

Rzeszów, 06.01.2022

PODSTAWY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO W
INŻYNIERII

PRACA LABORATORYJNA NR 3

”Nieliniowe modele dynamiczne w postaci układów równań
różniczkowych zwyczajnych i metody ich analizy i rozwiązania.”

Piotr Krawiec L1
Semestr: 2021/2022
Kierunek: III/FS0-DI
Numer indeksu: 164165
Prowadzący: Bohdan Datsko

Spis treści

1	Zadania i teoria	3
1.1	Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością.	3
1.2	Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach. . . .	4
2	Rozwiązanie w scilab	4
2.1	Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością w Scilab . .	4
2.1.1	Modyfikacja parametru τ	6
2.1.2	Inne rozwiązania układu	6
2.2	Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach. . . .	7
2.2.1	Kod w Scilab	7
2.2.2	Zadanie 6	9
2.2.3	Zadanie 7	11
3	Podsumowanie	12

1 Zadania i teoria

Wykonać modelowanie różnych możliwych typów dynamiki układów 2 i 3. Otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych tych równań dla parametrów podanych w tabeli 1 zgodnie z zestawem (13).

Numer	A	τ_1	τ_2	b	A	p_1	p_2	p_3
13	0.5	0.2	10	1	4	12	5	13

Tabela 1: Parametry badanych równań

1.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością.

Model ten w standardowej postaci bezwymiarowej wygląda następująco:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= bu_1 - u_2 + A\end{aligned}\quad (1)$$

Dla parametru $b = 1$ układ ten ma tylko jeden stan stacjonarny:

$$\begin{aligned}u_1 &= \sqrt[3]{-3A} \\ u_2 &= \sqrt[3]{-3A} + A\end{aligned}\quad (2)$$

Co można wyprowadzić, wychodząc z:

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \frac{du_2}{dt} = 0$$

Wyprowadzenie tego wzoru znajduje się poniżej:

Handwritten derivation on grid paper:

$$\begin{cases} \tau \frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = bu_1 - u_2 + A \end{cases} \quad \text{Stacjonarność: } \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0 \\ \frac{du_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2 + 1) - u_2 \\ 0 = bu_1 - u_2 + A \\ 0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2 + 1) - u_2 \\ 0 = u_1 + A - u_2 \end{cases}$$

Wynikowo dla $b=1$
 $(u_1, u_2) = (0, 0)$ i $(\sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A)$
 $du_1/du_2 =$

↓

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 &= u_1 + A \\ -\frac{1}{3}u_1^3 &= A \\ u_1^3 &= -3A \\ u_1 &= \sqrt[3]{-3A} \end{aligned} \quad u_2 = u_1 + A = \sqrt[3]{-3A} + A$$

Punkty stacjonarne to: $(u_1, u_2) : \{(0, 0), \sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A\}$

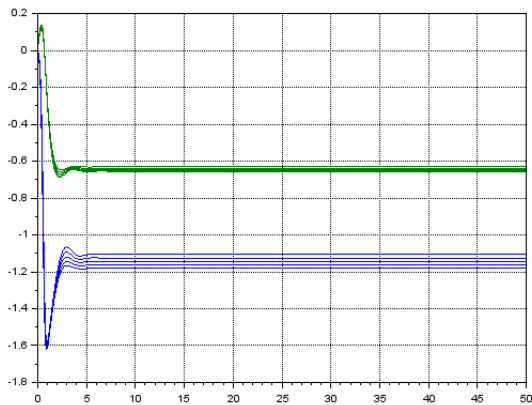
1.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= \sigma(u_2 - u_1) \\ \frac{du_2}{dt} &= u_1(r - u_3) - u_2 \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1u_2 - \beta u_3\end{aligned}\tag{3}$$

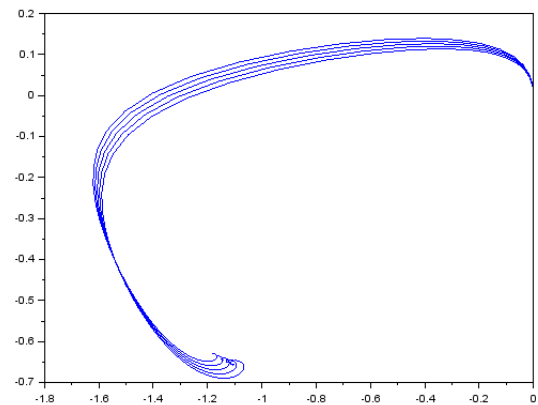
2 Rozwiązanie w scilab

2.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością w Scilab

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli



Rysunek 1: Wykres u1 i u2 w czasie



Rysunek 2: Wykres fazowy

Z powyższych wykresów odczytać możemy, że układ ustabilizował się. Z rozważań teoretycznych możemy obliczyć, że stan stacjonarny to:

$$(u_1, u_2) = (\sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A)$$

i dla danych z tabeli jest to

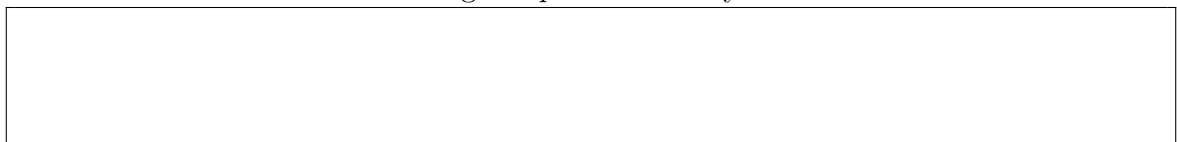
$$(0.5908329 + 1.0233526i, 1.1408329 + 1.0233526i)$$

. Natomiast z wykresu możemy odczytać punkt:

$$(-1.1816658, -0.6316658)$$

. Sprawdzę teraz, jak te wyniki wyglądają w scilab:

Listing 1: Sprawdzenie wyniku



```

1 // Teoretyczny punkt stabilny
2 z = [(-3*A)^(1/3); (-3*A)^(1/3)+A];
3 syst2(t, z)
4 ans =
5
6     1.110D-15 + 0.i
7     0.          + 0.i
8
9 // Punkt w którym układ utknał
10 ans =
11
12     -1.1816658
13     -0.6316658
14 syst2(t, y(:, 1001))
15 ans =
16     -1.723D-10
17     -0.05

```

Oba te wyniki są zbliżone do 0, czyli różnica ta może wynikać ze sposobu rozwiązania układu. Metoda numeryczna prawdopodobnie znalazła inny punkt stabilny.

Listing 2: Kod generujący powyższe wykresy

```

1 tau_1 = 0.2;
2 b = 1;
3 A_ = 4;
4 p_1 = 12;
5 p_2 = 5;
6 p_3 = 13;
7 tau = tau_1;
8 A = 0.5;
9
10 for A = (A-0.1*abs(A)):0.05*abs(A):(A+0.1*abs(A))
11     function du=syst2(t, u) //definicja układu RR
12         du=zeros(2,1);
13         du(1)=(-1/3*u(1)^3+u(1)-u(2))/tau;
14         du(2)=b*u(1)-u(2)+A;
15     endfunction
16     x0=[0;0]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,
17         syst2);
18     scf(1);
19     plot(t,y); xgrid();
20     scf(2);
21     plot(y(1,:), y(2,:));
22 end
23 xs2png(1, "img/3-1-xy.png")
24 xs2png(2, "img/3-1-phase.png")
25 close();close();

```

```

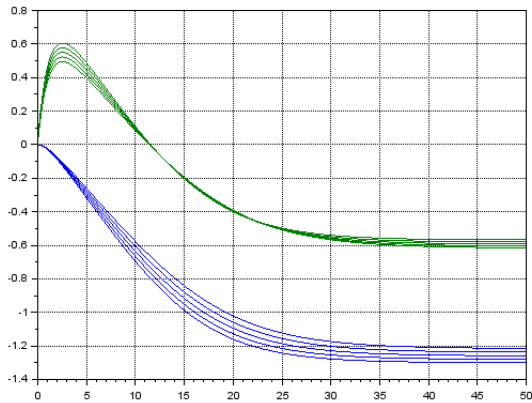
25
26 u1 = (-3*A)^(1/3)
27 u2 = u1 + A

```

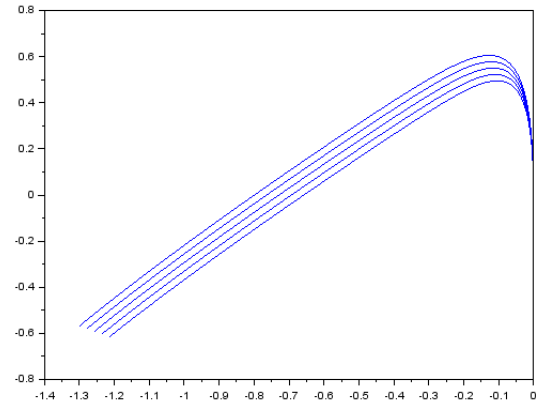
2.1.1 Modyfikacja parametru τ

Dla $\tau = 10$ wykresy te wyglądają następująco:

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $\tau = 10$



Rysunek 3: Wykres u_1 i u_2 w czasie



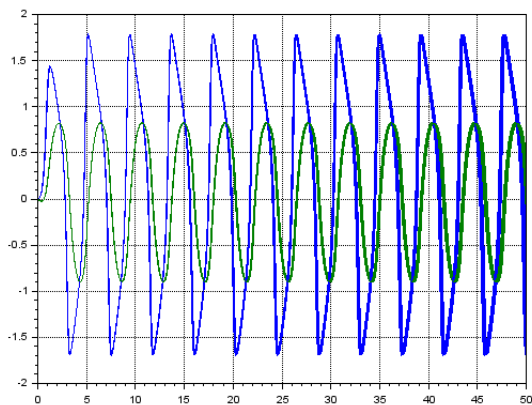
Rysunek 4: Wykres fazowy

Tutaj rozwiązanie jest podobnie, jak dla danych z tabeli, w miarę

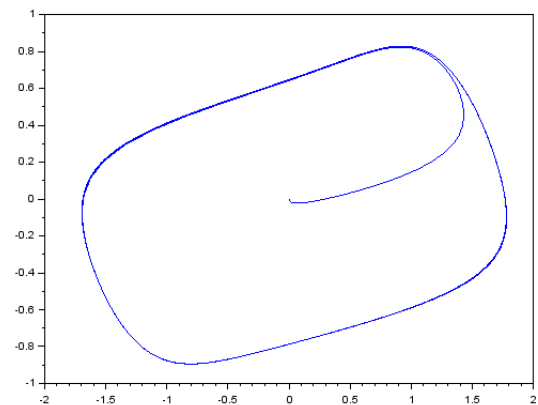
2.1.2 Inne rozwiązania układu

Poniższe rozwiązania znalazłem zmieniając parametr A w dużym zakresie i sprawdzając, jak zachowuje się układ. Aż natrafiłem na $A = -0.1$. Zmieniając parametr A w zakresie 10 procent, otrzymałem takie wykresy:

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $A = -0.1$



Rysunek 5: Wykres u_1 i u_2 w czasie



Rysunek 6: Wykres fazowy

Układ ten wszedł w oscylację. "Szybko" uciekł on z punktu początkowego $(0,0)$ i zaczął oscylować między punktami stabilności.

2.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

2.2.1 Kod w Scilab

Listing 3: Kod generujący powyższe wykresy

```
1  //////////////////////////////////////// Zadanie 6
   ////////////////////////////////////////
2  sigma = 10;
3  b = 8/3;
4  r = 28;
5
6  function du=syst2(t, u)
7      du=zeros(3,1);
8      du(1)=sigma * (u(2)- u(1))
9      du(2)=u(1)*(r - u(3)) - u(2);
10     du(3)=u(1)*u(2) - b *u(3);
11 endfunction
12 x0=[1;1;1]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2)
   ;
13 scf(1);
14 plot(t,y); xgrid();
15 scf(2);
16 plot(y(1,:), y(2,:));
17 scf(3);
18 plot(y(1,:), y(3,:));
19 scf(4);
20 plot(y(2,:), y(3,:));
21
22 xs2png(1, "img/6-111-xy.png")
23 xs2png(2, "img/6-111-phase-1-2.png")
24 xs2png(3, "img/6-111-phase-1-3.png")
25 xs2png(4, "img/6-111-phase-2-3.png")
26 close(); close(); close(); close();
27
28 x0=[-1;-1;-1]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,
   syst2);
29 scf(1);
30 plot(t,y); xgrid();
31 scf(2);
32 plot(y(1,:), y(2,:));
33 scf(3);
34 plot(y(1,:), y(3,:));
35 scf(4);
36 plot(y(2,:), y(3,:));
37
```

```

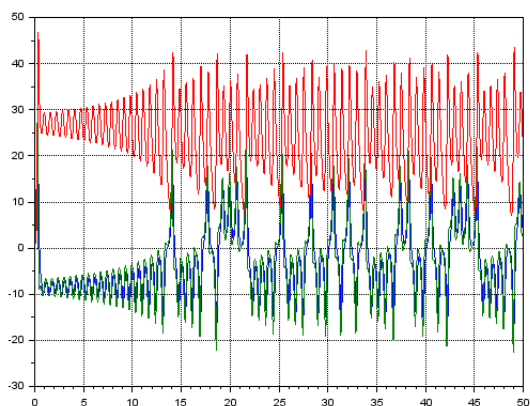
38 xs2png(1, "img/6--111-xy.png")
39 xs2png(2, "img/6--111-phase-1-2.png")
40 xs2png(3, "img/6--111-phase-1-3.png")
41 xs2png(4, "img/6--111-phase-2-3.png")
42 close(); close(); close(); close();
43
44 //////////////////////////////////////////// Zadanie 7
45 ////////////////////////////////////////////
46 sigma = 12;
47 b = 5;
48 r = 13;
49
50 x0=[1;1;1]; t0=0; t=0:0.05:10;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2)
51 ;
52 scf(1);
53 plot(t,y); xgrid();
54 scf(2);
55 plot(y(1,:), y(2,:));
56 scf(3);
57 plot(y(1,:), y(3,:));
58 scf(4);
59 plot(y(2,:), y(3,:));
60
61 xs2png(1, "img/7-111-xy.png")
62 xs2png(2, "img/7-111-phase-1-2.png")
63 xs2png(3, "img/7-111-phase-1-3.png")
64 xs2png(4, "img/7-111-phase-2-3.png")
65 close(); close(); close(); close();
66
67 x0=[-20;-20;-20]; t0=0; t=0:0.05:10;y=ode("stiff",x0,t0,t,
68     syst2);
69 scf(1);
70 plot(t,y); xgrid();
71 scf(2);
72 plot(y(1,:), y(2,:));
73 scf(3);
74 plot(y(1,:), y(3,:));
75 scf(4);
76 plot(y(2,:), y(3,:));
77
78 xs2png(1, "img/7--2011-xy.png")
79 xs2png(2, "img/7--2011-phase-1-2.png")
80 xs2png(3, "img/7--2011-phase-1-3.png")
81 xs2png(4, "img/7--2011-phase-2-3.png")
82 close(); close(); close(); close();

```

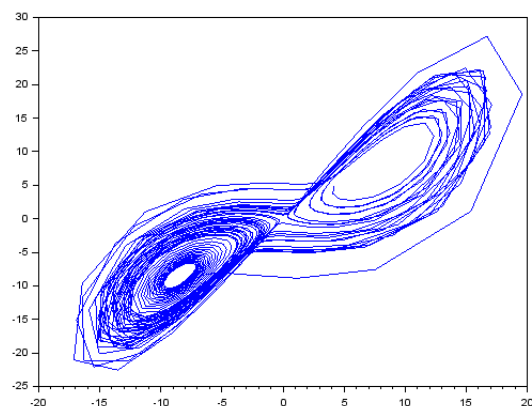

2.2.2 Zadanie 6

Dla obu przedstawionych tutaj punktów początkowych układ ten nie wygasa, co widać na wykresach u_1 , u_2 i u_3 w czasie. Widać to także na wykresach fazowych, ponieważ nie ma punktu, w którym układ by się zatrzymał. Powstają charakterystyczne puste miejsca, w które układ nigdy nie wpada.

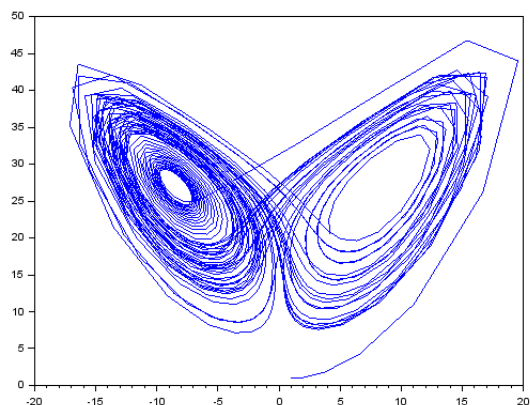
Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i warunków początkowych $u'_1(0) = 1$, $u'_2(0) = 1$, $u'_3(0) = 1$



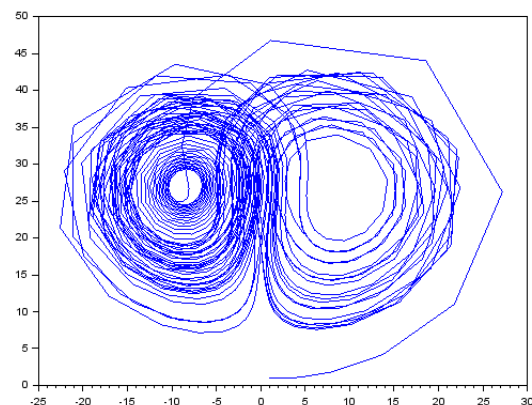
Rysunek 7: Wykres u_1 , u_2 i u_3 w czasie



Rysunek 8: Wykres fazowy u_1 i u_2

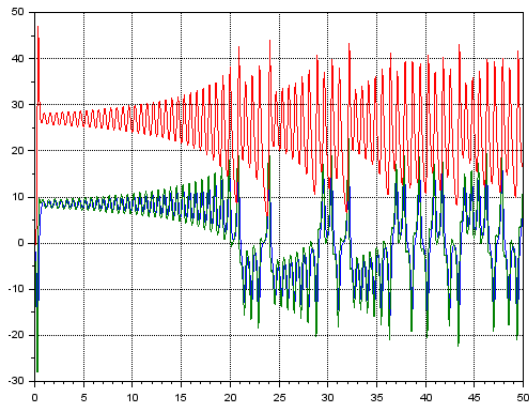


Rysunek 9: Wykres fazowy u_1 i u_3

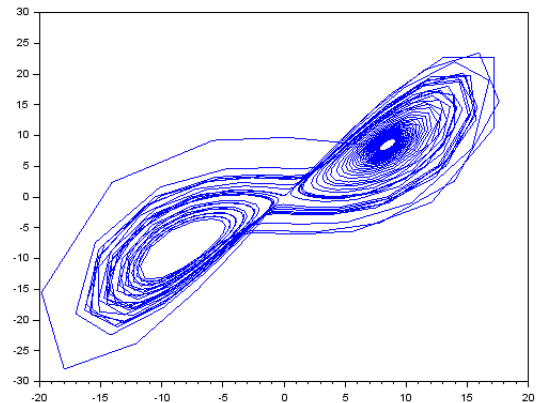


Rysunek 10: Wykres fazowy u_2 i u_3

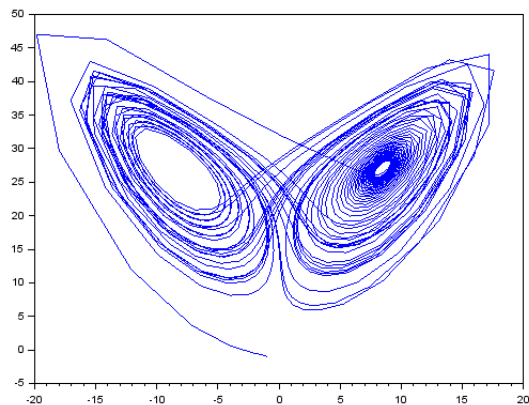
Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i warunków początkowych $u_1'(0) = -1$, $u_2'(0) = -1$, $u_3'(0) = -1$



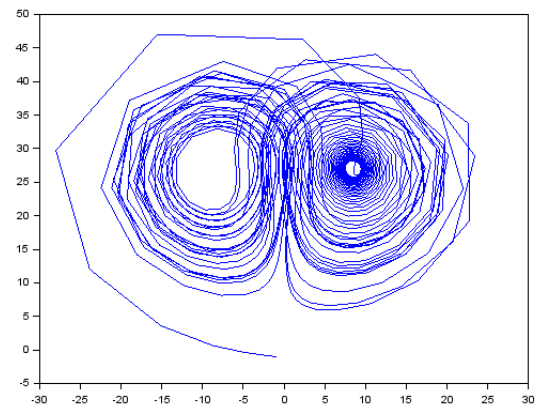
Rysunek 11: Wykres u_1 , u_2 i u_3 w czasie



Rysunek 12: Wykres fazowy u_1 i u_2



Rysunek 13: Wykres fazowy u_1 i u_3

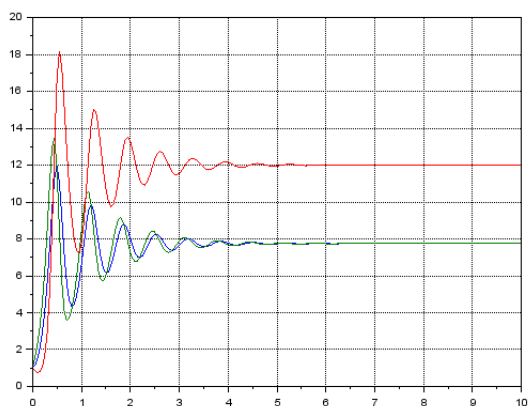


Rysunek 14: Wykres fazowy u_2 i u_3

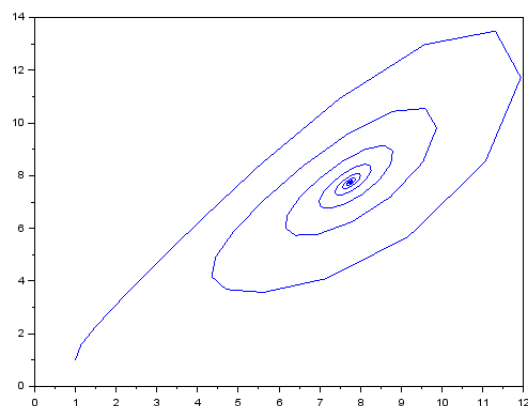
Zmiana znaków wszystkich parametrów początkowych sprawiła, że wykres stał się swoim lustrzanym obciem. Punkty wokół, których krąży układ (gęsty i mniej gęsty) zamieniły się miejscami, co nie jest oczywiste, patrząc wyłącznie na pierwszy wykres.

2.2.3 Zadanie 7

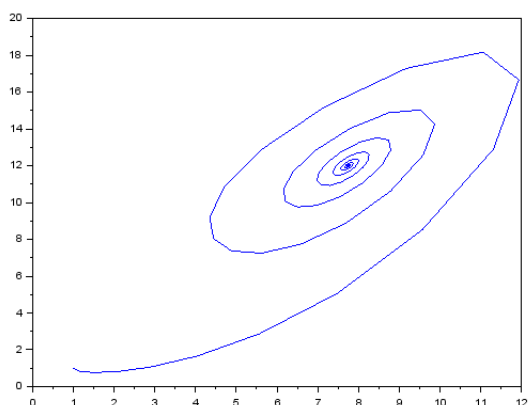
Rozwiązanie układu dla danych $\sigma = 12$, $\beta = 5$, $r = 13$ i warunków początkowych $u'_1(0) = 1$, $u'_2(0) = 1$, $u'_3(0) = 1$



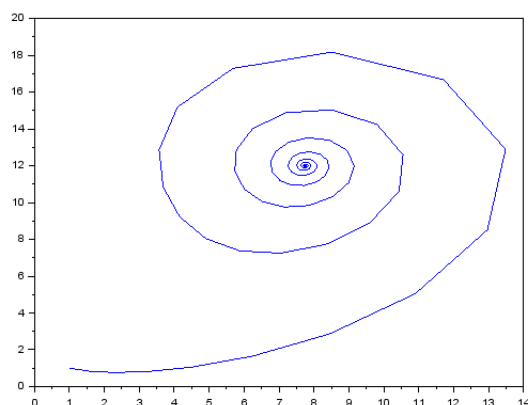
Rysunek 15: Wykres u_1 , u_2 i u_3 w czasie



Rysunek 16: Wykres fazowy u_1 i u_2



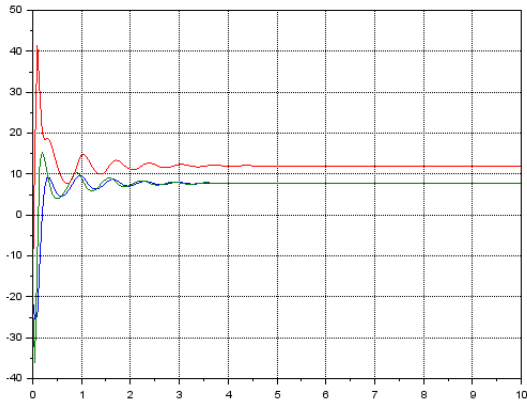
Rysunek 17: Wykres fazowy u_1 i u_3



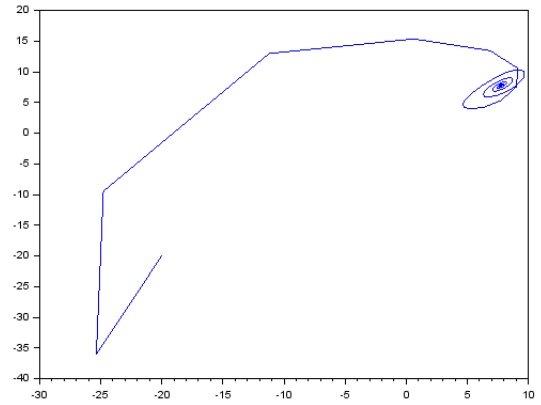
Rysunek 18: Wykres fazowy u_2 i u_3

Po zmianie parametrów układu zmieniła się jego charakterystyka, zamiast oscylować, układ się stabilizuje. Szybkość tej stabilizacji sprawdziłem na następnym rysunku.

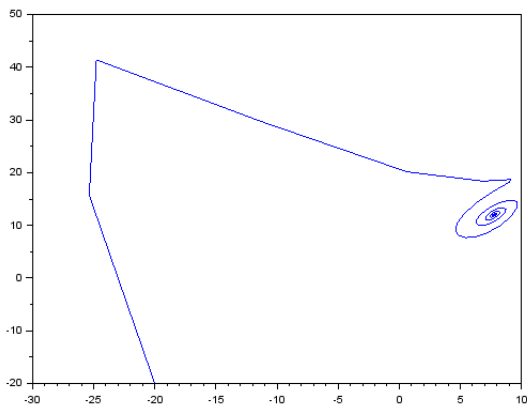
Rozwiązanie układu dla danych $\sigma = 12$, $\beta = 5$, $r = 13$ i warunków początkowych $u'_1(0) = -20$, $u'_2(0) = -20$, $u'_3(0) = -20$



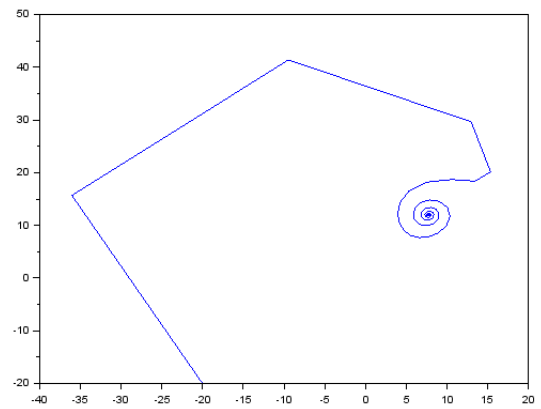
Rysunek 19: Wykres u_1 , u_2 i u_3 w czasie



Rysunek 20: Wykres fazowy u_1 i u_2



Rysunek 21: Wykres fazowy u_1 i u_3



Rysunek 22: Wykres fazowy u_2 i u_3

Do układu wprowadziłem dosyć duże zaburzenia, tj. ustawiłem duże niezerowe parametry początkowe. Układ ponownie ustabilizował się pomimo dużej zmiany warunków początkowych, ponadto ustabilizował się w podobnym miejscu co układ z parametrami początkowymi $u'_1(0) = 1$, $u'_2(0) = 1$, $u'_3(0) = 1$.

3 Podsumowanie

W pracy laboratoryjnej udało się za modelować Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością jak i Model Lorentza. Dla obu modeli obliczenia numeryczne wykonane w programie Scilab znalazły różne rozwiązania tych układów w zależności od ich parametrów i punktów początkowych. Dla modelu Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością znalazłem dwa rozwiązania, tj. układ wygasa lub oscyluje między kilkoma stabilnymi punktami zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi omawianymi na wykładzie (patrz rysunki 5 i 6). Podobne zachowania zostały zauważone w drugim układzie, tj. wygasa lub oscyluje. Jednak jego oscylacje przebiegają wokół dwóch punktów. Ponadto bardzo szybko wraca do stabilnego punktu (patrz rysunki 19-22).