Rzeszów, 22.12.2021

PODSTAWY MODELOWANIA MATEMATYCZNEGO W INŻYNIERII

PRACA LABORATORYJNA NR 3

"Nieliniowe modele dynamiczne w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych i metody ich analizy i rozwiązania."

Piotr Krawiec L1
Semestr: 2021/2022
Kierunek: III/FS0-DI
Numer indeksu: 164165
Prowadzący: Bohdan Datsko

1 Zadania i teoria

Wykonać modelowanie różnych możliwych typów dynamiki układów 2 i 3. Otrzymać różne typy rozwiązań układów równań różniczkowych tych równań dla parametrów podanych w tabeli 1 zgodnie z zestawem (13).

Numer	A	τ_1	τ_2	b	A	p_1	p_2	p_3
13	0.5	0.2	10	1	4	12	5	13

Tabela 1: Parametry badanych równań

1.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością.

Model ten w standardowej postaci bezwymiarowej wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \tau \frac{du_1}{dt} &= -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} &= bu_1 - u_2 + A \end{aligned} \tag{1}$$

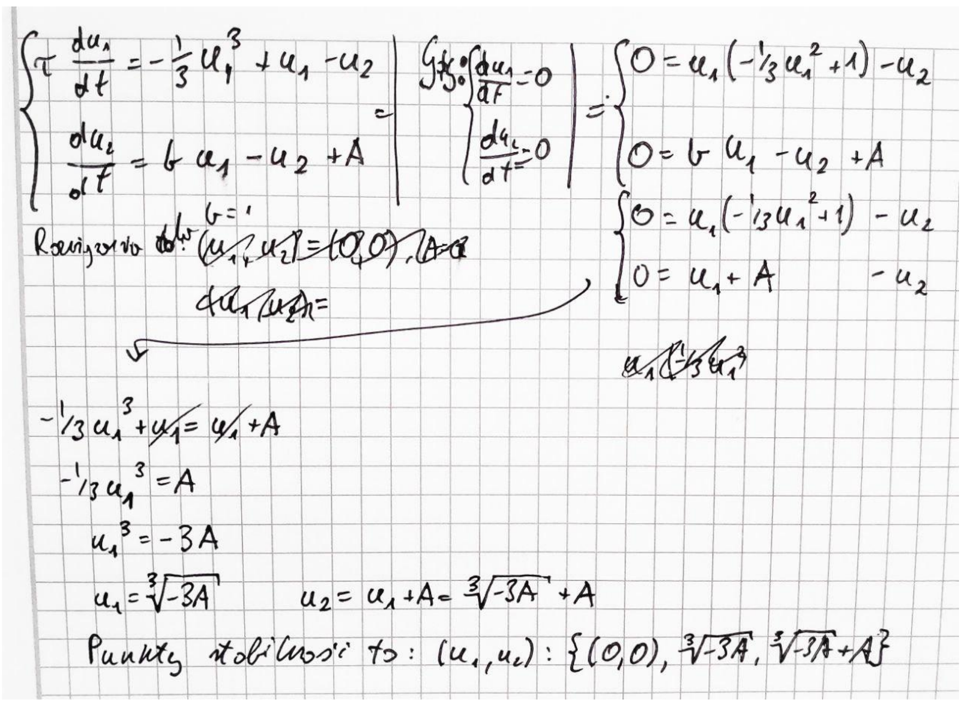
Dla parametru $b = 1$ układ ten ma tylko jeden stan stacjonarny:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt[3]{-3A} \\ u_2 &= \sqrt[3]{-3A} + A \end{aligned} \tag{2}$$

Co można wyprowadzić, wychodząc z:

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \frac{du_2}{dt} = 0$$

Wyprowadzenie tego wzoru znajduje się poniżej:



$$\begin{cases} \tau \frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{3}u_1^3 + u_1 - u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = b u_1 - u_2 + A \end{cases} \quad \text{Gdy: } \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0 \\ \frac{du_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2 + 1) - u_2 \\ 0 = b u_1 - u_2 + A \end{cases}$$

$b = 1$

$$\begin{cases} 0 = u_1(-\frac{1}{3}u_1^2 + 1) - u_2 \\ 0 = u_1 + A - u_2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3}u_1^3 + \cancel{u_1} = \cancel{u_1} + A$$

$$-\frac{1}{3}u_1^3 = A$$

$$u_1^3 = -3A$$

$$u_1 = \sqrt[3]{-3A} \qquad u_2 = u_1 + A = \sqrt[3]{-3A} + A$$

Punkty stabilności to: $(u_1, u_2): \{(0,0), \sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A\}$

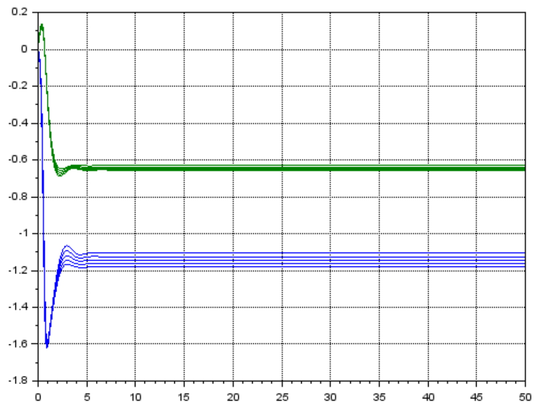
1.2 Model Lorentza. Chaotyczna dynamika w nieliniowych układach.

$$
\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= \sigma(u_2 - u_1) \\
\frac{du_2}{dt} &= u_1(r - u_3) - u_2 \\
\frac{du_3}{dt} &= u_1 u_2 - \beta u_3
\end{aligned} \tag{3}
$$

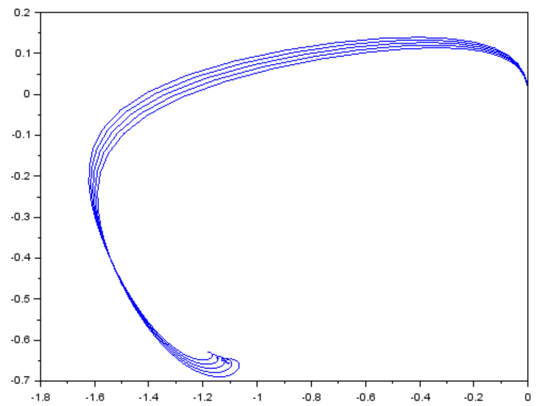
2 Rozwiązanie w scilab

2.1 Model Bonhoeffer-van der Pol z sześcienną nieliniowością w Scilab

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli



Rysunek 1: Wykres pochodnych w czasie



Rysunek 2: Wykres fazowy

Z powyższych wykresów odczytać możemy, że układ ustabilizował się. Z rozważań teoretycznych możemy obliczyć, że stan stacjonarny to:

$$(u_1, u_2) = (\sqrt[3]{-3A}, \sqrt[3]{-3A} + A)$$

i dla danych z tabeli jest to

$$(0.5908329 + 1.0233526i, 1.1408329 + 1.0233526i)$$

. Natomiast z wykresu możemy odczytać punkt:

$$(-1.1816658, -0.6316658)$$

nie jest to stan stabilny, gdyż dla tego puntu:

$$\frac{du_1}{dt} = 4.719e - 09, \frac{du_2}{dt} = -0.0500000$$

co jest różne od 0.

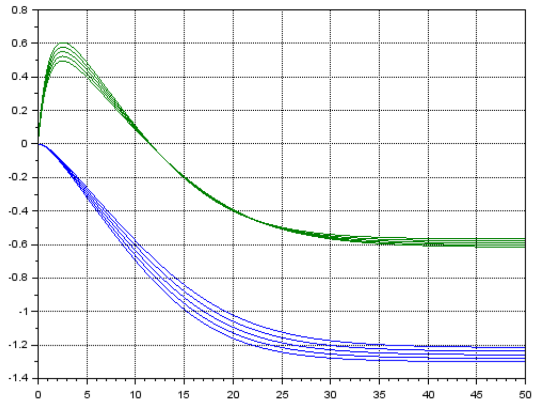
Listing 1: Kod generujący wykresy powyższe

```
tau_1 = 0.2;
b = 1;
A_ = 4;
p_1 = 12;
p_2 = 5;
p_3 = 13;
tau = tau_1;
A = 0.5;

for A = (A-0.1*abs(A)):0.05*abs(A):(A+0.1*abs(A))
    function du=syst2(t, u) //definicja uk adu RR
        du=zeros(2,1);
        du(1)=(-1/3*u(1)^3+u(1)-u(2))/tau;
        du(2)=b*u(1)-u(2)+A;
    endfunction
    x0=[0;0]; t0=0; t=0:0.05:50;y=ode("stiff",x0,t0,t,
       syst2);
    scf(1);
    plot(t,y); xgrid();
    scf(2);
    plot(y(1,:), y(2,:));
end
xs2png(1, "img/3-1-xy.png")
xs2png(2, "img/3-1-phase.png")
close();close();

u1 = (-3*A)^(1/3)
u2 = u1 + A
```

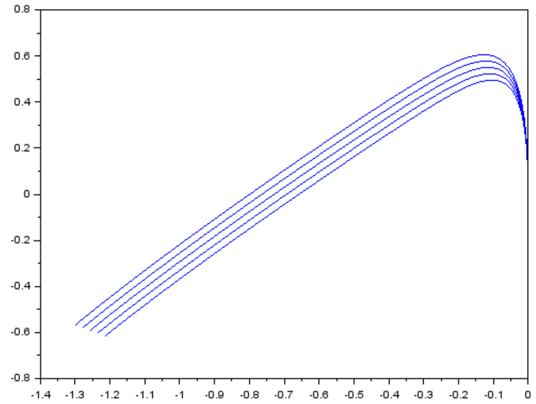
2.1.1 Modyfikacja parametru τ

Dla $\tau = 10$ wykresy te wyglądają następująco:

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $\tau = 10$



Rysunek 3: Wykres pochodnych w czasie

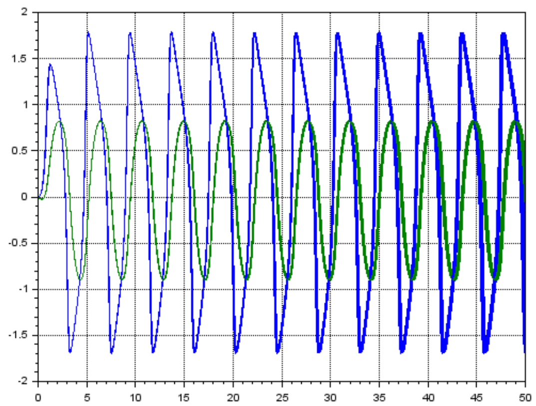


Rysunek 4: Wykres fazowy

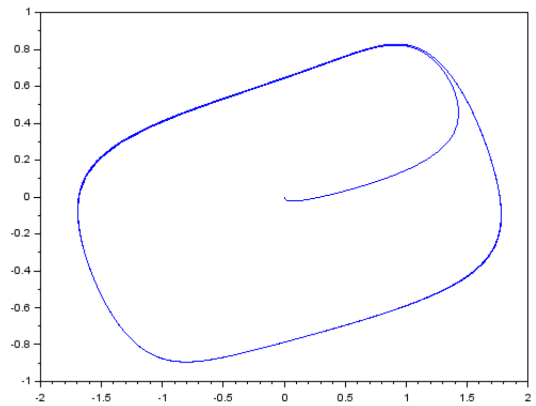
2.1.2 Inne rozwiązania układu

Poniższe rozwiązania znalazłem zmieniając parametr A w dużym zakresie i sprawdzając, jak zachowuje się układ.

Rozwiązanie układu dla danych podanych w tabeli i $A = -0.1$



Rysunek 5: Wykres pochodnych w czasie



Rysunek 6: Wykres fazowy

3 Podsumowanie

Piotr Krawiec