

Rzeszów, 26.12.2021

PODSTAWY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO W  
INŻYNIERII

PRACA LABORATORYJNA NR 2

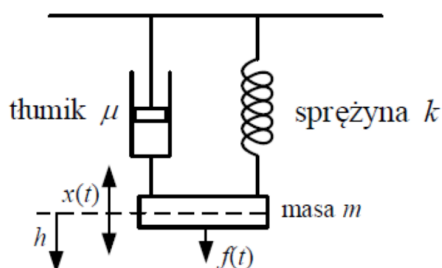
”Modele matematyczne w postaci układów równań różniczkowych  
zwyczajnych i metody ich rozwiązania.”

Piotr Krawiec L1  
Semestr: 2021/2022  
Kierunek: III/FS0-DI  
Numer indeksu: 164165  
Prowadzący: Bohdan Datsko

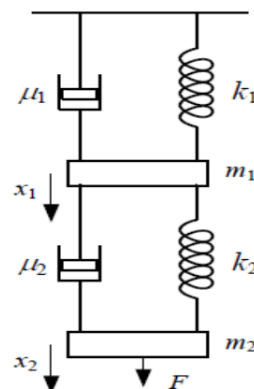
# 1 Treść zadania

Wykonać modelowanie różnych możliwych typów zachowań układów oscylacyjnych przedstawionych na rysunkach 1 i 2. Innymi słowy, otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych dla parametrów podanych w tabeli 2 zgodnie z zestawem. Ocenąć skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych i analitycznych.

## 1.1 Badane układy i funkcje



Rysunek 1: Schemat układu z jednym tłumikiem i sprężyną



Rysunek 2: Schemat układu podwójnego.

Numer	$m = m_1$	$m_2$	$u = u_1$	$u_2$	$k = k_1$	$k_2$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{w}$
13	1	5	6	1	4	1	2	1

Tabela 1: Parametry modelowanych układów

Zostaną zbadane następujące siły zewnętrzne:

$$f_1 = a * \sin(\omega t)$$

oraz

$$f_2 = a * e^{\sin(\omega t)}$$

Przy wartościach początkowych dla pierwszego układu:

$$x(0) = 1, x'(0) = 0$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 1$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1$$

A dla drugiego układu:

$$x_1(0) = 1, x'_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x'_2(0) = 1$$

$$x_1(0) = 0, x'_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x'_2(0) = 0$$

$$x_1(0) = 1, x'_1(0) = 1, x_2(0) = 0, x'_2(0) = 0$$

## 2 Teoria

Jednorodne równania różniczkowe  $n$ -tego rzędu o stałych współczynnikach, to równania następującej postaci:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

gdzie  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . Wielomian charakterystyczny takiego równania ma postać:

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (2)$$

Rozwiązanie takiego równania można zapisać z pomocą jego pierwiastków. Dla każdego  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  o krotności  $m$ :

$$y = (C_1 + C_2 t + \dots + C_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda_i t} \quad (3)$$

Dla każdego  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  o krotności  $m$ :

$$\begin{aligned} y = e^{\alpha t} & \left[ C_1 + C_2 + \dots + C_{m-1} t^{m-1} \right] \cos(\beta t) \\ & + e^{\alpha t} \left[ D_1 + D_2 + \dots + D_{m-1} t^{m-1} \right] \sin(\beta t) \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:  $\lambda = \alpha + \beta i$

### 2.0.1 Badanie typów rozwiązań

Postać ogólna rozwiązywanego równania wygląda następująco:

$$y'' + py' + qy = 0$$

W zależności od tego, jakie przyjmujemy parametry, jego rozwiązanie zależy od parametrów  $k_1$  oraz  $k_2$ , gdzie:

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Możliwe są zatem 3 przypadki:

1.  $k_1, k_2$  są rzeczywiste różne od siebie
2.  $k_1, k_2$  są zespolone
3.  $k_1, k_2$  są równe (rzeczywiste lub zespolone)

## 3 Rozwiązanie

### 3.1 Układ 1.2a - układ bez siły zewnętrznej

Układ pierwszy możemy rozwiązać analitycznie. Dla parametrów początkowych  $x(0) = 1, x'(0) = 0$ , wygląda to następująco:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad F = m \cdot a = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} &= -\mu \frac{dx(t)}{dt} - k x(t) & \left| \begin{array}{l} x(0) = x_1 \\ x'(0) = x_2 \end{array} \right. \\
 m \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + k x(t) &= 0, \quad y = \frac{dx(t)}{dt} \\
 \begin{cases} m \cdot \frac{dy}{dt} + \mu \cdot y + k \cdot x(t) = 0 \\ y = \frac{dx(t)}{dt} \end{cases} \\
 \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu}{m} \cdot y - \frac{k}{m} \cdot x(t) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= -3 + \sqrt{5} \\
 k_2 &= -3 - \sqrt{5} \\
 \begin{cases} y = C_1 \cdot e^{k_1 t} + C_2 \cdot e^{k_2 t} \\ y' = C_1 \cdot k_1 \cdot e^{k_1 t} + C_2 \cdot k_2 \cdot e^{k_2 t} \end{cases} & \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array} \\
 \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 k_1 + C_2 k_2 \end{cases} & \begin{array}{l} C_1 k_1 = -C_2 k_2 \\ C_1 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot C_2 \end{array} \\
 \begin{cases} C_1 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot C_2 \\ C_1 = 1 - C_2 \end{cases} & \\
 1 - C_2 = -\frac{k_2}{k_1} \cdot C_2 & \\
 1 = \left( -\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) C_2 & \\
 C_2 = \frac{1}{-\frac{k_2}{k_1} + 1}, \quad C_1 = 1 - C_2 &
 \end{aligned}$$

Do porównania wyników wykorzystam następujący kod w scilab:

Listing 1: Kod porównujący rozwiązania

```

1 T=0.0:0.1:10;
2 k1 = -3 + sqrt(5);
3 k2 = -3 - sqrt(5);
4 C2 = 1/(-k2/k1 + 1);
5 C1 = 1 - C2;

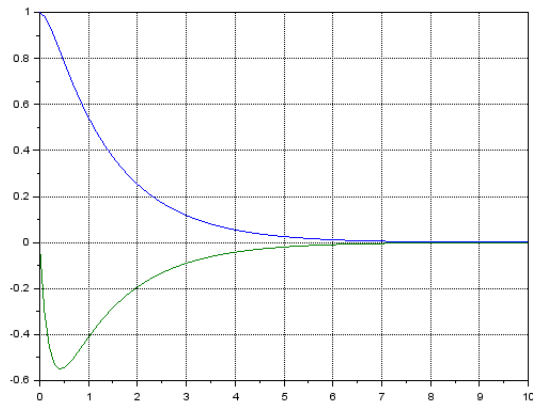
```

```

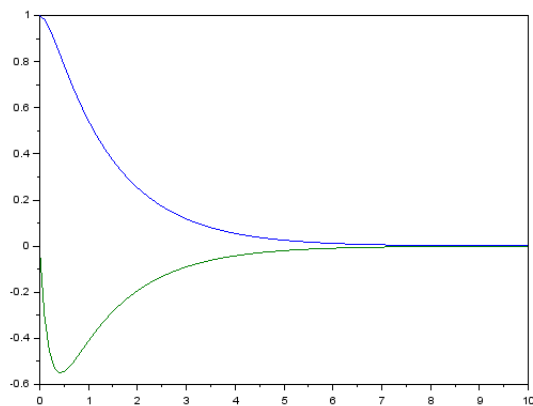
6
7 // Rozwiazanie analityczne
8 function y=yy(t)
9     y = list();
10    y(1) = C1*exp(k1*t) + C2*exp(k2*t);
11    y(2) = C1*k1*exp(k1*t) + C2*k2*exp(k2*t);
12 endfunction
13 plot(T, [yy(T)(1); yy(T)(2)]) % Wykres rozwiazania
    analitycznego
14
15 // Rozwiazanie w Scilab
16 function zad1(u, k, m)
17     function dy=fun(t, y)
18         dy(1)=y(2);
19         dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1);
20     endfunction
21
22     t0=0.0; y0=[1;0];
23     T=0.0:0.1:10;
24     y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
25     scf(3);
26     plot(T,y); xgrid();
27     scf(4);
28     plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
29 endfunction
30
31 zad1(6, 4, 1) // rozwiazanie w scilab

```

## Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego



Rysunek 3: Rozwiązanie w Scilab



Rysunek 4: Rozwiązanie analityczne

### 3.1.1 Rozwiązanie w Scilab

Listing 2: Kod generujący wykresy

```
1 function zad5(u, k, m, y0)
2     for u = (u-0.1*u):0.05:(u+0.1*u)
3         for k = (k-0.1*k):0.05:(k+0.1*k)
4             for m = (m-0.1*m):0.05:(m+0.1*m)
5                 function dy=fun(t, y)
6                     dy(1)=y(2);
7                     dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1);
8                 endfunction
9
10                t0=0.0;
11                T=0.0:0.1:10;
12                y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
```

```

13         scf(3);
14         plot(T,y); xgrid();
15         scf(4);
16         plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
17     end
18 end
19 end
20 endfunction
21
22
23 zad5(6, 4, 1, [1;0]) // k_1 i k_2 s  rozne, rzeczywiste
24 xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy.png")
25 xs2png(4, "img/5-rzeczywiste-phase.png")
26 close();close();
27
28 zad5(1, 4, 1, [1;0]) // k_1 i k_2 s  zespolone
29 xs2png(3, "img/5-zespolone-xy.png")
30 xs2png(4, "img/5-zespolone-phase.png")
31 close();close();
32
33 zad5(0, 4, 1, [1;0]) // k1 i k_2 brak oporu
34 xs2png(3, "img/5-boporu-xy.png")
35 xs2png(4, "img/5-boporu-phase.png")
36 close();close();
37
38 zad5(2, 4, 1, [1;0]) // k1 i k_2 s  rowne
39 xs2png(3, "img/5-rowne-xy.png")
40 xs2png(4, "img/5-rowne-phase.png")
41 close();close();
42
43
44 zad5(6, 4, 1, [1;1]) // k_1 i k_2 s  r  ne , rzeczywiste
45 xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy-11.png")
46 close();close();
47
48 zad5(1, 4, 1, [1;1]) // k_1 i k_2 s  zespolone
49 xs2png(3, "img/5-zespolone-xy-11.png")
50 close();close();
51
52 zad5(0, 4, 1, [1;1]) // k1 i k_2 brak oporu
53 xs2png(3, "img/5-boporu-xy-11.png")
54 close();close();
55
56 zad5(2, 4, 1, [1;1]) // k1 i k_2 s  r  wne
57 xs2png(3, "img/5-rowne-xy-11.png")
58 close();close();
59
60 zad5(6, 4, 1, [0;1]) // k_1 i k_2 s  r  ne , rzeczywiste
61 xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy-01.png")
62 close();close();

```

```

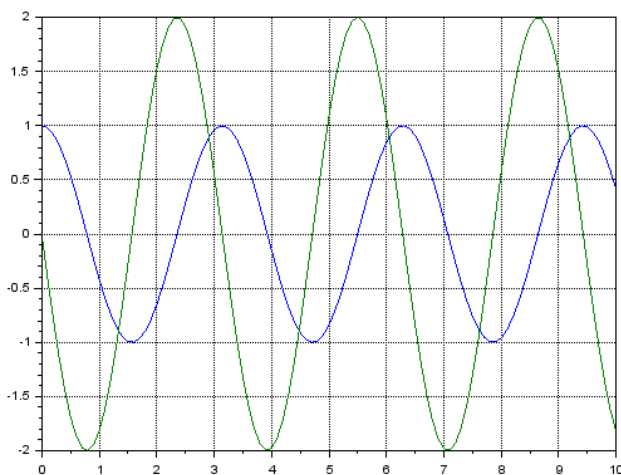
63
64 zad5(1, 4, 1, [0;1]) // k_1 i k_2 s zespolone
65 xs2png(3, "img/5-zespolone-xy-01.png")
66 close();close();
67
68 zad5(0, 4, 1, [0;1]) // k1 i k_2 brak oporu
69 xs2png(3, "img/5-boporu-xy-01.png")
70 close();close();
71
72 zad5(2, 4, 1, [0;1]) // k1 i k_2 s r wne
73 xs2png(3, "img/5-rowne-xy-01.png")
74 close();close();

```

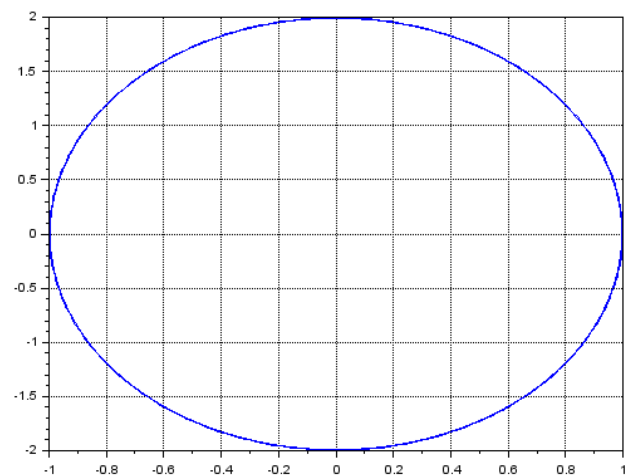
### 3.1.2 Rozwiązanie układu z modyfikacją parametrów przy $x(0) = 1, x'(0) = 0$

Poniższe wykresy zostały wygenerowane modyfikując parametry  $\mu, k, m$ . Każdy z nich był zmieniany w granicach 10 procent.

#### Układ bez oporu



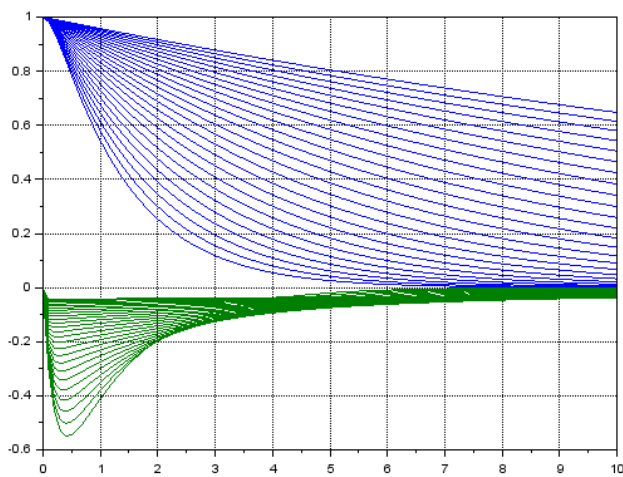
Rysunek 5: Rozwiązanie  
 $x'' + 4x = 0$



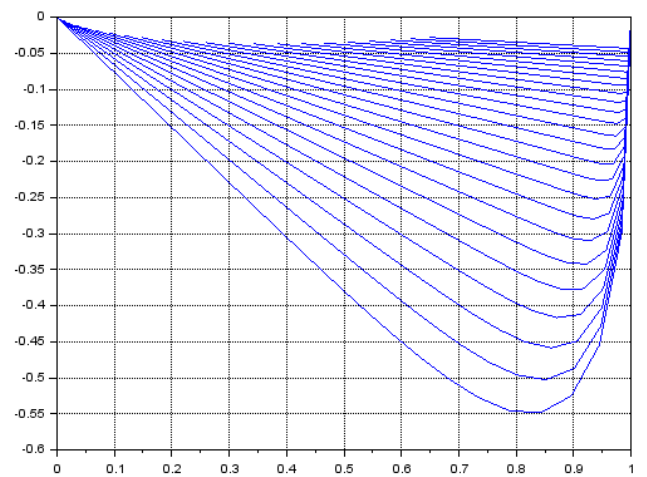
Rysunek 6: Wykres fazowy  
 $x'' + 4x = 0$



## Układ z różnymi rozwiązaniami rzeczywistymi

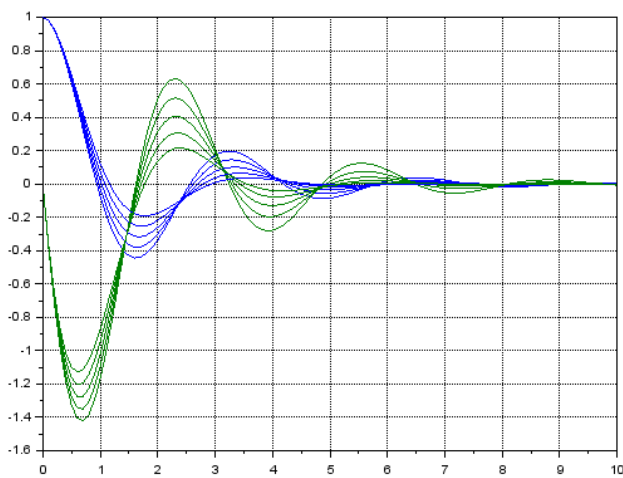


Rysunek 7: Rozwiązanie  
 $x'' + 6x' + 4x = 0$

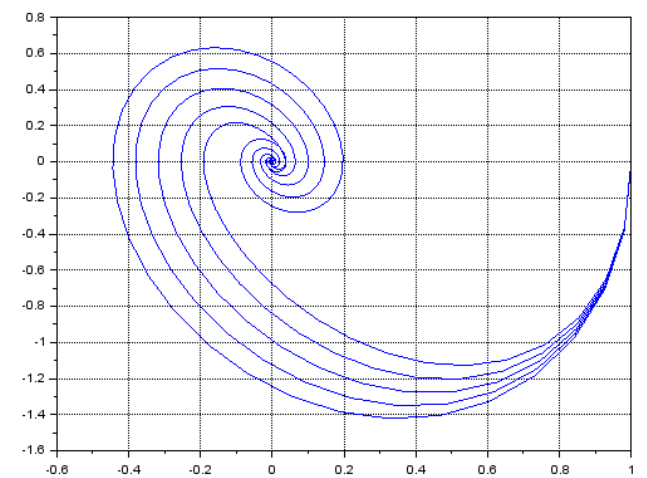


Rysunek 8: Wykres fazowy  
 $x'' + 6x' + 4x = 0$

## Układ z różnymi rozwiązaniami zespolonymi

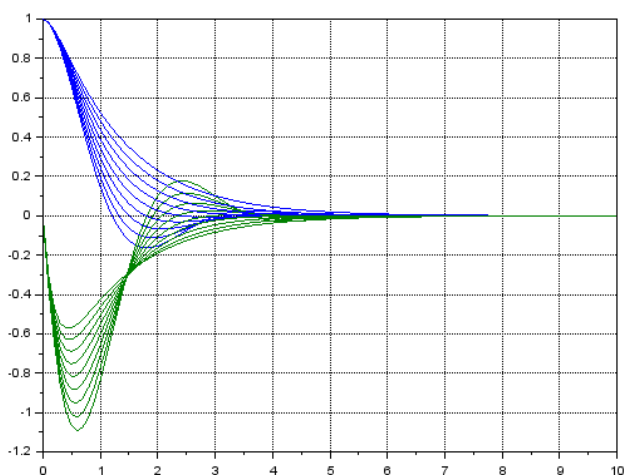


Rysunek 9: Rozwiązanie  
 $x'' + 1x' + 4x = 0$

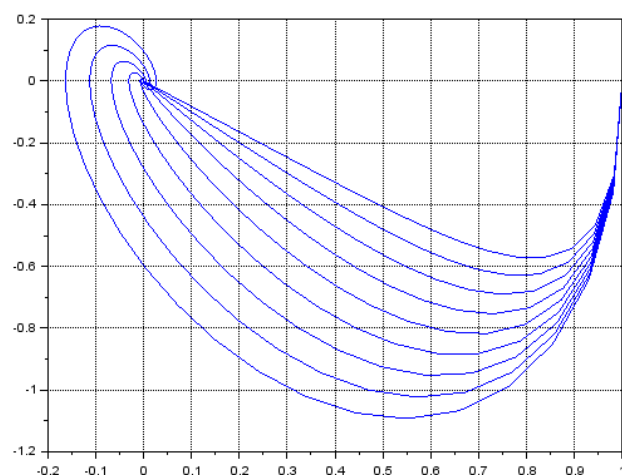


Rysunek 10: Wykres fazowy  
 $x'' + 1x' + 4x = 0$

## Układ z identycznymi rozwiązaniami rzeczywistymi



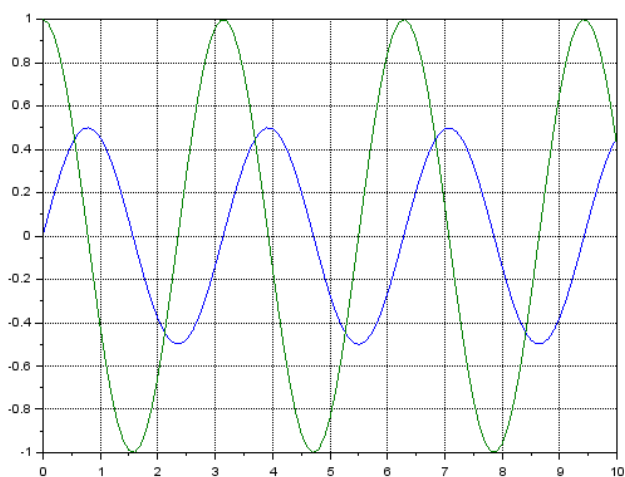
Rysunek 11: Rozwiązanie  
 $x'' + 2x' + 4x = 0$



Rysunek 12: Wykres fazowy  
 $x'' + 2x' + 4x = 0$

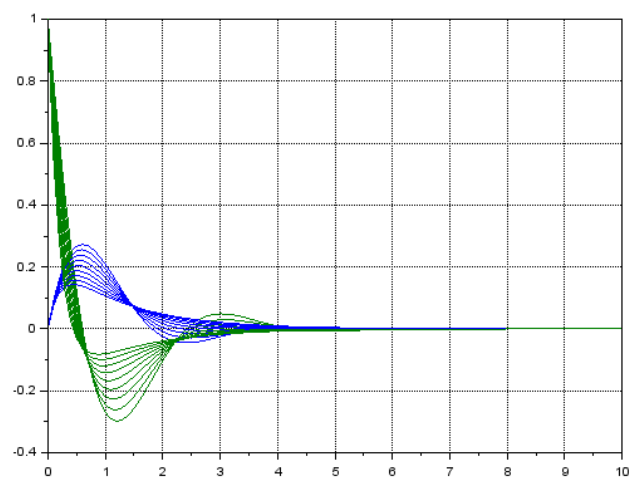
### 3.1.3 Rozwiązanie zadanego układu ze zmianą parametrów przy $x(0) = 0, x'(0) = 1$

#### Układ bez oporu



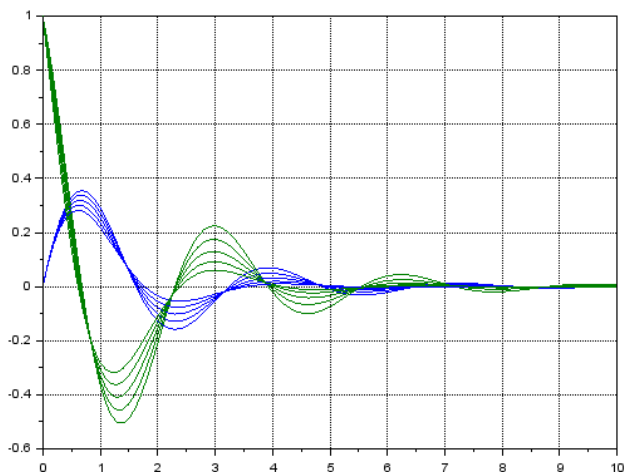
Rysunek 13: Rozwiązanie  
 $x'' + 4x = 0$

#### Identyczne rzeczywiste



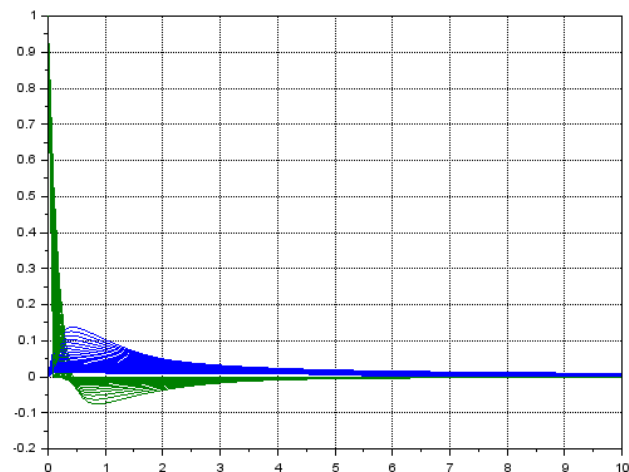
Rysunek 14: Rozwiązanie  
 $x'' + 2x' + 4x = 0$

### Zespólone



Rysunek 15: Rozwiązanie  
 $x'' + 1x' + 4x = 0$

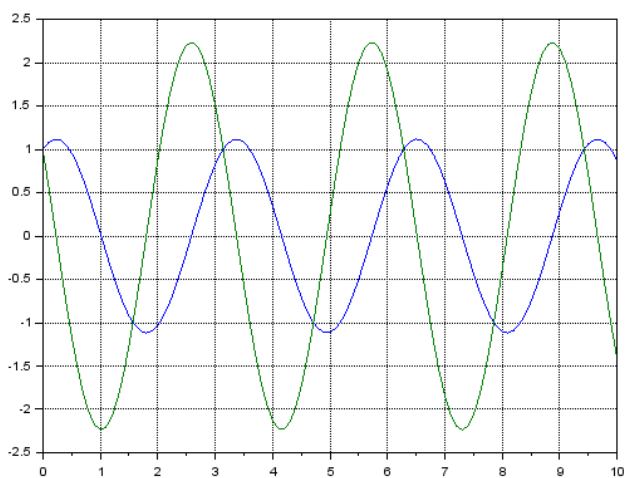
### Rzeczywiste



Rysunek 16: Rozwiązanie  
 $x'' + 6x' + 4x = 0$

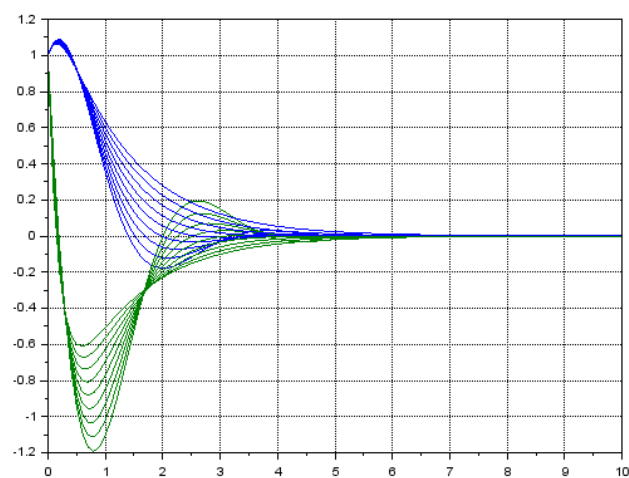
### 3.1.4 Rozwiązanie zadanego układu ze zmianą parametrów przy $x(0) = 1, x'(0) = 1$

#### Układ bez oporu



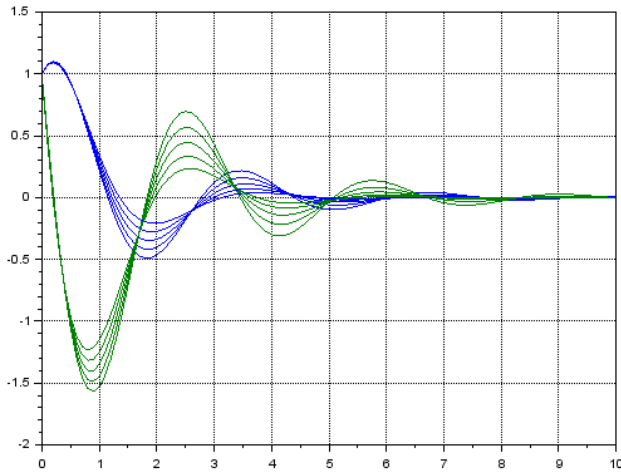
Rysunek 17: Rozwiązanie  
 $x'' + 4x = 0$

#### Identyczne rzeczywiste



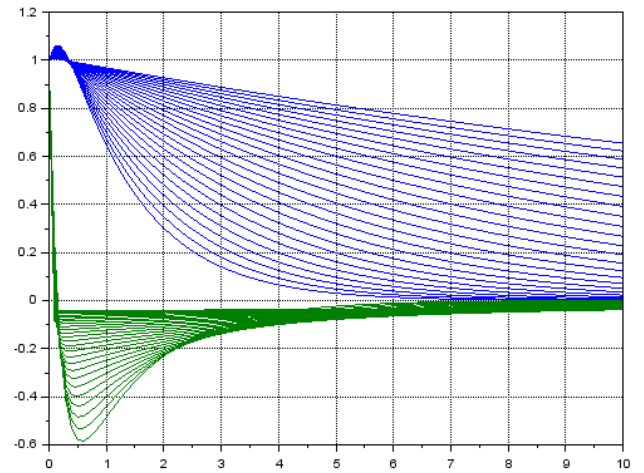
Rysunek 18: Rozwiązanie  
 $x'' + 2x' + 4x = 0$

Zespólone



Rysunek 19: Rozwiązanie  
 $x'' + 1x' + 4x = 0$

Rzeczywiste



Rysunek 20: Rozwiązanie  
 $x'' + 6x' + 4x = 0$

### 3.2 Układ 1.2b - układ z drganiami wymuszonymi

Układ ten działa podobnie jak układ 1.2a (patrz Rys. 1), lecz teraz na układ działają siły zewnętrzne  $f_1$  oraz  $f_2$ . Rozwiązanie w scilab z funkcją  $f_1 = a \sin(\omega t)$ :

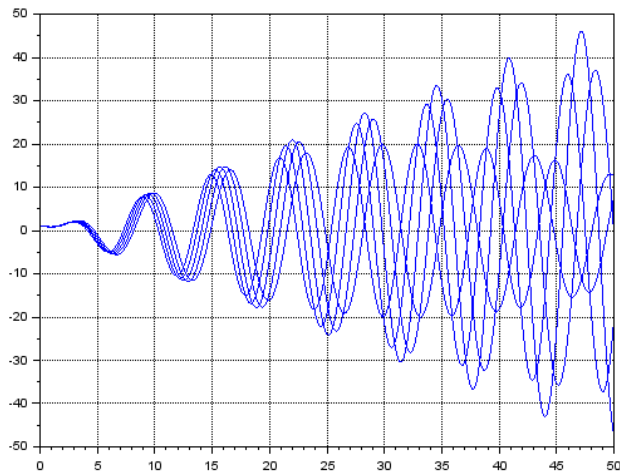
```

1  function zad7(u, k, m, a, omega)
2      function dy=fun(t, y)
3          dy(1)=y(2);
4          dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1) + a*sin(omega*t);
5      endfunction
6
7      t0=0.0;y0=[1;0];
8      T=0.0:0.1:80;
9      y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
10     scf(3);
11     plot(T,y(1,:)); xgrid();
12     scf(4);
13     plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
14 endfunction

```

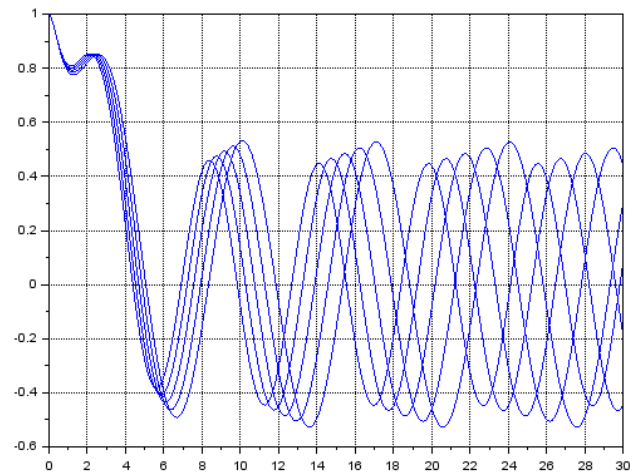
Dla tego układu dopasowałem parametry tak, aby uzyskać różne rozwiązania, a następnie ich parametry  $\alpha$  i  $\omega$  zmieniałem w granicach 10 procent. Wszystkie badane układy mają parametry początkowe  $x(0) = 1, x'(0) = 0$ . W tytułach wykresów jest napisane, jakie pierwiastki ma równanie charakterystyczne (zadane to wartości z tabeli).

### Bez oporu



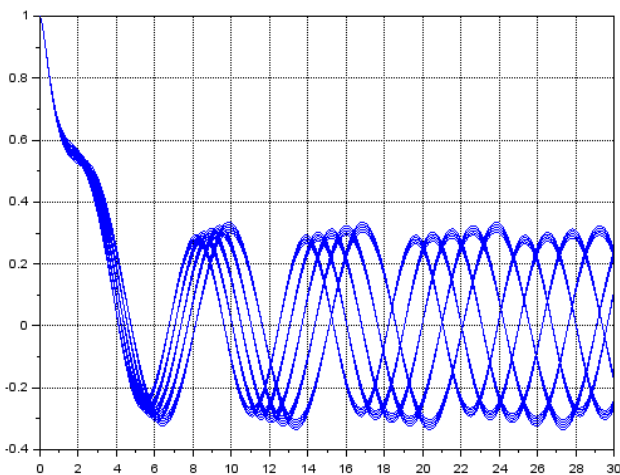
Rysunek 21: Rozwiązanie  
 $x'' + x = 2\sin(t)$

### Rzeczywiste



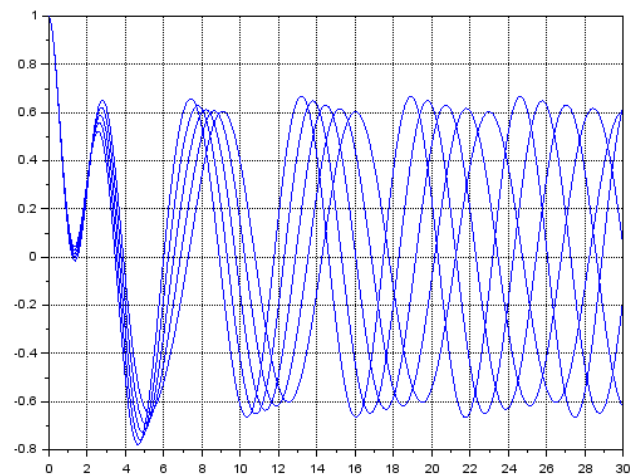
Rysunek 22: Rozwiązanie  
 $x'' + 4x' + 2x = 2\sin(t)$

### Zadane



Rysunek 23: Rozwiązanie  
 $x'' + 6x' + x = 2\sin(t)$

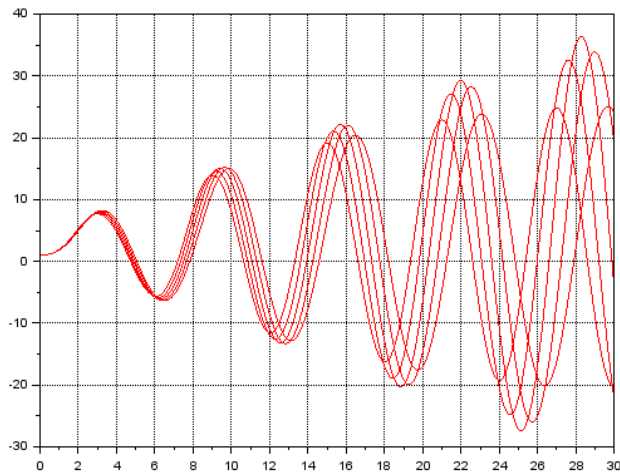
### Zespolone



Rysunek 24: Rozwiązanie  
 $x'' + 1x' + 4x = 2\sin(t)$

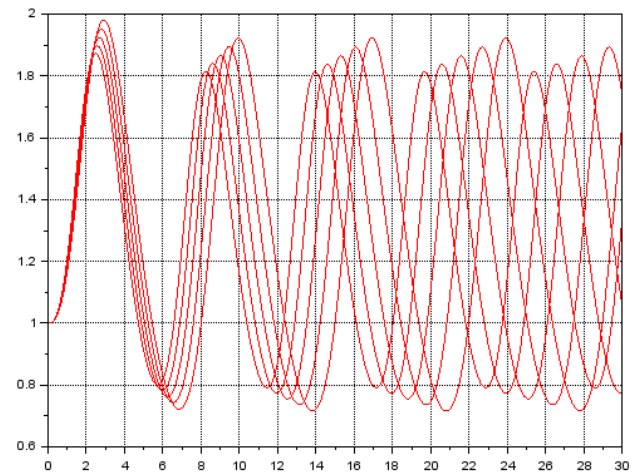
Przy zmianie działającej siły zewnętrznej na  $f2 = ae^{\sin(\omega t)}$  wykresy te prezentują się następująco:

### Bez oporu



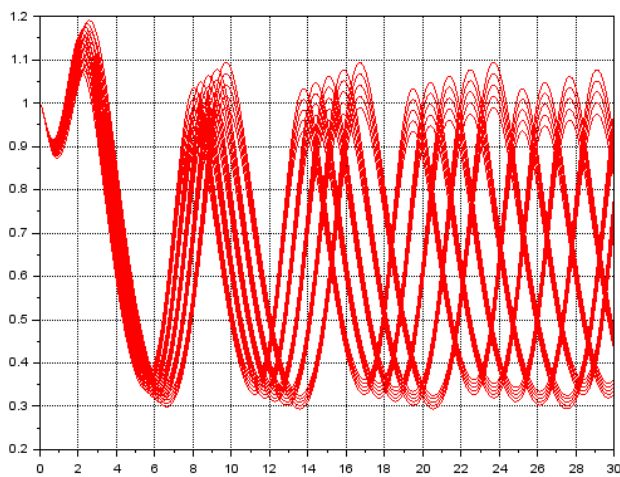
Rysunek 25: Rozwiązanie  
 $x'' + x = 2e^{\sin(\omega)}$

### Rzeczywiste



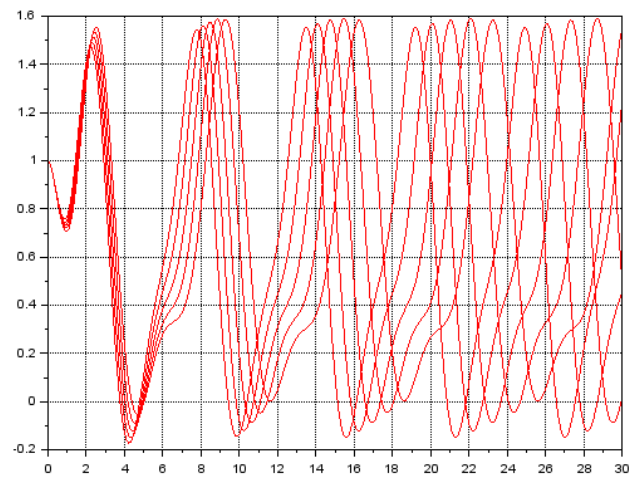
Rysunek 26: Rozwiązanie  
 $x'' + 4x' + 2x = 2e^{\sin(\omega)}$

### Zadane



Rysunek 27: Rozwiązanie  
 $x'' + 6x' + x = 2e^{\sin(\omega)}$

### Zespolone



Rysunek 28: Rozwiązanie  
 $x'' + 1x' + 4x = 2e^{\sin(\omega)}$

### 3.3 Układ 1.4b

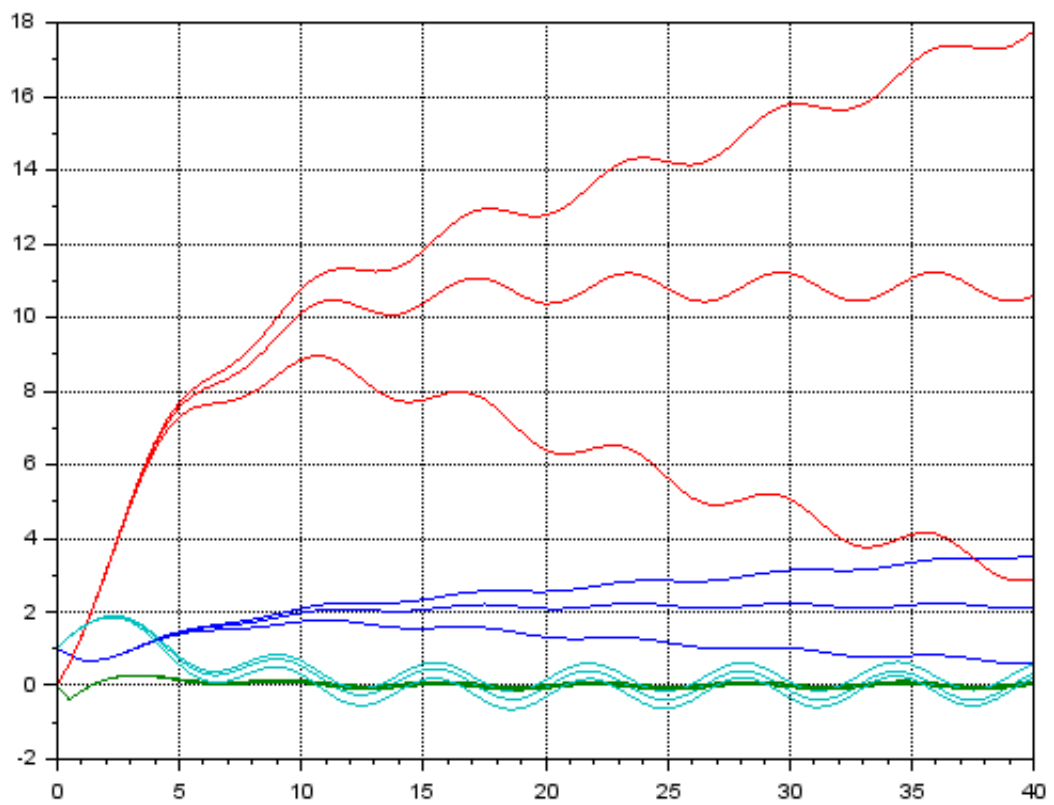
Jest to układ przedstawiony na Rys. 2. Można go opisać następującym równaniem:

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{\mu_2}{m_2}v_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\mu_2}{m_2}v_1 + \frac{1}{m_2}f \\ \frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{\mu_2}{m_1}v_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1 - \frac{\mu_2}{m_1}v_1 - \frac{\mu_1}{m_1}v_1\end{aligned}$$

Listing 3: Kod rozwiązujący równanie 1.4b

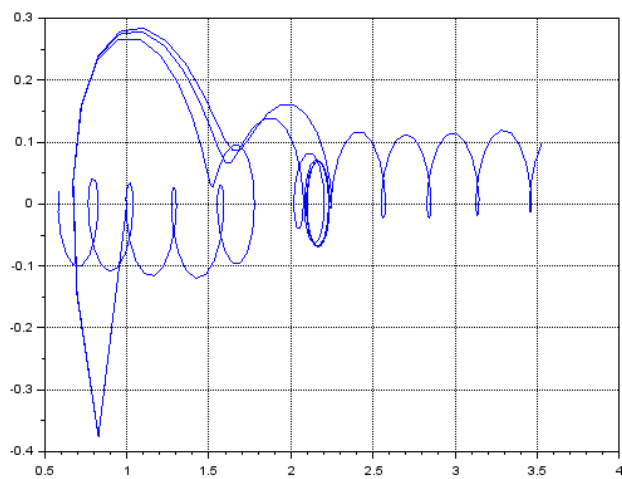
```
1 m_1 = 1;
2 m_2 = 5;
3 u_1 = 6;
4 u_2 = 1;
5 k_1 = 4;
6 k_2 = 1;
7 a=2;
8 omega=1;
9 function zad8(u_1,u_2, k_1, k_2, m_1, m_2, a, omega, y00)
10     function dy=fun(t, y)
11         dy(1)=y(2); //
12         dy(2)=k_2/m_1*y(3)+u_2/m_1*y(4)-k_2/m_1*y(1)-u_2/
13             m_1*y(2)-k_1/m_1*y(1)-u_1/m_1*y(2)
14         dy(3)=y(4)
15         dy(4)=-k_2/m_2*y(3)-u_2/m_2*y(4)+k_2/m_1*y(1)+u_2/
16             m_2*y(2)+1/m_2 * a*sin(omega*t)
17     endfunction
18
19     t0=0.0;y0=y00;
20     T=0.0:0.5:40;
21     y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
22     scf(3);
23     plot(T,y); xgrid();
24     scf(4);
25     plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
26     scf(5);
27     plot(y(3,:),y(4,:)); xgrid();
28 endfunction
```

Rozwiązanie tego układu w Scilab z zadanymi wartościami i zmianą  $m_2$  w 10 procentach, wygląda następująco:

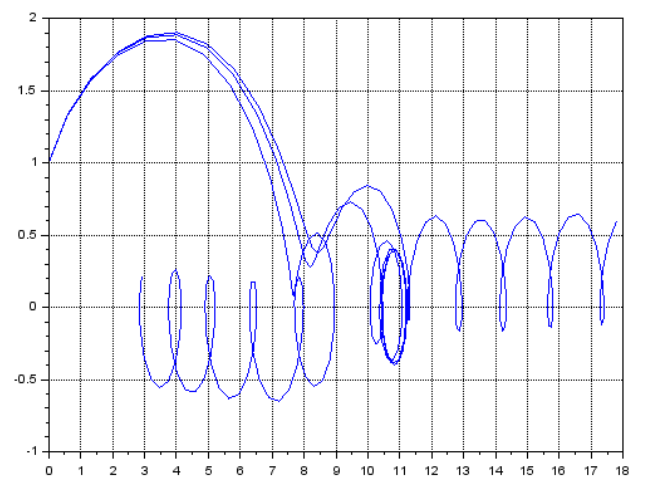


Rysunek 29: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

Wykres fazowy  $y(1)$  i  $y(2)$

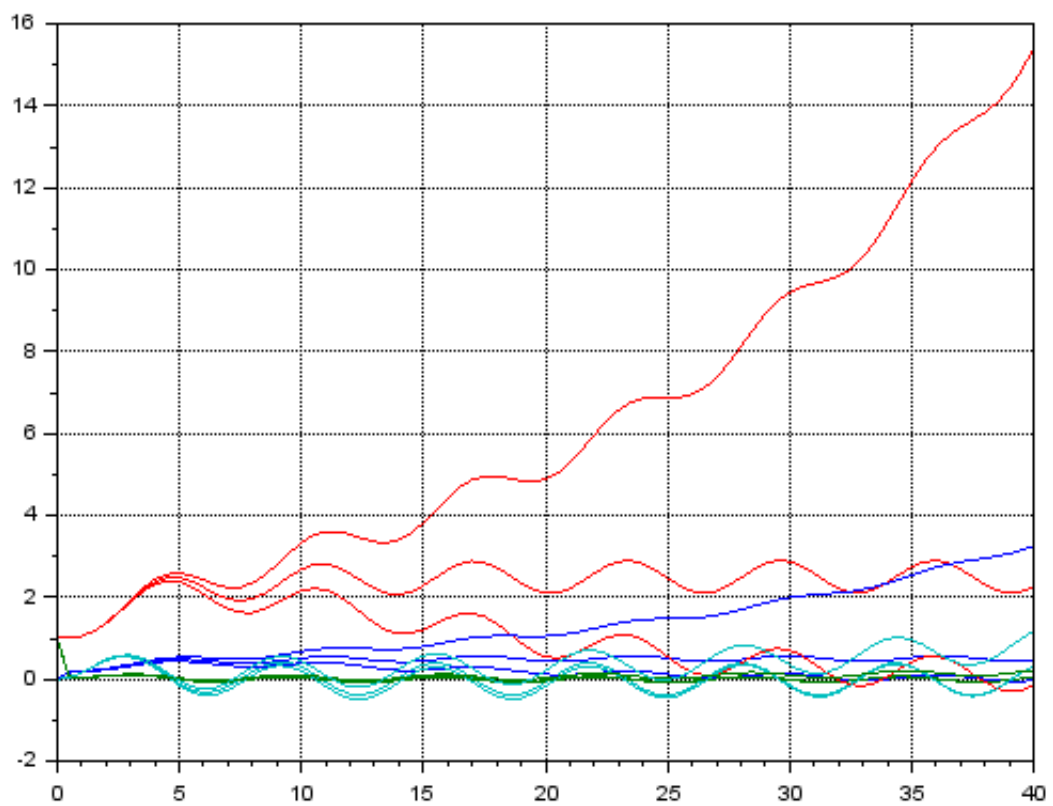


Wykres fazowy  $y(3)$  i  $y(4)$



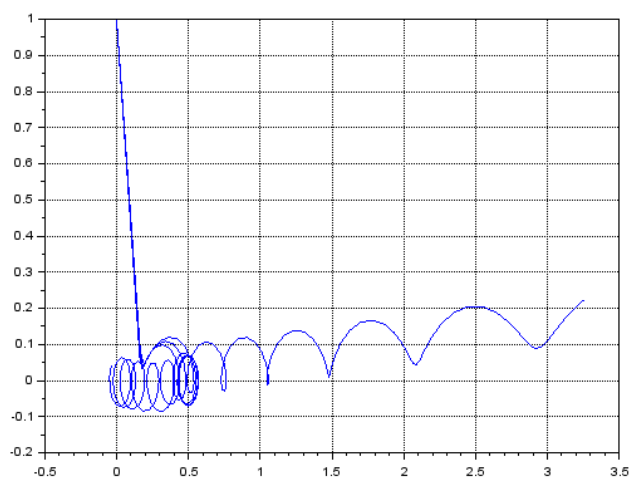


### 3.3.1 Zmiana wartości początkowych (0,1,1,0) i $k_1$

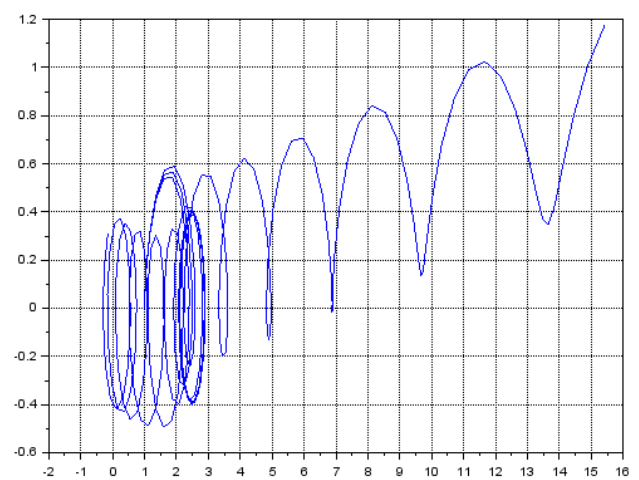


Rysunek 30: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

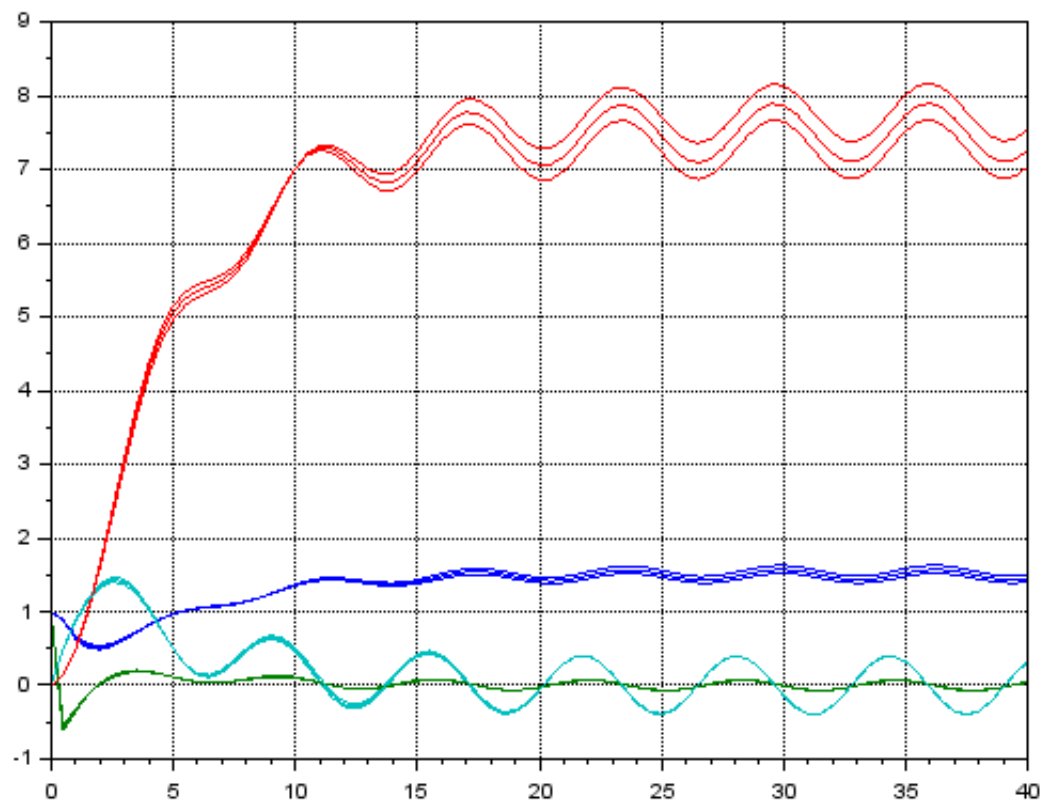
Wykres fazowy  $y(1)$  i  $y(2)$



Wykres fazowy  $y(3)$  i  $y(4)$

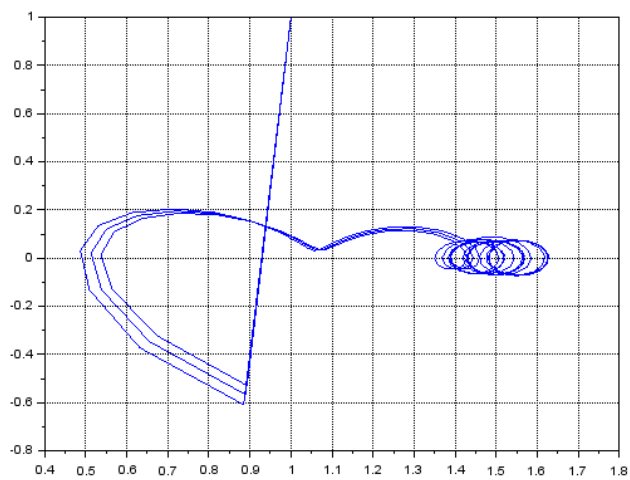


### 3.3.2 Zmiana wartości początkowych (1,1,0,0) i $u_1$

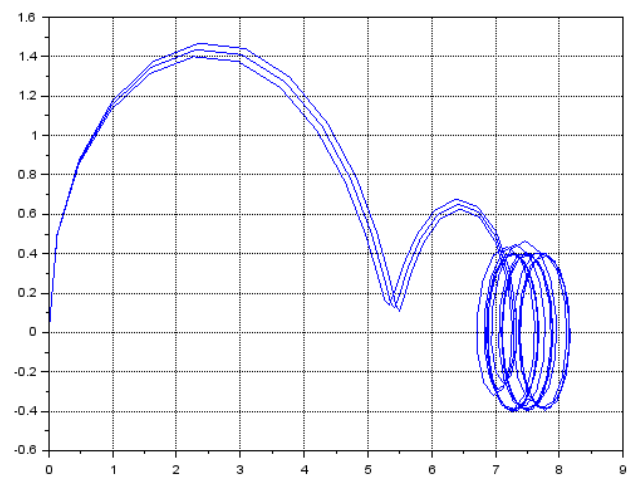


Rysunek 31: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

Wykres fazowy  $y(1)$  i  $y(2)$



Wykres fazowy  $y(3)$  i  $y(4)$



## 4 Podsumowanie

W pracy udało się poprawnie za modelować każdy z podanych układów, gdyż zachowują się one zgodnie z rzeczywistością. Widać to chociażby w układach bez oporu, gdzie w równaniach otrzymujemy ruch harmoniczny sprężyny (patrz 3.1.2 Rysunek 5). W przypadku równania bez oporu, ale z dodatkową siłą wymuszającą wychylenia w układzie wychylenia elementów rosną bez ograniczeń. Dzięki zmianie parametrów w granicach 10 procent na wykresach fazowych można zauważyć, jak układ zachowuje się wokół punktu stabilności (patrz 3.1.2 Rysunek 10).

Piotr Krawiec