

Praca laboratoryjna №3

Nieliniowe modele dynamiczne w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych i metody ich analizy i rozwiązania.

1. Podstawy teoretyczne.

Do badania złożonych procesów zachodzących w nieliniowych systemach przyrody, które zmieniają się w czasie, stosuje się opisowe modele matematyczne w postaci układów nieliniowych równań różniczkowych. Przykładami takich systemów mogą być systemy fizyczne, chemiczne, biologiczne, ekologiczne, które zawierają nieliniowości w zależnościach bilansowych.

Modelowanie takich nieliniowych układów dynamicznych jest kluczową metodą odkrywania otaczających nas realiów świata i wysnuwania odpowiednich wniosków co do przebiegających wokół procesów tak jak ich wykorzystania. Większość takich modeli dynamicznych ma bardzo skomplikowane rozwiązania i ich można znaleźć tylko z wykorzystaniem symulacji komputerowej na podstawie metod numerycznych.

1.1 Modele matematyczne w postaci równań nieliniowych.

Jednym z najbardziej znanych nieliniowych modeli matematycznych w postaci układu równań różniczkowych jest model **Lotki-Volterry** lub model drapieżnik-ofiara

Ten model, który zmienił ludzkie rozumienie procesów natury, został zaproponowany w 1926 przez Vito Volterrę do opisu populacji ryb odławianych w Morzu Adriatyckim. Niezależnie od Volterry równoważne równania do opisu oscylacji stężeń substancji w hipotetycznej reakcji chemicznej otrzymał Alfred James Lotka w 1920 roku. Równanie Lotki-Volterry również stanowi model układów dynamicznych występujących w ekosystemach (np. w symulacji zachowania populacji ofiar i drapieżników).

Układ równań zaproponowany przez autorów ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (a - by)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (cx - d)y,\end{aligned}$$

gdzie:

$x(t)$ – populacja, czyli liczba ofiar (ang. prey, np. zające),
 $y(t)$ – liczba drapieżców (ang. predators, np. rysie, wilki),
 t – czas (badamy rozwój tych dwóch populacji w czasie),

stałe ($a, b, c, d > 0$, dodatnie parametry) oznaczają:

a – częstość narodzin ofiar lub współczynnik przyrostu ofiar,
 b – częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa,
 c – częstość narodzin drapieżników lub współczynnik przyrostu drapieżników,
 d – częstość umierania drapieżników lub współczynnik ubywania drapieżników,

Bardzo często do dalszej analizy własności tych równań przeprowadza się ich ubezwymiarowanie za pomocą następujących podstawień:

$$u(\tau) = \frac{cx(t)}{d}, v(\tau) = \frac{by(t)}{a}, \tau = at, \alpha = \frac{d}{a}$$

Powyższe podstawienie prowadzi do następującego układu równań, który zależy już tylko od jednego parametru α :

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(1-v) \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u-1)\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że system ma stacjonarne rozwiązania (punkty krytyczne) (0,0) i (1,1), które mogą być stabilne lub nestabilne. W zależności od tego system może wykazywać jakościowo różną dynamikę.

W wyjściowym modelu wpływ na tempo wzrostu populacji mają tylko współczynniki umieralności i narodzin ofiar i drapieżników, podczas gdy w rzeczywistości na proces ten wpływa o wiele więcej czynników, np. konkurencja. Model można zmodyfikować o wpływ konkurencji o pożywienie na tempo wzrostu obu populacji. W efekcie otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (a - by)x - ex, \\ \frac{dy}{dt} &= (cx - d)y - fy,\end{aligned}$$

gdzie e i f są współczynnikami konkurencji między osobnikami. Gdy jest dużo drapieżników, konkurują (walczą) między sobą o pożywienie. Natomiast, gdy jest dużo ofiar, maleje ilość pożywienia dla nich.

W ogólnym wypadku **ciągły układ dynamiczny można opisać na podstawie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.**

Definicja 1.1 *Układem n równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu nazywamy układ*

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(A, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(A, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ : \\ x'_n = f_n(A, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Powyższy układ równań można zapisywać w postaci wektorowej oznaczając: $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. Taki układ wektorowy jest postaci:

$$x' = F(x, A) \quad (1.1)$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Parametr A jest zewnętrznym parametrem układu równań. Funkcję F nazywamy *polem wektorowym*, gdyż określa ona kierunek oraz prędkość poruszania się trajektorii w każdym punkcie przestrzeni. Układ równań różniczkowych jest nieliniowy, gdyż funkcja F jest funkcją nieliniową.

Wyróżniamy przy tym **układy dysypatywne**, czyli takie, w których w czasie maleje objętość fazowa (np. wiele systemów biologicznych, elektrycznych czy też chemicznych) oraz **układy zachowawcze**, tzn. takie dla których w przestrzeni fazowej element $\{x\}$ zachowuje w czasie swoją objętość, ale zmienia swój kształt (np. system planetarny, są one opisane za pomocą równań Hamiltona).

W nieliniowych ewolucyjnych układach ze skupionymi parametrami, trwałość i charakter dynamiki wyznaczają głównie równania bilansowe, które wyznaczane są przez prawe strony równań różniczkowych. Z reguły nieliniowe funkcje z prawej strony równania jest łatwo zapisać w postaci:

$$F_i(\rho) = F_i^+(\rho) - F_i^-(\rho), \quad (1.2)$$

gdzie $F_i^+(\rho) \equiv F_i^+(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ i $F_i^-(\rho) \equiv F_i^-(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ opisują odpowiednio szybkość wzrostu i spadku i -tych elementów układu ewolucyjnego.

Przy badaniu dynamiki ewolucyjnego układu główna uwaga skupia się nie na przejściowych procesach, a na ostatecznym stanie układu. Może być to niezależny od czasu stan stacjonarny, lub zależny od czasu okresowy, aperiodyczny lub chaotyczny stan układu. Oznacza to, że największe znaczenie w zakresie nieliniowej ewolucji przedstawia stabilność stanu równowagi układu. Jeśli $\bar{\rho}$ - stacjonarny stan układu, to znaczy, że $F(\bar{\rho}) = 0$.

1.2 Stany równowagi i liniowa analiza stabilności

Jedną z ważniejszych cech układu (1.1) jest osiągnięcie ograniczonej liczby stanów stacjonarnych, co wiąże się z ich stabilnością. Przez stabilność układu rozumiemy zdolność tego systemu do utrzymania swojej pozycji w punkcie równowagi, po wcześniejszej perturbacji układu z tego stanu. Wobec tego układ nieliniowy jest stabilny, kiedy trajektoria, która zaczęła się dostatecznie blisko od tego stanu, nie oddala się wraz z upływem czasu. Punkt równowagi otrzymujemy podstawiając do układu równań (1.1) $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$. W układach nieliniowych może występować więcej niż jeden punkt równowagi. Każdy punkt $\bar{x}_r = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ spełniający równanie $F(\bar{x}_r) = 0$ jest stanem stacjonarnym układu (1.1).

Stan stacjonarny jest stabilny, jeśli trajektoria, która rozpoczęła się wystarczająco blisko niego jest bliska w dalszym ciągu. Formalnie można to wyrazić poprzez następujące definicje.

Definicja 1.2 Mówimy, że stan stacjonarny x_r jest *stabilny w sensie Lapunowa*, jeżeli dla każdej dowolnie ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że trajektoria wektora stanu x_0 znajdującym się w kole (kuli) o promieniu δ , pozostaje we wnętrzu koła (kuli) o promieniu ε dla wszystkich $t > 0$, tzn.

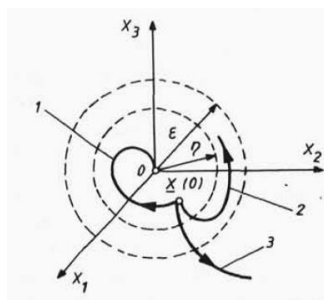
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t > 0 \quad |x_0 - x_r| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_r| < \varepsilon.$$

Definicja 1.3 Układ jest *niestabilny w sensie Lapunowa*, jeżeli trajektoria wektora stanu wybiega poza wnętrze kuli.

Podobnie określamy pojęcie asymptotycznej stabilności.

Definicja 1.6 Możemy stwierdzić, że stan stacjonarny x_r jest *asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa*, gdy spełnia definicję stabilności w sensie Lapunowa oraz gdy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_r| = 0$$



Rys. 1: Przypadki niestabilności w sensie Lapunowa.

Powyżej zilustrowane zostały przypadki stabilności/niestabilności układu w sensie Lapunowa:

1. Trajektoria 1 jest trajektorią układu stabilnego asymptotycznie
2. Trajektoria 2 jest trajektorią układu stabilnego, jednak nie asymptotycznie
3. Trajektoria 3 natomiast jest trajektorią układu niestabilnego.

Mówimy że układ jest **stabilny lokalnie**, jeżeli układ nieliniowy jest stabilny tylko w pewnym ograniczonym otoczeniu punktu równowagi, tzn. wartości ϵ oraz δ są ograniczone. Natomiast układ jest **stabilny globalnie** jeżeli δ może być dowolnie wielką wartością.

Analiza rozpatrywanych układów nieliniowych w pobliżu punktów równowagi może być prowadzona przez linearyzację tego układu. Linearyzacja układu (1.1) jest to przybliżenie za pomocą rozwinięcia dwóch pierwszych składników prawej części układu równań różniczkowych (1.1) w szereg Taylora.

Zakładając, że punkt równowagi jest określony przez współrzędne $\bar{x}_r = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ oraz $F(x_r) = 0$, linearyzacja układu (1.1) wygląda następująco: $\bar{x}' = x_0 + J_r(x - x_r)$, gdzie

$$J_r = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x_r}$$

jest jacobianem układu (1.1).

W takim przypadku, analizę dynamiki systemu w pobliżu punktów równowagi można wykonywać na podstawie wartości własnych macierzy J_r :

$$\bar{x}' = f(\Delta \bar{x}) \approx J_r \Delta \bar{x}, \quad (1.3)$$

gdzie $\Delta x = x - x_r$ to bliskie otoczenie punktu równowagi systemu.

Rozwiązywanie równania (1.) prowadzi do określenia odpowiedzi czasowej rozpatrywanego systemu w pobliżu punktu równowagi:

$$x_i(t) = C_i e^{\lambda_i t} = C_i e^{(\alpha_i + i\beta_i)t}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

gdzie $\lambda_i = (\alpha_i + i\beta_i)t$ są to wartości własne macierzy J_t (nazywane są również wykładnikami Lapunowa), α - część rzeczywista wartości własnych, β - część urojona.

Zachowanie układu w pobliżu punktu równowagi zależy od wartości i charakteru wykładników λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), które są używane, aby ocenić stabilność systemu w otoczeniu tego punktu (tzw. pierwsza metoda Lapunowa). Możemy zatem sformułować pewne zasady stabilności w układach nieliniowych:

1. Jeżeli model liniowy otrzymany po linearyzacji wokół wybranego punktu równowagi x_r jest asymptotycznie stabilny, to model nieliniowy będzie również asymptotycznie stabilny wokół tego punktu w sensie Lapunowa. W szczególnym przypadku, kiedy części rzeczywiste wszystkich wykładników są ujemne: $\alpha_i < 0; (i = 1, 2, \dots, n)$ to wtedy układ jest asymptotycznie stabilny.

2. Jeśli przynajmniej jedna wartość wykładnika λ ma rzeczywistą część $\alpha_i > 0; (i = 1, 2, \dots, n)$ to układ jest niestabilny. Jeżeli nasz model jest niestabilny, to zerowe rozwiązanie nieliniowego układu też jest niestabilne.

Natomiast nic nie jesteśmy w stanie stwierdzić o stabilności punktu \bar{x}_r , jeżeli model liniowy jest tylko stabilny.

2. Analiza układu dwuskładnikowego.

Rozpatrzmy ogólny układ dwuskładnikowy

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, Y) \\ \frac{dY}{dt} = g(X, Y) \end{cases} \quad (1.5)$$

Stan stacjonarny (X_S, Y_S) spełnia warunki:

$$\begin{cases} \frac{dX_S}{dt} = f(X_S, Y_S) = 0 \\ \frac{dY_S}{dt} = g(X_S, Y_S) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Zastosujemy małe zaburzenie ($x \ll X_S$ i $y \ll Y_S$):

$$\begin{cases} X = X_S + x \\ Y = Y_S + y \end{cases} \quad (1.7)$$

Łącząc równania (1.5) - (1.7) mamy:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{dX_S}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(X, Y) \\ \frac{dY}{dt} = \frac{dY_S}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(X, Y) \end{cases} \quad (1.8)$$

Ponieważ system (1.5) jest nieliniowy, możemy rozwinąć go w szereg Taylora:

$$\begin{cases} f(X, Y) = f(X_S, Y_S) + \left(\frac{df}{dX}\right)_S x + \left(\frac{df}{dY}\right)_S y + \dots = \left(\frac{df}{dX}\right)_S x + \left(\frac{df}{dY}\right)_S y \\ g(X, Y) = g(X_S, Y_S) + \left(\frac{dg}{dX}\right)_S x + \left(\frac{dg}{dY}\right)_S y + \dots = \left(\frac{dg}{dX}\right)_S x + \left(\frac{dg}{dY}\right)_S y \end{cases} \quad (1.9)$$

Jakobian dla stanu stacjonarnego (X_S, Y_S) to:

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

gdzie:

$$a_{11} = \left(\frac{df}{dX}\right)_S, \quad a_{12} = \left(\frac{df}{dY}\right)_S, \quad a_{21} = \left(\frac{dg}{dX}\right)_S, \quad a_{22} = \left(\frac{dg}{dY}\right)_S. \quad (1.10)$$

Łącząc (1.8) z (1.9) otrzymujemy system liniowych równań:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad (1.11)$$

którego rozwiązanie możemy zapisać jako:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}e^{\lambda t} \\ y = \tilde{y}e^{\lambda t} \end{cases} \quad (1.12)$$

Podstawiając (1.12) do (1.11), otrzymujemy:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\tilde{x} + a_{12}\tilde{y} = 0 \\ a_{21}\tilde{x} + (a_{22} - \lambda)\tilde{y} = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Układ ten ma nietrywialne rozwiązanie, jeśli:

$$\text{Det} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (1.14)$$

to znaczy:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (1.15)$$

Zauważmy, że $a_{11} + a_{22} = T$ - ślad Jakobianu i $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta$ - wyznacznik Jakobianu.

Równanie (1.15) na ogół ma dwa pierwiastki:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}]. \quad (1.16)$$

Z równania (1.16) wynika, że dla układów dwuskładnikowych można wyróżnić następujące przypadki:

Przypadek (I): (rys. 2 (a)) $T < 0, \Delta > 0$ i $T^2 - 4\Delta > 0$. W tym przypadku wartości własne są rzeczywiste i ujemne. Według (1.4) wszystkie zaburzenia stanu stacjonarnego systematycznie spadają i stan równowagi to stabilny węzeł.

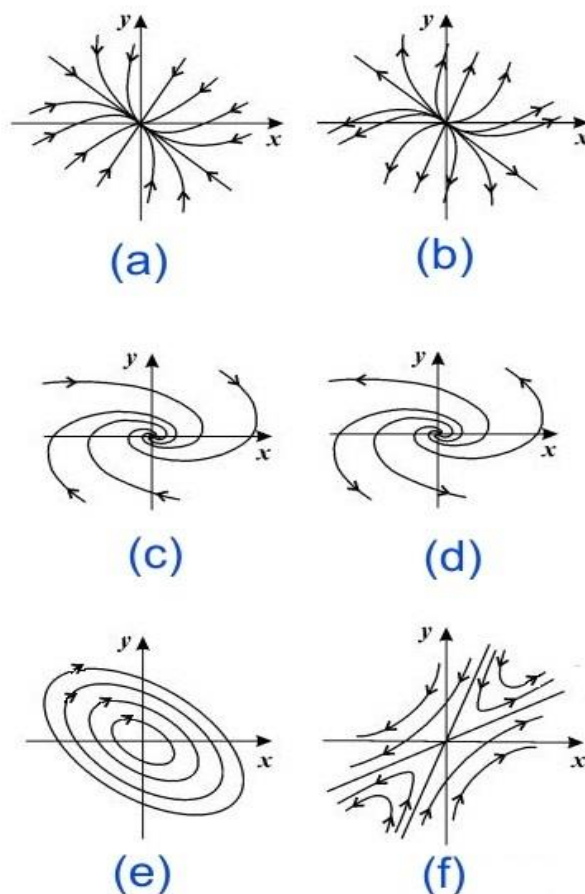
Przypadek (II): (rys. 2(c)) $T < 0, \Delta > 0$ i $T^2 - 4\Delta < 0$. W tym przypadku wartości własne tworzą parę zespolono-sprzężonych liczb $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\omega$ z $\lambda = T/2$ i $\omega = \sqrt{4\Delta - T^2}/2$. Część rzeczywista jest ujemna i zaburzenie stanu stacjonarnego zanika. Niemniej jednak, obecność niezerowej części urojonej oznacza, że zaburzenie zmniejsza się nie monotonicznie, a w sposób oscylacyjny. Trajektoria zbliża się po spirali wokół niego do stanu równowagi i jest to stan równowagi ostrej.

Przypadek (III): (rys. 2(d)) $T > 0, \Delta > 0$ i $T^2 - 4\Delta < 0$. Wartości własne są zespolono-sprzężone z dodatnią częścią, $\lambda = T/2$. Stan stacjonarny jest niestabilny. Dzięki niezerowej części urojonej zaburzenie wzrośnie w sposób oscylacyjny i trajektoria fazowa będzie odbiegać od stanu równowagi. Stan stacjonarny jest ostro niestabilny.

Przypadek (IV): (rys. 2(b)) $T < 0, \Delta > 0$ i $T^2 - 4\Delta > 0$. Wartości własne są rzeczywiste i dodatnie. Wszystkie zaburzenia gwałtownie rosną. Stan stacjonarny jest niestabilnym węzłem.

Przypadek (V): (rys. 2(f)) $\Delta < 0$. W tym przypadku wyróżnik jest zawsze dodatni $T^2 - 4\Delta > 0$ i obie wartości własne są rzeczywiste, ale jedna jest dodatnia, a druga ujemna. Trajektorie przybliżają się do stanu stacjonarnego wzdłuż wektora własnego, który odpowiada ujemnej wartości własnej, ale rozchodzi się wzdłuż wektora własnego, który odpowiada dodatniej wartości własnej. Stan stacjonarny posiada jeden punkt stabilny i jeden kierunek wywrotny. Jest więc niestabilnym i nazywa się siodłem.

Przypadek (VI): (rys. 2(e)) $T = 0$ i $T^2 - 4\Delta < 0$. Wartości własne są czysto urojone. Stan stacjonarny to centrum.



Rysunek 2: Typy portretów fazowych w sąsiedztwie stanu stacjonarnego dla układu liniowego.

3. Modele dla analizy w pracy laboratoryjnej.

3.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością.

Jednym z najbardziej znanych modeli matematycznych w modelu dynamiki nieliniowej jest model Bonhoeffera-van der Pola. Standaryzowane równania w postaci bezwymiarowej wyglądają następująco:

$$\begin{aligned}\tau \frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2; \\ \frac{du_2}{dt} &= bu_1 - u_2 + A;\end{aligned}\tag{3.1}$$

Układ (3.1) przy $B = 1$ ma tylko jeden stan stacjonarny:

$$\bar{u}_1 = \sqrt[3]{-3a}, \quad \bar{u}_2 = \sqrt[3]{-3a} + a.\tag{3.2}$$

Przy $b > 1$ ma również tylko jeden stan stacjonarny, lecz jego zapis jest kłopotliwy i dlatego nie przytoczono go tutaj. Przy $b < 1$ układ ma więcej niż jeden stan stacjonarny. Jakobian układu (3.1) ma postać:

$$J = \begin{pmatrix} (1 - \bar{u}_1^2) / \tau_1 & -1 / \tau_1 \\ b & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

3.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

Wraz z istnieniem stabilnych oscylacji fazowej podobizny, która jest cyklem granicznym, podstawowe układy autooscylacyjne mogą wykazywać bardziej złożoną dynamikę. Dokładnym przykładem takiego układu jest układ Lorentza. Jest to układ trzech nieliniowych równań różniczkowych, który wykazuje chaotyczne zachowanie. Po raz pierwszy zapisał go w 1963 roku Edward Lorenz rozważając konwekcyjny ruch w jednolitej warstwie płynu ogrzewanego od dołu. Równanie Lorentza opisuje również konwekcję w rurze okrężnej i zachowania jednomodowego lasera. Fazowa podobizna układu nazywa się dziwnym atraktorem.

Znormalizowane równania w postaci bezwymiarowej mają postać:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \sigma(u_2 - u_1); \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_1(r - u_3) - u_2; \\ \frac{du_3}{dt} &= u_1u_2 - \beta u_3; \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Narzędzia dla rozwiązywania równań różniczkowych w Scilab.

Modelowanie zjawisk dynamicznych opisywanych językiem matematycznym za pomocą równań różniczkowych jest często procesem trudnym i czasochłonnym. W celu zautomatyzowania procesu rozwiązywania równań różniczkowych opracowano kilka metod umożliwiających uzyskanie wyników numerycznych.

W środowisku obliczeniowym Scilab zaimplementowane są funkcje realizujące te zadanie.

W Scilab'ie zadanie to realizuje, na przykład, funkcja **ode** (albo inne funkcje).

Uogólnioną składnię, zawierającą najważniejsze parametry, funkcji **ode** zapisano poniżej:

$$\mathbf{y} = \text{ode}([\text{type},] \mathbf{y0}, \mathbf{t0}, \mathbf{t}, \mathbf{f})$$

gdzie:

y – wyjściowy wektor lub macierz rozwiązania,

type – nazwa „silnika” metody rozwiązywania równań różniczkowych ("adams", "stiff", "rk", "rkf", "fix", "discrete", "roots")

y0 – wektor lub macierz warunków początkowych zadania,

t0 – wartość początkowa zmiennej względem której rozwiązywane jest zadanie,

t – wektor wartości zmiennej względem której rozwiązywane jest zadanie,

f – nazwa funkcji zawierającej definicję równań różniczkowych rozwiązywanych funkcją **ode**.

Analiza zagadnienia wymagającego rozwiązania układu równań różniczkowych wymaga w zasadzie tylko zapisania równań stanu opisujących analizowane zagadnienie.

W zadaniu laboratoryjnym rozwiązywanie zagadnienia Cauchy'ego. dla układów równań różniczkowych.

Na przykład:

a) aby rozwiązać następujące zagadnienie Cauchy'ego na przedziale [0.25; 20]:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -4y - 13x = \exp(\sin(t)), \quad x(0.25) = 1, \quad x'(0.25) = -1$$

potrzebno przygotować skrypt podobny do następnego

```
clear;clc;clf;
function dy=fun(t, y)
dy(1)=-4*y(1)-13*y(2)+exp(sin(0.5*t));
dy(2)=y(1);
endfunction

t0=0.25;y0=[0;0];
T=0.25:0.1:30;
y=ode(y0,t0,T,fun,list(fun));
scf(3);
plot(T,y); xgrid();
scf(4);
plot(y(1,:),y(2,:)); xgrid();
```

b) aby rozwiązać następujące zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + 7x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 157x_1 - 1.15x_2x_3;$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0.96x_1x_2 - 8.36x_3;$$

przy warunkach początkowych $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ potrzebno przygotować skrypt podobny do następnego

```
function dx=syst2(t, x) //definicja układu RR
```

```
dx=zeros(3,1);
```

```
dx(1)=-7*x(1)+7*x(2);
```

```
dx(2)=157*x(1)+x(2)-1.15*x(1)*x(3);
```

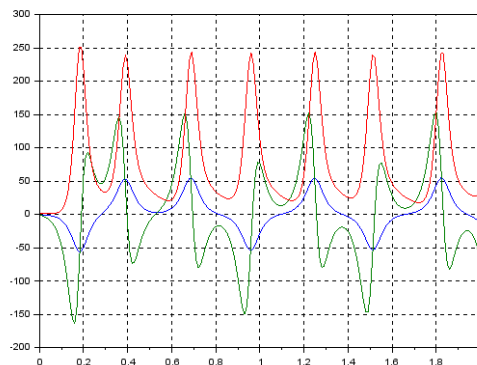
```
dx(3)=0.96*x(1)*x(2)-8.36*x(3);
```

```
endfunction
```

```
// Rozwiązanie układu równań różniczkowych
```

```
x0=[-1;0;1]; t0=0; t=0:0.01:2;y=ode("stiff",x0,t0,t,syst2);
```

```
plot(t,y); xgrid();
```



Zadanie: Wykonać modelowanie różnych możliwych typów dynamiki układów (3.1) i (3.5). Innymi słowy, otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych (3.1) i (3.5) dla parametrów podanych w tabeli 1 zgodnie z zestawem. Ocenić skuteczność obliczeń i użytych metod numerycznych i analitycznych.

Kolejność wykonania pracy laboratoryjnej

1. Przystudiować podstawy teoretyczne i odpowiedni materiał wykładowy.
2. Przygotować skrypt z wykorzystaniem zaimplementowanych w Scilab funkcji dla rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych i przedstawienia wykresów.
3. Otrzymać różne typy rozwiązań układu (3.1). Zapisać i przeanalizować odpowiednie równanie charakterystyczne. Obliczyć stany stacjonarne.
4. Zmodelować różny typy dynamiki dla współczynników $\tau = \tau_1, \beta, A$ i $\tau = \tau_2, \beta, A$
5. Dla każdego typu zachowania zmienić niektóre parametry wejściowe τ, b i A w granicach 5-10 procentów i przeanalizować te zmiany na odpowiednich wykresach. Przeanalizować rozwiązania przy różnych wartościach początkowych.
6. Otrzymać rozwiązanie układu (3.5) przy parametrach $\sigma = 10; \beta = 8/3; r = 28$ i różnych warunkach początkowych.

7. Otrzymać rozwiązanie układu **(3.5)** przy parametrach $\sigma = p_1; \beta = p_2; r = p_3$ (**tablica 1**) i różnych warunkach początkowych.
8. Zapisać i przeanalizować odpowiednie równanie charakterystyczne.
9. Porównać wszystkie wyniki i sformułować krótkie podsumowanie o rozwiązaniach układów równań różniczkowych liniowych, skuteczności obliczeń, typach wykresów i użytych metod numerycznych.

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Stronę tytułową (**Nr. Pracy laboratoryjnej, Temat, Przedmiot, Nazwisko i Imie Studenta, Nr. Grupy, Nazwisko i Imie Prowadzącego, Semestr, Rok**).
2. Pełny opis zadania.
3. Pełne skrypty Scilab-a (polecenia) rozwiązujące zadanie (z komentarzami).
4. Wyniki obliczeń i wykresy.
5. Porównanie wyników uzyskanych dla początkowych i zmienionych parametrów układu.
6. Podsumowanie.

Tab. 1.

<u>N_o</u>	Parametry układów							
<u>L.p.</u>	<i>A</i>	τ_1	τ_2	<i>b</i>	<u><i>A</i></u>	<i>p</i> ₁	<i>p</i> ₂	<i>p</i> ₃
1	0.1	0.1	10	1	1	8	1	1
2	0.2	0.1	10	1	2	9	2	2
3	0.3	0.1	10	1	3	10	3	3
4	0.4	0.1	10	1	4	11	4	4
5	0.5	0.2	8	1	5	12	5	5
6	0.6	0.2	8	1	6	13	6	6
7	0.7	0.2	8	1	7	14	7	7
8	0.8	0.2	8	1	8	15	8	8
9	0.1	0.1	8	1	8	8	1	9
10	0.2	0.1	8	1	7	9	2	10
11	0.3	0.1	8	1	6	10	3	11
12	0.4	0.1	8	1	5	11	4	12
13	0.5	0.2	10	1	4	12	5	13
14	0.6	0.2	10	1	3	13	6	14
15	0.7	0.2	10	1	2	14	7	15
16	0.8	0.2	10	1	1	15	8	16