VI. Równania różniczkowe liniowe wyższych rzędów

1. Równanie różniczkowe liniowe n-tego rzędu o zmiennych współczynnikach

Niech podobnie jak w poprzednim paragrafie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Podobnie jak w dziedzinie rzeczywistej wprowadzamy pochodne wyższych rzędów funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej z analogicznymi oznaczeniami.

W paragrafie tym rozważać będziemy równania postaci

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x), \tag{1}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, b : (p, q) \to \mathbb{K}$ są funkcjami ciągłymi na przedziale $(p, q) \subset \mathbb{R}$. Równania tego kształtu nazywać będziemy *równaniem różniczkowym liniowym n-tego rzędu.*

Niech dany będzie układ równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu postaci

$$\begin{cases} y_1' = & & & y_2 & \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_{n-1}' = & & & & y_n \\ y_n' = & -a_n(x)y_1 - & \ldots & -a_1(x)y_n & +b(x). \end{cases} \tag{2}$$

Własność 1. *Każde rozwiązanie integralne $\Psi : (p, q) \to \mathbb{K}^n$ układu* (2) *jest postaci*

$$\Psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie $\varphi : (p, q) \to \mathbb{K}$ jest integralnym rozwiązaniem równania (1)*. Odwrotnie, dla każdego rozwiązania integralnego $\varphi : (p, q) \to \mathbb{K}$ równania* (1)*, odwzorowanie $\Psi : (p, q) \to \mathbb{K}^n$ postaci* (3) *jest rozwiązaniem integralnym układu* (2)*.*

Dowód. Niech $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : (p, q) \to \mathbb{K}^n$ będzie rozwiązaniem integralnym układu (2). Połóżmy $\varphi = \psi_1$. Wówczas z kolejnych równań układu (2) mamy

$$\begin{cases} \varphi'(x) = & & \psi_2(x) & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & \\ \varphi^{(n-1)}(x) = & & & \psi_n(x) & \\ \varphi^{(n)}(x) = & -a_n(x)\psi_1(x) - & \ldots & -a_1(x)\psi_n(x) & +b(x), \end{cases}$$

skąd

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\varphi(x) = b(x).$$

Odwrotnie, niech $\varphi : (p,q) \to \mathbb{K}$ spełnia równanie (1). Połóżmy

$$\psi_1 = \varphi, \qquad \psi_2 = \varphi', \qquad \ldots, \qquad \psi_n = \varphi^{(n-1)}.$$

Wówczas

$$\begin{cases} \psi_1'(x) = & \psi_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}'(x) = & \psi_n(x) \\ \psi_n'(x) = & -a_n(x)\psi_1(x) - \quad \ldots \quad -a_1(x)\psi_n(x) \quad +b(x). \end{cases}$$

To kończy dowód. □

W dalszym ciągu tego paragrafu założymy, że $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zatem $a_1, \ldots, a_n$ i b będą teraz funkcjami o wartościach rzeczywistych.

Niech $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Ponieważ przez każdy punkt $(\xi, \eta) \in (p,q) \times \mathbb{R}^n$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie integralne układu równań liniowych (2), to z powyższej własności dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dostajemy

Twierdzenie 1. *Dla każdego punktu $(\xi, \eta) \in (p,q) \times \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie integralne $\varphi : (p,q) \to \mathbb{R}$ równania* (1) *spełniające warunki początkowe:*

$$\varphi(\xi) = \eta_1, \qquad \varphi'(\xi) = \eta_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_n.$$

Wobec powyższego twierdzenia ograniczymy się tylko do rozwiązań integralnych równania (1).

Gdy $b = 0$, to równanie (1) ma postać

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0. \tag{4}$$

Równanie (4) nazywać będziemy *jednorodnym równaniem różniczkowym liniowym n-tego rzędu.*

Z własności jednorodnych układów równań liniowych jednorodnych pierwszego rzędu i własności 1 (dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) dostajemy

Własność 2. *Ogół integralnych rozwiązań równania* (4) *jest rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru n.*

Każdą bazę przestrzeni liniowej, o której mowa powyżej, nazywać będziemy *fundamentalnym układem rozwiązań równania* (4).

Z własności 2 otrzymujemy natychmiast

Twierdzenie 2. *Jeżeli $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań równania* (4)*, to ogół rozwiązń integralnych równania* (4) *wyraża się wzorem*

$$\varphi(x) = \gamma_1\varphi_1(x) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(x), \qquad x \in (p,q), \qquad \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}.$$

Podamy teraz twierdzenie sprowadzające poszukiwanie fundamentalnego układu rozwiązań równania liniowego jednorodnego n-tego rzędu, do poszukiwania fundamentalnego układu rozwiązań pewnego równania liniowego jednorodnego rzędu $n-1$. Jest to swoista metoda redukcji dla równania liniowego n-tego rzędu.

Niech $n > 1$ i niech symbol $\omega[\psi]$ oznacza ustaloną funkcję pierwotną funkcji $\psi : (p,q) \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3. *Jeśli* $\varphi_1 : (p,q) \to \mathbb{R}$ *jest integralnym rozwiązaniem równania* (4)*, spełniającym warunek* $\varphi_1(x) \neq 0$ *dla* $x \in (p,q)$*, to istnieje równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu* $n-1$ *postaci*

$$z^{(n-1)} + b_1(x)z^{(n-2)} + \ldots + b_{n-1}(x)z = 0, \tag{5}$$

o współczynnikach $b_1, \ldots, b_{n-1} : (p,q) \to \mathbb{R}$ *mające następujące własności:*

(i) $\psi : (p,q) \to \mathbb{R}$ *jest integralnym rozwiązaniem równania* (5) *wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja* $\omega[\psi] \cdot \varphi_1$ *jest rozwiązaniem integralnym równania* (4)*,*

(ii) jeśli funkcje $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ *tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania* (5)*, to funkcje* $\varphi_1, \omega[\psi_1] \cdot \varphi_1, \ldots, \omega[\psi_{n-1}] \cdot \varphi_1$ *tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania* (4)*.*

Dowód. Wykażemy najpierw pierwszą część twierdzenia. Niech $\omega : (p,q) \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją n-krotnie różniczkowalną. Funkcja $\omega\varphi_1$ jest rozwiązaniem integralnym równania (4) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \omega^{(n-j)} \varphi_1^{(j)} + \omega\varphi_1^{(n)} + a_1 \left(\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \omega^{(n-1-j)} \varphi_1^{(j)} + \omega\varphi_1^{(n-1)} \right) + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(\omega'\varphi_1 + \omega\varphi_1') + a_n\omega\varphi_1 = 0.$$

Ponieważ φ_1 jest rozwiązaniem równania (4) , to powyższe jest równoważne tożsamości:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \omega^{(n-j)} \varphi_1^{(j)} + a_1 \left(\sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} \omega^{(n-1-j)} \varphi_1^{(j)} \right) + \ldots + a_{n-1}\omega'\varphi_1 = 0,$$

Porządkując ją względem rzędów pochodnej funkcji ω stwierdzamy, że daje się ona zapisać jako

$$\varphi_1\omega^{(n)} + \beta_1\omega^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1}\omega' = 0,$$

gdzie funkcje ciągłe $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1} : (p,q) \to \mathbb{R}$ zależą wyłącznie od φ_1 i $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Z powyższych rozważań i założenia, że $\varphi_1(x) \neq 0$ dla $x \in (p,q)$ wynika, że funkcja $\omega\varphi_1$ jest rozwiązaniem integralnym równania (4) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ω' jest rozwiązaniem równania postaci (5), gdzie $b_j = \beta_j/\varphi_1$, $j = 1, \ldots, n-1$. To daje pierwszą część twierdzenia.

Z udowodnionej części wynika natychmiast, że funkcie $\omega[\psi_1]\varphi_1, \ldots, \omega[\psi_{n-1}]\varphi_1$ są rozwiązaniami integralnymi równania (4). By dokończyć dowód twierdzenia należy jeszcze wykazać liniową niezależność rozwiązań: $\varphi_1, \omega[\psi_1]\varphi_1, \ldots, \omega[\psi_{n-1}]\varphi_1$. Jeśli

$$c_1\varphi_1 + c_2\omega[\psi_1]\varphi_1 + \ldots + c_n\omega[\psi_{n-1}]\varphi_1 = 0, \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

to

$$c_1 + c_2\omega[\psi_1] + \ldots + c_n\omega[\psi_{n-1}] = 0, \tag{6}$$

gdyż $\varphi_1(x) \neq 0$ dla $x \in (p,q)$. Stąd, Różniczkując powyższą tożsamość otrzymujemy, że

$$c_2\psi_1 + \ldots + c_n\psi_{n-1} = 0.$$

Zatem $c_2 = \ldots = c_n = 0$, gdyż $\psi_1, \ldots \psi_{n-1}$ są liniowo niezależne. Stąd na podstawie (6) dostajemy, że również $c_1 = 0$. To kończy dowód. □

Z dowodu powyższego twierdzenia otrzymujemy wprost następujący wniosek.

Wniosek 1. *Niech* $\varphi_1 : (p,q) \to \mathbb{R}$ *będzie integralnym rozwiązaniem równania*

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{7}$$

i niech $A_1 : (p,q) \to \mathbb{R}$ *będzie ustaloną funkcją pierwotną funkcji* a_1. *Jeśli* φ_1 *spełnia warunek* $\varphi_1(x) \neq 0$ *dla* $x \in (p,q)$, *to układ fundamentalny rozwiązań równania* (7) *tworzą funkcje* $\varphi_1, \omega\varphi_1$, *gdzie* ω *jest ustaloną funkcją pierwotną funkcji* $e^{-A_1}(\varphi_1)^{-2}$.

Dowód. Podstawiając do równania (7) funkcję $\omega\varphi_1$ wyznaczamy równanie zredukowane. Jest ono postaci:

$$z' + \left(a_1(x) + 2\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}\right) z = 0.$$

Układem fundamentalnym tego równania jest jakiekolwiek jego niezerowe rozwiązanie. Z teorii równania liniowego wynika, że jednym z nich jest na przykład $\psi(x) = e^{-A_1(x)}(\varphi_1(x))^{-2}$, $x \in (p,q)$. Skoro ω jest funkcją pierwotną funkcji ψ to na podstawie twierdzenia 3 otrzymujemy tezę. $\square$

Z twierdzenia 2 i własności 1 (dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) otrzymujemy łatwo

Twierdzenie 4. *Niech* φ_0 *będzie rozwiązaniem integralnym równania* (1) *oraz* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *będzie fundamentalnym układem rozwiązań równania jednorodnego* (4). *Wówczas ogół rozwiązań integralnych równania* (1) *wyraża się wzorem*

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma_1\varphi_1(x) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(x), \qquad x \in (p,q), \qquad \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}.$$

Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będą integralnymi rozwiązaniami równania (4). Wyznacznik

$$W(x) = \det\left[\varphi_k^{(j-1)}(x)\right]_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazywamy *wrońskianem* układu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Uwaga 1. Gdy dany jest układ fundamentalny rozwiązań $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ równania (4), to rozwiązanie szczególne φ_0 równania (1) można znaleźć metodą uzmienniania stałych, korzystając z odpowiedniego twierdzenia dla układów równań liniowych. Dokładniej, rozwiązanie φ_0 jest postaci

$$\varphi_0(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(x),$$

gdzie $c_1, \ldots, c_n$ są ustalonymi funkcjami pierwotnymi funkcji $\frac{W_1}{W}, \ldots, \frac{W_n}{W}$, przy czym W jest wrońskianem układu fundamentalnego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \varphi_n(x) \\ 0 & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \qquad \ldots, \qquad W_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & 0 \\ \varphi_1'(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & b(x) \end{vmatrix}.$$

2. Jednorodne równanie różniczkowe liniowe n-tego rzędu o stałych współczynnikach

Pod tą nazwą rozumieć będziemy równanie postaci

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{1}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Tutaj podobnie jak poprzednio $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Wielomianem charakterystycznym równania* (1) nazywamy wielomian postaci

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Rozważmy teraz jednorodny układ równań różniczkowch liniowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach postaci

$$\begin{cases} y_1' = & & y_2 & \\ \multicolumn{4}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ y_{n-1}' = & & & y_n \\ y_n' = & -a_n y_1 & + \ldots + & -a_1 y_n. \end{cases} \tag{2}$$

Macierz charakterystyczna tego układu jest postaci

$$A_n = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \ldots & -a_1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny układu (2), będący wyznacznikiem powyższej macierzy jest równy

$$(-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n),$$

co sprawdzamy indukcyjnie, gdyż jak łatwo wynika z własności wyznaczników

$$\det A_n = -\lambda \det A_{n-1} + (-1)^n a_n.$$

Widzimy stąd, że wielomian charakterystyczny D równania (1) ma identyczne pierwiastki z wielomianem charakterystycznym układu (2).

Twierdzenie 1. *Jeżeli $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ jest p-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego D, to*

$$e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{p-1} e^{\lambda_0 x} \tag{3}$$

są liniowo niezależnymi nad $\mathbb{K}$ rozwiązaniami równania (1).

Dowód. Z powyższej obserwacji wynika, że λ_0 jest p-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznewgo układu (2). Zatem z twierdzenia dotyczącego układów równań z p-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego i z własności 1 z poprzedniego paragrafu dostajemy, że równanie (1) ma p liniowo niezależnych nad $\mathbb{K}$ rozwiązań postaci

$$e^{\lambda_0 x} P_1(x), \ldots, e^{\lambda_0 x} P_p(x), \tag{4}$$

gdzie P_k jest wielomianem o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ stopnia nie większego niż $k-1$, $k=1,\ldots,p$. Wynika stąd, że wielomiany $P_1,\ldots,P_p$ są również liniowo niezależne nad $\mathbb{K}$. Łatwo sprawdzamy, że zbiór wielomianów stopnia nie większego niż $p-1$ jest p-wymiarową przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$. Zatem $P_1,\ldots P_p$ są jej bazą. W konsekwencji dla każdego $k\in\{0,\ldots,p-1\}$

$$x^k = a_{k1}P_1(x)+\ldots+a_{kp}P_p(x), \qquad x\in\mathbb{R},$$

gdzie $a_{kl}\in\mathbb{K}$. Stąd

$$x^k e^{\lambda_0 x} = a_{k1}P_1(x)e^{\lambda_0 x}+\ldots+a_{kp}P_p(x)e^{\lambda_0 x}, \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Łatwo sprawdzamy, że kombinacja liniowa rozwiązań równania (1) jest jego rozwiązaniem. Stąd, z (4) i (5) dostajemy, że funkcje postaci (3) są rozwiązaniemi równania (1). Są one oczywiście liniowo niezależne nad $\mathbb{K}$. To kończy dowód. □

W dalszym ciągu zakładamy, że $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ i $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Bezpośrednio z powyższego twierdzenia dostajemy

Wniosek 1. *Jeżeli λ_0 jest p-krotnym rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego D, to równanie* (1) *ma p liniowo niezależnych nad $\mathbb{R}$ rozwiązań postaci*

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x},\ldots,x^{p-1}e^{\lambda_0 x}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Wniosek 2. *Jeżeli $\lambda_0=\sigma+i\tau$ jest p-krotnym zespolonym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego D, gdzie $\tau\neq 0$, to równanie* (1) *ma $2p$ liniowo niezależnych nad $\mathbb{R}$ rozwiązań postaci*

$$\begin{aligned} &e^{\sigma x}\cos\tau x, xe^{\sigma x}\cos\tau x,\ldots,x^{p-1}e^{\sigma x}\cos\tau x, \qquad x\in\mathbb{R},\\ &e^{\sigma x}\sin\tau x, xe^{\sigma x}\sin\tau x,\ldots,x^{p-1}e^{\sigma x}\sin\tau x, \qquad x\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dowód. Z twierdzenia 1 (dla $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) wynika, że funkcje postaci

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x},\ldots,x^{p-1}e^{\lambda_0 x}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

są rozwiązaniemi równania (1). Stąd i z faktu, że równanie (1) ma teraz współczynniki rzeczywiste wynika, że funkcje postaci (6) są również rozwiązaniemi równania (1). Liniowa niezależność nad $\mathbb{R}$ rozwiązań (6) wynika z lematu 1 z rozdziału V. To kończy dowód. □

Z lematu 1 z rozdziału V i z powyższych wniosków dostajemy łatwo twierdzenie o fundamentalnym układzie rozwiązań równania (1).

Niech $\lambda_1=\sigma_1+i\tau_1,\ldots,\lambda_r=\sigma_r+i\tau_r$ będą wszystkimi różnymi pierwiastkami wielomianu D, spełniającymi warunek $\tau_k\geqslant 0$. Niech $p_1,\ldots,p_r$ będą odpowiednio krotnościami tych pierwiastków.

Twierdzenie 2. *Jeżeli dla każdego $k\in\{1,\ldots,r\}$ zgodnie z wnioskiem 1 albo 2 przyporządkujemy p_k albo $2p_k$ rozwiązań w zależności od tego czy $\tau_k=0$, czy $\tau_k>0$, to otrzymamy fundamentalny układ rozwiązań równania* (1).

3. Metoda przewidywań

Równanie postaci

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b(x), \tag{1}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $b : (p, q) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym n-tego rzędu o współczynnikach stałych.* Odpowiada mu równanie jednorodne postaci

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0. \tag{2}$$

Jeżeli znamy układ fundamentalny $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ rozwiązań równania jednorodnego (2), to szczególne rozwiązanie φ_0 równania niejednorodnego (1) możemy wyznaczyć metodą uzmienniania stałych. Jednak w pewnych przypadkach możemy zastosowć inną metodę.

Twierdzenie 1. *Jeżeli prawa strona $b(x)$ równania* (1) *jest funkcją postaci*

$$b(x) = e^{\alpha x}\big(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\big),$$

gdzie P_n i Q_n są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, z których jeden jest stopnia n, a drugi co najwyżej stopnia n, to:

1. $\varphi_0(x) = e^{\alpha x}\big(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x\big)$*, gdy liczba zespolona $\lambda = \alpha + i\beta$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2)*,*
2. $\varphi_0(x) = x^k e^{\alpha x}\big(R_n(x)\cos\beta x + S_n(x)\sin\beta x\big)$*, gdy liczba zespolona $\lambda = \alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2) *o krotności $k \geqslant 1$,*

gdzie R_n i S_n są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych, z których jeden jest stopnia n, a drugi co najwyżej stopnia n.

Wniosek 1. *Jeżeli prawa strona $b(x)$ równania* (1) *jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n, to:*

1. $\varphi_0(x) = R_n(x)$*, gdy $\lambda = 0$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2)*,*
2. $\varphi_0(x) = x^k R_n(x)$*, gdy $\lambda = 0$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2) *o krotności $k \geqslant 1$,*

gdzie R_n jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n.

Wniosek 2. *Jeżeli prawa strona $b(x)$ równania* (1) *jest funkcją postaci*

$$b(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n, to:

1. $\varphi_0(x) = e^{\alpha x} R_n(x)$*, gdy liczba $\lambda = \alpha$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2)*,*
2. $\varphi_0(x) = x^k e^{\alpha x} R_n(x)$*, gdy $\lambda = \alpha$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania* (2) *o krotności $k \geqslant 1$,*

gdzie R_n jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych stopnia n.

Wniosek 3. *Jeżeli prawa strona $b(x)$ równania (1) jest funkcją postaci*

$$b(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, to:

1. $\varphi_0(x) = a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x$, *gdy $\lambda = i\beta$ nie jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania (2),*
2. $\varphi_0(x) = x^k(a_1\cos\beta x + b_1\sin\beta x)$, *gdy $\lambda = i\beta$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego równania (2) o krotności $k \geqslant 1$,*

gdzie $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja φ_1 jest rozwiązaniem szczególnym równania*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = b_1(x),$$

natomiast funkcja φ_2 jest rozwiązaniem szczególnym równania

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = b_2(x),$$

to funkcja $\varphi_1 + \varphi_2$ jest rozwiązaniem szczególnym równania

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = b_1(x) + b_2(x).$$