniowego drugiego rzędu.

Równaniem liniowym drugiego rzędu nazywamy równanie różniczkowe postaci

$$\ddot{y}(t) + p(t)\dot{y}(t) + q(t)y(t) = f(t) \quad (2.1a)$$

gdzie $p(t)$, $q(t)$ i $f(t)$ są ciągłymi funkcjami zmiennej t .

Równanie w którym $f(t) = 0$ nazywamy **jednorodnym** zaś, gdy $f(t) \neq 0$ - równaniem **niejednorodnym**. Równania drugiego rzędu uzupełniamy dwoma warunkami. Z reguły są to warunki początkowe dla szukanej funkcji i jej pochodnej, tzn.:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = v_0 \quad (2.1b)$$

Nie ma ogólnych metod znajdowania w ostatecznej postaci ogólnego rozwiązania równania liniowego o zmiennych współczynnikach. Jednak taka metoda istnieje dla równania o stałych współczynnikach.

Równania jednorodne liniowe drugiego rzędu ze stałymi współczynnikami opisuje drgania swobodne. Drgania swobodne – występują, gdy na układ nie działa żadna zmienna siła zewnętrzna, która wpływa na proces drgań. Stała siła o niewielkiej wartości lub działająca w układzie liniowym nie wpływa na drgania ciała, jedynie przesuwa położenie równowagi. Układ taki jest zachowawczy, tzn. energia drgań nie zmienia się.

Rozważmy równanie drgań swobodnych

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (2.2)$$

gdzie p i q są stałymi liczbami rzeczywistymi. Aby znaleźć ogólna całość tego równania jest wystarczająca odszukać dwa liniowo niezależne rozwiązania cząstkowe.

Poszukamy te rozwiązania w postaci:

$$y(t) = e^{kt}, \text{ gdzie } k = \text{const}; \quad \text{następnie mamy } y' = ke^{kt}, y'' = k^2 e^{kt}.$$

Zastępując otrzymane wyrażenia na pochodne w równaniu (2.2), znajdujemy

$$e^{kt}(k^2 + pk + q) = 0. \quad (2.3)$$

Ponieważ $e^{kt} \neq 0$, to znaczy, że

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (2.4)$$

Dlatego, jeśli k spełnia równanie (2.3), to e^{kt} będzie rozwiązaniem równania (2.2). Równanie (2.4) nazywa się **równaniem charakterystycznym**. Równanie charakterystyczne dla równania (2.2) jest równaniem kwadratowym i ma dwa pierwiastki

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad \text{ i } \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

W którym możliwe są następujące przypadki:

1. k_1 i k_2 są rzeczywiste, a ponadto $k_1 \neq k_2$;
2. k_1 i k_2 są liczby zespolone;
3. k_1 i k_2 są rzeczywistymi liczbami równymi $k_1 = k_2$.

Rozwiązanie równania ma postać $y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$, a stały nieoznaczony C_1, C_2 otrzymujemy z warunków początkowych.

1) **Niech** $\frac{p^2}{4} > q$. Wtedy pierwiastki k_1 i k_2 są rzeczywiste liczby ujemne. Ogólne rozwiązanie jest wyrażone przez funkcje wykładnicze:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0) \quad (2.5)$$

Z tego wzoru wynika, że odchylenia y dla dowolnych warunków początkowych asymptotycznie dążą do zera, jeśli $t \rightarrow \infty$. W takim przypadku drgań nie będzie, ponieważ siły oporu są duże w porównaniu ze współczynnikiem sztywności sprężyny k .

2) **Niech** $\frac{p^2}{4} = q$. Wtedy pierwiastki k_1 i k_2 są równe (i równe liczbie ujemnej $p/2$). Dlatego ogólnym rozwiązaniem będzie

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{p}{2}t} \quad (2.6)$$

Teraz odchylenie również dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$, ale nie tak szybko jak w poprzednim przypadku (ze względu na obecność czynnika $C_1 + C_2 t$).

3) **Niech** $p = 0$, czyli nie ma siły oporu. Równanie (1) ma postać

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + qy = 0 \quad (2.7)$$

Równanie charakterystyczne ma postać $k^2 + q = 0$, a jego pierwiastki $k_1 = \beta i$, $k_2 = -\beta i$ gdzie $\beta = \sqrt{q}$. Ogólne rozwiązanie ma postać:

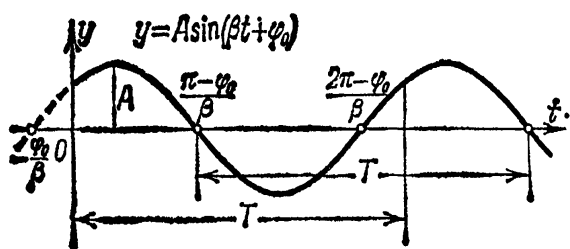
$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t. \quad (2.8)$$

W ostatnim wzorze zastępujemy dowolne stałe C_1 i C_2 innymi. Mianowicie wprowadzimy stałe A i φ_0 , połączone z C_1 i C_2 relacjami

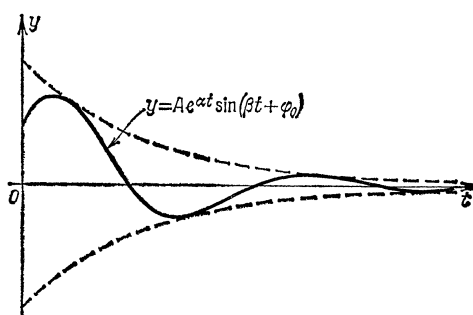
$$C_1 = A \sin \varphi_0 \quad \text{ i } \quad C_2 = A \cos \varphi_0.$$

A i φ_0 , przez C_1 i C_2 są zdefiniowane w następujący sposób:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \varphi_0 = \arctan \frac{C_1}{C_2}.$$



Rys. 4



Rys. 5

Podstawiając wartości C_1 i C_2 we wzór (2.8), otrzymamy

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t,$$

albo

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (2.9)$$

Oscylacje w tym przypadku nazywane są harmonicznymi. Całkowite krzywe są sinusoidami. Przedział czasu T , w którym argument sinusa zmienia się o 2π , nazywany jest okresem oscylacji; w tym przypadku $T = 2\pi / \beta$. Częstotliwość oscylacji (liczba oscylacji w czasie 2π) jest równa β ; A - wartość największego odchylenia od położenia równowagi nazywana jest amplitudą oscylacji; φ_0 - fazą początkową. Wykres funkcji (2.9) pokazano na rys. 4.

4) Niech $p \neq 0, \frac{p^2}{4} < q$. W tym przypadku pierwiastkami równania charakterystycznego są

$$\text{liczby zespolone } k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i, \quad \text{gdzie } \alpha = -\frac{p}{2} < 0, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Całka ogólna ma postać

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),$$

albo

$$y = A e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0).$$

Tutaj, jako amplitudę, należy wziąć pod uwagę wartość $A e^{\alpha t}$, która zależy od czasu. Ponieważ $\alpha < 0$, to amplituda dąży do zera, przy $t \rightarrow \infty$, to znaczy tutaj mamy tłumione oscylacje. Wykres drgań tłumionych przedstawiono na rys. 5.

Drgania wymuszone uznaje się tylko drgania pod wpływem siły zewnętrznej, która nie powoduje zmian parametrów układu drgań. Drgania wymuszone występują w wielu dziedzinach codziennego życia. W fizyce i inżynierii wyróżnia się drgania wymuszone harmoniczne, które są często wykorzystywane jako model dla reakcji systemu na wpływy zewnętrzne. Wzbudzenie drgań następuje w wyniku działania innego układu na układ drgań, albo w wyniku rozchodzenia się fali w ośrodku. W mechanice, wzbudzenie jest zwykle wykonywane przez okresową zmianę siły działającej na układ lub okresową zmianę pozycji spoczynkowej układu drgań, w elektrotechnice i elektronice przez zmianę napięcia lub prądu, w optyce fala elektromagnetyczna wzbudza składniki materii, w fizyce kwantowej fale materii.

Równanie drgań wymuszonych ma postać

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = f(t) \quad (p \geq 0, q > 0) \quad (2.10)$$

Rozważmy praktycznie ważny przypadek, gdy siła zewnętrzna jest okresowa i zmienia się zgodnie z prawem

$$f(t) = a \sin \omega t$$

W tym przypadku równanie (2.10) przyjmuje postać

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = a \sin \omega t. \quad (2.11)$$

1) Załóżmy najpierw, że $p \neq 0$ i $\frac{p^2}{4} < q$, czyli pierwiastki charakterystycznego równania są liczbami zespolone $\alpha \pm \beta i$. W tym przypadku ogólne rozwiązanie równania jednorodnego ma postać

$$\bar{y} = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0). \quad (2.12)$$

Poszukujemy szczególnego rozwiązania niejednorodnego równania w postaci

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (2.13)$$

Podstawiając to wyrażenie y^* do pierwotnego równania różniczkowego, znajdujemy wartości M i N :

$$M = \frac{-p\omega a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}, \quad N = \frac{(q - \omega^2)a}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}.$$

Przed podstawieniem znalezionych wartości M i N do równości (2.13) wprowadzamy nowe stałe A^* i φ^* ustawiając

$$M = A^* \sin \varphi^*, \quad N = A^* \cos \varphi^*,$$

to znaczy

$$A^* = \sqrt{M^2 + N^2} = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{M}{N}.$$

Następnie szczególne rozwiązanie niejednorodnego równania można zapisać w postaci

$$y^* = A^* \sin \varphi^* \cos \omega t + A^* \cos \varphi^* \sin \omega t = A^* \sin(\omega t + \varphi^*)$$

lub wreszcie

$$y^* = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Całka ogólna równania (1) to $y = \bar{y} + y^*$, tj.

$$y = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}} \sin(\omega t + \varphi^*).$$

Pierwszy człon sumy po prawej stronie (rozwiązanie równania jednorodnego) reprezentuje oscylacje tłumione. Ze wzrostem t on maleje, i po pewnym czasie drugi człon, który określa wymuszone oscylacje, będzie miał główną wartość. Częstotliwość tych drgań jest równa częstotliwości siły zewnętrznej $f(t)$. Amplituda wymuszonych oscylacji jest tym większa, im mniejsze p i im bliżej ω^2 do q .

Zbadajmy bardziej szczegółowo zależność amplitudy wymuszonych oscylacji od częstotliwości ω przy różnych wartościach p . Aby to zrobić, oznaczamy amplitudę wymuszonych oscylacji przez $D(\omega)$:

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}$$

Położymy $q = \beta_1^2$ (β_1 przy $p = 0$ byłoby równe częstotliwości własnych oscylacji). Następnie

$$D(\omega) = \frac{a}{\sqrt{(\beta_1^2 - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}} = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\beta_1^2})^2 + \frac{p^2}{\beta_1^2} \frac{\omega^2}{\beta_1^2}}}$$

Wprowadźmy notację $\omega / \beta_1 = \lambda$, $p / \beta_1 = \gamma$, gdzie λ jest relacja częstotliwości siły zakłócającej do częstotliwości drgań własnych układu, a stała γ nie zależy od siły zakłócającej. Wtedy wielkość amplitudy będzie wyrażona wzorem

$$\bar{D}(\lambda) = \frac{a}{\beta_1^2 \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2}}. \quad (2.14)$$

Znajdźmy maksimum tej funkcji. Będzie to oczywiście przy wartości λ , przy której kwadrat mianownika ma minimum. Ale minimum funkcji

$$\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + \gamma^2 \lambda^2} \quad (2.15)$$

jest osiągane przy $\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2 / 2}$ i jest równy $\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 / 4}$.

Dlatego maksymalna amplituda wynosi

$$\bar{D}_{\max} = a / (\beta_1^2 \sqrt{1 - \gamma^2 / 4}).$$

Te krzywe nazywane są krzywymi rezonansowymi.

Ze wzoru (5) wynika, że dla małych γ maksymalna wartość amplitudy jest osiągana przy wartościach λ bliskich do jedynki, tj. gdy częstotliwość siły zewnętrznej jest zbliżona do częstotliwości drgań własnych. Jeśli $\gamma = 0$ (stąd $p = 0$), to znaczy jeśli nie ma oporu ruchu, amplituda wymuszonych oscylacji rośnie do nieskończoności przy $\lambda \rightarrow 1$, czyli przy $\omega \rightarrow \beta_1 = \sqrt{q}$: $\lim_{\lambda \rightarrow 1 (\gamma=0)} \bar{D}(\lambda) = \infty$. Przy $\omega^2 = q$, zachodzi zjawisko rezonansu.

2) Załóżmy teraz, że $p = 0$, czyli rozważmy równanie drgania sprężyste bez oporu w obecności okresowej siły zewnętrznej

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + qy = a \sin \omega t. \quad (2.16)$$

Ogólne rozwiązanie równania jednorodnego

$$\bar{y} = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \quad (\beta^2 = q).$$

Jeśli $\beta \neq \omega$, tj. jeśli częstotliwość siły zewnętrznej nie jest równa częstotliwości drgań własnych, to szczególne rozwiązanie niejednorodnego równania ma postać

$$y^* = M \cos \omega t + N \sin \omega t. \quad (2.17)$$

Podstawiając to wyrażenie w równanie, znajdujemy $M = 0, N = \frac{a}{q - \omega^2}$

i ogólne rozwiązanie ma postać $y = A \sin(\beta t + \varphi_0) + \frac{a}{q - \omega^2} \sin \omega t$

W ten sposób ruch uzyskuje się w wyniku nałożenia oscylacje własnej o częstotliwości β i oscylacje wymuszone o częstotliwości ω .

Jeśli $\beta = \omega$, tj. częstotliwość własnych oscylacji zbiega się z częstotliwością siły zewnętrznej, to funkcja (2.13) nie jest rozwiązaniem równania (2.16). W takim przypadku,

rozwiązanie należy szukać w postaci $y^* = t(M \cos \beta t + N \sin \beta t)$. Podstawiając to wyrażenie do równania, znajdujemy: $M = -\frac{a}{2\beta}, N = 0$. Dlatego $y^* = -\frac{a}{2\beta} t \cos \beta t$.

Rozwiązanie ogólne będzie miało formę $y = A \sin(\beta t + \varphi_0) - \frac{a}{2\beta} t \cos \beta t$.

Drugi człon po prawej stronie pokazuje, że w tym przypadku amplituda oscylacji rośnie w nieskończoność z nieograniczonym wzrostem czasu t . Zjawisko to, które występuje, gdy częstotliwość własnych oscylacji układu zbiega się z częstotliwością siły zewnętrznej, nazywane jest rezonansem.

3. Narzędzia dla rozwiązywania równań różniczkowych w Scilab.

Modelowanie zjawisk dynamicznych opisywanych językiem matematycznym za pomocą równań różniczkowych jest często procesem trudnym i czasochłonnym. W celu zautomatyzowania procesu rozwiązywania równań różniczkowych opracowano kilka metod umożliwiających uzyskanie wyników numerycznych.

W środowisku obliczeniowym Scilab zaimplementowane są funkcje realizujące te zadanie.

W Scilab'ie zadanie to realizuje, na przykład, funkcja **ode** (albo inne funkcje).

Uogólnioną składnię, zawierającą najważniejsze parametry, funkcji **ode** zapisano poniżej:

$$y = \text{ode}([\text{type},] y_0, t_0, t, f)$$

gdzie:

y – wyjściowy wektor lub macierz rozwiązania,

type – nazwa „silnika” metody rozwiązywania równań różniczkowych ("adams", "stiff", "rk", "rkf", "fix", "discrete", "roots")

y0 – wektor lub macierz warunków początkowych zadania,

t0 – wartość początkowa zmiennej względem której rozwiązywane jest zadanie,

t – wektor wartości zmiennej względem której rozwiązywane jest zadanie,

f – nazwa funkcji zawierającej definicję równań różniczkowych rozwiązywanych funkcją **ode**.

Analiza zagadnienia wymagającego rozwiązania układu równań różniczkowych wymaga w zasadzie tylko zapisania równań stanu opisujących analizowane zagadnienie.

W zadaniu laboratoryjnym rozwiązywanie równań różniczkowych analizowane będzie na przykładzie stanów nieustalonych w układach mechanicznych przedstawionych na rys. 1,2 następnym sposobem. Na przykład, aby rozwiązać następujące zagadnienie Cauchy'ego na przedziale [0.25; 20]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 13x = \exp(\sin(t)), \quad x(0.25) = 1, \quad x'(0.25) = -1$$

musimy przekształcić równanie w układ, dokonując podstawienia $\frac{dx}{dt} = y$

$$\frac{dy}{dt} = -4y - 13x = \exp(\sin(t)), \quad \frac{dx}{dt} = y, \quad x(0.25) = 1, \quad x'(0.25) = -1$$

i przygotować skrypt podobny do następnego

```
clear;clc;clf;
function dy=fun(t, y)
dy(1)=-4*y(1)-13*y(2)+exp(sin(0.5*t));
dy(2)=y(1);
endfunction
```

```
t0=0.25;y0=[0;0];
T=0.25:0.1:30;
y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
scf(3);
plot(T,y); xgrid();
scf(4);
plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
```

albo

```
function F=FF(t, x)
F=[-1*x(1)-13*x(2)+0.1*exp(sin(0.5*t));x(1)];
endfunction
//Rozwiązanie układu równań różniczkowych
X0=[0.5;0];
t0=0.25;
t=0.25:0.05:10;
y=ode("stiff",X0,t0,t,FF);
//wykresy rozwiązania
//scf(1)
xset("window",1) // создается окно с номером 0
plot(t,y); xgrid();
scf(2)
plot(y(1,:),y(2,:));
```

Zadanie: Wykonać modelowanie różnych możliwych typów zachowań układów oscylacyjnych przedstawionych na rysunkach 1 i 3. Innymi słowy, otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych (1.2) i (1.4) dla parametrów podanych w tabeli 2 zgodnie z zestawem. Ocenić skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych i analitycznych.

Kolejność wykonania pracy laboratoryjnej

1. Przystudiować podstawy teoretyczne i odpowiedni materiał wykładowy.
2. Przekształcić równanie w układ równań dla otrzymanego zadania jak opisano powyżej (rozdział 3).
3. Przygotować skrypt z wykorzystaniem zaimplementowanych w Scilab funkcji dla rozwiązania układów równań różniczkowych zwyczajnych i przedstawienia wykresów.
4. Otrzymać różne typy rozwiązań równania (1.2a) które opisuje drgania swobodne. Zapisać i przeanalizować odpowiednie równanie charakterystyczne i na podstawie zmiany współczynnika μ zmodelować różny typy zachowania systemu który przeanalizowane w punktach 1-4 na stronach 6-8 (rozdział 2).
5. Dla każdego typu zachowania zmienić niektóre parametry wejściowe (m, μ, k) w granicach 5-10 procentów i przeanalizować te zmiany na odpowiednich wykresach. Przeanalizować rozwiązania przy różnych wartościach początkowych.
6. Zapisać w skrypcie odpowiedni wzory analityczne i porównać wyniki obliczeń na podstawie metod numerycznych i wzorów analitycznych.
7. Otrzymać różne typy rozwiązań równania (1.2b) które opisuje drgania wymuszone. Zmodelować i przeanalizować różny typy zachowania systemu otrzymanych w punkcie 5 biorąc pod uwagę wpływ siły zewnętrznej f_1 . Na podstawie oceny częstotliwości własnych oscylacji układu zmodelować zjawisko rezonansu dla siły zewnętrznej f_1 . Na podstawie modelowania ocenić wpływ na zachowanie systemu zmiany parametrów siły zewnętrznej f_1, f_2 . Dla tego parametry wejściowe (a, ω) w granicach 5-10 procentów i przeanalizować te zmiany na odpowiednich wykresach.
8. Przygotować skrypt z wykorzystaniem zaimplementowanych w Scilab funkcji dla rozwiązania układu (1.4b).
9. Otrzymać i przeanalizować różne typy rozwiązań równania (1.4b) na podstawie zmiany współczynników $m_1, m_2, \mu_1, \mu_2, k_1, k_2$ w układzie (1.4b).
10. Porównać wszystkie wyniki i sformułować krótkie podsumowanie o rozwiązaniach układów równań różniczkowych liniowych, skuteczności obliczeń, typach wykresów i użytych metod numerycznych.

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Stronę tytułową (Nr. Pracy laboratoryjnej, Temat, Przedmiot, Nazwisko i Imie Studenta, Nr. Grupy, Nazwisko i Imie Prowadzącego, Semestr, Rok).
2. Pełny opis zadania.
3. Pełne skrypty Scilab-a (polecenia) rozwiązujące zadanie (z komentarzami).
4. Wyniki obliczeń i wykresy.
5. Porównanie wyników uzyskanych dla początkowych i zmienionych parametrów układu.
6. Podsumowanie.

<u>N_o</u>	Parametry układów							
<u>L.p.</u>	<u>m=m₁</u>	<u>m₂</u>	<u>μ = μ₁</u>	<u>μ₂</u>	<u>k=k₁</u>	<u>k₂</u>	<u>a</u>	<u>ω</u>
1	1	4	10	1	1	1	2	1
2	1	4	10	1	2	2	1	2
3	1	4	10	1	3	1	2	1
4	1	4	10	1	4	2	1	2
5	1	2	8	1	5	1	2	1
6	1	2	8	1	6	2	1	2
7	1	2	8	1	7	1	2	1
8	1	2	8	1	8	2	1	2
9	1	3	7	1	8	1	2	1
10	1	3	7	1	7	2	1	2
11	1	3	7	1	6	1	2	1
12	1	3	7	1	5	2	1	2
13	1	5	6	1	4	1	2	1
14	1	5	6	1	3	2	1	2
15	1	5	6	1	2	1	2	1
16	1	5	6	1	1	2	1	2

- 1) Siła zewnętrzna $f_1 = a \cdot \sin(\omega t)$ (funkcja okresowa harmoniczna)
- 2) Siła zewnętrzna $f_2 = a \cdot e^{\sin(\omega t)}$ (funkcja okresowa nieharmoniczna).
 $x(0) = 1, \quad x'(0) = 0;$
- 3) Wartości początkowe dla równani (1.2) $x(0) = 1, \quad x'(0) = 1;$
 $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$
- 4) Wartości początkowe dla równani (1.4)

$$\begin{aligned}
 &x_1(0) = 1, \quad x'_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x'_2(0) = 1; \\
 &x_1(0) = 0, \quad x'_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x'_2(0) = 0; \\
 &x_1(0) = 1, \quad x'_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x'_2(0) = 0;
 \end{aligned}$$