Praca laboratoryjna №1

Stosowanie układów równań liniowych algebraicznych w modelowaniu matematycznym.

Podstawy teoretyczne.

1. Badanie systemów fizycznych (obwodów elektrycznych) na podstawie modeli matematycznych w postaci układów liniowych równań algebraicznych.

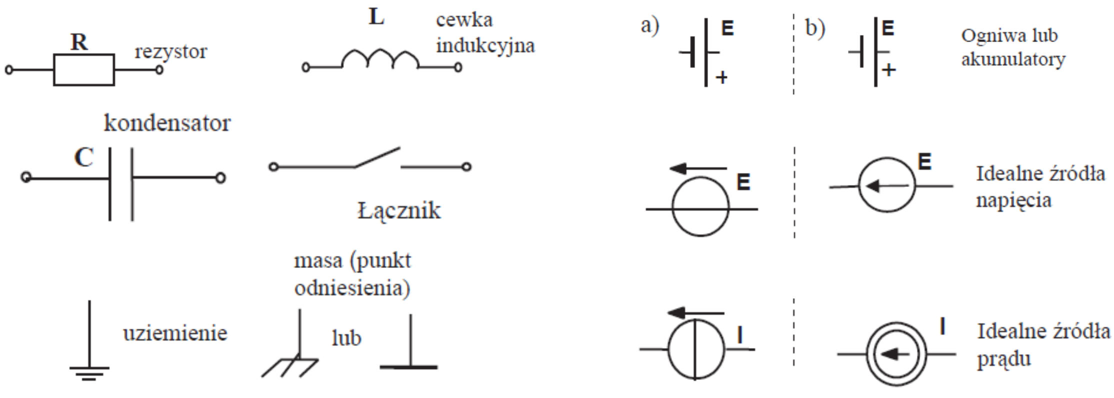
Podstawowe pojęcia dotyczące obwodów elektrycznych.

Obwodem elektrycznym nazywa się połaczone ze sobą elementy elektryczny tak, że istnieje co najmniej jedna nieprzerwana droga dla przepływu prądu elektrycznego. Graficznym obrazem połączeń elementów obwodu jest schemat obwodu, na którym określony jest sposób połączeń elementów obwodu, przedstawianych za pomocą symboli graficznych. W ogólności elementy obwodyw można podzielić na:

a) odbiornikowe, zwane elementami pasywnymi lub biernymi (1.Rezystory – elementy, w których energia prądu elektrycznego zamieniana jest na energię cieplną. 2.Elementy indukcyjne – magazynujące energię w polu magnetycznym. 3.Kondensatory – elementy magazynujące energię w polu elektrycznym).

b) źródłowe, zwane elementami aktywnymi (Ogniwa lub akumulatory, idealne źródła napięcia i prądu).

Symbole elementów pasywnych odbiorczych oraz punktów uziemienia i masy układu stosowane na schematach obwodów przedstawione są na rys. 1.

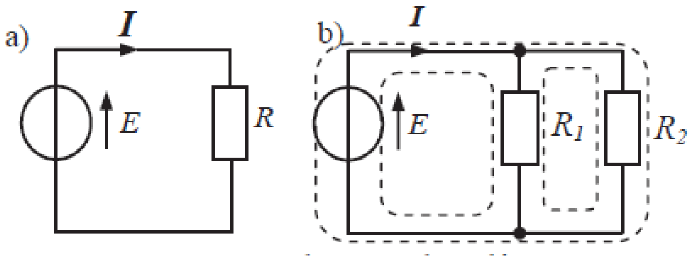


Rys. 1

Najprostszy obwód elektryczny składa się z jednego elementu odbiorczego i jednego elementu źródłowego. Obwóyd przedstawiony na rys. 2a nazywa się **nierozgałęzionym**, gdyż płynie w nim tylko jeden prąd elektryczny. Prąd oznaczony jest literą (I), a kierunek prądu oznaczamy strzałką umieszczoną na przewodzie. Schematy obwodyw spotykanych w praktyce są zwykle bardziej skomplikowane. Na rys. 2b pokazany jest schemat **obwodu**

rozgałązionego, który składa się z trzech gałęzi zbiegających się w **węzłach** obwodu. Obwód ten posiada dwa węzły.

Gałęź obwodu tworzy jeden lub kilka elementów połączonych szeregowo, przez które przepływa ten sam prąd elektryczny. **Węzłem obwodu elektrycznego** nazywamy zacisk lub końcówkę gałęzi, do której jest przyłączona inna gałęź lub kilka gałęzi. Węzły obwodu elektrycznego oznaczane są zaczernionymi punktami. W teorii obwodów elektrycznych ważnym jest pojęcie **oczka obwodu**. **Oczkiem obwodu** elektrycznego nazywa się zbiór połączonych ze sobą gałęzi, tworzących nieprzerwaną drogę dla przepływu prądu. Po usunieńciu z oczka dowolnej gałęzi przestaje istnieć w oczku nieprzerwana (ciągła) droga dla przepływu prądu. Obwyd przedstawiony na rys. 2a posiada jedno oczko, zaś obwód, którego schemat przedstawiony jest na rys. 2b posiada trzy oczka, które zaznaczono liniami przerywanymi.



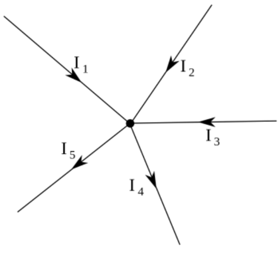
Rys. 2

Dowolną sieć liniową składającą się z elementów skupionych można opisać za pomocą układu p **równań liniowych** $p = g - w + 1$**, gdzie:** g **– liczba gałęzi sieci,** w **– liczba niezależnych węzłów. Podstawą do napisania modelu są prawa** I i II **Kirchhoffa.** Rozwiązanie obwodu sprowadza się do wyznaczenia p niewiadomych prądów płynących w poszczególnych gałęziach, zwanych prądami gałęziowymi obwodu. Z matematycznego punktu widzenia rozwiązanie obwodu wymaga ułożenia i rozwiązania ukladu p niezależnych równań liniowych.

Pierwsze prawo Kirchhoffa prawo dotyczące przepływu prądu w rozgałęzieniach obwodu elektrycznego, sformułowane w 1845 roku przez Gustawa Kirchhoffa. Prawo to wynika z zasady zachowania ładunku czyli równania ciągłości. Wraz z drugim prawem Kirchhoffa umożliwia określenie wartości i kierunków prądów w obwodach elektrycznych.

Dla węzła w obwodzie elektrycznym pierwshe prawo brzmi:

Dla węzła obwodu elektrycznego suma algebraiczna natężeń prądów wpływających (+) i wypływających (–) jest równa zeru (znak prądu wynika z przyjętej konwencji**).**



Dla przypadku przedstawionego na rysunku prawo Kirchhoffa można więc zapisać w postaci $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$.

W ogólnym przypadku wielu prądów p**r**awo ma postać: $\sum_i I_i = 0$,

Drugie prawo Kirchhoffa – zwane również prawem napięciowym, dotyczy bilansu napięć w zamkniętym obwodzie elektrycznym prądu stałego. Najczęściej prawo to jest formułowane w postaci:

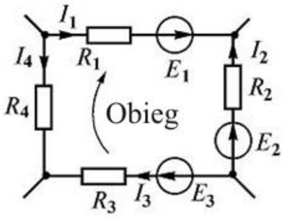
W zamkniętym obwodzie suma spadków napięć na oporach równa jest sumie sił elektromotorycznych występujących w tym obwodzie. Przy czym obwód ten może być elementem większej sieci. Wówczas nosi on nazwę oczka sieci. Prawo to zapisane równaniem ma postać $\sum_i U_i = \sum_k \mathrm{E}_k$, gdzie U_i - spadek napięcia na i-tym elemencie oczka, E_k - SEM (**Siła elektromotoryczna**) k-tego źródła napięcia. Dla oporów omowych $U_i = I_i R_i$, gdzie I_i jest natężeniem prądu płynącego przez opornik o oporze R_i.

Zarówno spadki napięcia jak i siły elektromotoryczne mogą przybierać wartości ujemne i dodatnie. Ich znak ustala się według **następujących reguł**:

1. ustala się kierunek obiegu obwodu (np. zgodnie z ruchem wskazówek zegara)
2. gdy kierunek prądu płynącego przez element obwodu jest zgodny z wyznaczonym kierunkiem obiegu, to spadek napięcia jest dodatni (w przypadku niezgodności – ujemny)
3. gdy SEM jest spolaryzowana zgodnie z kierunkiem obiegu, jej wartość jest dodatnia

Dla przypadku przedstawionego na rysunku prawo Kirchhoffa można więc zapisać w postaci:

$$E_1 - E_2 + E_3 = I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4$$

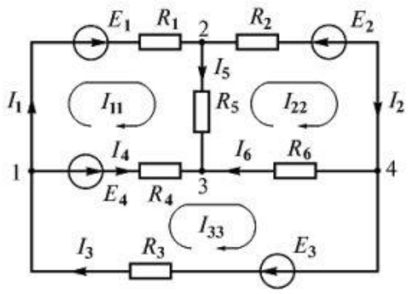


Traktując spadek napięcia jako jego ujemny przyrost, można II prawo Kirchhoffa formułować następująco „**Suma spadków napięcia w obwodzie zamkniętym jest równa zeru**”

Zagadnienie polega na kompilowaniu równań zgodnie z pierwszym i drugim prawem Kirchhoffa dla węzłów i oczek obwodu elektrycznego i rozwiązywaniu tych równań w celu określenia nieznanych prądów w gałęziach i od nich - napięć. Dlatego liczba niewiadomych jest równa liczbie gałęzi ***g.*** Liczba równań, które można zapisać na podstawie pierwszego prawa, jest równa liczbie węzłów łańcuchowych, i tylko ***(w - 1)*** równań są niezależne.

Niezależność równań zapewnia wybór węzłów. Węzły są zazwyczaj wybierane tak, aby każdy kolejny węzeł różnił się od sąsiednich węzłów o co najmniej jedną gałąź. Pozostałe równania są kompilowane zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa dla niezależnych obwodów, tj. liczba równań ***g - (w - 1) = g - w +1***. Kontur jest nazywany niezależnym, jeśli zawiera co najmniej jedną gałąź, która nie jest uwzględniona w innych konturach.

Zapiszemy układ równań Kirchhoffa dla łańcucha elektrycznego przedstawionego na rys. 3. Schemat zawiera cztery węzły i sześć gałęzi. Dlatego zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa możemy zapisać ***w - 1 = 4 - 1 = 3*** równania i zgodnie z drugim ***g - w + 1 = 6 - 4 + 1 = 3***, również trzy równania. Dowolnie wybieramy dodatnie kierunki prądów we wszystkich gałęziach. Kierunek obejścia obwodu jest wybierany zgodnie z ruchem wskazówek zegara.



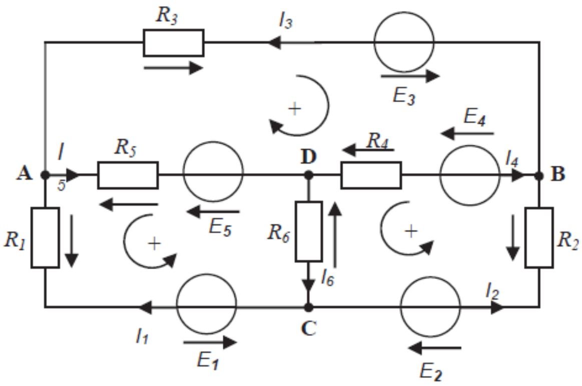
Rys. 3

$$\begin{aligned}
&I_1 + I_4 - I_3 = 0;\\
&E_1 - E_4 = I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_4 R_4;\\
&I_2 + I_5 - I_1 = 0;\\
&-E_2 = I_2 R_2 + I_6 R_6 - I_5 R_5;\\
&I_4 + I_5 + I_6 = 0;\\
&E_4 + E_3 = I_4 R_4 + I_3 R_3 - I_6 R_6;
\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ, który ma sześć równań i sześć niewiadomych, uzyskujemy pożądane wartości prądów. Rownież możemy sprawdzić bilans mocy

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 + E_4 I_4 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$$

Rozpatrzymy jeszcze jeden przykład. Na schemacie obwodu predstawionym na **rys. 4** oznaczmy zwroty prądów gałęziowych za pomocą strzałek, których kierunki przyjmujemy zupełnie dowolnie. Jeśli bowiem przyjmiemy niewłaściwy zwrot prądu, to po wykonaniu obliczeń okaże się, że prąd ma wartość ujemną. Gdy obwód zbudowany jest z n gałęzi, w których płynie n prądów, to naleĪy ułożyć n równań dla wyznaczenia tych prądów. W celu otrzymania ukladu n równań, układamy $(k-1)$ równań na podstawie **I prawa Kirchhoffa** (k-liczba węzłów), a pozostaáe $(n-k+1)$ równań układamy na podstawie **II prawa Kirchhoffa** dla wszystkich niezależnych oczek obwodu.



Rys. 4

Rozpatrywany obwód ma $k=4$ węzły oraz $n=6$ gałęzi. Na podstawie I prawa Kirchhoffa układamy $(k-1=3)$ równania dla węzłów A, B, C:

$$I_5 = I_1 + I_3,$$
$$I_4 = I_3 - I_2,$$
$$I_6 = I_1 + I_2.$$

Na podstawie II prawa Kirchhoffa mamy (n-k+1 = 3) równań dla oczek ADCA, BDCB, ADBA:

$$R_1 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_5 + R_6 \cdot I_6 + E_1 + E_5 = 0$$
$$-R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_6 - E_2 + E_4 = 0$$
$$R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 + R_5 I_5 - E_3 + E_4 + E_5 = 0$$

Otrzymaliśmy więc układ 6 równań z sześcioma niewiadomymi prądami. Teraz pozostaje podstawić dane (R i E) i rozwiązać układ równań.

Analiza metody rozwiązywania układu równań liniowych

Skuteczność obliczeń w dużej mierze zależy od wyboru metody rozwiązywania układu równań liniowych. Metody rozwiązania ULRA są podzielone na dwie grupy: bezpośrednią (dokładną) i iteracyjną (przybliżoną). Metody bezpośrednie pozwalają uzyskać rozwiązanie w skończonej liczbie kroków. Metody iteracyjne są konstruowane na zasadzie wielokrotnego obliczania kolejnych przybliżeń, które są zbieżne z pożądanym rozwiązaniem.

Dla efektywnego wykorzystania tych metod i uzyskania praktycznych zaleceń do ich zastosowania niezbędna jest ocena macierzy z punktu widzenia istnienia rozwiązania i oszacowania błędu obliczeniowego.

Przy analizie układu równań algebraicznych bardzo ważną wielkością jest stopień **uwarunkowania** macierzy. Aby zrozumieć tę pojęcie, rozważmy dwa układy równań

$$\begin{cases} 3{,}5x + 1y = 2{,}8, \\ 4x + y = 2{,}9. \end{cases} \qquad (1) \qquad\qquad \begin{cases} 0{,}2x + y = 2, \\ 15x + y = 4. \end{cases} \qquad (2)$$

Zapiszemy (1), (2) w postaci macierzowej

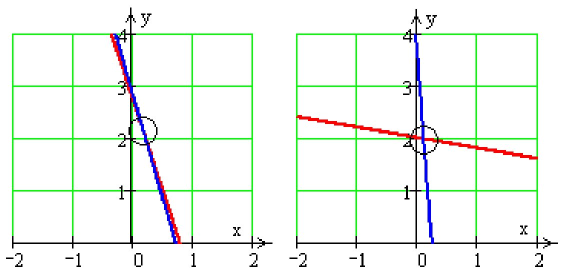
$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}_1, \ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3,5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 2.9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}_2, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Na podstawie (1), (2) przedstawimy zależności

$$\begin{cases} y(x) = 2,8 - 3,5x, \\ y(x) = \ 2,9 - 4x. \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} y(x) = 2 - 0,2x, \\ y(x) = \ 4 - 15x. \end{cases} \quad (4)$$

i przedstawimy ich graficznie



a b

Rys. 5

Układ równań (3) ma źle uwarunkowaną macierz, to znaczy linie proste są bardzo blisko siebie, linie proste praktycznie się łączą (rys. 5a). Oznacza to, że jeśli dokładność obliczeń nie jest wystarczająco wysoka, rozwiązanie będzie trudne do znalezienia. W przypadku układu równań (4) obserwuje się wyraźny punkt przecięcia (ryc. 5b), to znaczy układ ma dobre uwarunkowanie.

Jest oczywiste, że taka graficzna ocena uwarunkowania macierzy jest w ogólnym wypadku nieprzyjęta. Stopień uwarunkowania systemu charakteryzują tzw. **wskaźniki uwarunkowania**, które są obliczane na podstawie norm macierzy. Analizując układy liniowych równań algebraicznych zwykle stosuje się trzy łatwe do obliczenia normy macierzy

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|, \qquad \|\mathbf{A}\|_2 = \max(\sqrt{\lambda_{\max}(AA^T}), \qquad \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \ .$$

Gdzie $\|\mathbf{A}\|_1$ – norma macierzy, która jest równa największej z sum wartości bezwzględnych elementów jednej kolumny macierzy, $\|\mathbf{A}\|_2$ – nieskończona (spektralna) norma macierzy równa pierwiastkowi kwadratowemu z maksymalnej wartości własnej macierzy $A \cdot A^T$, $\|\mathbf{A}\|_\infty$ – norma macierzy, która jest równa największej z sum bezwzględnych wartości elementów jednego wiersza macierzy.

Dla zbieżności procesów liniowych iteracji prostej i metody Seidela dostatecznie aby dla dowolnego wstępnego przybliżenia którakolwiek ze wskazanych norm była mniejsza niż jedynka: $\|\mathbf{A}\|_1 < 1, \|\mathbf{A}\|_2 < 1, \|\mathbf{A}\|_\infty < 1.$

Jednak warunki są tylko dostateczne, ale w żadnym wypadku nie są niezbędne. Niespełnienie któregokolwiek z warunków nie oznacza rozbieżności procesu iteracyjnego. Spełnienie któregokolwiek z tych warunków oznacza zbieżność metod iteracyjnych. Weryfikację wystarczających warunków zbieżności można łatwo przeprowadzić przed bezpośrednim obliczeniem.

Przeprowadźmy obliczenia dla rozważanego przykładu

$$\|\mathbf{A}_1\|_1 = 3,5 + 4 = 7,5\,; \quad \|\mathbf{A}_2\|_1 = 0,2 + 15 = 15,2\,.$$

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}; \ \mathbf{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -0,068 & 0,068 \\ 1,014 & -1,014 \end{pmatrix}.$$

$$\|\mathbf{A}_1^{-1}\|_1 = 2 + 8 = 10\,; \quad \|\mathbf{A}_2^{-1}\|_1 = 0,068 + 1,014 = 1,081\,.$$

wskaźniki uwarunkowania dla macierzy A_1 i A_2 można je wyznaczyć w następujący sposób

$$\alpha_1 = \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_1, \qquad \alpha_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2, \qquad \alpha_\infty = \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty\,.$$

Określimy wskaźniki uwarunkowania dla rozważanego przykładu

$$\alpha_{11} = \|\mathbf{A}_1\| \cdot \|\mathbf{A}_1^{-1}\| = 7,5 \cdot 10 = 75; \quad \alpha_{12} = \|\mathbf{A}_2\| \cdot \|\mathbf{A}_2^{-1}\| = 15,2 \cdot 1,081 = 16,432\,.$$

Jak widać, wskaznik uwarunkowania dla systemu (3) jest większy niż numer wskaznik uwarunkowania (4). Zatem im niższy numer warunku, tym lepiej.

W praktyce pewien błąd w obliczeniach wprowadzają:
- błąd w określeniu parametrów elementów obwodu (naprzykład oporników R)
- błędy w pomiarach prądów sterujących i napięć węzłowych.

W tej pracy założymy, że parametry elementów są określone z wystarczającą dokładnością. Poziom możliwych błędów pomiarowych można oszacować np. poprzez nieznaczną zmianę wartości rezystancji, skupiając się na klasie dokładności przyrządów pomiarowych.

1. **Zadanie:** Wyznaczyć prądy gałęziowe dla obwodu elektrycznego zadanego przez prowadzącego zajęcia i ocenić skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych.

Kolejność wykonania pracy laboratoryjnej

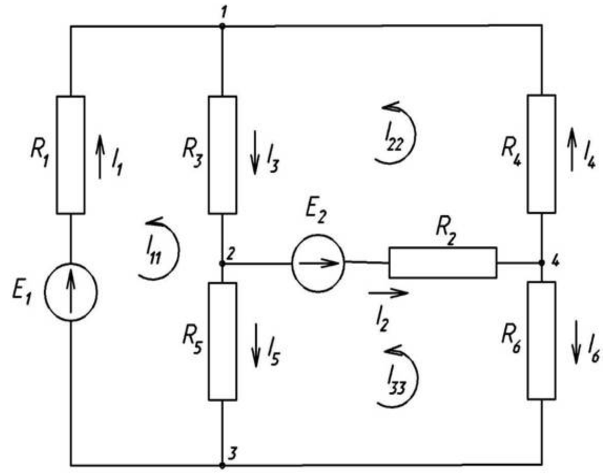
2. Przestudiować podstawy teoretyczne i odpowiedni wykładowy materiał.
3. Zapisać układ równań Kirchhoffa dla otrzymanego zadania.
4. Wyznaczyć prądy gałęziowe dla obwodu elektrycznego w pakiecie oprogramowania Scilab.

5. Obliczyć normy dla macierzy współczynników zapisanego układu równań $\|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2, \|\mathbf{A}\|_\infty$ i wskaźniki uwarunkowania tej macierzy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_\infty$. Porównać wyniki.
6. Zmienić niektóre parametry wejściowe (R_i, E_i) w granicach 10 procentów.
7. Wyznaczyć prądy gałęziowe dla obwodu elektrycznego dla zmienionych parametrow.
8. Obliczyć wskaźniki uwarunkowania zmienionej macierzy.
9. Porównać wyniki i sformułować krótkie podsumowanie o skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych.

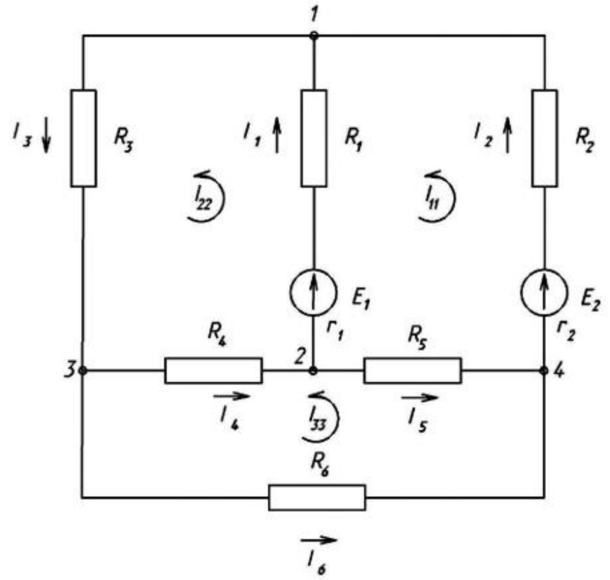
Sprawozdanie powinno zawierać:

1. stronę tytułową (Nr. Pracy laboratoryjnej, Temat, Przedmiot, Nazwisko i Imie Studenta, Nr. Grupy, Nazwisko i Imie Prowadzącego, Semestr, Rok).
2. Pełny opis zadania.
3. Pełne skrypty Scilab-a (polecenia) rozwiązujące zadanie z komentarzami.
4. Wyniki obliczeń.
5. Porównanie wyników uzyskanych dla początkowych i zmienionych parametrów układu.
6. Podsumowanie.

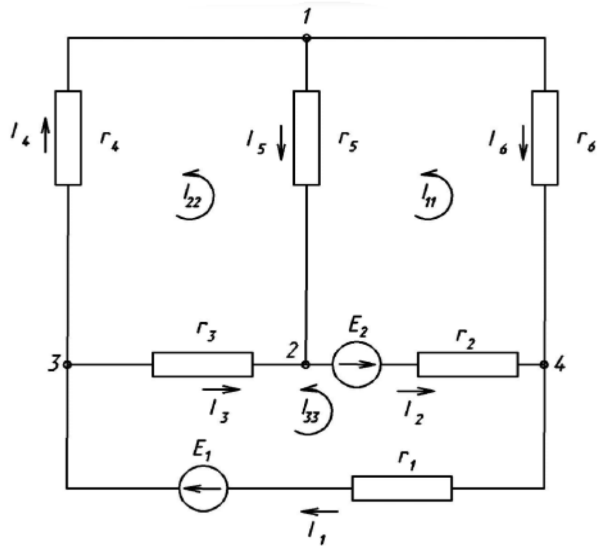
№	Parametry obwodu (R_1 - R_6 [Om] i E_1 - E_2 [V])								
L.p.	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	E_1	E_2	**Schemat**
1	4	8	21	16	19	16	130	110	**nr. 1**
2	4	8	42	16	19	16	220	110	**nr. 1**
3	4	8	21	32	19	16	250	110	**nr. 1**
4	4	8	21	16	38	16	110	220	**nr. 1**
5	4	8	21	16	19	32	130	220	**nr. 1**
6	3	6	22	17	14	13	60	200	**nr. 2**
7	3	6	44	34	14	13	200	60	**nr. 2**
8	3	6	22	17	28	13	220	110	**nr. 2**
9	3	6	22	17	14	13	110	200	**nr. 2**
10	3	6	22	17	14	26	60	120	**nr. 2**
11	5	4	24	20	12	18	140	120	**nr. 3**
12	5	4	50	20	12	18	280	120	**nr. 3**
13	5	4	24	40	12	18	140	220	**nr. 3**
14	5	4	24	20	25	18	120	120	**nr. 3**
15	5	4	24	20	12	40	220	120	**nr. 3**



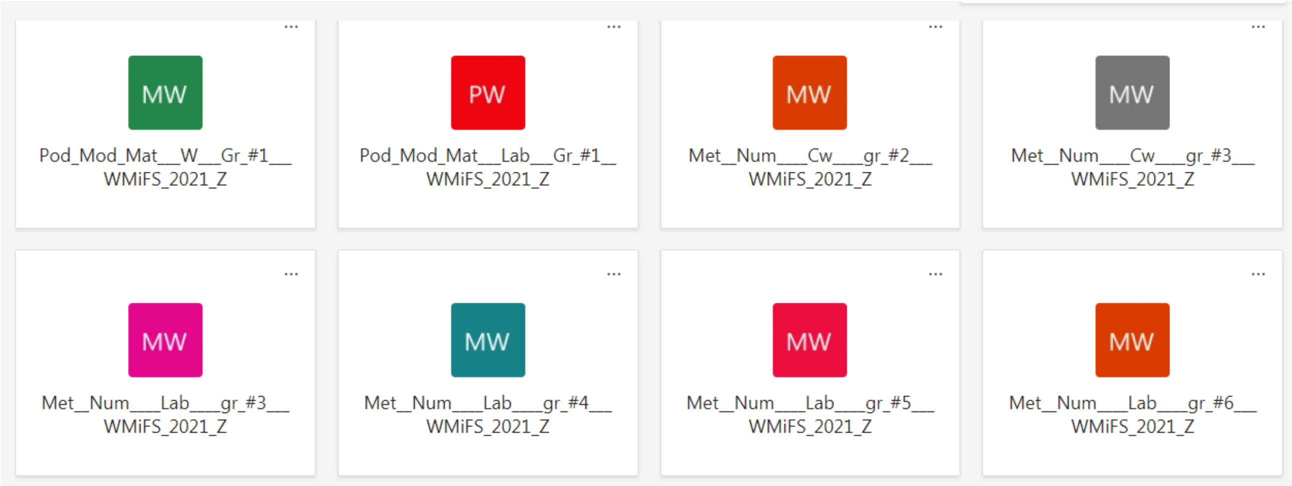
Schemat **nr. 1**



Schemat **nr. 2**



Schemat **nr. 3**


MW
Pod_Mod_Mat__W__Gr_#1__ WMiFS_2021_Z
PW
Pod_Mod_Mat__Lab__Gr_#1__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Cw___gr_#2__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Cw___gr_#3__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Lab___gr_#3__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Lab___gr_#4__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Lab___gr_#5__ WMiFS_2021_Z
MW
Met_Num___Lab___gr_#6__ WMiFS_2021_Z