Rzeszów, 22.12.2021

PODSTAWY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO W INŻYNIERII

PRACA LABORATORYJNA NR 2

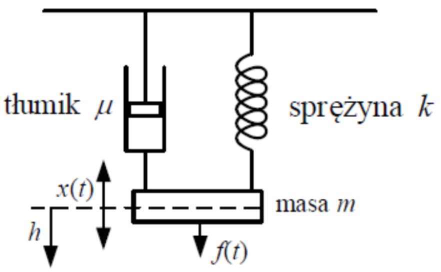
"Modele matematyczne w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych i metody ich rozwiązania."

Piotr Krawiec L1
Semestr: 2021/2022
Kierunek: III/FS0-DI
Numer indeksu: 164165
Prowadzący: Bohdan Datsko

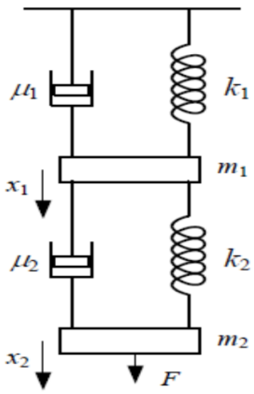
1 Treść zadania

Wykonać modelowanie różnych możliwych typów zachowań układów oscylacyjnych przedstawionych na rysunkach 1 i 2. Innymi słowy, otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych dla parametrów podanych w tabeli 2 zgodnie z zestawem. Ocenić skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych i analitycznych.

1.1 Badane układy i funkcje



Rysunek 1: Schemat układu z jednym tłumikiem i sprężyną



Rysunek 2: Schemat układu podwójnego.

Numer	$m = m_1$	m_2	$u = u_1$	u_2	$k = k_1$	k_2	**a**	**w**
13	1	5	6	1	4	1	2	1

Tabela 1: Parametry modelowanych układów

Zostaną zbadane następujące siły zewnętrzne:

$$f_1 = a * sin(\omega t)$$

oraz

$$f_2 = a * e^{sin(\omega t)}$$

Przy wartościach początkowych dla pierwszego układu:

$$x(0) = 1, x'(0) = 0$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 1$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 1$$

A dla drugiego układu:

$$x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0, x_1(0) = 0, x_2'(0) = 1$$

$$x_1(0) = 0, x_1'(0) = 1, x_1(0) = 1, x_2'(0) = 0$$

$$x_1(0) = 1, x_1'(0) = 1, x_1(0) = 0, x_2'(0) = 0$$

2 Teoria

Jednorodne równania różniczkowe n-tego rzędu o stałych współczynnikach, to równania następującej postaci:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{1}$$

gdzie $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Wielomian charakterystyczny takiego równania ma postać:

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n \tag{2}$$

Rozwiązanie takiego równania można zapisać z pomocą jego pierwiastków. Dla każdego $\lambda_i \in \mathbb{R}$ o krotności m:

$$y = (C_1 + C_2 t + ... + C_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda_i t} \tag{3}$$

Dla każdego $\lambda_i \in \mathbb{C}$ o krotności m:

$$\begin{aligned} y = e^{\alpha t} \left[C_1 + C_2 + ... + C_{m-1} t^{m-1} \right] cos(\beta t) \\ + e^{\alpha t} \left[D_1 + D_2 + ... + D_{m-1} t^{m-1} \right] sin(\beta t) \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: $\lambda = \alpha + \beta i$

2.0.1 Badanie typów rozwiązań

Postać ogólna rozwiązywanego równania wygląda następująco:

$$y'' + py' + qy = 0$$

W zależności od tego, jakie przyjmiemy parametry, jego rozwiązanie zależy od parametrów k_1 oraz k_2, gdzie:

$$k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Możliwe są zatem 3 przypadki:

1. k_1, k_2 są rzeczywiste różne od siebie
2. k_1, k_2 są zespolone
3. k_1, k_2 są równe (rzeczywiste lub zespolone)

3 Rozwiązanie

3.1 Układ 1.2a - układ bez siły zewnętrznej

Układ pierwszy możemy rozwiązać analitycznie. Dla parametrów początkowych $x(0) = 1, x'(0) = 0$, wygląda to następująco:

(1) $F = m\cdot a = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\mu\,\frac{dx(t)}{dt} - k\,x(t)$

$$\begin{cases} x(0) = x_1 \\ x'(0) = x_2 \end{cases}$$

$$m\cdot\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \mu\,\frac{dx(t)}{dt} + k\cdot x(t) = 0 \quad , \quad y = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} m\cdot\frac{dy}{dt} + \mu\cdot y + k\cdot x(t) = 0 \\ y = \frac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{\mu}{m}\cdot y - \frac{k}{m}\cdot x(t) \\ \frac{dx}{dt} = y \end{cases}$$

$k_1 = -3+\sqrt{5}$

$k_2 = -3-\sqrt{5}$

$$\begin{cases} y = C_1\cdot e^{k_1 t} + C_2\cdot e^{k_2 t} \\ y' = C_1\cdot k_1\cdot e^{k_1 t} + C_2\cdot k_2\cdot e^{k_2 t} \end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 k_1 + C_2 k_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1 k_1 = -C_2 k_2 \\ C_1 = -\frac{k_2}{k_1}\cdot C_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{k_2}{k_1}\cdot C_2 \\ C_1 = 1 - C_2 \end{cases}$$

$$1 - C_2 = -\frac{k_2}{k_1}\cdot C_2$$

$$1 = \left(-\frac{k_2}{k_1} + 1\right) C_2$$

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{-\frac{k_2}{k_1} + 1}} \quad , \; C_1 = 1 - C_2$$

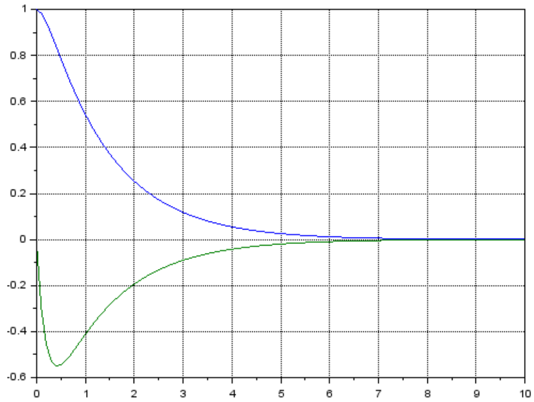
Do porównania wyników wykorzystam następujący kod w scilab:

Listing 1: Kod porównujący rozwiązania

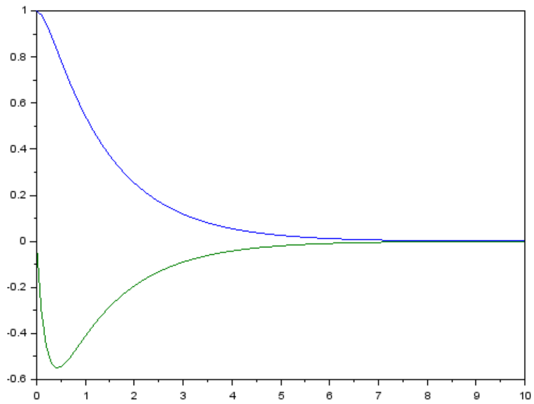
```
T=0.0:0.1:10;
k1 = -3 + sqrt(5);
k2 = -3 - sqrt(5);
C2 = 1/(-k2/k1 + 1);
C1 = 1 - C2;
```

```

// Rozwiazanie analityczne
function y=yy(t)
    y = list();
    y(1) = C1*exp(k1*t) + C2*exp(k2*t);
    y(2) = C1*k1*exp(k1*t) + C2*k2*exp(k2*t);
endfunction
plot(T, [yy(T)(1); yy(T)(2)]) % Wykres rozwiazania analitycznego

// Rozwiazanie w Scilab
function zad1(u, k, m)
    function dy=fun(t, y)
        dy(1)=y(2);
        dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1);
    endfunction

    t0=0.0;y0=[1;0];
    T=0.0:0.1:10;
    y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
    scf(3);
    plot(T,y); xgrid();
    scf(4);
    plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
endfunction

zad1(6, 4, 1) // rozwiazanie w scilab
```

Porównanie rozwiązania analitycznego i numerycznego



Rysunek 3: Rozwiązanie w Scilab



Rysunek 4: Rozwiązanie analityczne

3.1.1 Rozwiazanie w Scilab

Listing 2: Kod generujący wykresy

```
function zad5(u, k, m, y0)
    for u = (u-0.1*u):0.05:(u+0.1*u)
        for k = (k-0.1*k):0.05:(k-0.1*k)
            for m = (m-0.1*m):0.05:(m-0.1*m)
                function dy=fun(t, y)
                    dy(1)=y(2);
                    dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1);
                endfunction

                t0=0.0;
                T=0.0:0.1:10;
                y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
```

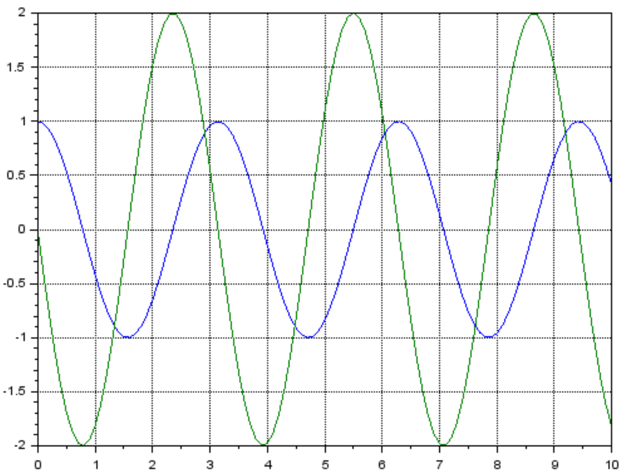
```
                scf(3);
                plot(T,y); xgrid();
                scf(4);
                plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
            end
        end
    end
endfunction


zad5(6, 4, 1, [1;0]) // k_1 i k_2 s  rozne, rzeczywiste
xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy.png")
xs2png(4, "img/5-rzeczywiste-phase.png")
close();close();

zad5(1, 4, 1, [1;0]) // k_1 i k_2 s  zespolone
xs2png(3, "img/5-zespolone-xy.png")
xs2png(4, "img/5-zespolone-phase.png")
close();close();

zad5(0, 4, 1, [1;0]) // k1 i k_2 brak oporu
xs2png(3, "img/5-boporu-xy.png")
xs2png(4, "img/5-boporu-phase.png")
close();close();

zad5(2, 4, 1, [1;0]) // k1 i k_2 s  rowne
xs2png(3, "img/5-rowne-xy.png")
xs2png(4, "img/5-rowne-phase.png")
close();close();


zad5(6, 4, 1, [1;1]) // k_1 i k_2 s  r  ne, rzeczywiste
xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy-11.png")
close();close();

zad5(1, 4, 1, [1;1]) // k_1 i k_2 s  zespolone
xs2png(3, "img/5-zespolone-xy-11.png")
close();close();

zad5(0, 4, 1, [1;1]) // k1 i k_2 brak oporu
xs2png(3, "img/5-boporu-xy-11.png")
close();close();

zad5(2, 4, 1, [1;1]) // k1 i k_2 s  r wne
xs2png(3, "img/5-rowne-xy-11.png")
close();close();

zad5(6, 4, 1, [0;1]) // k_1 i k_2 s  r  ne, rzeczywiste
xs2png(3, "img/5-rzeczywiste-xy-01.png")
close();close();
```

```
zad5(1, 4, 1, [0;1]) // k_1 i k_2 s  zespolone
xs2png(3, "img/5-zespolone-xy-01.png")
close();close();

zad5(0, 4, 1, [0;1]) // k1 i k_2 brak oporu
xs2png(3, "img/5-boporu-xy-01.png")
close();close();

zad5(2, 4, 1, [0;1]) // k1 i k_2 s  r wne
xs2png(3, "img/5-rowne-xy-01.png")
close();close();
```

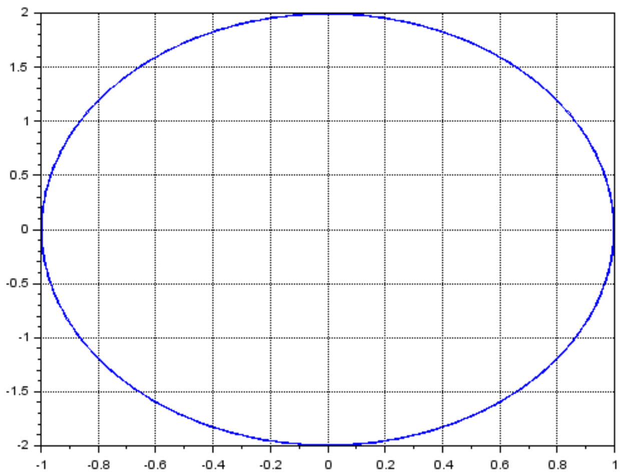
3.1.2 Rozwiązanie układu z modyfikacją parametrów przy $x(0) = 1, x'(0) = 0$

Poniższe wykresy zostały wygenerowane modyfikując parametry μ, k, m. Każdy z nich był zmieniany w granicach 10 procent.

Układ bez oporu

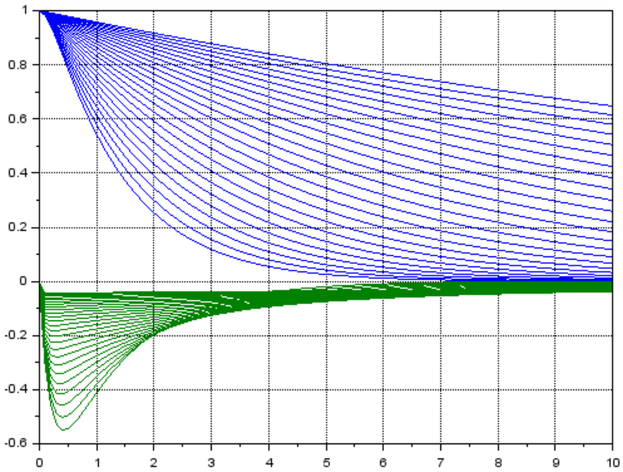


Rysunek 5: Rozwiązanie $x'' + 4x = 0$

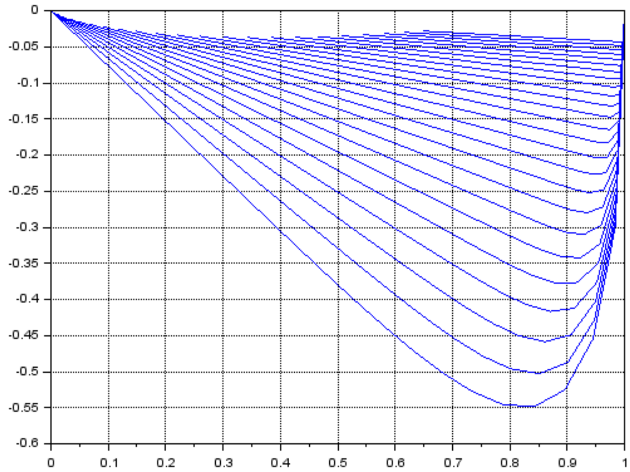


Rysunek 6: Wykres fazowy $x'' + 4x = 0$

Układ z różnymi rozwiązaniami rzeczywistymi

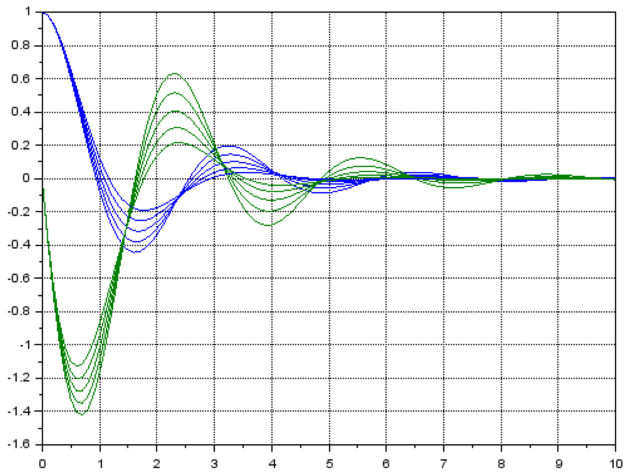


Rysunek 7: Rozwiązanie
$x'' + 6x' + 4x = 0$

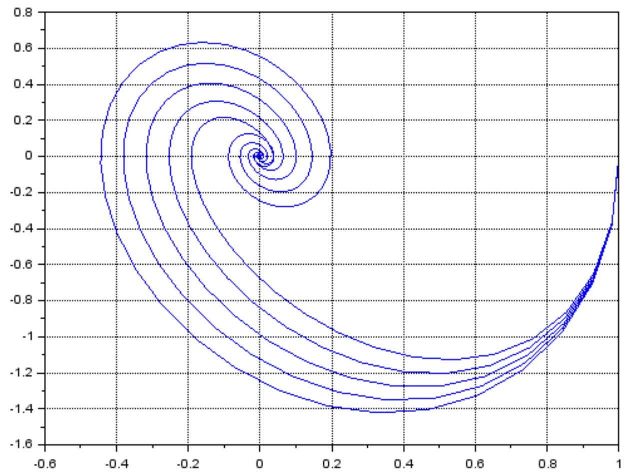


Rysunek 8: Wykres fazowy
$x'' + 6x' + 4x = 0$

Układ z różnymi rozwiązaniami zespolonymi

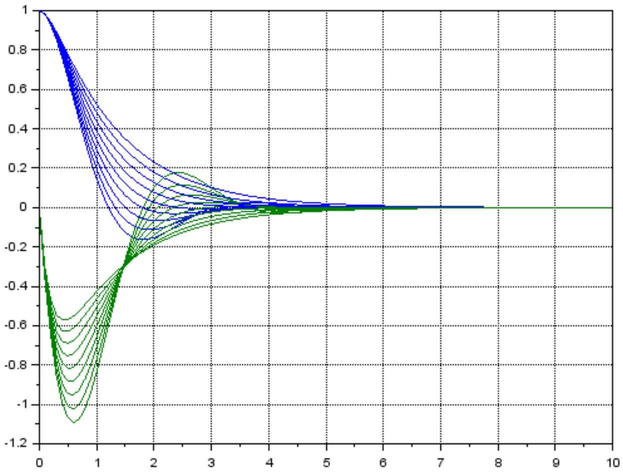


Rysunek 9: Rozwiązanie
$x'' + 1x' + 4x = 0$

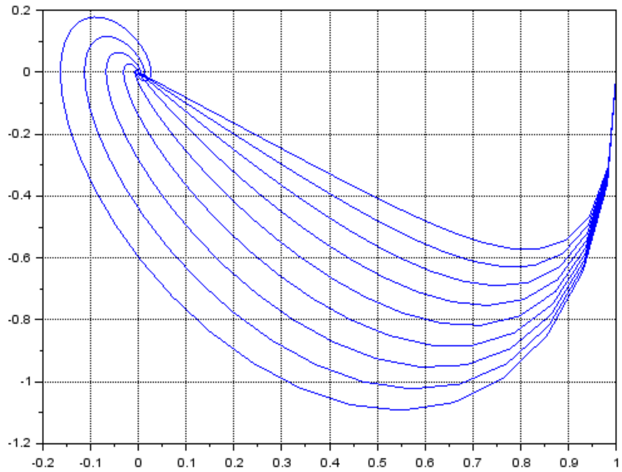


Rysunek 10: Wykres fazowy
$x'' + 1x' + 4x = 0$

Układ z identycznymi rozwiązaniami rzeczywistymi



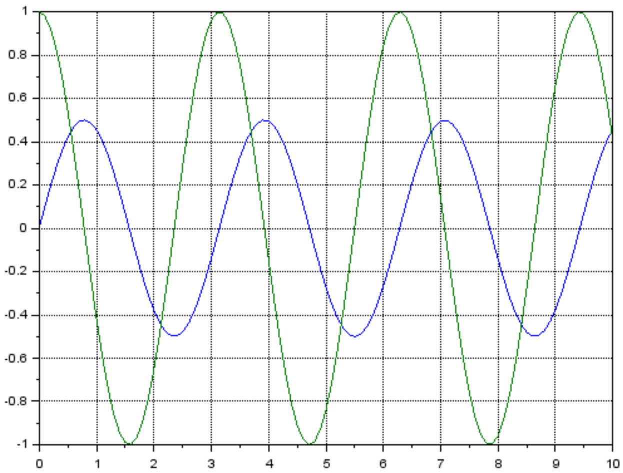
Rysunek 11: Rozwiązanie
$x'' + 2x' + 4x = 0$



Rysunek 12: Wykres fazowy
$x'' + 2x' + 4x = 0$

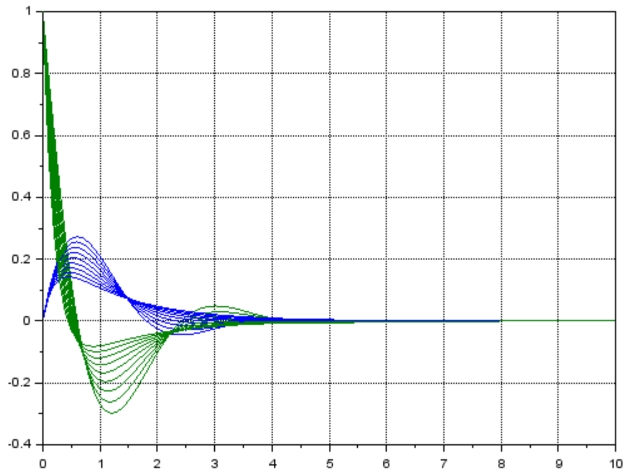
3.1.3 Rozwiązanie zadanego układu ze zmianą parametrów przy $x(0) = 0, x'(0) = 1$

Układ bez oporu



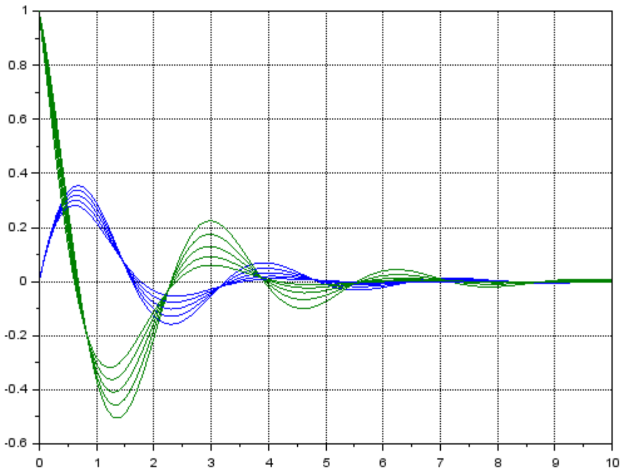
Rysunek 13: Rozwiązanie
$x'' + 4x = 0$

Identyczne rzeczywiste



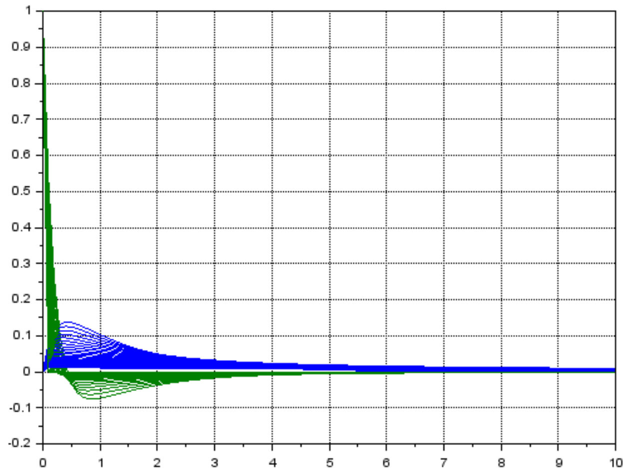
Rysunek 14: Rozwiązanie
$x'' + 2x' + 4x = 0$

Zespolone



Rysunek 15: Rozwiązanie
$x'' + 1x' + 4x = 0$

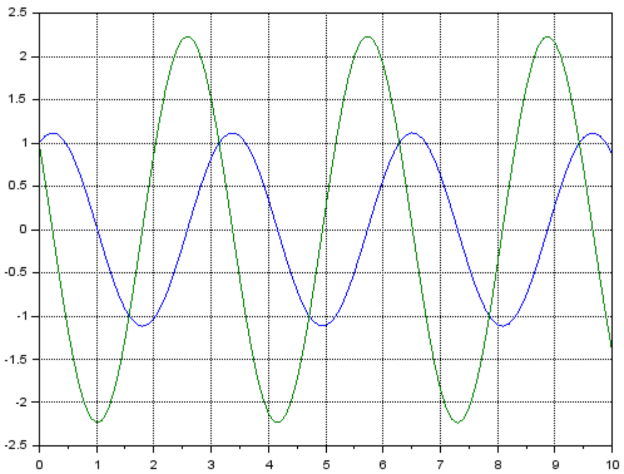
Rzeczywiste



Rysunek 16: Rozwiązanie
$x'' + 6x' + 4x = 0$

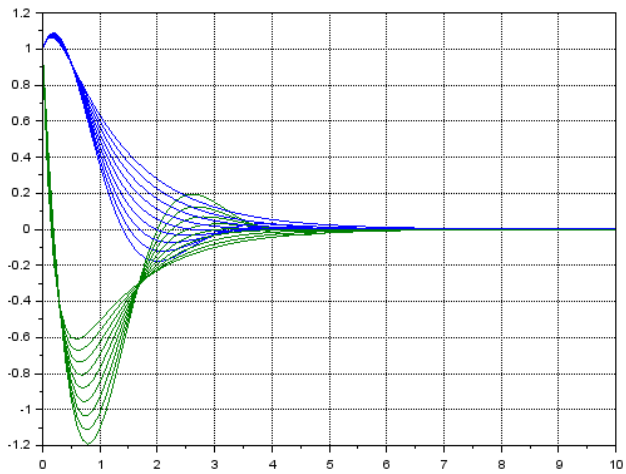
3.1.4 Rozwiązanie zadanego układu ze zmianą parametrów przy $x(0) = 1, x'(0) = 1$

Układ bez oporu



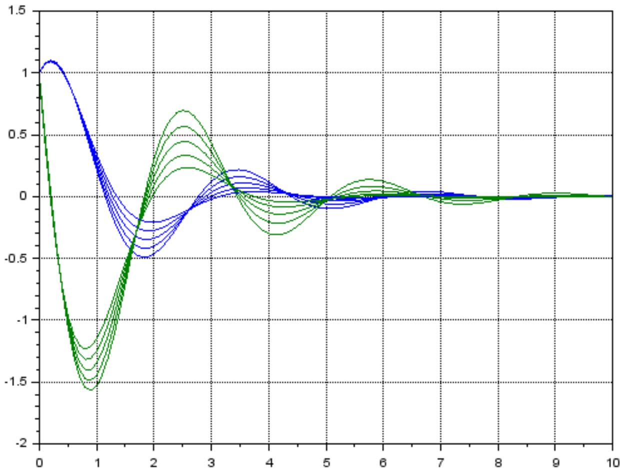
Rysunek 17: Rozwiązanie
$x'' + 4x = 0$

Identyczne rzeczywiste



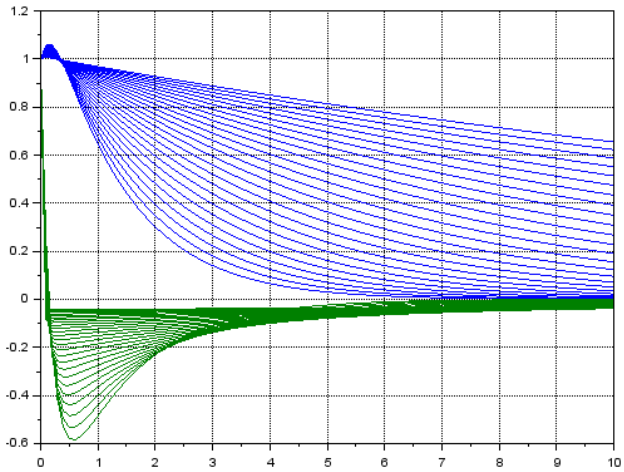
Rysunek 18: Rozwiązanie
$x'' + 2x' + 4x = 0$

Zespolone



Rysunek 19: Rozwiązanie $x'' + 1x' + 4x = 0$

Rzeczywiste



Rysunek 20: Rozwiązanie $x'' + 6x' + 4x = 0$

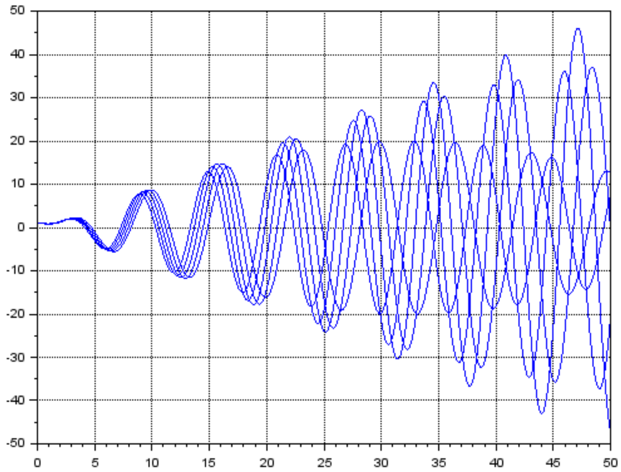
3.2 Układ 1.2b - układ z drganiami wymuszonymi

Układ ten działa podobnie jak układ 1.2a (patrz Rys. 1), lecz teraz na układ działają siły zewnętrzne f_1 oraz f_2. Rozwiązanie w scilab z funkcją $f_1 = asin(\omega t)$:

```
function zad7(u, k, m, a, omega)
    function dy=fun(t, y)
        dy(1)=y(2);
        dy(2)=-u/m*y(2)-k/m*y(1) + a*sin(omega*t);
    endfunction

    t0=0.0;y0=[1;0];
    T=0.0:0.1:80;
    y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
    scf(3);
    plot(T,y(1,:)); xgrid();
    scf(4);
    plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
endfunction
```

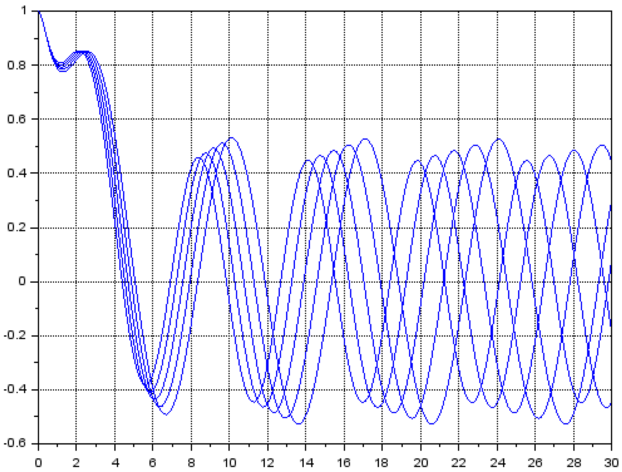
Dla tego układu dopasowałem parametry tak, aby uzyskać różne rozwiązania, a następnie ich parametry α i ω zmieniałem w granicach 10 procent. Wszystkie badane układy mają parametry początkowe $x(0) = 1, x'(0) = 0$. W tytułach wykresów jest napisane, jakie pierwiastki ma równanie charakterystyczne (zadane to wartości z tabeli).

Bez oporu



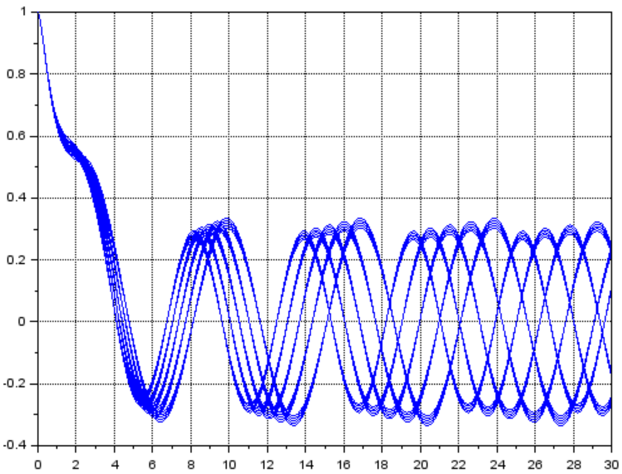
Rysunek 21: Rozwiązanie
$x'' + x = 2sin(t)$

Rzeczywiste



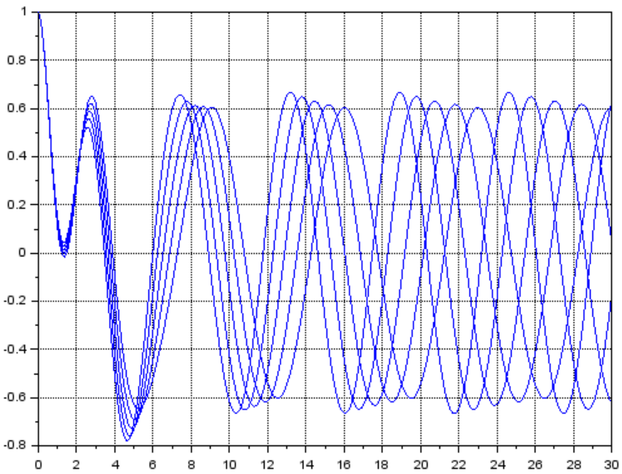
Rysunek 22: Rozwiązanie
$x'' + 4x' + 2x = 2sin(t)$

Zadane



Rysunek 23: Rozwiązanie
$x'' + 6x' + x = 2sin(t)$

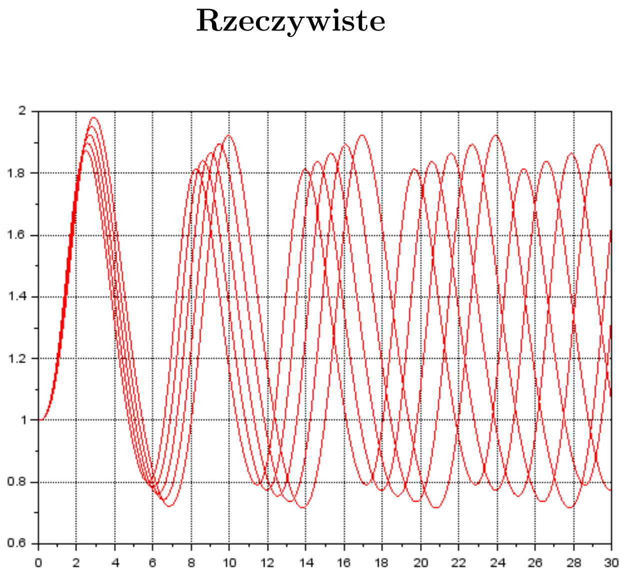
Zespolone



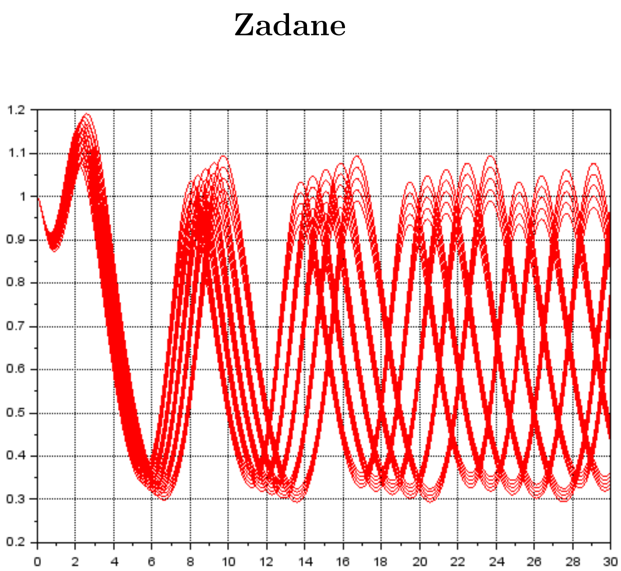
Rysunek 24: Rozwiązanie
$x'' + 1x' + 4x = 2sin(t)$

Przy zmianie działającej siły zewnętrznej na $f2 = ae^{sin(\omega t)}$ wykresy te prezentują się następująco:

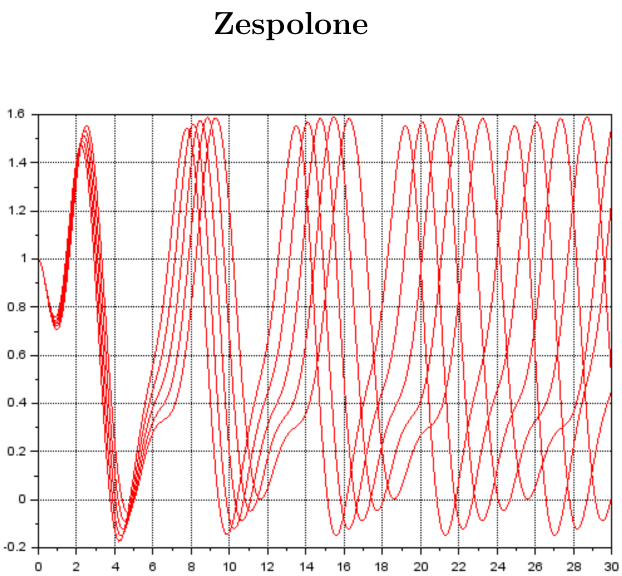
Rysunek 25: Rozwiązanie
$x'' + x = 2e^{sin(\omega)}$



Rysunek 26: Rozwiązanie
$x'' + 4x' + 2x = 2e^{sin(\omega)}$



Rysunek 27: Rozwiązanie
$x'' + 6x' + x = 2e^{sin(\omega)}$



Rysunek 28: Rozwiązanie
$x'' + 1x' + 4x = 2e^{sin(\omega)}$

3.3 Układ 1.4b

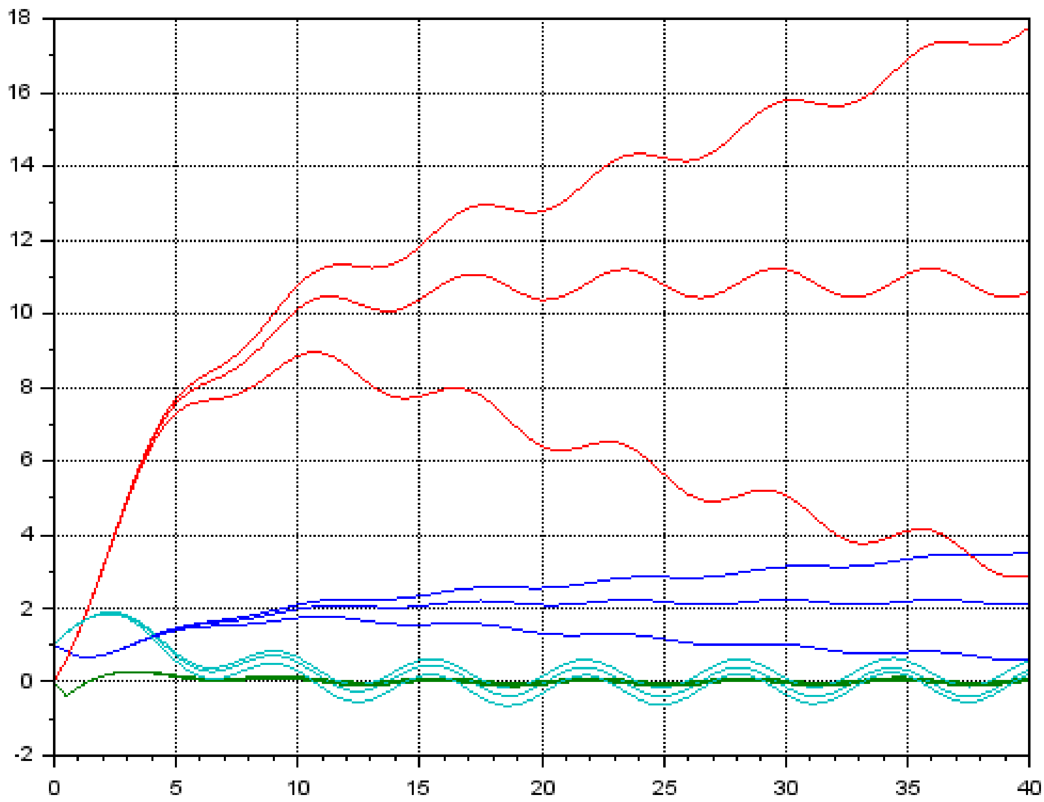
Jest to układ przedstawiony na Rys. 2. Można go opisać następującym równaniem:

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2$$
$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{k_2}{m_2}x_2 - \frac{\mu_2}{m_2}v_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 + \frac{\mu_2}{m_2}v_1 + \frac{1}{m_2}f$$
$$\frac{dx_1}{dt} = v_1$$
$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{\mu_2}{m_1}v_2 - \frac{k_2}{m_1}x_1 - \frac{\mu_2}{m_1}v_1 - \frac{\mu_1}{m_1}v_1$$

Listing 3: Kod rozwiązujący równanie 1.4b

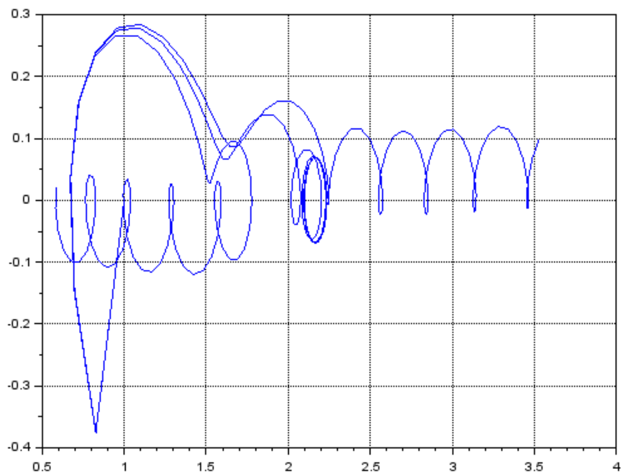
```
m_1 = 1;
m_2 = 5;
u_1 = 6;
u_2 = 1;
k_1 = 4;
k_2 = 1;
a=2;
omega=1;
function zad8(u_1,u_2, k_1, k_2, m_1, m_2, a, omega, y00)
    function dy=fun(t, y)
        dy(1)=y(2); //
        dy(2)=k_2/m_1*y(3)+u_2/m_1*y(4)-k_2/m_1*y(1)-u_2/
           m_1*y(2)-k_1/m_1*y(1)-u_1/m_1*y(2)
        dy(3)=y(4)
        dy(4)=-k_2/m_2*y(3)-u_2/m_2*y(4)+k_2/m_1*y(1)+u_2/
           m_2*y(2)+1/m_2 * a*sin(omega*t)
    endfunction

    t0=0.0;y0=y00;
    T=0.0:0.5:40;
    y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
    scf(3);
    plot(T,y); xgrid();
    scf(4);
    plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
    scf(5);
    plot(y(3,:),y(4,:)); xgrid();
endfunction
```

Rozwiązanie tego układu w Scilab z zadanymi wartościami i zmianą m_2 w 10 procentah, wygląda następująco:

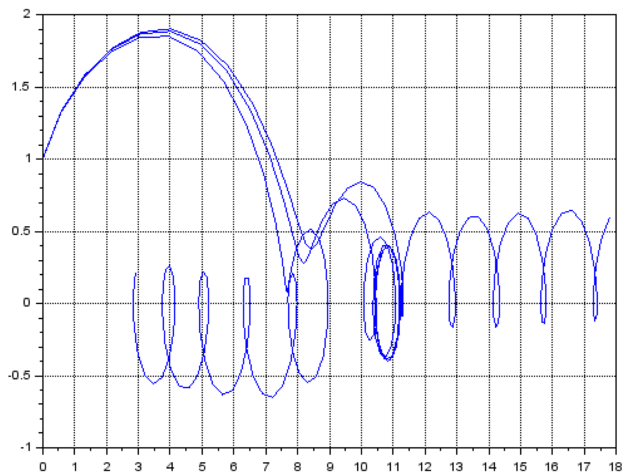


Rysunek 29: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

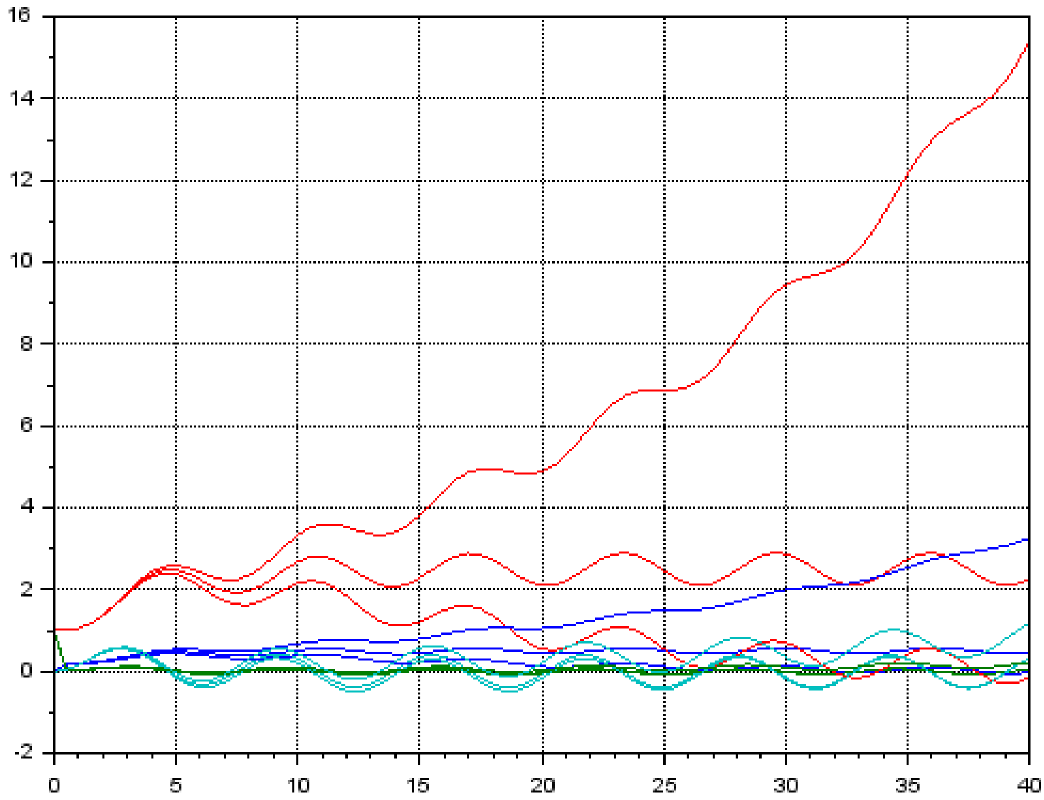
Wykres fazowy y(1) i y(2)



Wykres fazowy y(3) i y(4)

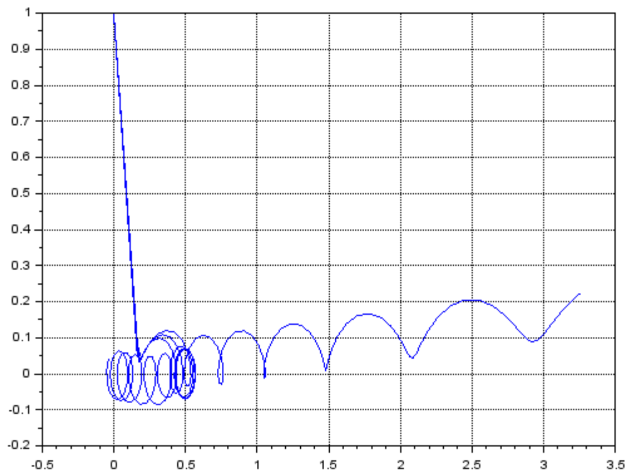


3.3.1 Zmiana wartości początkowych (0,1,1,0) i k_1

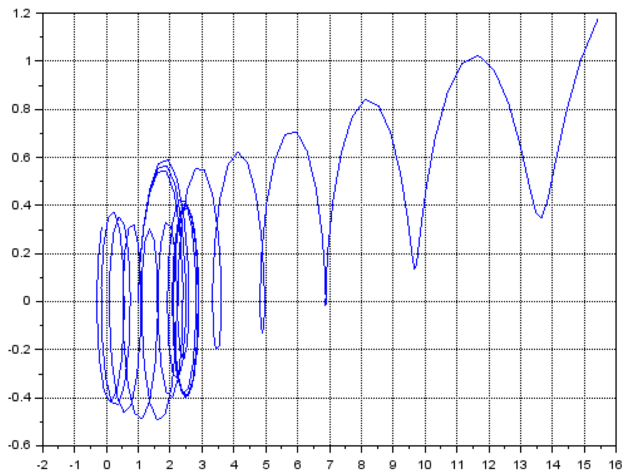


Rysunek 30: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

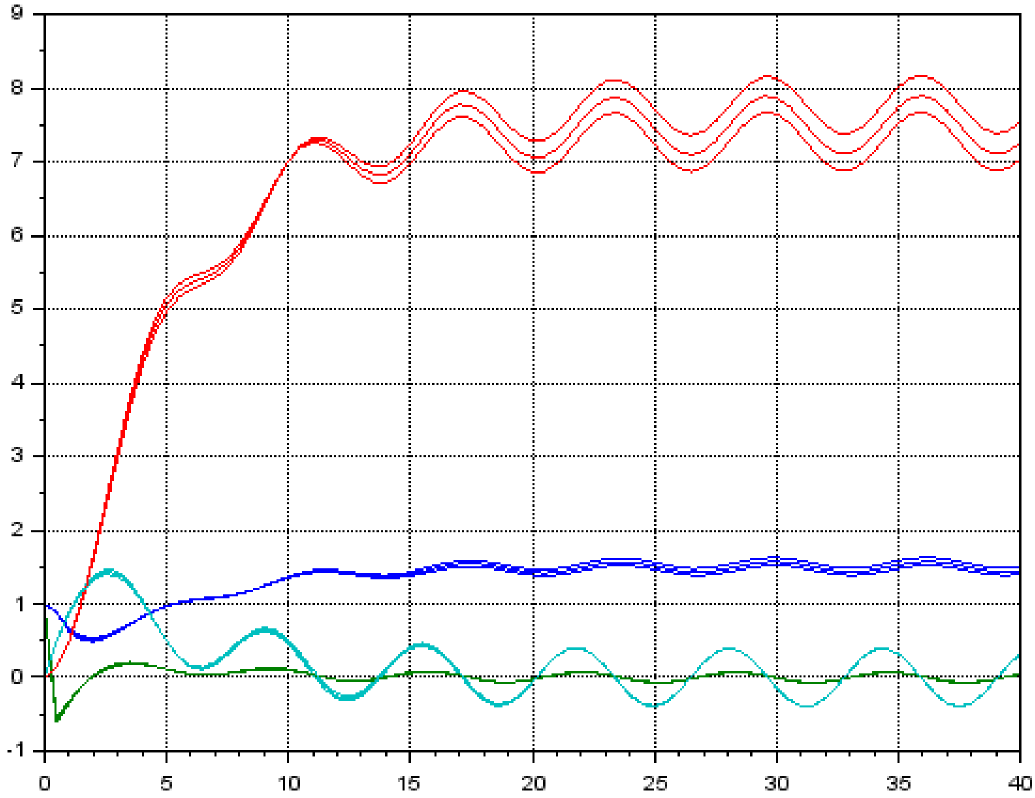
Wykres fazowy y(1) i y(2)



Wykres fazowy y(3) i y(4)

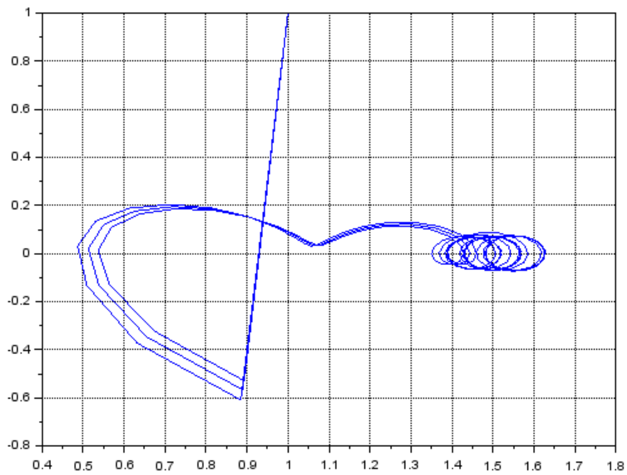


3.3.2 Zmiana wartości początkowych (1,1,0,0) i u_1

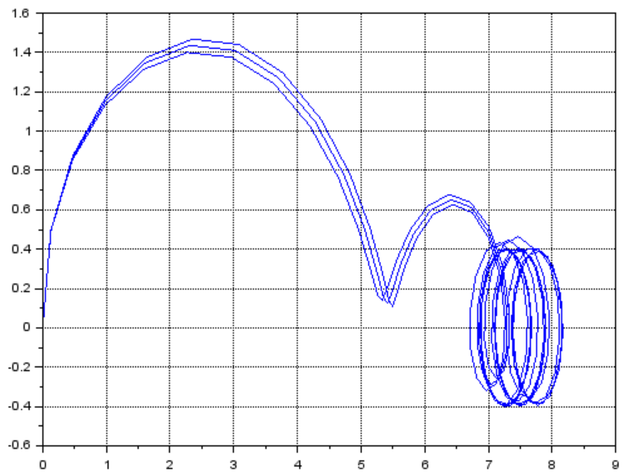


Rysunek 31: Wykres odchylenia oraz przyspieszeń w czasie dla układu z Rys. 2

Wykres fazowy y(1) i y(2)



Wykres fazowy y(3) i y(4)



4 Podsumowanie

W pracy udało się poprawnie za modelować każdy z podanych układów, gdyż zachowują się one zgodnie z rzeczywistością. Widać to chociażby w układach bez oporu, gdzie w równaniach otrzymujemy ruch harmoniczny sprężyny (patrz 3.1.2 Rysunek 5). W przypadku równania bez oporu, ale z dodatkową siłą wymuszającą wychylenia w układzie wychylenia elementów rosną bez ograniczeń. Dzięki zmianie parametrów w granicach 10 procent na wykresach fazowych można zauważyć, jak układ zachowuje się wokół punktu stabilności (patrz 3.1.2 Rysunek 10).

Piotr Krawiec