Rzeszów, 06.01.2022

PODSTAWY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO W INŻYNIERII

PRACA LABORATORYJNA NR 3

"Nieliniowe modele dynamiczne w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych i metody ich analizy i rozwiązania."

Piotr Krawiec L1
Semestr: 2021/2022
Kierunek: III/FS0-DI
Numer indeksu: 164165
Prowadzący: Bohdan Datsko

Spis treści

1 Zadania i teoria

Wykonać modelowanie różnych możliwych typów dynamiki układów 2 i 3. Otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych tych równań dla parametrów podanych w tabeli 1 zgodnie z zestawem (13).

Numer	A	τ_1	τ_2	b	A	p_1	p_2	p_3
13	0.5	0.2	10	1	4	12	5	13

Tabela 1: Parametry badanych równań

1.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością.

Model ten w standardowej postaci bezwymiarowej wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= bu_1 - u_2 + A \end{aligned} \tag{1}$$

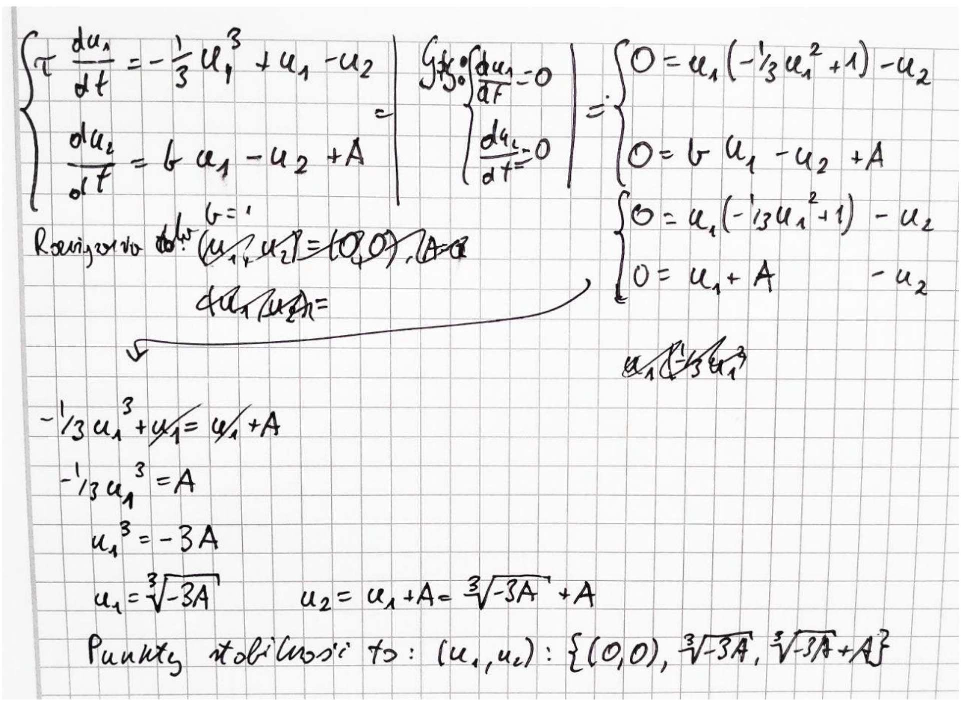
Dla parametru $b = 1$ układ ten ma tylko jeden stan stacjonarny:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-3A} \\ u_2 &= \sqrt[3]{-3A} + A \end{aligned} \tag{2}$$

Co można wyprowadzić, wychodząc z:

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \frac{du_2}{dt} = 0$$

Wyprowadzenie tego wzoru znajduje się poniżej:



$\begin{cases}\tau \frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = b u_1 - u_2 + A\end{cases}$ = Gdy: $\begin{cases}\frac{du_1}{dt}=0 \\ \frac{du_2}{dt}=0\end{cases}$ = $\begin{cases}0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2+1) - u_2 \\ 0 = b u_1 - u_2 + A\end{cases}$

$b=1$

$\begin{cases}0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2+1) - u_2 \\ 0 = u_1 + A - u_2\end{cases}$

Rozwiązanie to: $(u_1, u_2) = (0,0)$, $A=0$

$-\frac{1}{3}u_1^3 + \cancel{u_1} = \cancel{u_1} + A$

$-\frac{1}{3}u_1^3 = A$

$u_1^3 = -3A$

$u_1 = \sqrt[3]{-3A}$ $u_2 = u_1 + A = \sqrt[3]{-3A} + A$

Punkty stabilności to: $(u_1, u_2): \{(0,0), \sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A}+A\}$

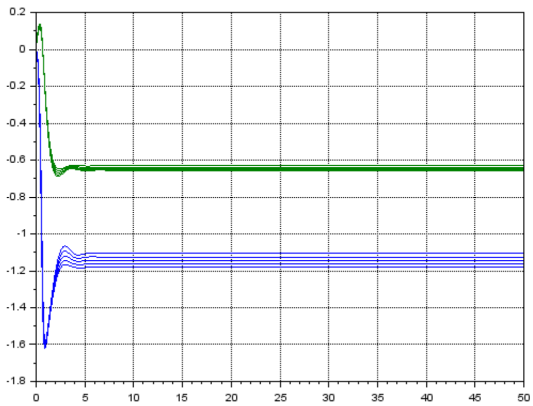
1.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \sigma(u_2 - u_1)\\ \frac{du_2}{dt} &= u_1(r - u_3) - u_2\\ \frac{du_3}{dt} &= u_1u_2 - \beta u_3\end{aligned} \tag{3}$$

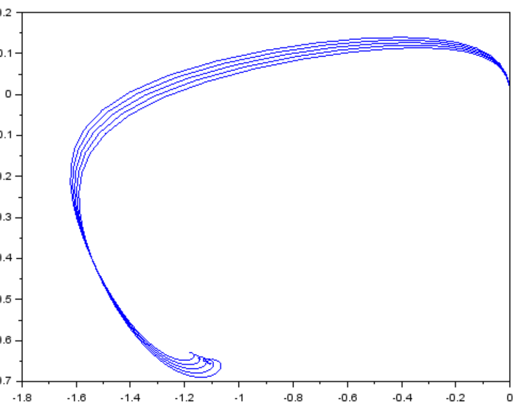
2 Rozwiązanie w scilab

2.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością w Scilab

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli



Rysunek 1: Wykres u1 i u2 w czasie



Rysunek 2: Wykres fazowy

Z powyższych wykresów odczytać możemy, że układ ustabilizował się. Z rozważań teoretycznych możemy obliczyć, że stan stacjonarny to:

$$(u_1, u_2) = (\sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A)$$

i dla danych z tabeli jest to (obliczone z pomocą wolfram alpha): $(-1.1447, -0.6447i)$. Natomiast z wykresu możemy odczytać punkt.: $(-1.1816658, -0.6316658)$. Co dokładnie pokrywa się z teorią Stabilność punktu obliczonego teoretycznie oceniłem z pomocą poniższego kodu:

Listing 1: Kod obliczający współczynniki równania charakterystycznego układu

```
--> u1 = -1.1447;

--> T = (-u1^2 + 1)/tau - 1
 T  = -2.5516905
```

```
--> delta = (-u1^2 + 1)/tau*(-1) - b / (-tau)
 delta  =  6.5516905
--> T^2 - 4*delta
 ans   = -19.695638
--> lambda1 = 0.5 * (T - sqrt(T^2 - 4*delta))
 lambda1  =  -1.2758452 - 2.2189884i
--> lambda2 = 0.5 * (T + sqrt(T^2 - 4*delta))
 lambda2  = -1.2758452 + 2.2189884i
```

Część rzeczywista jest ujemna, zatem punkt ten jest stabilny, a ponieważ posiada część urojoną, więc układ będzie się zbiegał po krzywych do punktu stabilnego.

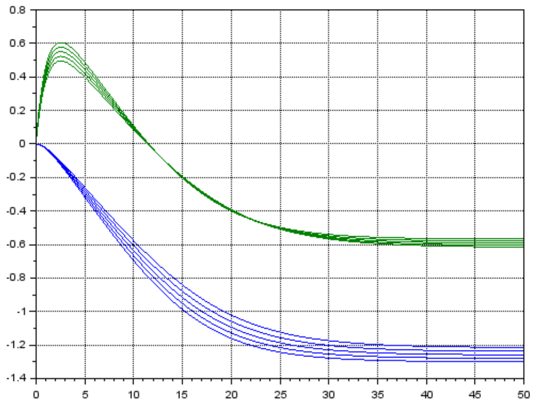
Listing 2: Kod generujący powyższe wykresy

```
tau_1 = 0.2;
b = 1;
A_ = 4;
p_1 = 12;
p_2 = 5;
p_3 = 13;
tau = tau_1;
A = 0.5;

for A = (A-0.1*abs(A)):0.05*abs(A):(A+0.1*abs(A))
    function du=syst2(t, u) //definicja ukladu RR
        du=zeros(2,1);
        du(1)=(-1/3*u(1)^3+u(1)-u(2))/tau;
        du(2)=b*u(1)-u(2)+A;
    endfunction
    x0=[0;0]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,
       syst2);
    scf(1);
    plot(t,y); xgrid();
    scf(2);
    plot(y(1,:), y(2,:));
end
xs2png(1, "img/3-1-xy.png")
xs2png(2, "img/3-1-phase.png")
close();close();
```

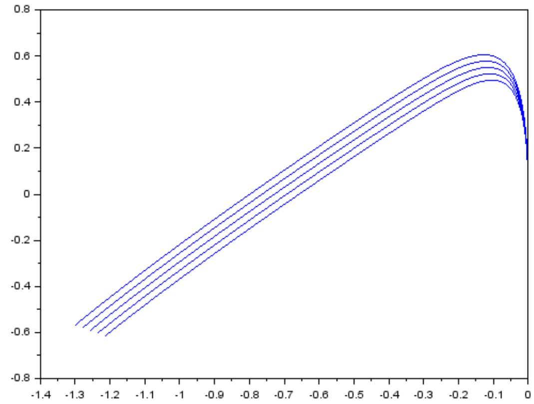
2.1.1 Modyfikacja parametru τ

Dla $\tau = 10$ wykresy te wyglądają następująco:

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $\tau = 10$



Rysunek 3: Wykres u1 i u2 w czasie



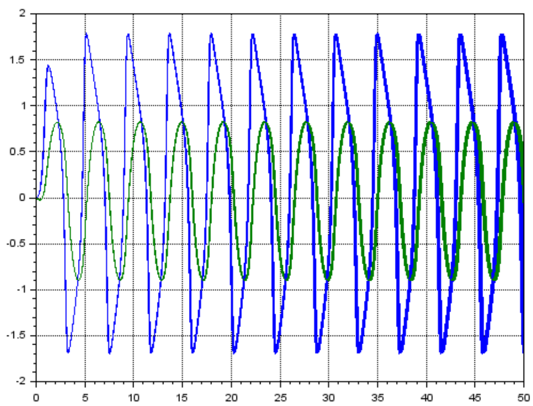
Rysunek 4: Wykres fazowy

Tutaj rozwiązanie jest podobnie, jak dla danych z tabeli, w miarę

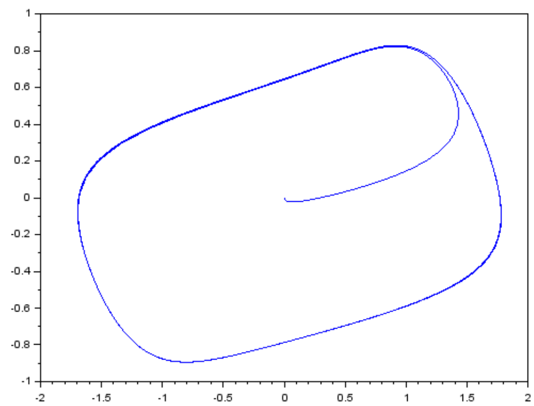
2.1.2 Inne rozwiązania układu

Poniższe rozwiązania znalazłem zmieniając parametr A w dużym zakresie i sprawdzając, jak zachowuje się układ. Aż natrafiłem na $A = -0.1$. Zmieniając parametr A w zakresie 10 procent, otrzymałem takie wykresy:

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $A = -0.1$



Rysunek 5: Wykres u1 i u2 w czasie



Rysunek 6: Wykres fazowy

Układ ten wszedł w oscylację. "Szybko" uciekł on z punktu początkowego $(0, 0)$ i zaczął oscylować między punktami stabilności.

2.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

2.2.1 Kod w Scilab

Listing 3: Kod generujący powyższe wykresy

```
//////////////////////////////////////// Zadanie 6 //////////
sigma = 10;
b = 8/3;
r = 28;

function du=syst2(t, u)
    du=zeros(3,1);
    du(1)=sigma * (u(2)- u(1))
    du(2)=u(1)*(r - u(3)) - u(2);
    du(3)=u(1)*u(2) - b *u(3);
endfunction
x0=[1;1;1]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
scf(1);
plot(t,y); xgrid();
scf(2);
plot(y(1,:), y(2,:));
scf(3);
plot(y(1,:), y(3,:));
scf(4);
plot(y(2,:), y(3,:));

xs2png(1, "img/6-111-xy.png")
xs2png(2, "img/6-111-phase-1-2.png")
xs2png(3, "img/6-111-phase-1-3.png")
xs2png(4, "img/6-111-phase-2-3.png")
close(); close(); close(); close();

x0=[-1;-1;-1]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
scf(1);
plot(t,y); xgrid();
scf(2);
plot(y(1,:), y(2,:));
scf(3);
plot(y(1,:), y(3,:));
scf(4);
plot(y(2,:), y(3,:));

xs2png(1, "img/6--111-xy.png")
xs2png(2, "img/6--111-phase-1-2.png")
xs2png(3, "img/6--111-phase-1-3.png")
xs2png(4, "img/6--111-phase-2-3.png")
close(); close(); close(); close();
```

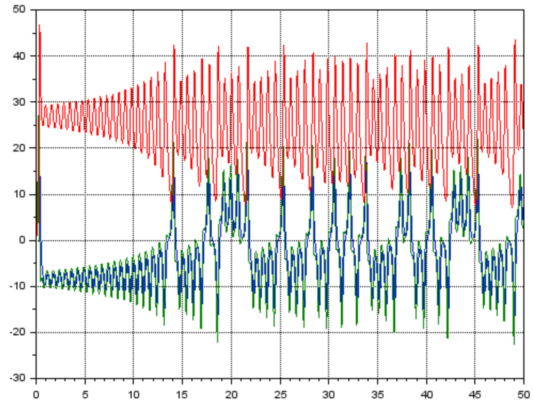
```
/////////////////////////////////////// Zadanie 7 //////////////////
sigma = 12;
b = 5;
r = 13;

x0=[1;1;1]; t0=0; t=0:0.05:10;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
scf(1);
plot(t,y); xgrid();
scf(2);
plot(y(1,:), y(2,:));
scf(3);
plot(y(1,:), y(3,:));
scf(4);
plot(y(2,:), y(3,:));

xs2png(1, "img/7-111-xy.png")
xs2png(2, "img/7-111-phase-1-2.png")
xs2png(3, "img/7-111-phase-1-3.png")
xs2png(4, "img/7-111-phase-2-3.png")
close(); close(); close(); close();

x0=[-20;-20;-20]; t0=0; t=0:0.05:10;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
scf(1);
plot(t,y); xgrid();
scf(2);
plot(y(1,:), y(2,:));
scf(3);
plot(y(1,:), y(3,:));
scf(4);
plot(y(2,:), y(3,:));

xs2png(1, "img/7--2011-xy.png")
xs2png(2, "img/7--2011-phase-1-2.png")
xs2png(3, "img/7--2011-phase-1-3.png")
xs2png(4, "img/--2011-phase-2-3.png")
close(); close(); close(); close();
```

2.2.2 Zadanie 6

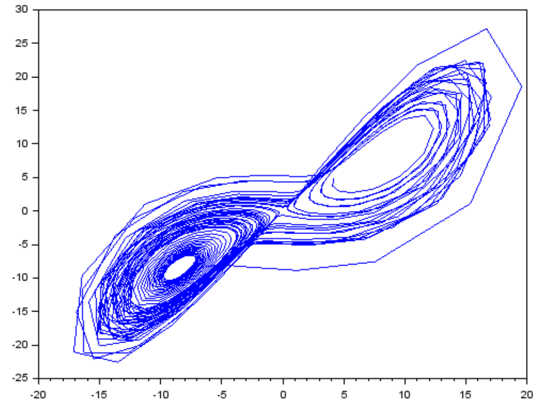
Dla obu przedstawionych tutaj punktów początkowych układ ten nie wygasa, co widać na wykresach u1, u2 i u3 w czasie. Widać to także na wykresach fazowych, ponieważ nie ma punktu, w którym układ by się zatrzymał. Powstają charakterystyczne puste miejsca, w które układ nigdy nie wpada.

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i warunków

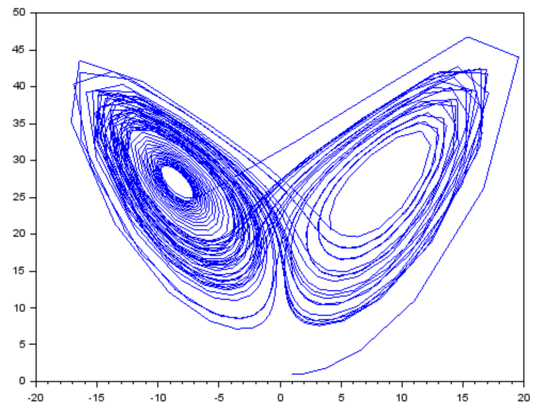
początkowych $u_1'(0) = 1$, $u_2'(0) = 1$, $u_3'(0) = 1$



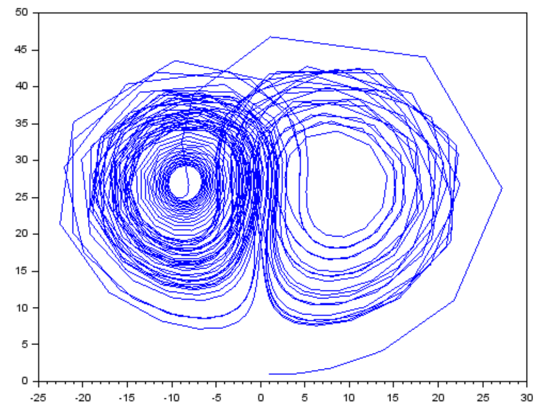
Rysunek 7: Wykres u1, u2 i u3 w czasie



Rysunek 8: Wykres fazowy u1 i u2

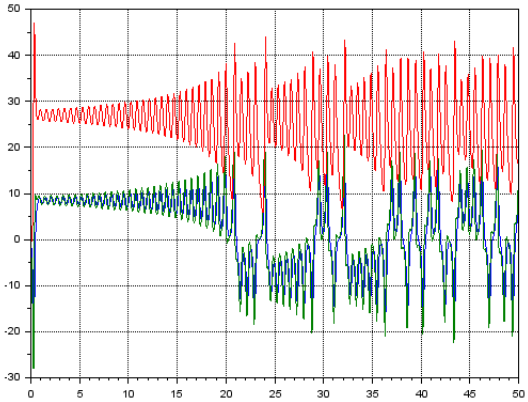


Rysunek 9: Wykres fazowy u1 i u3

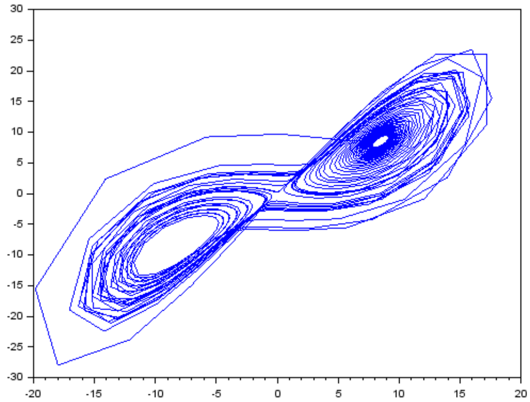


Rysunek 10: Wykres fazowy u2 i u3

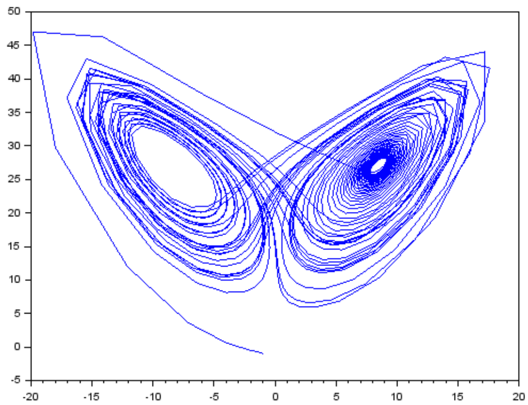
Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i warunków początkowych $u_1'(0) = -1$, $u_2'(0) = -1$, $u_3'(0) = -1$



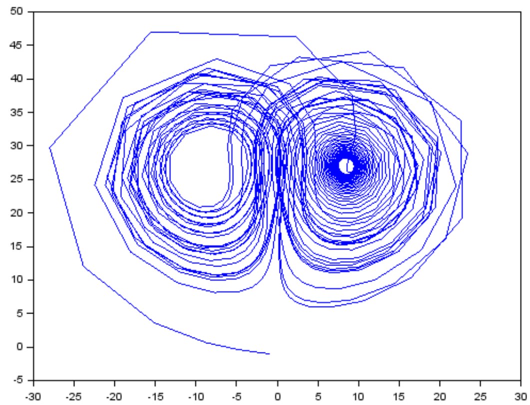
Rysunek 11: Wykres u1, u2 i u3 w czasie



Rysunek 12: Wykres fazowy u1 i u2



Rysunek 13: Wykres fazowy u1 i u3

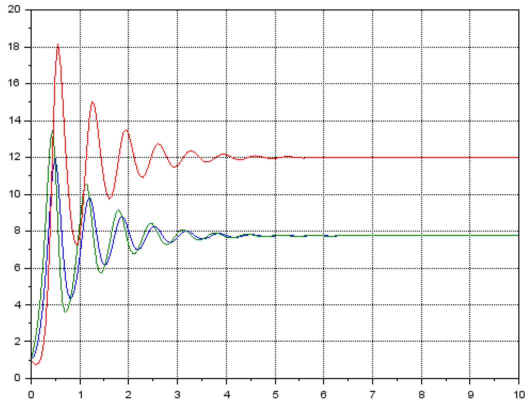


Rysunek 14: Wykres fazowy u2 i u3

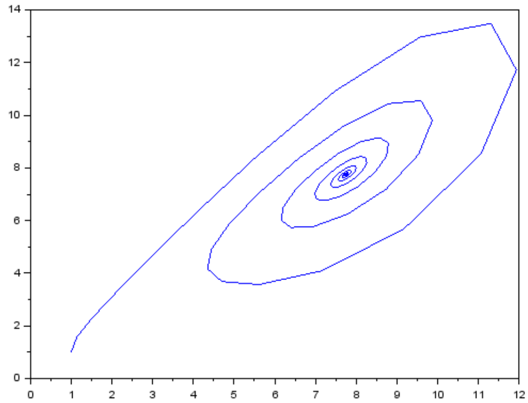
Zmiana znaków wszystkich parametrów początkowych sprawiła, że wykres stał się swoim lustrzanym obiciem. Punkty wokół, których krąży układ (gęsty i mniej gęsty) zamieniły się miejscami, co nie jest oczywiste, patrząc wyłącznie na pierwszy wykres.

2.2.3 Zadanie 7

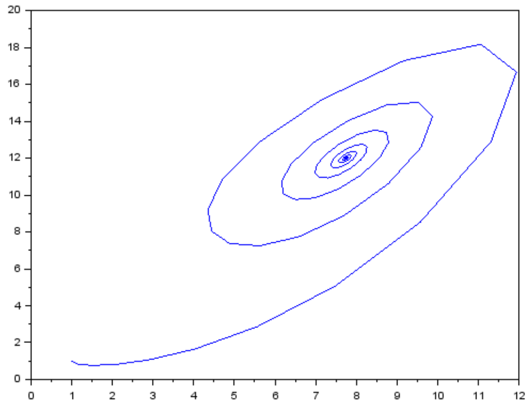
Rozwiązanie układu dla danych $\sigma = 12$, $\beta = 5$, $r = 13$ i warunków początkowych $u_1'(0) = 1$, $u_2'(0) = 1$, $u_3'(0) = 1$



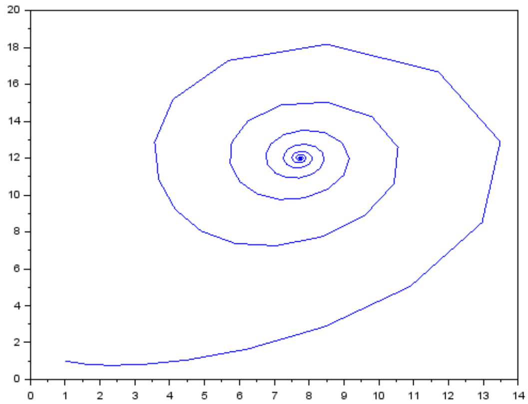
Rysunek 15: Wykres u1, u2 i u3 w czasie



Rysunek 16: Wykres fazowy u1 i u2



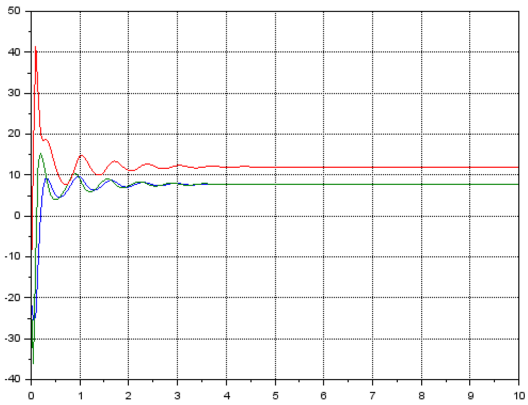
Rysunek 17: Wykres fazowy u1 i u3



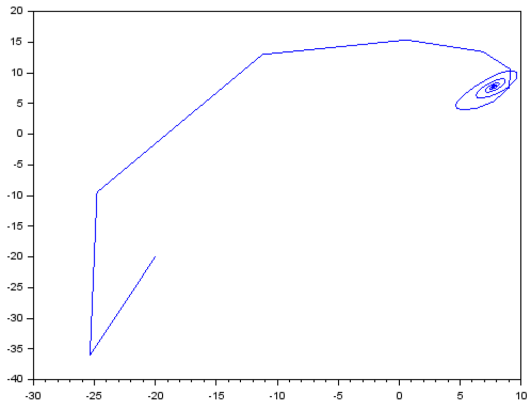
Rysunek 18: Wykres fazowy u2 i u3

Po zmianie parametrów układu zmieniła się jego charakterystyka, zamiast oscylować, układ się stabilizuje. Szybkość tej stabilizacji sprawdziłem na następnym rysunku.

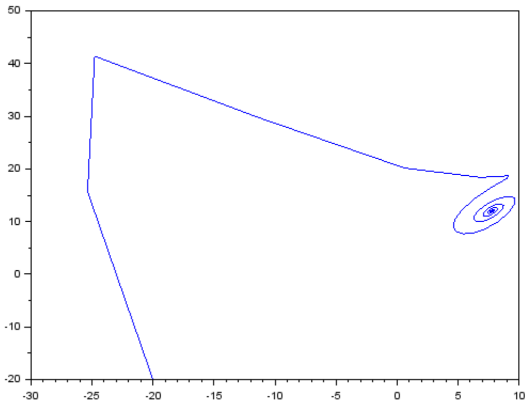
Rozwiązanie układu dla danych $\sigma = 12$, $\beta = 5$, $r = 13$ i warunków początkowych $u_1'(0) = -20$, $u_2'(0) = -20$, $u_3'(0) = -20$



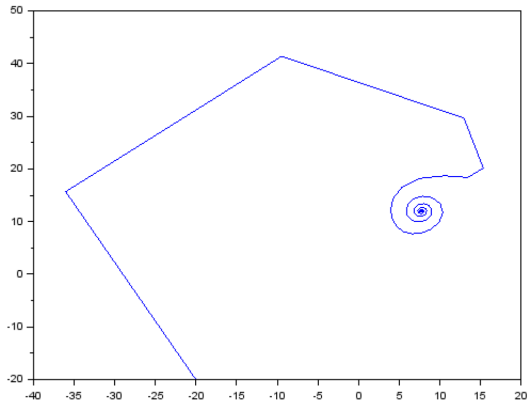
Rysunek 19: Wykres u1, u2 i u3 w czasie



Rysunek 20: Wykres fazowy u1 i u2



Rysunek 21: Wykres fazowy u1 i u3



Rysunek 22: Wykres fazowy u2 i u3

Do układu wprowadziłem dosyć duże zaburzenia, tj. ustawiłem duże niezerowe parametry początkowe. Układ ponownie ustabilizował się pomimo dużej zmiany warunków początkowych, ponadto ustabilizował się w podobnym miejscu co układ z parametrami początkowymi $u_1'(0) = 1$, $u_2'(0) = 1$, $u_3'(0) = 1$.

3 Podsumowanie

W pracy laboratoryjnej udało się za modelować Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością jak i Model Lorentza. Dla obu modeli obliczenia numeryczne wykonane w programie Scilab znalazły różne rozwiązania tych układów w zależności od ich parametrów i punktów początkowych. Dla modelu Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością znalazłem dwa rozwiązania, tj. układ wygasa lub oscyluje między kilkoma stabilnymi punktami zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi omawianymi na wykładzie (patrz rysunki 5 i 6). Podobne zachowania zostały zauważone w drugim układzie, tj. wygasa lub oscyluje. Jednak jego oscylacje przebiegają wokół dwóch punktów. Ponadto bardzo szybko wraca do stabilnego punktu (patrz rysunki 19-22).